

Documento de Trabajo/Working Paper  
*Serie Economía*

**Sobre la estacionariedad de las series de entrada de turistas en  
Canarias con efectos estacionales**

Julio A. Afonso Rodríguez

February 2010

*DT-E-2010-04*

ISSN: 1989-9440

# **SOBRE LA ESTACIONARIEDAD DE LAS SERIES DE ENTRADA DE TURISTAS EN CANARIAS CON EFECTOS ESTACIONALES**

**Julio A. Afonso Rodríguez**

Departamento de Economía de las Instituciones, Estadística Económica y Econometría  
Instituto Universitario de Desarrollo Regional (IUDR)  
Universidad de La Laguna  
e-mail: jafonsor@ull.es

## **RESUMEN:**

A partir de trabajos como el de Nelson y Plosser (1982), existe una amplia controversia sobre si la mejor caracterización de muchas series temporales económicas es como procesos estacionarios en torno a una tendencia,  $I(0)$ , o bien como procesos con una raíz unitaria,  $I(1)$ . Esta distinción es crucial tanto con propósitos de modelización y predicción, como para la correcta elección de la distribución muestral de muchos estadísticos. Habitualmente, para tratar de discriminar entre ambos tipos de comportamiento, se emplea alguno de los múltiples contrastes de la hipótesis nula de raíz unitaria frente a la alternativa  $I(0)$ . Muchos de estos contrastes tienen baja potencia, de forma que se incurre en un elevado riesgo de sobre diferenciación, y, por otro lado, generalmente la distribución nula asintótica de los estadísticos en los que se basan dependen de la estructura determinista de la regresión auxiliar especificada, complicando la inferencia. Por esta razón en este trabajo analizamos el comportamiento de la serie de entradas mensuales de turistas en Canarias empleando los contrastes KPSS (Kwiatkowski et.al., 1992), V/S (Giraitis et.al., 2003) y KS (Xiao, 2001) de la hipótesis nula  $I(0)$  frente a  $I(1)$ , incluyendo efectos estacionales. Las distribuciones asintóticas, tanto bajo la hipótesis nula como bajo la alternativa, de estos contrastes son las mismas que en los casos estándar, lo que permite llevar a cabo un análisis más simple computacionalmente.

**Palabras clave:** *Estacionariedad estocástica, estacionariedad en diferencias, sobrediferenciación.*  
**Clasificación JEL:** *C12, C22, L83*

## **ABSTRACT:**

Since Nelson and Plosser (1982), a great deal of research has been focused on the debate over whether economic time series are best characterized as trend stationarity processes (stochastic or trend stationarity, or  $I(0)$ ), or as a unit root processes (difference stationarity or  $I(1)$ ). This distinction is crucial both with modelling and forecasting purposes, but also for the correct choice of the sampling distribution of many statistics. Many empirical econometric papers require the analysis of stationary series to in order to be of applicability standard inferential results.. It is common in empirical work to test the null hypothesis of a unit root process against the alternative of stationarity  $I(0)$ . However, on the basis of the low power of this type of tests, there exists a high risk of over-differentiating. Moreover, the asymptotic null distribution of these test statistics highly depends on the deterministic structure of the auxiliary regression which might complicates the inference in practice. For these reasons, this paper analyses monthly tourist arrivals to the Canary Islands by using KPSS (Kwiatkowski et.al., 1992), VS (Giraitis et.al., 2003) and KS (Xiao, 2001) tests of the null of stochastic stationarity against the alternative of a unit root with seasonal effects, in which case the asymptotic distribution under the null and the alternative remains the same as in the standard case, which allows a simple computational analysis.

**Key-words:** *Stochastic stationarity, difference stationarity, overdifferentencing.*  
**JEL Classification:** *C12, C22, L83*

## 1. Introducción.

El turismo doméstico e internacional representa en Canarias una de las principales actividades económicas, además de ser el principal destino turístico en España en la temporada invernal, lo que justifica la importancia de la modelización en términos econométricos de las series de turismo, tanto con fines explicativos del fenómeno como de predicción. Las series mensuales de entradas de turistas tienen un marcado componente estacional, como indican muchos recientes trabajos empíricos (ver, por ejemplo, Hoti et.al. (2006), Cuñado y Gil-Alaña (2008) y Gil-Alaña et.al. (2008) entre otros<sup>1</sup>). Sin embargo, más allá de esta característica, no existe un consenso y un tratamiento unificado de estas series desde el punto de vista de su comportamiento estocástico, es decir, si se trata de procesos estacionarios en torno a un componente determinista,  $I(0)$ , o bien si se trata de procesos no estacionarios, tanto de raíz unitaria,  $I(1)$ , o de integración fraccional,  $I(d)$ ,  $d > 0$ . Los trabajos empíricos mencionados anteriormente asumen uno de estos comportamientos a priori para implementar posteriormente un cierto modelo econométrico. En este trabajo se estudia la naturaleza estocástica de estas series, como paso previo a la especificación de un modelo particular, analizando los resultados de algunos de los contrastes noparamétricos de la hipótesis  $I(0)$  frente a  $I(1)$  más habitualmente utilizados en la práctica (KPSS, V/S y KS), así como de un contraste noparamétrico de la hipótesis contraria,  $I(1)$  frente a  $I(0)$ , a modo de análisis confirmatorio y teniendo en cuenta la estructura común que comparten todos estos estadísticos<sup>2</sup>. Además de la aplicación empírica descrita de estos procedimientos, el trabajo tiene también como objetivo establecer algunos resultados analíticos y numéricos en relación con la distribución asintótica y en muestras finitas de estos estadísticos de contraste ante la inclusión de dummies estacionales para cualquier frecuencia, generalizando y extendiendo los resultados obtenidos por Phillips y Jin (2002) para el caso del contraste KPSS.

La organización del trabajo es como sigue. La sección 2 introduce en detalle la formulación y construcción los estadísticos de contraste noparamétricos de estacionariedad estocástica estudiados, así como del contraste noparamétrico de raíz unitaria de Breitung (2002, 2004), dada la especificación de un modelo donde el componente determinista es generalmente una

---

<sup>1</sup> En Gil-Alaña et.al. (2008) pueden consultarse las referencias más recientes que tratan el análisis de las series de entradas de turistas en Canarias y su importancia.

<sup>2</sup> Empleando series mensuales de entradas de turistas en Singapore, Lee (2009) realiza un análisis similar a este que se presenta, enfrentando los resultados de los contrastes KPSS y ADF.

tendencia polinomial de orden prefijado. La sección 3 incluye la especificación del modelo donde el componente determinista incluye dummies estacionales y formaliza los resultados de invarianza de la distribución de los contrastes de estacionariedad y de raíz unitaria ante la inclusión de estos términos, generalizando y extendiendo el resultado previo de Phillips y Jin (2002), en el sentido de que se establece para cualquier frecuencia estacional e incluye el caso donde el tamaño muestral no es un múltiplo entero de la frecuencia estacional. Las pruebas de las proposiciones formuladas se recogen en los apéndices B y C. La sección 4 contiene el análisis empírico de las series consideradas y la sección 5 concluye.

## 2. Contrastes de estacionariedad estocástica en series temporales lineales

En este trabajo vamos a considerar los resultados del análisis de algunas de las propuestas de contrastes de la hipótesis nula de estacionariedad de primer orden en torno a un componente determinista,  $I(0)$ , frente a la alternativa de no estacionariedad estocástica (o estacionariedad en diferencias),  $I(1)$ . En particular, vamos a considerar contrastes basados en el comportamiento de funciones de sumas parciales de residuos MCO de una regresión auxiliar derivada del modelo propuesto bajo la hipótesis nula, con ajuste no paramétrico por la posible heterogeneidad y/o dependencia en la distribución de los términos de error.

El modelo básico es el denominado modelo de nivel-local generalizado, dado por el siguiente par de ecuaciones

$$y_t = d_t(p) + r_t + \varepsilon_t \quad t = 1, \dots, n \quad (\text{ecuación de medida}) \quad (2.1)$$

$$r_t = r_{t-1} + u_t = r_0 + \sum_{i=1}^t u_i \quad (\text{ecuación de transición}) \quad (2.2)$$

donde, sin pérdida de generalidad, el valor inicial  $r_0$  puede considerarse nulo<sup>3</sup>,  $d_t(p)$  es el kernel determinista parametrizado como  $d_t(p) = \mathbf{x}'_{t,p} \cdot \boldsymbol{\beta}_p$ , y donde los términos de error  $\{\varepsilon_t, u_t\}$  son de media nula y mutuamente independientes. La hipótesis nula de  $I(0)$  viene dada por  $\sigma_u^2 = \text{Var}(u_t) = 0$ , mientras que la alternativa de raíz unitaria se corresponde con  $\sigma_u^2 > 0$ . A

---

<sup>3</sup> En el caso de considerarse fijo (no nulo), puede simplemente añadirse al término constante sin modificar los resultados. En caso de considerarse no fijo (aleatorio), todos los resultados asintóticos siguen siendo válidos bajo el supuesto  $r_0 = o(\sqrt{n})$ .

continuación se introducen los supuestos adoptados habitualmente para los componentes determinista y aleatorio del modelo.

**Supuesto A. Componente determinista.** Existe una matriz no estocástica, cuadrada y no singular,  $\mathbf{D}_p$ , que permite normalizar los componentes del vector de diseño  $\mathbf{x}_{t,p}$ , tal que  $\mathbf{D}_p \mathbf{x}_{t,p} = \mathbf{D}_p \mathbf{x}_{[nr],p} = \tilde{\mathbf{x}}_{[nr],p} \rightarrow \mathbf{X}_p(r)$ , uniformemente sobre  $r \in [0,1]$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , donde  $\mathbf{X}_p(r)$  es una función continuamente diferenciable en  $[0,1]$ . En el caso de una tendencia polinomial de orden  $p$ ,  $\mathbf{x}'_{t,p} = (1, t, \dots, t^p)$ ,  $\mathbf{D}_p = \text{diag}(1, n^{-1}, \dots, n^{-p})$ , y  $\mathbf{X}_p(r) = (1, r, \dots, r^p)$ . Este supuesto implica que la función límite es de variación acotada, lo que permite asegurar la convergencia de integrales estocásticas que incluyan estos términos. Este supuesto también resulta suficiente en el caso de considerar posibles cambios estructurales en el componente determinista<sup>4</sup>, es decir, cuando

$$d_t(p) = (\mathbf{x}'_{t,p}, \mathbf{h}'_{t,p}(\boldsymbol{\tau})) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_p \\ \boldsymbol{\delta}_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}'_{t,p} = (h_t(\tau_0), t \cdot h_t(\tau_1), \dots, t^p \cdot h_t(\tau_p)),$$

donde las variables indicadores  $h_t(\tau_i) = I(t > [n\tau_i])$  y se supone para el  $i$ -ésimo componente un punto de ruptura determinista conocido  $\tau_i \in (0,1)$  ( $i = 0, 1, \dots, p$ ). Si, para simplificar, se considera que  $\tau_i = \tau \forall i=0,1,\dots,p$ , en este caso se tendría que

$$\mathbf{D}_p \mathbf{h}_{[nr],p}(\boldsymbol{\tau}) = \tilde{\mathbf{h}}_{[nr],p}(\boldsymbol{\tau}) \rightarrow \mathbf{H}_p(\boldsymbol{\tau}, r) = (1, r, \dots, r^p)' I(r > \tau) = \mathbf{X}_p(r) I(r > \tau).$$

**Supuesto B. Propiedades de los términos de error.** En general resulta suficiente la consideración de que los procesos  $(\varepsilon_t, u_t)$  son mutuamente independientes, débilmente dependientes, ambos con media nula, autocovarianzas  $\gamma_\varepsilon(h) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+h})$  y  $\gamma_u(h) = E(u_t u_{t+h})$ , respectivamente, y varianzas a largo plazo (LRV: long-run variance)  $\omega_\varepsilon^2 > 0$  y  $\omega_u^2 > 0$ , con  $\sigma_u^2 = \text{Var}(u_t)$  la varianzas a corto plazo de  $u_t$ . De esta forma se consigue que las sumas parciales estandarizadas  $n^{-1/2} \sum_{j=1}^{[nr]} (\varepsilon_j, u_j)$  satisfagan un principio de invarianza necesario (TCLF). Existen muchos refinamientos posibles y condiciones de regularidad más técnicas

<sup>4</sup> En el caso de inclusión de un cambio estructural potencial en el modelo, la estructura del análisis es idéntica a la del caso estándar, con diferencias únicamente en la distribución asintótica de los estadísticos de contraste (ver, por ejemplo, Buseti y Harvey (2001)).

que garantizan este supuesto. Estos incluyen, por ejemplo, un filtro lineal bajo condiciones de momento y de sumabilidad de los coeficientes como en Phillips y Solo (1992), un supuesto de secuencias de martingala en diferencias (MDS) bajo condición de existencia de momento al menos de segundo orden como en Chan y Wei (1988)<sup>5</sup>, o bien condiciones de mezcla fuerte como en Xiao y Lima (2007) donde se considera el caso de errores  $L_2$ -NED (Near Epoch Dependent). Obviamente, todos estos supuestos son generalizaciones del supuesto más débil *iid* con varianza finita, donde se verificaría inmediatamente el TCLF estándar.

El contraste KPSS de Kwiatkowski et.al. (1992) es una generalización del contraste LM de una cola y del contraste LBI (Locally Best Invariant) para la hipótesis  $\sigma_u^2 = 0$ , debidos a Nyblom y Makelainen (1983) y Nabeya y Tanaka (1988), de forma que puede expresarse como función de los residuos MCO de una regresión lineal auxiliar de la forma

$$y_t = d_t(p) + \eta_t = \mathbf{x}'_{t,p} \cdot \boldsymbol{\beta}_p + \eta_t \quad t = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

El  $t$ -ésimo residuo MCO viene dado por

$$\hat{\eta}_{t,p} = y_t - \mathbf{x}'_{t,p} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n} = \eta_t - \mathbf{x}'_{t,p} \left( \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{x}'_{j,p} \right)^{-1} \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_{j,p} \eta_j = \eta_t - \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{\mathbf{x}}'_{t,p} \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{\mathbf{x}}_{j,p} \tilde{\mathbf{x}}'_{j,p} \right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \tilde{\mathbf{x}}_{j,p} \eta_j$$

Teniendo en cuenta que bajo la hipótesis nula  $\sigma_u^2 = 0$ , se tiene que  $\eta_t = \varepsilon_t$  y bajo la condición B anterior, se obtiene el siguiente resultado de distribución asintótica para el proceso de suma parcial escalado de residuos MCO,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{[nr],p} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \hat{\eta}_{j,p} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \varepsilon_j - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \tilde{\mathbf{x}}'_{j,p} \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{\mathbf{x}}_{j,p} \tilde{\mathbf{x}}'_{j,p} \right)^{-1} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{\mathbf{x}}_{j,p} \varepsilon_j \\ &\Rightarrow \omega_\varepsilon V_p(r) = \omega_\varepsilon \left( W(r) - \int_0^r \mathbf{X}'_p(a) da \left( \int_0^1 \mathbf{X}_p(a) \mathbf{X}'_p(a) da \right)^{-1} \int_0^1 \mathbf{X}_p(a) dW(a) \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde se ha considerado que  $t = [nr]$ ,  $r \in [0,1]$ , y  $V_p(r)$  es un proceso denominado puente Browniano generalizado. En el caso de ajuste de la media,  $p = 0$ , se tiene que  $V_0(r) = W(r) -$

<sup>5</sup> El filtro lineal en la aproximación de Phillips y Solo (1992) es una generalización del principio MDS, puesto que permite efectuar una descomposición del término de error en una secuencia de martingala en diferencias.

$rW(1)$  es un proceso de puente Browniano estándar, mientras que en el caso de ajuste por la media y una tendencia lineal,  $p = 1$ , se tiene que  $V_1(r) = V_0(r) + 6r(1-r)[\frac{1}{2}W(1) - \int_0^1 W(a)da]$ , que es un proceso de puente Browniano de segundo nivel. Así, teniendo en cuenta (2.4), se han considerado tres procedimientos de contraste de la hipótesis nula de estacionariedad estocástica empleando distintas formas de cuantificar las fluctuaciones de este proceso. Estos son el contraste KPSS (Kwiatkowski et.al., 1992), el contraste de V/S (Giraitis et.al., 2003,2005) y el contraste KS (Xiao, 2001), que etiquetamos como  $\hat{M}_n^{(i)}(q_n, p)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , respectivamente, y que vienen dados por las siguientes expresiones

$$\hat{M}_n^{(1)}(q_n, p) = \frac{1}{n^2 \hat{\omega}_n^2(q_n)} \sum_{t=1}^n \hat{S}_{t,p}^2, \quad (2.5)$$

$$\hat{M}_n^{(2)}(q_n, p) = \frac{1}{n^2 \hat{\omega}_n^2(q_n)} \left( \sum_{t=1}^n \hat{S}_{t,p}^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{t=1}^n \hat{S}_{t,p} \right)^2 \right), \quad (2.6)$$

y

$$\hat{M}_n^{(3)}(q_n, p) = \frac{1}{\hat{\omega}_n(q_n) \sqrt{n}} \max_{t=1, \dots, n} \left| \hat{S}_{t,p} - \frac{t}{n} \hat{S}_{n,p} \right| \quad (2.7)$$

El contraste de varianza reescalada basado en el estadístico V/S,  $i = 2$ , tiene una distribución asintótica similar a la del contraste KPSS y se ha demostrado presenta un mejor balance entre tamaño y potencia que este último. El contraste KS,  $i = 3$ , en lugar de descomponer el proceso estocástico en un paseo aleatorio y en un componente estacionario y derivar un contraste tipo LM bajo el supuesto de normalidad, se deriva de observar simplemente las fluctuaciones en la serie temporal empleando la métrica de Kolmogorov-Smirnov.

**Observación 1.** En el caso de ajuste MCO de la regresión auxiliar con constante y tendencia lineal,  $p = 1$ , se tiene que  $\sum_{t=1}^n \hat{S}_{t,p} = 0$  (ver Apéndice A), de forma que los contrastes V/S y KPSS coinciden.

**Observación 2.** En el caso de regresión auxiliar que incluya un término constante se tiene que  $\hat{S}_{n,p} = 0$ , de forma que el estadístico KS se reduce a  $\hat{M}_n^{(3)}(q_n, p) = \hat{\omega}_n^{-1}(q_n) n^{-1/2} \max_{t=1, \dots, n} \left| \hat{S}_{t,p} \right|$ .

En los tres casos, la medida básica de fluctuación considerada del proceso  $n^{-1/2} \cdot \hat{S}_{[nr],p}$  se ha estandarizado por un estimador consistente de la varianza a largo plazo. Existen, básicamente dos aproximaciones a esta estimación: una enteramente no paramétrica (LRV-HAC) y otra paramétrica, que combina un preblanqueamiento (PW: prewhitening) de los residuos del ajuste MCO en (2.3) mediante una autoregresión y una posterior recoloración de estos con una corrección no paramétrica (PWL RV-HAC). En el primer caso, se utiliza un estimador HAC (Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent) basado en una función kernel,  $w(z)$ , que introduce una ponderación decreciente en la estructura de autocovarianzas muestrales, de la forma

$$\hat{\omega}_n^2(q_n) = \hat{\gamma}_{0,n} + 2 \sum_{h=1}^{n-1} w(h, q_n) \hat{\gamma}_{h,n}, \quad \hat{\gamma}_{h,n} = n^{-1} \sum_{t=h+1}^n \hat{\eta}_{t,p} \hat{\eta}_{t-h,p}$$

donde la función kernel es una función par y continua con  $w(0) = 1$ ,  $|w(z)| < 1$  y de variación cuadrática acotada  $\int_{-\infty}^{\infty} w^2(z) dz < \infty$ , mientras que el parámetro de retardo máximo (bandwidth),  $q_n$ , debe verificar  $q_n \rightarrow \infty$ ,  $q_n/n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y se ha demostrado que una condición general para la consistencia es  $q_n = O_p(n^\lambda)$ ,  $\lambda \in (0, 1/2)$  ( $q_n = o_p(n^{1/2})$ ), de forma que  $\sum_{h=-(n-1)}^{n-1} w(h, q_n) = O(n^\lambda)$  cuando  $q_n, n \rightarrow \infty$ <sup>6</sup>. Existen diversas opciones para la determinación del retardo máximo  $q_n$ . Para un kernel dado puede optarse por establecer un valor en un nivel fijo, generalmente de la forma  $q_n = [c \cdot (n/100)^{1/b}]$ , con  $c = 0, 4, 12$ , y donde  $b$  depende del kernel utilizado, de forma que se garantice la condición de consistencia, o bien considerar la estimación de dicho valor,  $\hat{q}_n$ , siguiendo algún principio de minimización del ECM de la estimación mediante algún procedimiento automático dependiente de los datos, como los métodos de Andrews (1991) o de Newey y West (1994) (NW). En el contexto de la construcción de contrastes no paramétricos de estacionariedad, los estadísticos basados en el estimador NW sufren de graves distorsiones en el tamaño empírico. Andrews y Monahan (1992) encuentran que los estimadores LRV con preblanqueamiento proporcionan menores distorsiones en el tamaño empírico de estos contrastes que los estimadores basados en NW y ofrecen una alternativa consistente a la estimación LRV no paramétrica. Así, en el caso del

<sup>6</sup> En diversos trabajos teóricos sobre la estimación LRV-HAC se impone el supuesto  $1/q_n + q_n/\sqrt{n} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Obviamente, esta condición se verifica siempre que  $q_n = o_p(n^{1/2})$ .

preblanqueamiento mediante el ajuste de una autoregresión de la forma

$\hat{\eta}_{t,p} = \sum_{i=1}^d \alpha_i \hat{\eta}_{t-i,p} + e_{t,p}(d)$ , el estimador PWLRV-HAC viene dado por

$$\hat{\omega}_n^2(q_n) = \hat{A}_{d,n}(1)^{-2} \hat{\sigma}_n^2(q_n), \quad \hat{A}_{d,n}(1) = 1 - \sum_{i=1}^d \hat{\alpha}_{i,n},$$

$$\hat{\sigma}_n^2(q_n) = \hat{g}_{0,n}(p) + 2 \sum_{h=1}^{n-1} w(h, q_n) \hat{g}_{h,n}(p), \quad \hat{g}_{h,n}(p) = \frac{n}{n-p} \hat{g}_{h,n}, \quad \hat{g}_{h,n} = n^{-1} \sum_{t=h+1}^n \hat{e}_{t,p}(d) \hat{e}_{t-h,p}(d)$$

donde  $n/(n-p)$  es un factor de corrección por el uso de los residuos MCO de (2.3). Esta propuesta se debe fundamentalmente a Andrews y Monahan (1992) y Sul et.al.(2005) que prueban que, a pesar de incurrir en un sesgo adicional por la estimación de los coeficientes autoregresivos, puede obtenerse una mejora en las propiedades de tamaño y potencia de estos contrastes. Finalmente, cualquiera de estos procedimientos puede completarse con la consideración de cotas que controlen el bandwidth estimado evitando posibles inconsistencias en los contrastes<sup>7</sup>. Para más detalles sobre estimación HAC ver, por ejemplo, den Haan y Levin (1997, 2000), y sobre la computación de contrastes de estacionariedad, Carrion-i-Silvestre y Sansó (2006). En cualquier caso, teniendo en cuenta el resultado (2.4), la estimación consistente de la varianza a largo plazo,  $\hat{\omega}_n^2(q_n) \xrightarrow{p} \omega_\xi^2$ , y haciendo uso del teorema del mapeado continuo, se tiene que la distribución nula asintótica de estos estadísticos de contraste vienen dadas por

$$\hat{M}_n^{(1)}(q_n, p) \Rightarrow \int_0^1 V_p(r)^2 dr, \quad (2.8)$$

$$\hat{M}_n^{(2)}(q_n, p) \Rightarrow \int_0^1 V_p(r)^2 dr - \left( \int_0^1 V_p(r) dr \right)^2, \quad (2.9)$$

y

$$\hat{M}_n^{(3)}(q_n, p) \Rightarrow \sup_{0 \leq r \leq 1} |V_p(r) - rV_p(1)| \quad (2.10)$$

En el caso  $p = 0$  de corrección por la media en la regresión auxiliar, la distribución asintótica del estadístico de contraste V/S,  $i = 2$ , admite la representación  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(\hat{M}_n^{(2)}(q_n, 0) \leq x) =$

<sup>7</sup> Ver, por ejemplo, las reglas propuestas por Choi y Ahn (1995, 1999) y Kurozumi (2002) para el caso de la estimación no paramétrica, y por Sul et.al. (2005) en el caso de la estimación paramétrica.

$1 + 2 \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^h \exp(-2h^2 \pi^2 x)$ , que es la función de distribución asintótica del estadístico de Kolmogorov estándar evaluada en  $\pi \sqrt{x}$ , mientras que en caso del contraste KS,  $i = 3$ , en el caso de inclusión de un término constante en la regresión auxiliar (2.3), se tiene que  $\hat{M}_n^{(3)}(q_n, p) \Rightarrow \sup_{0 \leq r \leq 1} |V_p(r)|$ .

En este trabajo vamos a considerar adicionalmente un contraste de la hipótesis I(1) (raíz unitaria) frente a la alternativa de estacionariedad estocástica, estrechamente relacionado con estos contrastes anteriores. Es el contraste de Breitung (2002, 2004) basado en un estadístico de razón de varianzas dado por

$$\hat{\rho}_n(p) = n^{-2} \sum_{t=1}^n \hat{S}_{t,p}^2 / \sum_{t=1}^n \hat{\eta}_{t,p}^2 \quad (2.11)$$

y que está relacionado con el estadístico de contraste KPSS (2.5) de la forma

$$\hat{\rho}_n(p) = \frac{\hat{\omega}_n^2(q_n)}{n \hat{\gamma}_{0,n}} \hat{M}_n^{(1)}(q_n, p) \quad (2.12)$$

A diferencia del contraste KPSS, el estadístico de razón de varianzas es un contraste de cola inferior que rechaza la hipótesis I(1) en favor de I(0) para valores pequeños del estadístico. Bajo la hipótesis I(1), de forma que en (2.3) y (2.4)  $\eta_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^t u_i$ , y considerando adicionalmente que  $\sigma_\varepsilon^2 = 0$ , entonces se tiene que la distribución asintótica nula de este estadístico no dependen de ningún parámetro molesto y viene dada por

$$\hat{\rho}_n(p) \Rightarrow \int_0^1 \left( \int_0^r V_p(a) da \right)^2 dr / \int_0^1 V_p(a)^2 da \quad (2.13)$$

A diferencia de muchos otros contrastes de I(1) frente a I(0), este procedimiento requiere cálculos muy sencillos y presenta buenas propiedades de potencia y control del tamaño. El propósito de considerar este contraste de la hipótesis contraria es doble. En primer lugar, en la aplicación de la sección 4 a modo de análisis confirmatorio de los resultados obtenidos y, en segundo lugar, en la próxima sección 3 para establecer la invarianza de esta distribución asintótica ante la inclusión de dummies estacionales en la regresión auxiliar de estos contrastes.

### 3. Contrastes de estacionariedad con dummies estacionales

Vamos a considerar en lo que sigue, el caso de la inclusión de efectos estacionales en los casos más habitualmente utilizados en la práctica de la especificación del componente determinista en el modelo de nivel-local generalizado: corrección estacional en la media ( $p=0$ ) y corrección estacional en media y en la tendencia ( $p = 1$ ), de forma que la ecuación (2.1) viene dada por

$$y_t = \sum_{i=1}^s (\beta_{0i} + \beta_{1i}t)\delta_{i,t} + r_t + \varepsilon_t \quad t = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

donde  $\delta_{i,t} = I(t \in i)$  es un indicador de que la observación pertenece a la estación  $i$ -ésima. En el caso de que el tamaño muestral,  $n$ , sea un múltiplo exacto de la frecuencia estacional,  $s$ , se tiene que  $\delta_{i,t} = 1$  si  $t = i+(j-1)s$ , con  $j = 1, \dots, m$  y  $m = (n/s)$  es el número de períodos estacionales completos en la muestra. El siguiente cuadro recoge los distintos modelos que pueden obtenerse como casos particulares de (3.1) y que serán utilizados en el análisis empírico de la siguiente sección.

Modelo	Restricciones sobre los coeficientes	Especificación final	$p$
<b>M1</b> (término constante)	$\beta_{0i} = \beta_0, \beta_{1i} = 0 \forall i = 1, \dots, s$	$y_t = \beta_0 + \eta_t$	0
<b>M2</b> (constante y tendencia lineal)	$\beta_{0i} = \beta_0, \beta_{1i} = \beta_1 \forall i = 1, \dots, s$	$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \eta_t$	1
<b>M3</b> (efectos estacionales en el nivel)	$\beta_{1i} = 0 \forall i = 1, \dots, s$	$y_t = \sum_{i=1}^s \beta_{0i} \delta_{i,t} + \eta_t$	0
<b>M4</b> (efectos estacionales en el nivel y tendencia lineal)	$\beta_{1i} = \beta_1 \forall i = 1, \dots, s$	$y_t = \beta_1 t + \sum_{i=1}^s \beta_{0i} \delta_{i,t} + \eta_t$	1
<b>M5</b> (efectos estacionales en el nivel y la tendencia)	Ninguna	$y_t = \sum_{i=1}^s (\beta_{0i} + \beta_{1i}t)\delta_{i,t} + \eta_t$	1

Phillips y Jin (2002) demuestran teóricamente la invarianza de la distribución asintótica nula y bajo la alternativa y la consistencia del contraste KPSS ante la inclusión de dummies estacionales en el caso particular de que el efecto estacional sea trimestral ( $s = 4$ ) y, especialmente, en el caso restrictivo de que el tamaño muestral,  $n$ , sea un múltiplo exacto de dicha frecuencia,  $n = m \cdot s$ , donde  $m$  es el número de períodos estacionales completos. En este trabajo se generaliza dicho resultado al caso de una frecuencia estacional genérica,  $s$ , y especialmente al caso de que el tamaño muestral no sea un múltiplo exacto de la misma, es decir, cuando  $n = m \cdot s + k_n(m, s)$ , donde  $m = [n/s]$  y  $k = k_n(m, s) = n - m \cdot s$ , donde  $[x]$  denota la parte entera de su argumento. Estas  $k$  observaciones adicionales, correspondientes a una

estación incompleta, pueden estar situadas al inicio o al final de la muestra, pero en este trabajo se considerará este último caso por corresponderse con la situación en la aplicación de la sección 4, aunque no supone ninguna pérdida de generalidad.

El modelo (3.1) puede escribirse en forma vectorial como

$$y_t = (\mathbf{d}'_{t,s}, t \cdot \mathbf{d}'_{t,s}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_{0s} \\ \boldsymbol{\beta}_{1s} \end{pmatrix} + r_t + \varepsilon_t \quad t = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

donde  $\mathbf{d}'_{t,s} = (\delta_{1,t}, \dots, \delta_{s,t})$  y  $\boldsymbol{\beta}_{js} = (\beta_{j1}, \dots, \beta_{js})'$   $j = 0, 1$ . En lo que sigue, el estimador MCO de los parámetros del modelo, los correspondientes residuos MCO y el proceso de suma parcial normalizado de los residuos se denotarán, en el caso  $p = 1$ , como

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,n}(s) \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_{1,n}(s) \end{pmatrix} = \left( \sum_{t=1}^n \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{t,s} \\ t \cdot \mathbf{d}_{t,s} \end{pmatrix} (\mathbf{d}'_{t,s}, t \cdot \mathbf{d}'_{t,s}) \right)^{-1} \sum_{t=1}^n \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{t,s} y_t \\ t \cdot \mathbf{d}_{t,s} y_t \end{pmatrix},$$

$$\hat{\eta}_{t,1}(s) = \eta_t - \mathbf{d}'_{t,s} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,n}(s) - \boldsymbol{\beta}_{0,s}) - t \cdot \mathbf{d}'_{t,s} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{1,n}(s) - \boldsymbol{\beta}_{1,s}) \quad (t = 1, \dots, n),$$

y

$$\hat{S}_{[nr],1}(s) = \sum_{j=1}^{[nr]} \hat{\eta}_{j,1}(s) = \sum_{j=1}^{[nr]} \eta_j - \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{d}'_{j,s} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,n}(s) - \boldsymbol{\beta}_{0,s}) - \sum_{j=1}^{[nr]} j \cdot \mathbf{d}'_{j,s} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{1,n}(s) - \boldsymbol{\beta}_{1,s})$$

respectivamente, mientras que en el caso  $p = 0$  se tiene  $\hat{\eta}_{t,0}(s) = \eta_t - \mathbf{d}'_{t,s} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,n}(s) - \boldsymbol{\beta}_{0,s})$  y

$\hat{S}_{[nr],0}(s) = \sum_{j=1}^{[nr]} \hat{\eta}_{j,0}(s)$ , con  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,n}(s) = \left( \sum_{t=1}^n \mathbf{d}_{t,s} \mathbf{d}'_{t,s} \right)^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbf{d}_{t,s} y_t$ . En la siguiente proposición se plantea la invarianza de la distribución KPSS en este caso general considerado.

**Proposición 1.** Distribución asintótica del test KPSS en el caso  $n > [m \cdot s]$

*Bajo los supuestos A y B de la sección 2, y dado el modelo (3.1) con dummies estacionales, bajo la hipótesis nula de estacionariedad estocástica  $I(0)$ , la distribución asintótica nula del estadístico de contraste KPSS es la misma que en el caso estándar para corrección en la media ( $p=0$ ) o de corrección por la media y por una tendencia lineal ( $p=1$ ) (ec. (2.8)).*

**Prueba.** La prueba de este resultado se presenta en el Apéndice B, donde se incluye adicionalmente la prueba de consistencia del contraste y de invarianza de la distribución

asintótica bajo la hipótesis alternativa. Adicionalmente se incluyen los resultados de un pequeño ejercicio de simulación en muestras pequeñas que verifica este resultado.

Una aplicación inmediata de este resultado es la invarianza de la distribución asintótica nula, bajo la alternativa y la consistencia de los contrastes de estacionariedad V/S y KS, que se plantea en la siguiente Proposición 2.

### **Proposición 2.**

*Bajo los supuestos A y B de la sección 2, y dado el modelo (3.1) con dummies estacionales, bajo la hipótesis nula de estacionariedad estocástica  $I(0)$ , la distribución asintótica nula de los estadísticos de contraste V/S y KS es la misma que en el caso estándar para corrección en la media ( $p=0$ ) o de corrección por la media y por una tendencia lineal ( $p=1$ ) (ecs. (2.9) y (2.10) respectivamente).*

**Prueba.** El resultado se sigue inmediatamente por la Proposición 1 y la aplicación del Teorema del Mapeado Continuo.

Finalmente, y por extensión de estos resultados en relación con la estructura particular de esta regresión con dummies estacionales, la siguiente Proposición 3 plantea la invarianza de la distribución asintótica nula del estadístico de contraste de  $I(1)$  frente a  $I(0)$  de Breitung (2002, 2004) ante la inclusión de tales regresores.

### **Proposición 3.**

*Bajo los supuestos A y B de la sección 2, y dado el modelo (3.1) con dummies estacionales, bajo la hipótesis de raíz unitaria  $I(1)$ , es decir, cuando  $\sigma_\varepsilon^2 = 0$  y  $\sigma_u^2 > 0$ , el estadístico de Breitung (2002,2004), ecuaciones (2.11) y (2.12), tiene la misma distribución asintótica (ecuación (2.13)) que en el caso estándar para corrección en la media ( $p=0$ ) o de corrección por la media y por una tendencia lineal ( $p=1$ ).*

**Prueba.** La prueba de esta proposición se recoge en el Apéndice C, siguiendo básicamente los resultados obtenidos en el Apéndice B para la prueba de la proposición 2. Se incluye además en el mismo los resultados de un ejercicio de simulación donde se evidencia tanto dicha invarianza como la estabilidad de la distribución incluso en muestras muy pequeñas.

#### 4. Aplicación a las series mensuales de entrada de turistas en Canarias

En esta sección se presenta el análisis de los resultados de estos cuatro estadísticos para el contraste de las hipótesis planteadas, con el propósito de tratar de determinar el comportamiento de las series mensuales de entradas de turistas en Canarias. En particular, se han considerado las series mensuales ( $s = 12$ ) de entradas de turistas en Canarias para el período enero 1993-marzo 2009, con un total de  $n = 195$  observaciones, correspondientes a 16 períodos estacionales completos (años) más tres observaciones adicionales. Las series consideradas son el total de entradas, agregado por orígenes, y las series de entradas desagregadas por los principales orígenes: Alemania, Reino Unido, Holanda, Francia, Suecia y resto. Los siguientes gráficos muestran el comportamiento de estas siete series para el período muestral considerado.

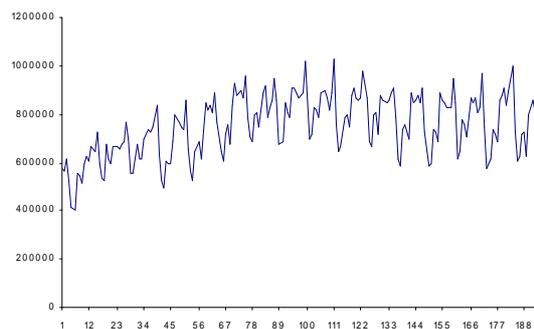


Gráfico 1.a. Entradas totales de turistas en Canarias (enero 1993-marzo 2009)

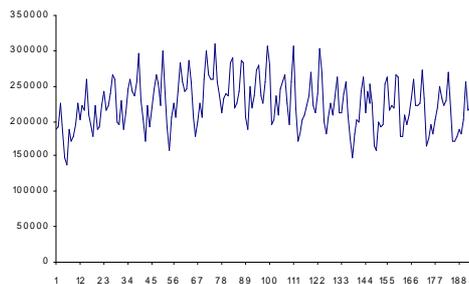


Gráfico 1.b. Entradas de turistas procedentes de Alemania

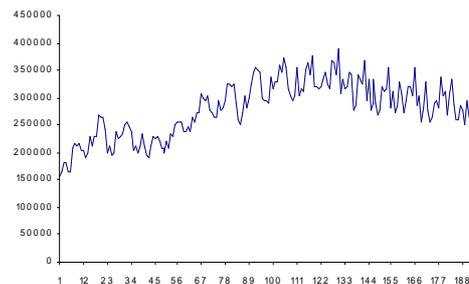


Gráfico 1.c. Entradas de turistas procedentes de RU

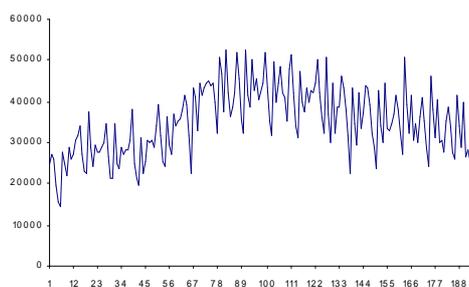


Gráfico 1.d. Entradas de turistas procedentes de Holanda

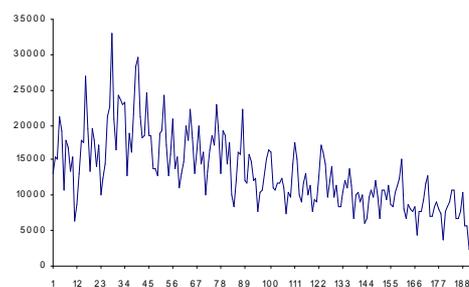


Gráfico 1.e. Entradas de turistas procedentes de Francia

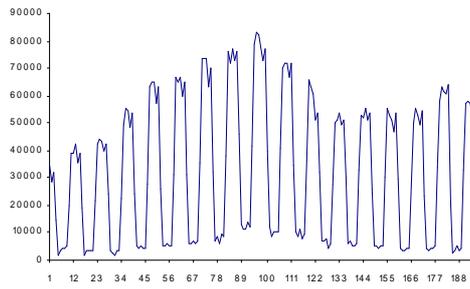


Gráfico 1.f. Entradas de turistas procedentes de Suecia

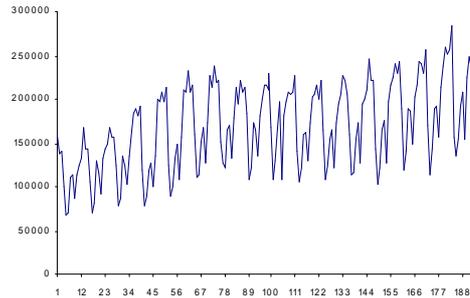


Gráfico 1.g. Entradas de turistas. Resto de orígenes

En todas las series se observa un comportamiento estacional y, especialmente, a nivel de las series de entradas de turistas por orígenes también se observa un posible cambio estructural en el componente determinista. Sin embargo, en este análisis inicial vamos a omitir esa posibilidad, puesto que será objeto de análisis en un trabajo posterior. Lee et.al. (1997) demuestran que bajo  $I(0)$ , la omisión de un cambio estructural implica que los estadísticos de contraste KPSS divergen, en particular,  $\hat{M}_n^{(1)}(q_n, p) = O_p(n/q_n)$ , de forma que tienden al sobrechazo de la hipótesis nula de estacionariedad. En cambio, bajo  $I(1)$ , la distribución asintótica no se ve afectada por la omisión del cambio estructural. Por tanto, la omisión de un cambio estructural puede ser causa espúrea de rechazo de la hipótesis nula  $I(0)$  frente a  $I(1)$ . Buseti y Harvey (2001) presentan cómo implementar el contraste KPSS en el caso de cambio estructural así como la distribución asintótica nula apropiada. En el caso del estadístico de contraste  $I(1)$  frente a  $I(0)$ , Breitung (2002) indica que dicho contraste es robusto ante la omisión de cambio estructural<sup>8</sup>. En los cuadros de resultados se señala en **negrita** los casos para los que la hipótesis  $I(0)$  no puede rechazarse al 5% de significación utilizando los contrastes de estacionariedad y donde se rechaza la hipótesis  $I(1)$  empleando el contraste no paramétrico de RU, indicando una confirmación del resultado  $I(0)$ . Los percentiles críticos empleados son los siguientes.

PERCENTILES CRÍTICOS AL 5% DE SIGNIFICACIÓN

Modelos	Contrastes $I(0)$ vs $I(1)$			Contraste $I(1)$ vs $I(0)$
	KPSS	V/S	KS	
M1,M3	0.46035	0.18649	1.34744	0.01046
M2,M4,M5	0.14661	0.14661	0.90202	0.00355

**Nota.** Valores críticos calculados empleando 50000 replicaciones de Monte Carlo con 10000 observaciones y ruido blanco  $iidN(0,1)$ .

<sup>8</sup> Bierens (2002) establece mediante simulación la robustez del contraste propuesto frente al caso de un proceso  $I(1)$  con cambio estructural, TAR(1) para la serie en diferencias. **Afonso-Rodríguez, J.A. (2009):** On Breitung's nonparametric unit root test under structural change, mimeografía, prueba que tanto el numerador como el denominador del estadístico divergen a la misma tasa en el caso  $I(1)$  con cambio estructural, de forma que el estadístico de contraste es  $o_p(1)$  y, por tanto, robusto.

Cuadro 1. SERIE DE ENTRADAS TOTALES DE TURISTAS EN CANARIAS

Modelo		Test KPSS				Test V/S				Test KS				Test RU de Breitung
		SRV	LRV-HAC(1)	LRV-HAC(2)	LRV-HAC(3)	SRV	LRV-HAC(1)	LRV-HAC(2)	LRV-HAC(3)	SRV	LRV-HAC(1)	LRV-HAC(2)	LRV-HAC(3)	
1	4.907	0.812	0.868	1.733	1.578	0.261	0.279	0.557	3.911	1.591	1.645	2.934·10 <sup>-6</sup>	0.02517	
			0.868	0.737			0.279	0.237			1.645	1.914·10 <sup>-6</sup>		
2	1.325	0.319	0.421	<b>0.023</b>	3.237	0.279	<b>0.164</b>	0.236	5.330	1.565	1.035	7.177·10 <sup>-7</sup>	0.00679	
			0.421	<b>0.017</b>			0.296	0.213			1.035	6.217·10 <sup>-7</sup>		
3	9.345	0.805	0.474	0.681	3.237	0.279	<b>0.164</b>	0.236	5.330	1.565	<b>1.201</b>	1.651·10 <sup>-6</sup>	0.04792	
			0.854	0.614			0.296	0.213			1.611	1.569·10 <sup>-6</sup>		
4	3.520	0.341	0.236	<b>0.029</b>	3.237	0.279	<b>0.164</b>	0.236	5.330	1.565	<b>0.732</b>	7.505·10 <sup>-7</sup>	0.01805	
			0.361	<b>0.083</b>			0.296	0.213			0.905	1.261·10 <sup>-6</sup>		
5	3.629	0.342	0.211	<b>0.026</b>	3.237	0.279	<b>0.164</b>	0.236	5.330	1.565	<b>0.694</b>	7.846·10 <sup>-7</sup>	0.01861	
			0.361	<b>0.103</b>			0.296	0.213			0.908	1.563·10 <sup>-6</sup>		

**Notas.**

**SRV:** Estimación sin corrección por heterocedasticidad y/o autocorrelación, empleando la varianza residual de los residuos MCO.

**LRV-HAC(1):** Estimación consistente de la varianza a largo plazo empleando el kernel de Bartlett y bandwidth fijo,  $q_n = [c \cdot (n/100)^{1/b}]$ ,  $c = 12$ ,  $b = 4$ .

**LRV-HAC(2):** Estimación consistente de la varianza a largo plazo empleando el kernel de Bartlett y el método automático de Andrews (1991). La primera fila presenta el resultado obtenido empleando la estimación dependiente de los datos del bandwidth, mientras que la segunda fila presenta el resultado obtenido al aplicar la cota superior propuesta por Kurozumi (2002), con  $\delta = 0.7$ .

**LRV-HAC(3):** Estimación consistente de la varianza a largo plazo con preblanqueamiento de los residuos MCO de la regresión auxiliar de los contrastes, mediante el ajuste MCO de una autoregresión con 12 retardos y posterior recoloración, siguiendo la propuesta de Andrews y Monahan (1992) y Sul et al. (2005). La primera fila indica el resultado con estimación de la varianza a corto plazo, mientras que la segunda fila indica los resultados con estimación LRV-HAC empleando el kernel de Bartlett con bandwidth fijo,  $q_n = [c \cdot (n/100)^{1/b}]$ ,  $c=4$ ,  $b=4$ .

Cuadro 2. SERIE DE ENTRADA DE TURISTAS EN CANARIAS CON ORIGEN ALEMANIA

Modelo		Test KPSS				Test V/S				Test KS				Test RU de Breitung
		SRV	LRV-HAC(1)	LRV-HAC(2)	LRV-HAC(3)	SRV	LRV-HAC(1)	LRV-HAC(2)	LRV-HAC(3)	SRV	LRV-HAC(1)	LRV-HAC(2)	LRV-HAC(3)	
1	0.796	<b>0.283</b>	<b>0.371</b>	<b>0.136</b>	0.768	0.273	0.356	<b>0.131</b>	1.479	<b>0.882</b>	<b>1.009</b>	6.454·10 <sup>-6</sup>	<b>0.00408</b>	
			<b>0.371</b>	<b>0.072</b>			0.358	<b>0.069</b>			<b>1.009</b>	4.699·10 <sup>-6</sup>		
2	0.727	0.262	0.342	0.185	0.768	0.273	0.356	<b>0.131</b>	1.479	<b>0.882</b>	0.948	7.889·10 <sup>-6</sup>	0.00373	
			0.342	<b>0.098</b>			0.358	<b>0.069</b>			0.948	5.749·10 <sup>-6</sup>		
3	2.454	<b>0.321</b>	<b>0.379</b>	<b>0.113</b>	2.304	0.302	0.356	<b>0.106</b>	2.479	<b>0.897</b>	<b>0.975</b>	3.812·10 <sup>-6</sup>	0.01259	
			<b>0.379</b>	<b>0.097</b>			0.356	<b>0.091</b>			<b>0.975</b>	3.540·10 <sup>-6</sup>		
4	2.166	0.288	0.339	0.154	2.304	0.302	0.356	<b>0.106</b>	2.479	<b>0.897</b>	0.923	4.643·10 <sup>-6</sup>	0.01111	
			0.339	<b>0.132</b>			0.356	<b>0.091</b>			0.923	4.312·10 <sup>-6</sup>		
5	2.211	0.288	0.319	0.152	2.304	0.302	0.356	<b>0.106</b>	2.479	<b>0.897</b>	<b>0.897</b>	5.515·10 <sup>-6</sup>	0.01134	
			0.319	<b>0.135</b>			0.356	<b>0.091</b>			<b>0.897</b>	5.201·10 <sup>-6</sup>		

Cuadro 3. SERIE DE ENTRADA DE TURISTAS EN CANARIAS CON ORIGEN REINO UNIDO

Modelo		Test KPSS				Test V/S				Test KS				Test RU de Breitung
		SRV	LRV-HAC(1)	LRV-HAC(2)	LRV-HAC(3)	SRV	LRV-HAC(1)	LRV-HAC(2)	LRV-HAC(3)	SRV	LRV-HAC(1)	LRV-HAC(2)	LRV-HAC(3)	
Modelo	1	9.768	0.881	0.614 0.939	0.499 <b>0.190</b>	3.496	0.317	0.219 0.336	<b>0.179</b> <b>0.069</b>	5.265	1.582	<b>1.318</b> 1.631	<b>2.220·10<sup>-6</sup></b> <b>1.538·10<sup>-6</sup></b>	0.04969
	2	2.800	0.314	0.286 0.335	<b>0.004</b> <b>0.029</b>					2.563	<b>0.857</b>	<b>0.817</b> <b>0.885</b>	<b>4.781·10<sup>-7</sup></b> <b>1.461·10<sup>-6</sup></b>	0.01417
	3	11.172	0.879	<b>0.402</b> 0.936	<b>0.273</b> 0.569	4.012	0.318	<b>0.145</b> 0.336	<b>0.098</b> 0.209	5.597	1.573	<b>1.062</b> 1.620	<b>1.732·10<sup>-6</sup></b> <b>2.519·10<sup>-6</sup></b>	0.05693
	4	3.502	0.314	0.192 0.334	<b>0.001</b> <b>0.099</b>					2.864	<b>0.853</b>	<b>0.667</b> <b>0.879</b>	<b>2.110·10<sup>-7</sup></b> <b>2.568·10<sup>-6</sup></b>	0.01775
	5	3.634	0.314	0.165 0.334	<b>0.003</b> <b>0.141</b>					2.900	<b>0.855</b>	<b>0.618</b> <b>0.880</b>	<b>5.225·10<sup>-7</sup></b> <b>3.664·10<sup>-6</sup></b>	0.01838

Cuadro 4. SERIE DE ENTRADA DE TURISTAS EN CANARIAS CON ORIGEN HOLANDA

Modelo		Test KPSS				Test V/S				Test KS				Test RU de Breitung
		SRV	LRV-HAC(1)	LRV-HAC(2)	LRV-HAC(3)	SRV	LRV-HAC(1)	LRV-HAC(2)	LRV-HAC(3)	SRV	LRV-HAC(1)	LRV-HAC(2)	LRV-HAC(3)	
Modelo	1	3.825	<b>0.383</b>	<b>0.368</b> <b>0.373</b>	15.849 <b>0.051</b>	2.319	0.082	0.088 0.079	3.341 0.016	3.796	<b>1.169</b>	<b>0.891</b> 1.163	<b>3.632·10<sup>-5</sup></b> <b>4.661·10<sup>-6</sup></b>	<b>0.00256</b>
	2	2.177	<b>0.139</b>	<b>0.133</b> <b>0.137</b>	1.288 <b>0.033</b>					2.379	1.033	<b>0.679</b> 1.031	<b>2.689·10<sup>-5</sup></b> <b>4.834·10<sup>-6</sup></b>	<b>0.00158</b>
	3	5.810	<b>0.385</b>	<b>0.362</b> <b>0.375</b>	18.874 <b>0.224</b>	3.607	0.080	0.086 0.078	3.908 0.066	4.654	<b>1.158</b>	<b>0.823</b> 1.158	<b>4.026·10<sup>-5</sup></b> <b>2.220·10<sup>-5</sup></b>	<b>0.00279</b>
	4	3.567	<b>0.138</b>	<b>0.135</b> <b>0.137</b>	1.422 <b>0.090</b>					3.005	1.019	<b>0.437</b> 1.025	<b>2.949·10<sup>-5</sup></b> <b>1.842·10<sup>-5</sup></b>	<b>0.00171</b>
	5	3.692	<b>0.137</b>	<b>0.136</b> <b>0.137</b>	1.374 <b>0.176</b>					3.026	1.003	<b>0.381</b> 1.017	<b>2.613·10<sup>-5</sup></b> <b>3.122·10<sup>-5</sup></b>	<b>0.00172</b>

Cuadro 5. SERIE DE ENTRADA DE TURISTAS EN CANARIAS CON ORIGEN FRANCIA

Modelo		Test KPSS				Test V/S				Test KS				Test RU de Breitung
		SRV	LRV-HAC(1)	LRV-HAC(2)	LRV-HAC(3)	SRV	LRV-HAC(1)	LRV-HAC(2)	LRV-HAC(3)	SRV	LRV-HAC(1)	LRV-HAC(2)	LRV-HAC(3)	
Modelo	1	10.278	0.571	<b>0.359</b> 0.586	34.614 1.249	2.301	<b>0.116</b>	<b>0.086</b> <b>0.116</b>	6.698 <b>0.174</b>	4.743	<b>1.151</b>	<b>0.839</b> 1.149	<b>3.245·10<sup>-5</sup></b> <b>1.734·10<sup>-5</sup></b>	0.01351
	2	0.289	0.175	<b>0.137</b> 0.175	2.235 0.178					1.627	1.037	<b>0.484</b> 1.041	<b>2.718·10<sup>-5</sup></b> <b>1.711·10<sup>-5</sup></b>	<b>0.00222</b>
	3	14.286	0.572	<b>0.357</b> 0.586	34.348 2.349	3.288	<b>0.115</b>	<b>0.086</b> <b>0.115</b>	6.664 0.319	5.545	<b>1.144</b>	<b>0.817</b> 1.148	<b>3.404·10<sup>-5</sup></b> <b>3.227·10<sup>-5</sup></b>	0.01410
	4	0.703	0.174	<b>0.138</b> 0.175	2.149 0.304					2.314	1.029	<b>0.429</b> 1.039	<b>2.826·10<sup>-5</sup></b> <b>3.218·10<sup>-5</sup></b>	<b>0.00225</b>
	5	0.853	0.173	<b>0.139</b> 0.174	2.043 0.558					2.478	1.017	<b>0.411</b> 1.033	<b>2.609·10<sup>-5</sup></b> <b>4.606·10<sup>-5</sup></b>	<b>0.00227</b>

Cuadro 6. SERIE DE ENTRADA DE TURISTAS EN CANARIAS CON ORIGEN SUECIA

Modelo		Test KPSS				Test V/S				Test KS				Test RU de Breitung
		SRV	LRV-HAC(1)	LRV-HAC(2)	LRV-HAC(3)	SRV	LRV-HAC(1)	LRV-HAC(2)	LRV-HAC(3)	SRV	LRV-HAC(1)	LRV-HAC(2)	LRV-HAC(3)	
Modelo	1	0.365	<b>0.404</b>	<b>0.376</b> <b>0.397</b>	6.305 <b>0.192</b>	0.252	<b>0.089</b>	<b>0.093</b> <b>0.087</b>	1.379 <b>0.064</b>	1.303	<b>1.175</b>	<b>0.969</b> <b>1.166</b>	$3.504 \cdot 10^{-5}$ $1.866 \cdot 10^{-5}$	<b>0.00154</b>
	2	0.277	<b>0.131</b>	<b>0.135</b> <b>0.129</b>	0.658 <b>0.102</b>					0.979	1.049	<b>0.798</b> 1.044	$2.525 \cdot 10^{-5}$ $2.108 \cdot 10^{-5}$	<b>0.00066</b>
	3	3.091	<b>0.423</b>	<b>0.364</b> <b>0.412</b>	16.254 <b>0.359</b>	2.489	<b>0.083</b>	<b>0.088</b> <b>0.080</b>	3.136 <b>0.084</b>	3.271	<b>1.139</b>	<b>0.841</b> <b>1.139</b>	$4.101 \cdot 10^{-5}$ $2.644 \cdot 10^{-5}$	<b>0.00410</b>
	4	2.723	<b>0.128</b>	<b>0.135</b> <b>0.125</b>	1.025 <b>0.099</b>					2.479	1.004	<b>0.533</b> 1.011	$2.815 \cdot 10^{-5}$ $2.416 \cdot 10^{-5}$	<b>0.00144</b>
	5	2.791	<b>0.128</b>	<b>0.135</b> <b>0.125</b>	0.992 <b>0.117</b>					2.533	0.998	<b>0.488</b> 1.009	$2.580 \cdot 10^{-5}$ $2.949 \cdot 10^{-5}$	<b>0.00145</b>

Cuadro 7. SERIE DE ENTRADA DE TURISTAS EN CANARIAS CON ORIGEN RESTO DE PAISES

Modelo		Test KPSS				Test V/S				Test KS				Test RU de Breitung
		SRV	LRV-HAC(1)	LRV-HAC(2)	LRV-HAC(3)	SRV	LRV-HAC(1)	LRV-HAC(2)	LRV-HAC(3)	SRV	LRV-HAC(1)	LRV-HAC(2)	LRV-HAC(3)	
Modelo	1	4.999	0.807	<b>0.175</b> 1.007	<b>0.005</b> <b>0.106</b>	0.649	<b>0.164</b>	<b>0.102</b> 0.195	<b>0.001</b> <b>0.015</b>	3.196	<b>1.239</b>	<b>0.618</b> 1.391	$4.333 \cdot 10^{-7}$ $2.015 \cdot 10^{-6}$	0.02169
	2	0.198	<b>0.076</b>	<b>0.077</b> <b>0.098</b>	<b>0.116</b> <b>0.007</b>					0.919	<b>0.809</b>	<b>0.898</b> <b>0.853</b>	$1.124 \cdot 10^{-5}$ $3.459 \cdot 10^{-6}$	<b>0.00064</b>
	3	13.652	0.840	<b>0.164</b> 0.925	<b>0.092</b> 0.474	1.901	<b>0.177</b>	<b>0.099</b> <b>0.186</b>	<b>0.018</b> <b>0.073</b>	5.172	<b>1.224</b>	<b>0.629</b> <b>1.297</b>	$1.927 \cdot 10^{-6}$ $2.405 \cdot 10^{-6}$	0.06444
	4	1.513	<b>0.071</b>	<b>0.077</b> <b>0.072</b>	<b>0.086</b> <b>0.049</b>					2.104	<b>0.705</b>	<b>0.905</b> <b>0.769</b>	$9.855 \cdot 10^{-6}$ $4.906 \cdot 10^{-6}$	0.00419
	5	1.652	<b>0.069</b>	<b>0.081</b> <b>0.069</b>	<b>0.091</b> <b>0.050</b>					2.228	<b>0.723</b>	<b>0.915</b> <b>0.713</b>	$1.113 \cdot 10^{-5}$ $4.612 \cdot 10^{-6}$	0.00472

Dado el comportamiento estacional de las series analizadas, los resultados relevantes son los de los modelos 2,4 y 5. La primera conclusión del análisis empírico es la alta sensibilidad del resultado de los contrastes de estacionariedad por la elección del método de estimación de la varianza a largo plazo. Para todas las series analizadas se observa un gran número de casos donde la hipótesis de estacionariedad no puede rechazarse, junto con un número de casos relevantes donde se rechaza la hipótesis I(1) a favor de I(0) empleando el contraste de Breitung. Si bien este no es un ejemplo formal de análisis confirmatorio (ver, por ejemplo, Carrion-i-Silvestre, et.al (2001)), se obtiene evidencia suficiente de ambos grupos de contrastes como para dudar del carácter no estacionario I(1), o estacionario en diferencias, de tales series, especialmente a nivel de las series de entradas de turistas desagregadas por orígenes.

## 5. Conclusiones.

En este trabajo se ha aportado evidencia empírica no definitiva sobre el carácter estocástico de las series mensuales de entradas de turistas en Canarias para el período enero1993-marzo 2009, tanto a nivel agregado como por orígenes, lo que indica la necesidad de un estudio empírico más profundo que permita extraer alguna conclusión definitiva sobre dicho comportamiento y así evitar que en posteriores etapas del análisis de dichas series puedan cometerse errores inducidos por un supuesto erróneo. Sin haber obtenido una evidencia definitiva, los resultados de los contrastes de estacionariedad con efectos estacionales parecen apuntar hacia la estacionariedad estocástica de la mayoría de las series a nivel desagregado por orígenes. Un posible refinamiento de estos resultados, que permitiría obtener conclusiones más definitivas podría venir por la incorporación de posibles cambios estructurales en un modelo con efectos estacionales, de la forma

$$d_t(p, s) = \sum_{j=0}^p t^j d'_{t,s} \beta_{js} + \sum_{j=0}^p t^j h_t(\tau_j) d'_{t,s} \delta_{js}$$

Esto será objeto de análisis en un trabajo posterior. Estos resultados empíricos se acompañan de un estudio analítico y numérico sobre la invarianza de la distribución de los contrastes de estacionariedad y de raíz unitaria considerados en este trabajo.

## Bibliografía.

**Andrews, D.W.K. (1991):** Heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimation, *Econometrica*, pp.817-858.

**Andrews, D.W.K. y J.C. Monahan (1992):** An improved heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimator, *Econometrica*, 60, pp.953-966.

**Breitung, J. (2002):** Nonparametric tests for unit roots and cointegration, *Journal of Econometrics*, 108, pp.343-363.

**Breitung, J. y A.M. Robert Taylor (2003):** Corrigendum to “Nonparametric tests for unit roots and cointegration”, *Journal of Econometrics*, 117, pp.401-404.

**Buseti, F. y A. Harvey (2001):** Testing for the presence of a random walk in series with structural breaks, *Journal of Time Series Analysis*, 22, pp.127-150.

**Carrion-i-Silvestre, J.L. y A. Sansó (2006):** A guide to the computation of stationarity tests, *Empirical Economics*, 31, pp.433-448.

- Carrion-i-Silvestre, J.L., A. Sansó y M. Artís (2001):** Unit root and stationarity tests' wedding, *Economics Letters*, 70, pp.1-8.
- Chan, N.H. y C.Z. Wei (1988):** Limiting distributions of least squares estimates of unstable autoregressive processes, *The Annals of Statistics*, 16, pp.367-401.
- Choi, I. y B.C. Ahn (1999):** Testing the null of stationarity for multiple time series, *Journal of Econometrics*, 88, pp.41-77.
- Choi, I. y B.C. Ahn (1995):** Testing for cointegration in a system of equations, *Econometric Theory*, 11, pp.952-983.
- Cuñado, J. y L.A. Gil-Alaña (2008):** Tourism in the Canary Islands: Forecasting using several seasonal time series models, *Journal of Forecasting*, 27, pp.621-636.
- den Haan, W.J. y A. Levin (1997):** A practitioners guide to robust covariance matrix estimation, *Handbook of Statistics* 15, 12, pp.291-341.
- den Haan, W.J. y A. Levin (2000):** Robust covariance matrix estimation with data-dependent VAR prewhitening order, NBER Technical Working Paper 255.
- Gil-Alaña, L.A., J. Cuñado y F. P. de Gracia (2008):** Persistence in international monthly arrivals in the Canary Islands, *Tourism Economics*, 14, pp.123-129.
- Giraitis, L., P. Kokoszka, R. Leipus y G. Teyssiere (2003):** Rescaled variance and related tests for long memory in volatility and levels, *Journal of Econometrics*, 112, pp.265-294.
- Giraitis, L., P. Kokoszka, R. Leipus y G. Teyssiere (2005):** Corrigendum to "Rescaled variance and related tests for long memory in volatility and levels", *Journal of Econometrics*, 126, pp.571-572.
- Hoti, S., C. Leon y M. McAleer (2006):** International tourism demand and volatility models for the Canary Islands, 2<sup>nd</sup> Meeting of the International Environment Modelling and Software Society, 3, pp.1345-1350.
- Kurozumi, E. (2002):** Testing for stationarity with a break, *Journal of Econometrics*, 108, pp.63-99.
- Kwiatkowski, D., P.C.B. Phillips, P. Schmidt y Y. Shin (1992):** Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: how sure are we that economic time series have a unit root?, *Journal of Econometrics*, 54, pp.159-178.
- Lee, C.G. (2009):** Are tourist arrivals stationary? Evidence from Singapore, *International Journal of Tourism Research*, 11, pp.409-414.
- Lee, J., C.J. Huang y Y. Shin (1997):** On stationarity tests in the presence of structural breaks, *Economics Letters*, 55, pp.165-172.
- Lo, A. (1991):** Long-term memory in stock market prices, *Econometrica*, 59, pp.1279-1313.
- Nabeya, S. y K. Tanaka (1988):** Asymptotic theory of a test for the constancy of regression coefficients against the random walk alternative, *The Annals of Statistics*, 16, pp.218-235.

**Newey, W.K. y K.D. West (1994):** Automatic lag selection in covariance matrix estimation, Review of Economic Studies, 61, pp.631-653.

**Nyblom, J. y T. Makelainen (1983):** Comparisons of tests for the presence of random walk coefficients in a simple linear model, Journal of the American Statistical Association, 78, pp.856-864.

**Phillips, P.C.B. y S. Jin (2002):** The KPSS test with seasonal dummies, Economics Letters, 77, pp.239-243.

**Phillips, P.C.B. y V. Solo (1992):** Asymptotics for linear processes, The Annals of Statistics, 20, pp.971-1001.

**Sul, D., P.C.B. Phillips y C-Y. Choi (2005):** Prewhitening bias in HAC estimation, Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 67, pp.517-546.

**Xiao, Z. (2001):** Testing the null hypothesis of stationarity against an autoregressive unit root alternative, Journal of Time Series Analysis, 22, pp.87-105.

**Xiao, Z. y L.R. Lima (2007):** Testing covariance stationarity, Econometric Reviews, 26, pp.643-667.

## Apéndice A.

En el contraste de estacionariedad de Giraitis et.al. (2003, 2005), se tiene que el término de corrección de la suma total de cuadrados de sumas parciales puede escribirse como

$$\sum_{t=1}^n \hat{S}_{t,p} = \sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^t \hat{\eta}_{j,p} = \sum_{t=1}^n (n-t+1) \hat{\eta}_{t,p} = (n+1) \sum_{t=1}^n \hat{\eta}_{t,p} - \sum_{t=1}^n t \cdot \hat{\eta}_{t,p}$$

de forma que, en el caso de regresión con término constante resulta que  $\sum_{t=1}^n \hat{\eta}_{t,p} = 0$ , de forma que puede escribirse simplemente como

$$\sum_{t=1}^n \hat{S}_{t,p} = - \sum_{t=1}^n t \cdot \hat{\eta}_{t,p}$$

Así, si el componente determinista incluye sólo ajuste en la media por un nivel constante,  $p = 0$ , de forma que los residuos MCO vienen dados por  $\hat{\eta}_{t,0} = y_t - \bar{y}_n$ , entonces,

$$\sum_{t=1}^n \hat{S}_{t,0} = - \sum_{t=1}^n t \cdot \hat{\eta}_{t,0} = - \sum_{t=1}^n t \cdot (y_t - \bar{y}_n) = - \sum_{t=1}^n (t - \bar{t}_n) \cdot (y_t - \bar{y}_n)$$

En el caso de ajuste en la media por un nivel constante y una tendencia lineal,  $p = 1$ , los residuos MCO vienen dados por  $\hat{\eta}_{t,1} = \hat{\eta}_{t,0} - \hat{\beta}_{1,n}(t - \bar{t}_n)$ , con  $\hat{\beta}_{1,n} = \sum_{j=1}^n (j - \bar{j}_n)(y_j - \bar{y}_n) /$

$\sum_{j=1}^n (j - \bar{j}_n)^2$  el estimador MCO de la pendiente de la regresión. Entonces se tiene que

$$\sum_{t=1}^n \hat{S}_{t,1} = - \sum_{t=1}^n t \cdot \hat{\eta}_{t,0} + \hat{\beta}_{1,n} \sum_{t=1}^n t \cdot (t - \bar{t}_n) = - \hat{\beta}_{1,n} \sum_{t=1}^n (t - \bar{t}_n)^2 + \hat{\beta}_{1,n} \sum_{t=1}^n t \cdot (t - \bar{t}_n) = 0$$

puesto que  $\sum_{t=1}^n t \cdot (t - \bar{t}_n) = \sum_{t=1}^n (t - \bar{t}_n)^2$ .

## Apéndice B. Prueba de la Proposición 1.

Consideremos el caso donde el tamaño muestral  $n$  no es un múltiplo exacto de la amplitud del período estacional,  $s$ , es decir, cuando  $n > m \cdot s$ , donde  $m = [n/s]$  es el número de períodos estacionales de amplitud  $s$  completos en la muestra, siendo  $[x]$  la parte entera de su argumento. En este caso se tiene que  $k = k_n(m, s) = n - m \cdot s$  es el número de observaciones que, al inicio o al final de la muestra, determinan una estación incompleta.

En lo que sigue vamos a considerar el caso donde estas observaciones adicionales se sitúan al final de la muestra, es decir, cuando la matriz de diseño de los regresores, en el caso de corrección estacional en la media, es de la forma

$$\mathbf{D}_{n,s} = \left( \begin{array}{c} \mathbf{I}_{s,s} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{s,s} \\ \mathbf{i}_{k,s} \end{array} \right) \Bigg\}^{(m)} = \left( \begin{array}{c} \mathbf{D}_{ms,s} \\ \mathbf{i}_{k,s} \end{array} \right), \text{ con } \mathbf{i}_{k,s} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{I}_{k,k} : \mathbf{0}_{k,s-k})$$

El estimador MCO del vector de coeficientes estacionales viene dado por la expresión habitual

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{s,n} = (\mathbf{D}'_{n,s} \mathbf{D}_{n,s})^{-1} \mathbf{D}'_{n,s} \mathbf{y}_n = \boldsymbol{\beta}_s + (\mathbf{D}'_{n,s} \mathbf{D}'_{n,s})^{-1} \mathbf{D}'_{n,s} \boldsymbol{\eta}_n$$

donde  $\boldsymbol{\eta}_n$  es el vector  $n \times 1$  de términos de error en la regresión auxiliar del contraste KPSS, con  $\mathbf{D}'_{n,s} \mathbf{D}_{n,s} = \mathbf{D}'_{ms,s} \mathbf{D}_{ms,s} + \mathbf{i}'_{k,s} \mathbf{i}_{k,s} = m \cdot \mathbf{I}_{s,s} + \mathbf{i}'_{k,s} \mathbf{i}_{k,s}$ , de forma que

$$(\mathbf{D}'_{n,s} \mathbf{D}_{n,s})^{-1} = \frac{1}{m} \mathbf{I}_{s,s} - \frac{1}{m(m+1)} \mathbf{i}'_{k,s} \mathbf{i}_{k,s} = \frac{1}{m} \left( \mathbf{I}_{s,s} - \frac{1}{m+1} \mathbf{i}'_{k,s} \mathbf{i}_{k,s} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{m+1} \mathbf{I}_{k,k} & \mathbf{0}_{k,sk} \\ \mathbf{0}_{s-k,k} & \frac{1}{m} \mathbf{I}_{s-k,s-k} \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{D}'_{n,s} \boldsymbol{\eta}_n = \mathbf{D}'_{ms,s} \boldsymbol{\eta}_{ms} + \mathbf{i}'_{k,s} \boldsymbol{\eta}_k = \sum_{j=1}^m \boldsymbol{\eta}_{s(j-1)+1,js} + \mathbf{i}'_{k,s} \boldsymbol{\eta}_k$$

donde el vector de errores se ha particionado como  $\boldsymbol{\eta}_n = (\underbrace{\boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_{ms}}_{ms \text{ términos}} : \underbrace{\boldsymbol{\eta}_{ms+1}, \dots, \boldsymbol{\eta}_n}_{\text{últimos } k \text{ términos}}) = (\boldsymbol{\eta}_{ms} : \boldsymbol{\eta}_k)$ ,

de forma que también puede escribirse como

$$\mathbf{D}'_{n,s} \boldsymbol{\eta}_n = \sum_{j=1}^m \boldsymbol{\eta}_{s(j-1)+1,js} + \mathbf{i}'_{k,s} \boldsymbol{\eta}_k = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m+1} \boldsymbol{\eta}_{j,k} \\ \sum_{j=1}^m \boldsymbol{\eta}_{j,s-k} \end{pmatrix}, \sum_{j=1}^{m+1} \boldsymbol{\eta}_{j,k} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m+1} \boldsymbol{\eta}_{1+s(i-1)} \\ \sum_{i=1}^{m+1} \boldsymbol{\eta}_{2+s(i-1)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m+1} \boldsymbol{\eta}_{k+s(i-1)} \end{pmatrix}, \sum_{j=1}^m \boldsymbol{\eta}_{j,s-k} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \boldsymbol{\eta}_{k+1+s(i-1)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m \boldsymbol{\eta}_{s+s(i-1)} \end{pmatrix}$$

con  $\boldsymbol{\eta}_{s(j-1)+1,js} = (\boldsymbol{\eta}_{s(j-1)+1}, \boldsymbol{\eta}_{s(j-1)+2}, \dots, \boldsymbol{\eta}_{sj})'$ ,  $j = 1, \dots, m$ , el vector que agrupa los términos de error para la  $j$ -ésima estación. Combinando todos estos resultados, se tiene la siguiente expresión para el estimador MCO del vector de coeficientes estacionales,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{s,n} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{k,n} \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_{s-k,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \mathbf{y}_{j,k} \\ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{y}_{j,s-k} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\beta}_s + \begin{pmatrix} \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \boldsymbol{\eta}_{j,k} \\ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \boldsymbol{\eta}_{j,s-k} \end{pmatrix}$$

donde para cada  $j = 1, \dots, m+1$ , los vectores  $\boldsymbol{\eta}_{j,k}$  ( $k \times 1$ ) y  $\boldsymbol{\eta}_{j,s-k}$  ( $(s-k) \times 1$ ) se han definido anteriormente. El  $t$ -ésimo residuo MCO viene dado por

$$\hat{\eta}_{t,0}(s) = \eta_t - \mathbf{d}'_{t,s} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{s,n} - \boldsymbol{\beta}_s) = \eta_t - \mathbf{d}'_{t,k} \left( \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \boldsymbol{\eta}_{j,k} \right) - \mathbf{d}'_{t,s-k} \left( \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \boldsymbol{\eta}_{j,s-k} \right)$$

donde  $\mathbf{d}'_{t,k} = (\delta_{1,t}, \dots, \delta_{k,t})$  y  $\mathbf{d}'_{t,s-k} = (\delta_{k+1,t}, \dots, \delta_{s,t})$ . Bajo la hipótesis nula de estacionariedad en torno al componente determinista,  $\sigma_u^2 = 0$ , los términos de error en la regresión auxiliar coinciden con los términos de innovación en la ecuación de medida del modelo postulado, es decir,  $\eta_t = \varepsilon_t$ . Bajo condiciones apropiadas para la aplicabilidad de un principio de invarianza (o TCLF) (martingala en diferencias, NED, condiciones mixing, estructura de dependencia lineal general, ... con media nula y varianza finita) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \eta_{i+s(j-1)} &\Rightarrow B_i(1) \equiv \omega_0 W_i(1) \quad i = 1, \dots, k \\ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \eta_{i+s(j-1)} &\Rightarrow B_i(1) \equiv \omega_0 W_i(1) \quad i = k+1, \dots, s \end{aligned}$$

donde  $W_i(1)$  es un proceso Browniano estándar, con  $\omega_0$  la varianza a largo plazo de,

$$\omega_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m+1} E \left( \sum_{j=1}^{m+1} \eta_{i+s(j-1)} \right)^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} E \left( \sum_{j=1}^m \eta_{i_2+s(j-1)} \right)^2 = \gamma_0 + 2 \sum_{h=1}^{\infty} \gamma_{sh}$$

para  $i_1 = 1, \dots, k$ ,  $i_2 = k+1, \dots, s$ . Por otro lado, dadas estas mismas condiciones anteriores y la estructura de agregación por estaciones de los términos de error del modelo, se tiene que estos procesos Brownianos límite no son independientes entre sí, con covarianzas a largo plazo

$$\omega_{i-l} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} E \left( \sum_{j=1}^{m_i} \eta_{i+s(j-1)} \sum_{j=1}^{m_l} \eta_{l+s(j-1)} \right) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_{sh+i-l}, \quad i, l = 1, \dots, s \quad (i \neq s)$$

con  $m_i = m+1$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $m_l = m$ ,  $l = k+1, \dots, s$ , de forma que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{m+1}} \sum_{j=1}^{m+1} \boldsymbol{\eta}_{j,k} &\Rightarrow \begin{pmatrix} B_1(1) \\ B_2(1) \\ \vdots \\ B_k(1) \end{pmatrix} = BM(\boldsymbol{\Omega}_k), \quad \boldsymbol{\Omega}_k = (\omega_h)_{h=0,1,\dots,k-1}, \\ \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^m \boldsymbol{\eta}_{j,k} &\Rightarrow \begin{pmatrix} B_{k+1}(1) \\ B_{k+2}(1) \\ \vdots \\ B_s(1) \end{pmatrix} = BM(\boldsymbol{\Omega}_{s-k}), \quad \boldsymbol{\Omega}_{s-k} = (\omega_h)_{h=0,1,\dots,s-k-1}, \text{ y} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \boldsymbol{\eta}_{j,k} \\ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \boldsymbol{\eta}_{j,s-k} \end{pmatrix} &\Rightarrow BM(\boldsymbol{\Omega}_s), \quad \boldsymbol{\Omega}_s = (\omega_h)_{h=0,1,\dots,s-1} \end{aligned}$$

Escribiendo  $t = [nr]$ ,  $r \in [0, 1]$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{[nr],0}(s) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{[nr]} \hat{\eta}_{t,0}(s) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{[nr]} \eta_t - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{[nr]} \mathbf{d}'_{t,k} \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m+1}} \frac{1}{\sqrt{m+1}} \sum_{j=1}^{m+1} \boldsymbol{\eta}_{j,k} \right) - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{[nr]} \mathbf{d}'_{t,s-k} \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^m \boldsymbol{\eta}_{j,s-k} \right) \end{aligned}$$

En primer lugar, se tiene en cuenta que  $n = ms+k = m(s+k/m)$ , entonces  $n/(m+1) \approx n/m = s + k/m \rightarrow s$  cuando  $n \rightarrow \infty$  (y, por tanto,  $m \rightarrow \infty$ ). Por otro lado, observando que

$$\sum_{t=1}^{[nr]} \mathbf{d}'_{t,k} = \sum_{t=1}^{[nr]} (\delta_{1,t}, \delta_{2,t}, \dots, \delta_{k,t}) = ([mr], [mr], \dots, [mr]) = [mr] \mathbf{i}'_k$$

y lo mismo para el segundo término de este tipo,  $\sum_{t=1}^{[nr]} d'_{t,s-k} = [mr] i'_{s-k}$ , y teniendo en cuenta de nuevo que  $n = m(s+k/m)$ , entonces

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{[nr]} d'_{t,k} = \frac{[mr]}{n} i'_k \rightarrow \frac{r}{s} i'_k, \quad \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{[nr]} d'_{t,s-k} = \frac{[mr]}{n} i'_{s-k} \rightarrow \frac{r}{s} i'_{s-k}$$

cuando  $n$  (y  $m$ ) tiende a infinito. Obviamente, las condiciones que permiten la aplicabilidad del TCLF a los términos agregados  $\eta_i(m)$  anteriores, permiten igualmente aplicar dicho resultado a la suma parcial escalada de los primeros  $[nr]$  términos de error del modelo, es decir,  $n^{-1/2} \sum_{t=1}^{[nr]} \eta_t \Rightarrow B(r) = \omega W(r)$ , donde ahora  $B(r)$  es un movimiento Browniano con varianza  $\omega^2$ , que es la varianza a largo plazo definida como  $\omega^2 = \omega_0 + 2 \sum_{h=1}^{s-1} \omega_h$ , y  $W(r)$  es un movimiento (o proceso) Browniano estándar. Combinando estos resultados, se tiene entonces que

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{[nr]} d'_{t,k} \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m+1}} \frac{1}{\sqrt{m+1}} \sum_{j=1}^{m+1} \eta_{j,k} \right) \Rightarrow \frac{r}{\sqrt{s}} i'_k BM(\Omega_k) = \frac{r}{\sqrt{s}} \sum_{i=1}^k B_i(1)$$

y

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{[nr]} d'_{t,s-k} \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^m \eta_{j,s-k} \right) \Rightarrow \frac{r}{\sqrt{s}} i'_{s-k} BM(\Omega_{s-k}) = \frac{r}{\sqrt{s}} \sum_{i=k+1}^s B_i(1)$$

de forma que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{[nr],0}(s) &\Rightarrow B(r) - \frac{r}{\sqrt{s}} \sum_{i=1}^s B_i(1) = B(r) - r \sum_{i=1}^s B_i(1/s) \\ &= B(r) - rB(1) = \omega[W(r) - rW(1)] = \omega V_0(r) \end{aligned}$$

donde  $V_0(r)$  es un proceso puente Browniano estándar, como en el caso estándar del contraste KPSS en el caso de corrección por la media en la regresión auxiliar del contraste. Se tiene entonces que

$$\frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n \hat{S}_{t,0}^2(s) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{t,0}(s) \right)^2 \Rightarrow \omega^2 \int_0^1 V_0(r)^2 dr$$

de forma que la distribución asintótica del numerador del estadístico de contraste KPSS es invariante ante la inclusión de dummies estacionales, aún cuando la muestra no incluya un número exacto de períodos estacionales completos. ■

Bajo la hipótesis alternativa de estacionariedad en diferencia (o estocástica),  $\sigma_u^2 > 0$ , se tiene que los términos de error en la regresión auxiliar vienen dados por  $\eta_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^t u_i$ , de forma que

$$\sum_{j=1}^{m_i} \eta_{i+s(j-1)} = \sum_{j=1}^{m_i} \left( \varepsilon_{i+s(j-1)} + \sum_{l=1}^{i+s(j-1)} u_l \right) \quad m_i = m+1, i=1, \dots, k; m_i = m, i=k+1, \dots, s$$

Bajo la condición suficientemente general  $r_0 = o_p(n^{1/2})$ , se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} r_{[na]} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left( r_0 + \sum_{l=1}^{[na]} u_l \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^{[na]} u_l + o_p(1) \Rightarrow B_u(a) = \omega_u W_u(a) \quad a \in [0,1].$$

con  $\omega_u^2$  la varianza a largo plazo de la secuencia  $\{u_t\}$ . Por tanto, en este caso se tiene que el

factor de escala apropiado para obtener una distribución límite no degenerada de la secuencia de sumas parciales de residuos MCO es  $n^{-3/2}$ , de forma que se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{n\sqrt{n}} \hat{S}_{[nr],0}(s) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{[nr]} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \boldsymbol{\eta}_t \right) - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{[nr]} \mathbf{d}'_{t,k} \left( \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \boldsymbol{\eta}_{j,k} \right) \right) - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{[nr]} \mathbf{d}'_{t,s-k} \left( \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \boldsymbol{\eta}_{j,s-k} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{[nr]} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \boldsymbol{\eta}_t \right) - \frac{[mr]}{n} \mathbf{i}'_k \left( \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \boldsymbol{\eta}_{j,k} \right) \right) - \frac{[mr]}{n} \mathbf{i}'_{s-k} \left( \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \boldsymbol{\eta}_{j,s-k} \right) \right) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{[nr]} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \boldsymbol{\eta}_t \right) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{[nr]} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_t + \sum_{l=1}^t \mathbf{u}_l \right) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{[nr]} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^t \mathbf{u}_l \right) + \frac{1}{n} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{[nr]} \boldsymbol{\varepsilon}_t \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{[nr]} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^t \mathbf{u}_l \right) + o_p(1) \Rightarrow \int_0^r B_u(a) da = \omega_u \int_0^r W_u(a) da \\ \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \boldsymbol{\eta}_{j,k} \right) &= \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{1+s(j-1)} \mathbf{u}_l \\ \sum_{l=1}^{2+s(j-1)} \mathbf{u}_l \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^{k+s(j-1)} \mathbf{u}_l \end{pmatrix} + \mathbf{i}_k o_p(1) \Rightarrow \int_0^1 \begin{pmatrix} B_{u,1}(a) \\ B_{u,2}(a) \\ \vdots \\ B_{u,k}(a) \end{pmatrix} da, \end{aligned}$$

y

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \boldsymbol{\eta}_{j,s-k} \right) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{k+1+s(j-1)} \mathbf{u}_l \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^{s+s(j-1)} \mathbf{u}_l \end{pmatrix} + \mathbf{i}_{s-k} o_p(1) \Rightarrow \int_0^1 \begin{pmatrix} B_{u,k+1}(a) \\ \vdots \\ B_{u,s}(a) \end{pmatrix} da$$

Se tiene así, entonces que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n\sqrt{n}} \hat{S}_{[nr],0}(s) &\Rightarrow \int_0^r B_u(a) da - r \int_0^1 \left( \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s B_{u,i}(a) \right) da = \int_0^r B_u(a) da - r \int_0^1 B_u(a) da \\ &= \int_0^r \left( B_u(a) - \int_0^1 B_u(a) da \right) da = \int_0^r \underline{B}_u(a) da = \omega_u \int_0^r \underline{W}_u(a) da \end{aligned} \quad (*)$$

donde  $\underline{W}_u(s)$  es un proceso de Wiener estándar corregido por la media. Así, se tiene que

$$\frac{1}{n^4} \sum_{t=1}^n \hat{S}_{t,0}^2(s) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left( \frac{1}{n\sqrt{n}} \hat{S}_{t,0}(s) \right)^2 \Rightarrow \int_0^1 \left( \int_0^r \underline{B}_u(a) da \right)^2 dr < \infty$$

de forma que  $n^{-2} \sum_{t=1}^n \hat{S}_{t,0}^2(s) = O_p(n^2)$ . Combinando este resultado con  $(nq_n)^{-1} \hat{\omega}_n(q_n) = O_p(1)$ ,

de forma que  $\hat{\omega}_n(q_n) = O_p(nq_n)$ , se tiene entonces finalmente que  $\hat{M}_n^{(1)}(q_n, 0, s) = O_p(n/q_n)$ , por lo que el contraste es consistente, con distribución límite bajo la hipótesis alternativa dada por

$$(n/q_n)^{-1} \hat{M}_n^{(1)}(q_n, 0, s) \Rightarrow \int_0^1 \left( \int_0^r \underline{B}_u(a) da \right)^2 dr / \int_0^1 \underline{B}_u(a)^2 da$$

A continuación se presentan los resultados de un experimento de simulación donde se han calculado numéricamente los cuantiles superiores de la distribución nula del contraste KPSS en los casos de inclusión de efectos estacionales en la media y en la tendencia para tamaños

muestrales pequeños, tanto en el caso de que sean múltiplos exactos o no de la frecuencia estacional mensual,  $s = 12$ .

$s = 12$		$m = [n/s]$	$n(m,s) = m \cdot s$	$k(n,s) = n - n(m,s)$
$n$	50	4	48	2
	75	6	72	3
	100	8	96	4
	150	12	144	6
	195	16	192	3
	200	16	192	8

**CUADRO B.1** Percentiles empíricos superiores en muestras pequeñas de la distribución nula del estadístico de contraste KPSS con efectos estacionales: **Caso de corrección estacional en la media ( $p = 0, s = 12$ ).**

Resultados obtenidos con 5000 replicaciones de Monte Carlo

Tamaños muestrales pequeños múltiplo exacto de la frecuencia estacional mensual							
$\alpha$	$n$	50	75	100	150	200	195
0.10		0.43358	0.40605	0.38782	0.37292	0.36777	0.36380
0.05		0.58598	0.53945	0.52391	0.49587	0.48925	0.49345
0.025		0.72001	0.66505	0.63635	0.60971	0.62524	0.62296
0.01		0.89801	0.82862	0.79535	0.76044	0.79240	0.80633
Tamaños muestrales pequeños múltiplo exactos de la frecuencia estacional mensual							
$\alpha$	$n$	48	72	96	144	192	300
0.10		0.43465	0.40420	0.39474	0.36853	0.36977	0.35833
0.05		0.57269	0.54186	0.53499	0.49261	0.48857	0.48904
0.025		0.71665	0.68338	0.66984	0.60832	0.60620	0.61557
0.01		0.93421	0.90402	0.87392	0.76070	0.77598	0.78363

Estos resultados numéricos de la distribución nula en muestras finitas de los contrastes KPSS confirman la invarianza de la misma, tanto en muestras pequeñas como asintóticamente, donde la variabilidad y las diferencias que se observan para muestras muy pequeñas se observan también en el caso estándar de la regresión auxiliar sin efectos estacionales.

**CUADRO B.2** Percentiles empíricos superiores en muestras pequeñas de la distribución nula del estadístico de contraste KPSS con efectos estacionales: **Caso de corrección estacional en la media y en la tendencia ( $p=1, s=12$ )**

Resultados obtenidos con 5000 replicaciones de Monte Carlo

Tamaños muestrales pequeños múltiplo exacto de la frecuencia estacional mensual							
$\alpha$	$n$	50	75	100	150	200	195
0.10		0.18779	0.15889	0.15050	0.13895	0.13221	0.13081
0.05		0.22943	0.19421	0.18797	0.17517	0.16530	0.16722
0.025		0.27144	0.23208	0.22700	0.20733	0.19694	0.19639
0.01		0.32409	0.27467	0.28518	0.24843	0.23619	0.23887
Tamaños muestrales pequeños múltiplo exactos de la frecuencia estacional mensual							
$\alpha$	$n$	48	72	96	144	192	300
0.10		0.18944	0.15563	0.15050	0.13811	0.13542	0.12467
0.05		0.23200	0.19203	0.18944	0.17320	0.16925	0.15635
0.025		0.27348	0.22962	0.22385	0.20491	0.20135	0.18818
0.01		0.32585	0.27770	0.26391	0.24943	0.24999	0.23291

La prueba de la invarianza de la distribución del contraste KPSS a la inclusión de estos efectos estacionales puede extenderse, sólo que con un álgebra ligeramente más tediosa, al caso de efectos estacionales en la media y en la tendencia, de acuerdo con el modelo general

$$y_t = \sum_{j=0}^p t^j \sum_{i=1}^s \beta_{1i} \delta_{it} + \eta_t = \sum_{j=0}^p t^j \mathbf{d}'_{t,s} \boldsymbol{\beta}_j + \eta_t$$

para  $p = 1$ , donde  $\mathbf{d}'_{t,s} = (\delta_{1,t}, \delta_{2,t}, \dots, \delta_{s,t})$  como antes. La diferencia fundamental es que todos estos resultados se establecerán en función de una versión generalizada del movimiento Browniano estándar, el puente Browniano de segundo nivel, exactamente como en el caso de la versión estándar con constante y tendencia lineal del contraste KPSS.

### Apéndice C. Prueba de la Proposición 3.

El estadístico de contraste de Breitung (2002, 2004) puede escribirse también como

$$\hat{\rho}_n(p, s) = \frac{n^{-4} \sum_{t=1}^n \hat{S}_{t,p}^2(s)}{n^{-2} \sum_{t=1}^n \hat{\eta}_{t,p}^2(s)} = \frac{n^{-1} \sum_{t=1}^n \left[ \frac{1}{n\sqrt{n}} \hat{S}_{t,p}(s) \right]^2}{n^{-1} \sum_{t=1}^n \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{\eta}_{t,p}(s) \right]^2}$$

de forma que, teniendo en cuenta que en este caso, bajo la hipótesis nula de raíz unitaria,  $\sigma_u^2 > 0$  y  $\sigma_\varepsilon^2 = 0$ , los errores del modelo vienen dados por  $\eta_t = \sum_{i=1}^t u_i$  (lo que se corresponde parcialmente con la especificación del modelo bajo la hipótesis alternativa en los contrastes de estacionariedad considerados), entonces utilizando (\*) del Apéndice B, se tiene en primer lugar que

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} \hat{S}_{[nr],0}(s) \Rightarrow \int_0^r \underline{B}_u(a) da = \omega_u \int_0^r \underline{W}_u(a) da$$

mientras que el  $[nr]$ -ésimo residuo MCO viene dado por

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \hat{\eta}_{[nr],0}(s) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^{[nr]} u_l - \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \left( \sum_{i=1}^k \delta_{i,[nr]} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^{i+s(j-1)} u_l \right) - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=k+1}^s \delta_{i,[nr]} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^{i+s(j-1)} u_l \right)$$

con  $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^{[nr]} u_l \Rightarrow B_u(r)$ , y

$$\frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \left( \sum_{i=1}^k \delta_{i,[nr]} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^{i+s(j-1)} u_l \right) + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=k+1}^s \delta_{i,[nr]} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^{i+s(j-1)} u_l \right) \Rightarrow \int_0^1 B_{u,i}(a) da$$

para algún  $i = 1, \dots, s$ , de forma que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \hat{\eta}_{[nr],0}(s) \Rightarrow B_u(r) - \int_0^1 B_u(a) da = \underline{B}_u(r)$$

Por tanto, finalmente, se tiene que la distribución asintótica nula del contraste con dummies estacionales,  $\hat{\rho}_n(0, s)$ , es la misma que la del contraste basado en la corrección por un nivel constante para toda la muestra,  $\hat{\rho}_n(0)$ . De la misma forma que antes, este resultado puede generalizarse al caso  $p = 1$ . ■

Los siguientes cuadros presentan los resultados de un experimento de simulación que permiten verificar la invarianza de la distribución a la inclusión de dummies estacionales para la frecuencia mensual ( $s = 12$ ), incluso con tamaños muestrales pequeños.

**CUADRO C.1** Percentiles empíricos inferiores en muestras pequeñas de la distribución nula del estadístico de contraste de Breitung (2002, 2004): **Caso de corrección estacional en la media ( $p = 0, s = 12$ ).**

Resultados obtenidos con 5000 replicaciones de Monte Carlo

$n$	50	75	100	150	200	300
0.10	0.01465	0.01518	0.01379	0.01459	0.01436	0.01478
0.05	0.01035	0.01054	0.00999	0.01020	0.01039	0.01064
0.025	0.00807	0.00815	0.00756	0.00723	0.00778	0.00803
0.01	0.00602	0.00587	0.00512	0.00555	0.00552	0.00554

**CUADRO C.2** Percentiles empíricos inferiores en muestras pequeñas de la distribución nula del estadístico de contraste de Breitung (2002, 2004): **Caso de corrección estacional en la media y en la tendencia ( $p = 1, s=12$ ).**

Resultados obtenidos con 5000 replicaciones de Monte Carlo

$n$	50	75	100	150	200	300
0.10	0.00525	0.00478	0.00459	0.00455	0.00460	0.00438
0.05	0.00419	0.00377	0.00357	0.00369	0.00359	0.00333
0.025	0.00345	0.00309	0.00299	0.00295	0.00288	0.00268
0.01	0.00267	0.00238	0.00233	0.00228	0.00228	0.00221