Documento de Trabajo/Working Paper
*Serie Economía*

# Contrastes de estacionariedad en series temporales con outliers aditivos persistentes

Julio A. Afonso Rodríguez

May 2010

*DT-E-2010-14*

ISSN: 1989-9440

Instituto Universitario de Desarrollo Regional, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de La Laguna, Camino de la Hornera s/n - 38071 La Laguna, Santa Cruz de Tenerife, Spain

# Contrastes de estacionariedad en series temporales con outliers aditivos persistentes

**Julio A. Afonso-Rodríguez**
Dpto. de Economía de las Instituciones, Estadística Económica y Econometría
Instituto Universitario de Desarrollo Regional (IUDR)
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de La Laguna
Campus de Guajara. Camino La Hornera s/n
38071. La Laguna. Santa Cruz de Tenerife
email: jafonsor@ull.es. Tfno.: 922.317041, Fax: 922.317042

**RESUMEN**

En este trabajo se estudia el efecto de la perturbación por outliers aditivos de las ecuaciones de medida y de transición del modelo de nivel-local generalizado como proceso generador de datos de los contrastes no paramétricos de la hipótesis nula de estacionariedad estocástica frente a la alternativa de raíz unitaria más comúnmente utilizados (Kwiatkowski et.al. (1992), Xiao (2001), Giraitis et.al. (2003) y Xiao y Lima (2007)). En particular, se derivan las distribuciones límite bajo la hipótesis nula y alternativa, y se estudian así las distorsiones en el tamaño empírico empleando la distribución asintótica nula estándar y la consistencia de estos contrastes en el caso de perturbación por outliers aditivos aislados posiblemente persistentes así como en el caso de rachas de outliers aditivos, tanto en forma de intervenciones como con un proceso estocástico de perturbación de tipo salto de Bernoulli. Para cada uno de los tipos de mecanismos generadores de outliers aditivos considerado, se imponen una serie de supuestos apropiados sobre la magnitud de los efectos con el fin de poder obtener resultados límite finitos. Así, bajo estacionariedad y en el caso de los estadísticos univariantes, el efecto de la contaminación queda como función del ratio entre la magnitud del outlier y la varianza a largo plazo del término de error estacionario en la ecuación de medida del modelo.

**Palabras clave:** *Contrastes de estacionariedad, outliers aditivos, modelo de intervención, proceso estocástico de salto de Bernoulli*

**Clasificación JEL:** *C12, C22*

**ABSTRACT**

This paper studies the effects of additive outlier perturbation in the measurement and transition equations of the generalized local-level model considered as the data generating process in the most commonly used nonparametric tests of the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root (Kwiatkowski et al (1992), Xiao (2001), Giraitis et.al. (2003) and Xiao and Lima (2007)). In particular, we derive the limit distributions under the null and alternative hypothesis, and then we study the distortions in the empirical size using the standard limit null distribution and the consistency of these test statistics in the case of perturbations due to possibly persistent isolated additive outliers and also in the case of patches of additive outliers, either in the form of interventions or with a Bernoulli-type stochastic jump process. For each type of additive outlier generating mechanism, we must to impose a set of convenient assumptions on the outlier magnitudes in order to obtain finite limit results. Thus, under stationarity and for the univariate test statistics, the main effect of the contamination is stated as a function of the ratio between the outlier magnitude and the long-term variance of the stationary error term in the measurement equation of the model.

**Key words:** *Stationarity tests, additive outliers, intervention model, stochastic Bernoulli jump process*

**JEL Classification:** *C12, C22*

## 1. Introducción

Desde el trabajo de Kwiatkowski et.al. (1992) (KPSS) se ha generalizado en el trabajo econométrico, tanto teórico como empírico, la utilización de contrastes no paramétricos de la hipótesis nula de estacionariedad en niveles frente a la alternativa de raíz unitaria o no estacionariedad estocástica. Existe un amplio conjunto de estudios que evidencias ciertos problemas de falta de robustez de estos contrastes frente a ciertos tipos de error de especificación, sistemáticos y no sistemáticos, de forma que se comprometerían los resultados derivados de su uso en la práctica. Además de la propuesta inicial del test KPSS, se han propuesto otros estadísticos univariantes similares con mejores propiedades en muestras finitas, como son el contraste V/S de Giraitis et.al. (2003) y el contraste KS de Xiao (2001), además de una versión bivariante del test KS, el contraste de fluctuaciones de Xiao y Lima (2007), para el contraste de estacionariedad en covarianza, frente a una gran variedad de alternativas posibles que incluye también el caso de raíz unitaria.

En este trabajo abordamos el estudio del comportamiento de los estadísticos de contraste univariantes KPSS, V/S y KS y del contraste bivariante de Xiao y Lima (2007) en el caso de perturbación de los componentes estocásticos, estacionario y no estacionario, del modelo de nivel-local generalizado considerado tanto el proceso generador de los datos observados como la base para el planteamiento de la regresión auxiliar de estos contrastes. El tipo de perturbación considerado consiste en la contaminación de tales secuencias por outliers aditivos de distinta naturaleza, tanto del tipo intervenciones, con efectos instantáneos o persistentes, como de tipo estocástico, mediante un proceso estocástico de salto tipo Bernoulli que permite generar outliers aditivos aislados, persistentes o no persistentes, como rachas de outliers aditivos. Otero y Smith (2005) y Afonso-Rodríguez (2009) estudian este problema, desde un punto de vista empírico y menos general, de forma que sus conclusiones pueden obtenerse como casos particulares de los resultados obtenidos en este trabajo.

La organización del trabajo es como sigue. En la Sección 2 se realiza un análisis exhaustivo de la estructura y comportamiento de los estadísticos de contraste estudiados. La Sección 3 introduce el proceso generador de datos bajo contaminación por outliers aditivos de los tipos descritos anteriormente, así como los principales resultados que permitirán posteriormente, en la Sección 4 caracterizar el comportamiento y propiedades asintóticas de tales estadísticos bajo perturbación. Finalmente la Sección 5 presenta las principales conclusiones y los Apéndices A-D presentan las pruebas de los distintos resultados enunciados en la Sección 4.

## 2. Contrastes de estacionariedad estocástica

Desde el trabajo de Kwiatkowski et.al. (1992), el modelo básico utilizado para el desarrollo de muchos otros contrastes de la hipótesis nula de estacionariedad estocástica frente a la alternativa de raíz unitaria es el siguiente modelo de nivel-local generalizado,

$$y_t = d_t(p) + w_t + \varepsilon_t \tag{2.1}$$

$$w_t = w_{t-1} + u_t = w_0 + \sum_{j=1}^{t} u_j \;\; (w_0 = o_p(1)) \tag{2.2}$$

donde $d_t(p)$ es el componente determinista (kernel determinista), generalmente parametrizado como una función de tendencia polinomial de orden $p$, de la forma

$$d_t(p) = \boldsymbol{x}'_{t,p}\boldsymbol{\beta}_p, \quad \boldsymbol{x}'_{t,p} = (1, t, \ldots, t^p) \tag{2.3}$$

aunque también son posibles formas más generales de funciones de tendencia, incluyendo tendencias segmentadas o funciones suaves del tiempo. En cada caso se asume la existencia de una matriz de escalamiento no estocástica, simétrica y no singular, $\boldsymbol{D}_p$, tal que $\boldsymbol{D}_p\boldsymbol{x}_{[nr],p} = \tilde{\boldsymbol{x}}_{[nr],p} \to \boldsymbol{x}_p(r) \in [0,1]^{p+1}$, para todo $r \in [0,1]$, con $[x]$ la parte entera de $x$. Respecto de los componentes estocásticos, $(\varepsilon_t, u_t)$, se supone que tienen media nula, varianzas instantáneas $Var[\varepsilon_t] = \sigma_\varepsilon^2 > 0$ y $Var[u_t] = \sigma_u^2 \geq 0$, son mutuamente independientes, y satisfacen cualquiera de las condiciones de regularidad existentes que permitan verificar la convergencia de funciones convenientemente escaladas de los mismos a funcionales de procesos de Wiener[1]. Estos términos estocásticos pueden reparametrizarse como $\varepsilon_t = \sigma_\varepsilon \cdot z_{0,t}$ y $u_t = \sigma_u \cdot z_{1,t}$, con $E[z_{i,t}] = 0$ $i = 0,1$, $(z_{0,t}, z_{1,t})$ mutuamente independientes y estacionarios con varianza a largo plazo

$$\omega_i^2 = \lim_{n\to\infty} n^{-1} E[(\textstyle\sum_{t=1}^{n} z_{i,t})^2] = \gamma_i(0) + 2\textstyle\sum_{h=1}^{\infty}\gamma_i(h), i = 0,1$$

con $\gamma_i(h) = E[z_{i,t} z_{i,t-h}]$, $h \geq 0$ la covarianza de orden $h$ del proceso $z_{i,t}$, de forma que $\gamma_0(h) = \sigma_\varepsilon^{-2} E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-h}]$ y $\gamma_1(h) = \sigma_u^{-2} E[u_t u_{t-h}]$, y así se tiene que $\omega_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2 \cdot \omega_0^2$ y $\omega_u^2 = \sigma_u^2 \cdot \omega_1^2$

[1] Para una revisión bastante completa y exhaustiva de los distintos supuestos que pueden adoptarse para el cumplimiento de estas condiciones de regularidad puede consultarse Xiao y Lima (2007). Entre las mismas está, por supuesto, el caso donde ambas secuencias $(\varepsilon_t, u_t)$ sean iid, con media nula y varianza finita.

son las correspondientes varianzas a largo plazo de las secuencias ($\varepsilon_t$, $u_t$). De esta forma, bajo las condiciones de regularidad apropiadas se tiene que

$$n^{-1/2}\sum_{t=1}^{[nr]}\begin{pmatrix}\varepsilon_t\\ u_t\end{pmatrix}=n^{-1/2}\sum_{t=1}^{[nr]}\begin{pmatrix}\sigma_\varepsilon z_{0,t}\\ \sigma_u z_{1,t}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\sigma_\varepsilon\omega_0 W_0(r)\\ \sigma_u\omega_1 W_1(r)\end{pmatrix} \tag{2.4}$$

donde $W_0(r)$ y $W_1(r)$ son procesos de movimiento Browniano estándar independientes. En este contexto, la hipótesis nula de estacionariedad estocástica, I(0) o estacionariedad en torno al componente determinista $d_t(p)$, viene dada por $H_0$: $\sigma_u^2 = 0$, mientras que la alternativa de una cola de estacionariedad en diferencias, I(1) o raíz unitaria, viene dada por $H_1$: $\sigma_u^2 > 0$. Dado un orden particular a la tendencia polinomial, entonces a partir de (2.1)-(2.3) se tiene la siguiente regresión auxiliar para la construcción de los estadísticos de contraste de la hipótesis de estacionariedad dados posteriormente,

$$y_t = \boldsymbol{x}'_{t,p}\boldsymbol{\beta}_p + \eta_t \quad t = 1,\dots,n \tag{2.5}$$

donde el término de error en (2.5), $\eta_t$, viene dado por

$$\eta_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{t} u_i = \sigma_\varepsilon z_{0,t} + \sigma_u \sum_{i=1}^{t} z_{1,i} = \sigma_\varepsilon\left(z_{0,t} + \frac{\sigma_u}{\sigma_\varepsilon}\sum_{i=1}^{t} z_{1,i}\right) \tag{2.6}$$

El estimador MCO de $\boldsymbol{\beta}_p$ y los correspondientes residuos vienen dados por

$$\sqrt{n}\boldsymbol{D}_p^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}-\boldsymbol{\beta}_p)=\left(\tfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{x}}_{j,p}\tilde{\boldsymbol{x}}'_{j,p}\right)^{-1}\tfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{x}}_{j,p}\eta_j = \bar{\boldsymbol{Q}}_n^{-1}(p)\bar{\boldsymbol{H}}_n(p) \tag{2.7}$$

con $\bar{\boldsymbol{Q}}_n(p)=\tfrac{1}{n}\tilde{\boldsymbol{Q}}_n(p)$ y $\bar{\boldsymbol{H}}_n(p)=\tfrac{1}{\sqrt{n}}\tilde{\boldsymbol{H}}_n(p)$, y

$$\hat{\eta}_{t,p} = \eta_t - \tilde{\boldsymbol{x}}'_{t,p}\boldsymbol{D}_p^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}-\boldsymbol{\beta}_p) = \eta_t - \tfrac{1}{\sqrt{n}}\tilde{\boldsymbol{x}}'_{t,p}\sqrt{n}\boldsymbol{D}_p^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}-\boldsymbol{\beta}_p) \;\; t = 1, \dots, n \tag{2.8}$$

de forma que el proceso de suma parcial normalizada de residuos MCO viene dado por

$$\tfrac{1}{\sqrt{n}}\hat{S}_{[nr],p} = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\hat{\eta}_{t,p} = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\eta_t - \tfrac{1}{n}\sum_{t=1}^{[nr]}\tilde{\boldsymbol{x}}'_{t,p}\sqrt{n}\boldsymbol{D}_p^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}-\boldsymbol{\beta}_p) \tag{2.9}$$

o bien como

$$\tfrac{1}{n\sqrt{n}}\hat{S}_{[nr],p} = \tfrac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\hat{\eta}_{t,p} = \tfrac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\eta_t - \tfrac{1}{n}\sum_{t=1}^{[nr]}\tilde{\boldsymbol{x}}'_{t,p}n^{-1/2}\boldsymbol{D}_p^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}-\boldsymbol{\beta}_p) \tag{2.10}$$

con diferentes factores de normalización, $n^{-1/2}$ y $n^{-3/2}$, de forma que

$$n^{-1/2}\boldsymbol{D}_p^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}-\boldsymbol{\beta}_p) = \left(\tfrac{1}{n}\tilde{\boldsymbol{Q}}_n(p)\right)^{-1}\tfrac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{x}}_{j,p}\eta_j = \bar{\boldsymbol{Q}}_n^{-1}(p)\tfrac{1}{n}\bar{\boldsymbol{H}}_n(p) \tag{2.11}$$

con (2.10) y (2.11) apropiados para establecer la consistencia y distribución asintótica nula bajo la alternativa de raíz unitaria. Por otro lado, a partir de (2.8), se tiene que la varianza residual viene dada por

$$\begin{aligned}\hat{G}_{n,p}(0) = \tfrac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\hat{\eta}_{t,p}^2 = \tfrac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\eta_t^2 + \tfrac{1}{n}\left\{(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}-\boldsymbol{\beta}_p)'\boldsymbol{D}_p^{-1}\sqrt{n}\left(\sum_{t=1}^{n}\tfrac{\tilde{\boldsymbol{x}}_{t,p}\tilde{\boldsymbol{x}}'_{t,p}}{n}\right)\sqrt{n}\boldsymbol{D}_p^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}-\boldsymbol{\beta}_p)\right\}\\ -\tfrac{2}{n}\left\{(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}-\boldsymbol{\beta}_p)'\boldsymbol{D}_p^{-1}\sqrt{n}\left(\sum_{t=1}^{n}\tfrac{\tilde{\boldsymbol{x}}'_{t,p}\eta_t}{\sqrt{n}}\right)\right\}\end{aligned} \tag{2.12}$$

Puesto que $\bar{\boldsymbol{Q}}_n(p) \to \int_0^1 \boldsymbol{x}_p(s)\boldsymbol{x}'_p(s)ds$, cuando $n \to \infty$, y empleando (2.4), se tiene que bajo la hipótesis nula de estacionariedad

$$\sqrt{n}\boldsymbol{D}_p^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n} - \boldsymbol{\beta}_p) \Rightarrow \omega_\varepsilon \left(\int_0^1 \boldsymbol{x}_p(s)\boldsymbol{x}'_p(s)ds\right)^{-1} \int_0^1 \boldsymbol{x}_p(s)dW_0(s) \quad n \to \infty \tag{2.13}$$

entonces, (2.12) puede escribirse como

$$\hat{G}_{n,p}(0) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2 + O_p(n^{-1}) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} z_{0,t}^2 + O_p(n^{-1}) = G_n(0) + o_p(1) \quad n \to \infty \tag{2.14}$$

puesto que los dos términos entre corchetes en el segundo miembro de (2.12) son $O_p(1)$, de forma que escalados por $n^{-1}$, son $o_p(1)$. De forma similar, puesto que la covarianza muestral de orden $h$ viene dada por

$$\begin{aligned}\hat{G}_{n,p}(h) = \frac{1}{n}\sum_{t=h+1}^{n}\hat{\eta}_{t,p}\hat{\eta}_{t-h,p} &= \frac{1}{n}\sum_{t=h+1}^{n}\eta_t\eta_{t-h} - \frac{1}{n}\left\{(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n} - \boldsymbol{\beta}_p)'\boldsymbol{D}_p^{-1}\sqrt{n}\left(\sum_{t=h+1}^{n}\frac{\tilde{x}'_{t,p}\eta_{t-h}}{\sqrt{n}} + \sum_{t=h+1}^{n}\frac{\tilde{x}'_{t-h,p}\eta_t}{\sqrt{n}}\right)\right\} \\ &+ \frac{1}{n}\left\{(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n} - \boldsymbol{\beta}_p)'\boldsymbol{D}_p^{-1}\sqrt{n}\left(\sum_{t=h+1}^{n}\frac{\tilde{x}_{t,p}\tilde{x}'_{t-h,p}}{n}\right)\sqrt{n}\boldsymbol{D}_p^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n} - \boldsymbol{\beta}_p)\right\}\end{aligned} \tag{2.15}$$

si los límites de $\sum_{t=h+1}^{n}\frac{\tilde{x}'_{t,p}\eta_{t-h}}{\sqrt{n}}, \sum_{t=h+1}^{n}\frac{\tilde{x}'_{t-h,p}\eta_t}{\sqrt{n}}$, y $\sum_{t=h+1}^{n}\frac{\tilde{x}_{t,p}\tilde{x}'_{t-h,p}}{n}$ existen y son finitos, entonces

$$\hat{G}_{n,p}(h) = \frac{1}{n}\sum_{t=h+1}^{n}\varepsilon_t\varepsilon_{t-h} + O_p(n^{-1}) = \sigma_\varepsilon^2\frac{1}{n}\sum_{t=h+1}^{n} z_{0,t}z_{0,t-h} + O_p(n^{-1}) = G_n(h) + o_p(1) \quad n \to \infty \tag{2.16}$$

Bajo la hipótesis nula de estacionariedad y condiciones de regularidad estándar sobre las propiedades estocásticas de los términos de error, tales como estacionariedad de segundo orden y ergodicidad, entonces $G_n(h) \xrightarrow{p} \sigma_\varepsilon^2\gamma_0(h)$ (*c.s.*), de forma que el estimador no paramétrico de la varianza a largo plazo basado en residuos MCO será un estimador consistente de la varianza a largo plazo de los términos de error, es decir,

$$\hat{\omega}_n^2(m_n) = \sum_{h=-(n-1)}^{(n-1)} w(h, m_n)\hat{G}_{n,p}(h) \xrightarrow{p} \omega_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2\omega_0^2 \tag{2.17}$$

donde $w(h,m_n)$ es una función kernel[2] (de ponderación) de las autocovarianzas y $m_n$ es el parámetro bandwidth (o de truncamiento de retardo), fijo o estocástico, tal que debe verificar $m_n^{-1} = o_p(1)$ y $m_n = o_p(n^{1/2})$ para la consistencia de la estimación[3]. Así, bajo la hipótesis nula de estacionariedad estocástica, y empleando (2.4) y (2.13), se tiene que

$$\tfrac{1}{\sqrt{n}}\hat{S}_{[nr],p} \Rightarrow \omega_\varepsilon B_{0,p}(r) \quad n \to \infty \tag{2.18}$$

donde

---

[2] La función kernel $w(x)$ tiene soporte $[-1,1]$, $w(0) = 1$, es simétrico en torno a cero y continuo en todo el intervalo, salvo en un número finito de puntos. Además, debe verificar que $\int w(u)du = 1$ y $\int|\psi(u)|du < \infty$, donde $\psi(u) = (1/(2\pi))\int_{-\infty,\infty} w(s)exp(ius)ds$. Todas las funciones kernel utilizadas habitualmente en el contexto de la estimación consistente a heterocedasticidad y/o autocorrelación (HAC) satisfacen estas condiciones de regularidad, incluyendo los kernel de Bartlett, Parzen y Cuadrático espectral, que son los más utilizados en la práctica.

[3] Además de los abundantes trabajos y monográficos existentes al respecto (ver, por ejemplo, den Haan y Levin (1997)), en relación con la determinación del parámetro bandwidth en el contexto de la computación de los contrastes de estacionariedad, pueden consultarse Carrion-i-Silvestre y Sansó (2006) y Xiao y Lima (2007).

$$B_{0,p}(r) = W_0(r) - \int_0^r \boldsymbol{x}'_p(s)ds \left( \int_0^1 \boldsymbol{x}_p(s)\boldsymbol{x}'_p(s)ds \right)^{-1} \int_0^1 \boldsymbol{x}_p(s)dW_0(s) \tag{2.19}$$

es un proceso de puente Browniano generalizado de orden $p$, mientras que bajo la alternativa, teniendo en cuenta que en (2.6) $\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\eta_t = \sigma_u \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{[nr]}(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{t} z_{1,i}) + o_p(1)$, con $\sigma_u \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{[nr]}(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{t} z_{1,i}) \Rightarrow \omega_u \int_0^r W_1(s)ds$, entonces $\frac{1}{\sqrt{n}}\hat{S}_{[nr],p} = O_p(n)$ y $\frac{1}{n\sqrt{n}}\hat{S}_{[nr],p} \Rightarrow \omega_u \int_0^r B_{1,p}(s)ds$, con $B_{1,p}(r) = W_1(s) - \boldsymbol{x}'_p(s)\left(\int_0^1 \boldsymbol{x}_p(a)\boldsymbol{x}'_p(a)da\right)^{-1}\int_0^1 \boldsymbol{x}_p(a)W_1(a)da$. Para $p$ = 0, $B_{1,0}(r)$ es un proceso de Wiener corregido por el nivel y para $p$ = 1, $B_{1,1}(r)$ un proceso de Wiener corregido por el nivel y una tendencia lineal. En Phillips (1991) se prueba que bajo la alternativa $(n{\cdot}m_n)^{-1}\hat{\omega}_n^2(m_n) \to K\omega_u^2\int_0^1 B_{1,p}(s)^2 ds$, con $K = \int_{-1}^1 w(s)ds$, de forma que $\hat{\omega}_n^2(m_n) = O_p(n{\cdot}m_n)$.

Con todos estos resultados es posible determinar las principales propiedades estocásticas de los estadísticos de contraste de la hipótesis nula de estacionariedad más habitualmente utilizados en la práctica y estudiados teóricamente y que serán también objeto de analisis en este trabajo. Estos son el estadístico KPSS de Kwiatkowski et.al. (1992), el estadístico V/S de Giraitis et.al. (2003) y el estadístico KS de Xiao (2001), dados por

$$\hat{M}_{n,p}^{(1)}(m_n) = \frac{1}{n{\cdot}\hat{\omega}_n^2(m_n)}\sum_{t=1}^{n}(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\hat{S}_{t,p})^2 \tag{2.20}$$

$$\hat{M}_{n,p}^{(2)}(m_n) = \frac{1}{n{\cdot}\hat{\omega}_n^2(m_n)}\left\{\sum_{t=1}^{n}(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\hat{S}_{t,p})^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{t=1}^{n}\tfrac{1}{\sqrt{n}}\hat{S}_{t,p}\right)^2\right\} \tag{2.21}$$

$$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(m_n) = \frac{1}{\hat{\omega}_n(q_n)}\max_{t=1,\dots,n}\left|\tfrac{1}{\sqrt{n}}\hat{S}_{t,p} - \tfrac{t}{n}(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\hat{S}_{n,p})\right| \tag{2.22}$$

respectivamente, donde $\hat{M}_{n,p}^{(2)}(m_n) = \hat{M}_{n,p}^{(1)}(m_n) - \frac{(\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}\hat{S}_{t,p})^2}{n^2\cdot\hat{\omega}_n^2(m_n)}$, con $\sum_{t=1}^{n}\hat{S}_{t,p}$ = 0 si la regresión auxiliar contiene una tendencia lineal y donde $\hat{S}_{n,p}$ = 0 en (2.22) si la regresión contiene una constante. Estos estadísticos difieren en la forma de cuantificar fluctuaciones excesivas en el proceso $\hat{S}_{[nr],p}$, $0 \le r \le 1$, como forma de recoger evidencia suficiente a favor de la alternativa de raíz unitaria. Bajo $H_0$ se tiene, por el Teorema del Mapeado Continuo, $\hat{M}_{n,p}^{(1)}(m_n) \Rightarrow \int_0^1 B_{0,p}(s)^2 ds$, $\hat{M}_{n,p}^{(2)}(m_n) \Rightarrow \int_0^1 B_{0,p}(s)^2 ds - \left(\int_0^1 B_{0,p}(s)ds\right)^2$ y $\hat{M}_{n,p}^{(3)}(m_n) \Rightarrow \sup_{0\le s\le 1}|B_{0,p}(s) - sB_{0,p}(1)|$.

Frente a estos contrastes, basados en identificar fluctuaciones excesivas en el nivel del proceso, Xiao y Lima (2007) proponen un contraste que permite distinguir procesos estacionarios en covarianza de una gran variedad de alternativas posibles, incluyendo un proceso I(1) donde no sólo el nivel sino también la varianza es cambiante (creciente) en el tiempo. Si se define el proceso bivariante $\boldsymbol{z}_t = (\eta_t, \upsilon_t)'$, con $\upsilon_t = \eta_t^2 - \sigma_\eta^2$, $\sigma_\eta^2 = E[\eta_t^2]$, entonces bajo el mismo conjunto de condiciones de regularidad que antes y el supuesto adicional de existencia del momento de cuarto orden de los errores, $E[\varepsilon_t^4] < \infty$, se tiene que $z_t$ satisface un principio de invarianza bivariante, de la forma $n^{-1/2}\sum_{t=1}^{[nr]} z_t \Rightarrow \boldsymbol{\Omega}^{-1/2}\boldsymbol{W}(r)$, con $\boldsymbol{W}(r) = (W_0(r), W_\upsilon(r))'$ y $\boldsymbol{\Omega}$ la matriz de varianzas-covarianzas a largo plazo de los procesos $\{\eta_t\}$ y $\{\upsilon_t\}$. Reemplazando estos procesos por sus estimaciones MCO, con $\hat{\boldsymbol{z}}_{t,p}$ = $(\hat{\eta}_{t,p}, \hat{\upsilon}_{t,n})'$, donde $\hat{\upsilon}_{t,n} = \hat{\eta}_{t,p}^2 - \hat{G}_{n,p}(0)$, y la matriz $\boldsymbol{\Omega}$ por su estimación basada en estimaciones noparamétricas de las correspondientes varianzas y covarianzas a largo plazo entre $\hat{\eta}_{t,p}$ y $\hat{\upsilon}_{t,n}$, entonces bajo la hipótesis nula de estacionariedad en covarianza, dada por la misma hipótesis que antes, $\sigma_u^2 = 0$, se tiene que

$$\hat{\boldsymbol{B}}_{[nr],p} = \hat{\boldsymbol{\Omega}}_n^{-1/2}(m_n)\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\hat{\boldsymbol{z}}_{t,p} \Rightarrow \boldsymbol{B}_p(r) = \begin{pmatrix} B_{0,p}(r) \\ B_\upsilon(r) \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

con $B_{0,p}(r)$ dado en la ecuación (2.19), y $B_\upsilon(r) = W_\upsilon(r) - rW_\upsilon(1)$ un puente Browniano estándar. Este resultado permite construir un estadístico de contraste tipo CUSUM generalizado, de la forma $\hat{C}_{n,p}(m_n) = \max_{t=1,\ldots,n} \| \hat{\boldsymbol{B}}_{t,p} \|$, con $\hat{\boldsymbol{B}}_{t,p} = (\hat{B}_{t,p}, \hat{B}_{t,n})'$ y distribución asintótica nula $\sup_{0\le r\le 1} \| \boldsymbol{B}_p(r) \|$. Entre las posibles elecciones de la norma del vector en (2.23), Xiao y Lima (2007) consideran la norma-$L_1$, $\| \hat{\boldsymbol{B}}_{t,p} \| = | \hat{B}_{t,p} | + | \hat{B}_{t,n} |$, puesto que la función módulo es menos sensible a observaciones anómalas o influyentes.

## 3. El modelo de nivel local generalizado con outliers de series temporales

En esta sección se plantea una generalización del modelo de nivel local generalizado dado en (2.1)-(2.2) introduciendo perturbaciones en los componentes estocásticos del modelo en forma de outliers de tipo aditivo (AOs), tanto de naturaleza determinista (intervenciones) como estocástica empleando, en este caso, una formulación general para un proceso estocástico de salto tipo Bernoulli. Se tiene así que el modelo de nivel-local generalizado con perturbaciones viene dado ahora por

$$y_t = \boldsymbol{x}_{t,p}'\boldsymbol{\beta}_p + w_t(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1}) + \varepsilon_t(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}) \tag{3.1}$$

y

$$w_t(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1}) = w_{t-1}(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1}) + u_t(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1}) \tag{3.2}$$

como ecuaciones de medida y de transición, respectivamente, donde los componentes de error son de la forma

$$\varepsilon_t(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}) = \varepsilon_t + \xi_t(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}) \tag{3.3}$$

y

$$u_t(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1}) = u_t + \xi_t(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1}) \tag{3.4}$$

donde $\xi_t(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i})$, $i$ = 0,1 es el proceso de contaminación generador de outliers de tipo aditivo. En lo que sigue se consideran dos tipos fundamentales de mecanismo generador de outliers aditivos: un modelo de intervenciones y un proceso estocástico de saltos (en tiempo discreto) de tipo Bernoulli, que se describen a continuación.

**Modelo A. Modelo de intervenciones.** En este caso se tiene que la función determinista $\xi_t(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i})$, $i = 0, 1$, admite la siguiente representación

$$\xi_t(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i}) = \boldsymbol{\varphi}'_{t,k_i}(\boldsymbol{\lambda}_i)\boldsymbol{\delta}_{k_i} = \sum_{j=1}^{k_i} I_t(\lambda_{ij})\delta_{ij} \tag{3.5}$$

con $\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i} = (\lambda_{ij}, \delta_{ij}), j = 1,...,k_i$, $\boldsymbol{\varphi}'_{t,k_i}(\boldsymbol{\lambda}_i) = (I_t(\lambda_{i1}),...,I_t(\lambda_{ik_i}))$, $I_t(\lambda_{ij})$ una función indicador definida como $I_t(\lambda_{ij}) = I(t = [n\lambda_{ij}])$, donde $\lambda_{ij} \in (0,1)$ representa la localización relativa del outlier $j$-ésimo, y con $\boldsymbol{\delta}_{k_i} = (\delta_{i1},....,\delta_{ik_i})$ el vector de magnitudes de los outliers aditivos y $\boldsymbol{\gamma}_k = (\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}, \boldsymbol{\gamma}_{1,k_1})$ el vector que agrupa a los parámetros que determinan la estructura de contaminación en ambas ecuaciones (número, localizaciones y magnitudes). A partir de (3.5) se pueden obtener los siguientes casos particulares:

**A.1** AO individual: si $k_i = 1$ para $i = 0,1$,

**A.2** Múltiples AOs aislados: con $k_i > 1$, $i = 0,1$, el número de outliers generados,

**A.3** Racha de AOs: con $k_i > 1$, $i = 0,1$, con $[n\lambda_{ij}] = [n\lambda_{i,j-1}]+1$, $j = 1, ..., k_i$, y

**A.4** Múltiples AOs con recolocación: racha de AOs con $\sum_{i=1,k_i} \delta_{ij} = 0$.

Adicionalmente, puede introducirse cierto grado de persistencia del efecto de los AOs, mediante la siguiente generalización de la función $\boldsymbol{\varphi}'_{t,k_i}(\boldsymbol{\lambda}_i)$,

$$\boldsymbol{\varphi}'_{t,k_i}(\boldsymbol{\lambda}_i) = (\phi_{i1}^{t-[n\lambda_{i1}]} h_t(\lambda_{i1}),...,\phi_{ik_i}^{t-[n\lambda_{ik_i}]} h_t(\lambda_{ik_i})), \tag{3.6}$$

donde ahora $h_t(\lambda_{ij}) = I(t \geq [n\lambda_{ij}])$ es una función escalón, y donde $|\phi_{ij}| < 1$, $j = 1, ..., k_i$.

**Modelo B. Modelo de saltos estocástico.** En este caso se tiene que

$$\xi_t(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i}) = B_t(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i})(\delta_{i0} + \delta_{i1}v_{it}),\ i = 0,1 \tag{3.7}$$

donde $\{v_{it}\}$ es una secuencia iid con media nula, varianza $\sigma^2_{v_i} > 0$ y momento de cuarto orden finito, $(\delta_{i0}, \delta_{i1})'$ son constantes y $B_t(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i})$ es un proceso tipo Bernoulli que admite las dos representaciones siguientes dependiendo del tipo específico de contaminación considerado. Además, los procesos $\xi_t(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})$ y $\xi_t(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1})$ son independientes.

**B.1 AOs aislados persistentes ($k_i$ = 1).** En este caso se tiene que

$$B_t(\boldsymbol{\gamma}_{i,1}) = \frac{\tilde{B}_t(\boldsymbol{\pi}_{i,1})}{1-\rho_i L}, \quad 0 \leq |\rho_i| \leq 1 \tag{3.8}$$

donde $\pi_{i,1j} = P(\tilde{B}_t(\boldsymbol{\pi}_{i,1}) = (-1)^{j+1})$ ($j$=1,2), con $P(\tilde{B}_t(\boldsymbol{\pi}_{i,1})=0)=1-(\pi_{i,11}+\pi_{i,12})$, $\boldsymbol{\pi}_{i,1} = (\pi_{i,11}, \pi_{i,12})$ y $\tilde{B}_t(\boldsymbol{\pi}_{i,1})$ una secuencia iid de Bernoulli con soporte (1,–1,0) y las probabilidades dadas. El caso $\rho_i = 0$ se corresponde con la contaminación por un AO puro, $0 < |\rho_i| < 1$ hace referencia a un cambio temporal (o cambio en nivel transitorio, es decir, a un AO persistente), mientras que el caso $|\rho_i| = 1$ se refiere a un cambio permanente en el nivel. En este trabajo se consideran únicamente los casos con $|\rho_i| < 1$, donde la vida media del efecto es $m(\rho_i) = |\rho_i|/(1-|\rho_i|)$ y la duración mediana $M(\rho_i) = log(0.5)/log(|\rho_i|)-1$.

**B.2 Racha de AOs de longitud $k_i$ > 1.** Siguiendo a Martin y Yohai (1986) y van Dijk et.al. (1999), una forma de generar una racha de un cierto número de AOs consiste en introducir correlación en la secuencia $B_t(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i})$, como sigue

$$B_t(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i}) = \tilde{B}_t(\boldsymbol{\pi}_{i,1}) \cdot I_t(k_i, \pi_{0,i}),\ I_t(k_i, \pi_{0,i}) = I\left(\sum_{h=0}^{k_i-1} |W_{t-h}(\pi_{0,i})| > 0\right) \tag{3.9}$$

donde $I_t(k_i, \pi_{0,i})$ es la función indicador de la condición señalada en (3.9), con $W_t(\pi_{0,i})$ una secuencia iid con $P(W_t(\pi_{0,i}) \neq 0) = \pi_{0,i}$, y $P(W_t(\pi_{0,i}) = 0) = 1-\pi_{0,i}$, y donde $\tilde{B}_t(\boldsymbol{\pi}_{i,1})$ es como en B.1, con $\pi_{i,12} = 1-\pi_{i,11}$. Así, se tiene que $P(B_t(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i}) = (-1)^{j+1}) = \pi_{i,1j}\pi_{i,0k_i}$, $j$ = 1, 2, y $P(B_t(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i})=0)=1-\pi_{i,0k_i}$, donde $\pi_{i,0k_i} = 1-(1-\pi_{0,i})^{k_i} = k_i\pi_{0,i} + o(\pi_{0,i})$, para $k_i\pi_{0,i}$ pequeño, de forma que el número esperado de outliers generado en una muestra de tamaño $n$ es $n \cdot \pi_{i,0k_i} = nk_i\pi_{0,i} + o(1)$, en bloques de tamaño $k_i$, aproximadamente. Por construcción, esta secuencia es un proceso ($k_i$–1)-dependiente, con autocovarianzas no nulas hasta el orden $k_i$–1. En Afonso-Rodríguez (2009, 2010) se obtienen las principales características de estos dos tipos de procesos estocásticos de salto, en términos de momentos y estructura de autocovarianzas. Otero y Smith (2005) consideran un caso particular de (3.7)-(3.8), con $\delta_{01} = 0$, $\pi_{0,11} = \pi_{0,12} = \pi_{0,1}/2$ y $\boldsymbol{\pi}_{1,1} = (0,0)$ (es decir, el caso de outliers aislados persistentes, con efecto nulo en el nivel y únicamente en la ecuación de medida).

Así, en ambos casos, (B.1) y (B.2), la secuencia $B_t(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i})$ es estacionaria, lo que determina la estacionariedad de $\xi_t(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i})$ en (3.7). De esta forma, puesto que en general se tiene que $\mu_1(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i}) = E[\xi_t(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i})] = \delta_{i0}E[B_t(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i})]$ no es cero, entonces

$$W_{[nr]}(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i})=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\xi_t(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i})=\mu_1(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i})\frac{[nr]}{\sqrt{n}}+\tilde{W}_{[nr]}(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i}) \tag{3.10}$$

donde se asume que se verifica

$$\tilde{W}_{[nr]}(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i})=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}(\xi_t(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i})-\mu_1(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i}))=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\tilde{\xi}_t(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i})\Rightarrow\omega_0(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i})\cdot\tilde{W}_i(r) \tag{3.11}$$

con $\tilde{W}_i(r)$, $i$ = 0,1 un proceso de Wiener estándar y $\omega_0^2(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i})$ la varianza a largo plazo del proceso $\tilde{\xi}_t(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i})$. Con todo esto, para implementar los anteriores contrastes de estacionariedad, la regresión auxiliar a estimar por MCO viene dada por

$$y_t=\boldsymbol{x}'_{t,p}\boldsymbol{\beta}_p+\eta_t(\boldsymbol{\gamma}_k) \tag{3.12}$$

donde

$$\eta_t(\boldsymbol{\gamma}_k)=\eta_t+F_t(\boldsymbol{\gamma}_k) \tag{3.13}$$

con $\eta_t$ como en (2.6) y donde la función $F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)$ recoge los efectos de los outliers generados tanto en la ecuación de medida y de transición de la forma

$$F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)=\xi_t(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})+\sum_{s=1}^{t}\xi_s(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1}) \tag{3.14}$$

En caso del modelo de intervenciones, considerando (3.5) y (3.6), se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)=\sum_{j=1}^{k_0}\tfrac{\delta_{0j}}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}g_{t,\lambda_{0j}}(\phi_{0j})+\sum_{j=1}^{k_1}\tfrac{\delta_{1j}}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}G_{t,\lambda_{1j}}(\phi_{1j}) \tag{3.15}$$

donde

$$g_t(\phi_{ij})=\begin{cases}I_t(\lambda_{ij}) & \text{si } \phi_{ij}=0\\ \phi_{ij}^{t-[n\lambda_{ij}]}h_t(\lambda_{ij}) & \text{si} \mid\phi_{ij}\mid<1(\phi_{ij}\neq 0)\end{cases} \tag{3.16}$$

y

$$G_{t,\lambda_{ij}}(\phi_{ij})=\begin{cases}h_t(\lambda_{ij}) & \text{si } \phi_{ij}=0\\ \sum_{s=1}^{t}g_{s,\lambda_{ij}}(\phi_{ij})=\sum_{s=0}^{t-[n\lambda_{ij}]}\phi_{ij}^{s}\cdot h_t(\lambda_{ij})=\frac{(1-\phi_{ij}^{t-[n\lambda_{ij}]+1})}{1-\phi_{ij}}\cdot h_t(\lambda_{ij}) & \text{si} \mid\phi_{ij}\mid<1(\phi_{ij}\neq 0)\end{cases} \tag{3.17}$$

mientras que en el caso del modelo de saltos estocástico, empleando (3.10), se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)&=W_{[nr]}(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})+\sum_{t=1}^{[nr]}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{s=1}^{t}\xi_s(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1})=W_{[nr]}(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})+\sum_{t=1}^{[nr]}W_t(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1})\\&=\mu_1(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})\tfrac{[nr]}{\sqrt{n}}+\mu_1(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1})\tfrac{[nr]([nr]+1)}{2\sqrt{n}}+\tilde{W}_{[nr]}(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})+n\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{[nr]}\tilde{W}_t(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1})\right)\end{aligned} \tag{3.18}$$

donde

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{[nr]}\tilde{W}_t(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i})\Rightarrow\omega_0(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i})\cdot\int_0^r\tilde{W}_i(s)ds,\ i=0,\ 1 \tag{3.19}$$

por (3.11), y $\mu_1(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i})=\delta_{i0}E[B_t(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i})]=\delta_{i0}\tau_1(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i})$, $i$ = 0, 1. Estos resultados básicos permitirán en la siguiente sección, junto con una serie de supuestos adicionales relativos a las magnitudes de los distintos tipos de AOs, establecer el comportamiento y distribución asintótica de los contrastes de estacionariedad considerados anteriormente bajo este tipo de perturbaciones.

## 4. Estimación MCO, residuos y estadísticos de contraste bajo contaminación

A partir de (3.12)-(3.13), se tiene ahora que el estimador MCO del vector $\boldsymbol{\beta}_p$ y el $t$-ésimo residuo MCO vienen dados por

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\boldsymbol{D}_p^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}(\boldsymbol{\gamma}_k)-\boldsymbol{\beta}_p) &= \bar{\boldsymbol{Q}}_n^{-1}(p)\tfrac{1}{\sqrt{n}}\tilde{\boldsymbol{H}}_n(p)+\bar{\boldsymbol{Q}}_n^{-1}(p)\tfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{x}}_{t,p}F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)\\ &= \sqrt{n}\boldsymbol{D}_p^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}-\boldsymbol{\beta}_p)+\bar{\boldsymbol{Q}}_n^{-1}(p)\tfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{x}}_{t,p}F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)\end{aligned} \tag{4.1}$$

y

$$\begin{aligned}\hat{\eta}_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_k) &= \eta_t(\boldsymbol{\gamma}_k)-\boldsymbol{x}'_{t,p}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}(\boldsymbol{\gamma}_k)-\boldsymbol{\beta}_p)\\ &= \hat{\eta}_{t,p}+F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)-\tfrac{1}{\sqrt{n}}\tilde{\boldsymbol{x}}'_{t,p}\bar{\boldsymbol{Q}}_n^{-1}(p)\tfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{s=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{x}}_{s,p}F_s(\boldsymbol{\gamma}_k)\end{aligned} \tag{4.2}$$

con $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}$ y $\hat{\eta}_{t,p}$ el estimador MCO de $\boldsymbol{\beta}_p$ y $t$-ésimo residuo MCO en el caso de no contaminación, ecuaciones (2.7) y (2.8). Así, el proceso de suma parcial normalizado de residuos MCO, ecuación (2.9), viene dado por

$$\tfrac{1}{\sqrt{n}}\hat{S}_{[nr],p}(\boldsymbol{\gamma}_k)=\tfrac{1}{\sqrt{n}}\hat{S}_{[nr],p}+\tfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)-\tfrac{1}{n}\sum_{t=1}^{[nr]}\tilde{\boldsymbol{x}}'_{t,p}\,\bar{\boldsymbol{Q}}_n^{-1}(p)\tfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{s=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{x}}_{s,p}F_s(\boldsymbol{\gamma}_k) \tag{4.3}$$

Así, en el caso del modelo de intervenciones, se tiene además de (3.15), que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\tilde{\boldsymbol{x}}_{t,p}F_t(\boldsymbol{\gamma}_k) &= \sum_{j=1}^{k_0}\tfrac{\delta_{0j}}{\sqrt{n}}\sum_{t=[n\lambda_{0j}]}^{n}\phi_{0j}^{t-[n\lambda_{0j}]}\tilde{\boldsymbol{x}}_{t,p}+\sum_{j=1}^{k_1}\tfrac{\delta_{1j}}{\sqrt{n}(1-\phi_{1j})}\sum_{t=[n\lambda_{1j}]}^{n}(1-\phi_{1j}^{t-[n\lambda_{1j}]+1})\tilde{\boldsymbol{x}}_{t,p}\\ &= \sum_{j=1}^{k_0}\tfrac{\delta_{0j}}{\sqrt{n}}\sum_{t=[n\lambda_{0j}]}^{n}\phi_{0j}^{t-[n\lambda_{0j}]}\tilde{\boldsymbol{x}}_{t,p}+\sum_{j=1}^{k_1}\tfrac{\delta_{1j}}{\sqrt{n}(1-\phi_{1j})}\left\{\sum_{t=[n\lambda_{1j}]}^{n}\tilde{\boldsymbol{x}}_{t,p}-\sum_{t=[n\lambda_{1j}]}^{n}\phi_{1j}^{t-[n\lambda_{1j}]+1}\tilde{\boldsymbol{x}}_{t,p}\right\}\end{aligned} \tag{4.4}$$

que se reduce a

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\tilde{\boldsymbol{x}}_{t,p}F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)=\sum_{j=1}^{k_0}\tfrac{\delta_{0j}}{\sqrt{n}}\tilde{\boldsymbol{x}}_{[n\lambda_{0j}],p}+\sum_{j=1}^{k_1}\tfrac{\delta_{1j}}{\sqrt{n}}\sum_{t=[n\lambda_{1j}]}^{n}\tilde{\boldsymbol{x}}_{t,p} \tag{4.5}$$

en el caso de AOs no persistentes, es decir, si $\phi_{ij}=0$, para todo $j = 1, ..., k_i$, $i = 0, 1$, mientras que bajo el modelo de contaminación por un proceso estocástico de salto, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\tilde{\boldsymbol{x}}_{t,p}F_t(\boldsymbol{\gamma}_k) &= \mu_1(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\tilde{\boldsymbol{x}}_{t,p}+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\tilde{\boldsymbol{x}}_{t,p}\xi_t(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})\\ &+\mu_1(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1})\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}t\cdot\tilde{\boldsymbol{x}}_{t,p}+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\tilde{\boldsymbol{x}}_{t,p}\sum_{s=1}^{t}\xi_t(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1})\end{aligned} \tag{4.6}$$

donde $\tilde{\xi}_t(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i}) = \xi_t(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i}) - \mu_1(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i})$, $i$ = 0,1. Con objeto de obtener límites finitos bajo la hipótesis nula de estacionariedad para las cantidades $n^{-1/2}\sum_{t=1}^{[nr]} F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)$ en (3.15), (3.18) y para $n^{-1/2}\sum_{t=1}^{[nr]} \tilde{\boldsymbol{x}}_{t,p} F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)$ en (4.4), (4.6), se introduce el siguiente supuesto relativo a las magnitudes de los outliers.

**Supuesto M. Magnitudes de los efectos de los AOs bajo estacionariedad**

**(M.1) Caso de outliers deterministas no persistentes**
Se supone que $\delta_{0j} = c_{0j}\cdot\sqrt{n}$, mientras que $\delta_{1j} = c_{1j}/\sqrt{n}$, con $c_{ij} \in \mathbb{R}$ y finito, $j$ = 1, ..., $k_i$, de forma que $n^{-1/2}\delta_{0j} = c_{0j} = O(1)$, y $n^{1/2}\delta_{1j} = c_{1j} = O(1)$. Así, para cualquier $0 < \alpha < 1/2$, se tiene que $n^{-(1/2+\alpha)}\delta_{0j} = n^{(1/2-\alpha)}\delta_{1j} = c_{ij}\cdot n^{-\alpha} = o(1)$ y, por tanto, $\delta_{0j} = o(n^{1/2+\alpha})$ y $\delta_{1j} = o(n^{-(1/2-\alpha)})$.

**(M.2) Caso de outliers deterministas persistentes**
Se supone que $\delta_{ij} = c_{ij}/\sqrt{n}$, con $c_{ij} \in \mathbb{R}$ y finito para todo $j$ = 1, ..., $k_i$, $i$ = 0,1. Para cualquier $0 < \alpha < 1/2$, se tiene que $n^{(1/2-\alpha)}\delta_{ij} = c_{ij}\cdot n^{-\alpha} = o(1)$ y, por tanto, $\delta_{ij} = o(n^{-(1/2-\alpha)})$.

**(M.3) Caso de outliers estocásticos**
Se supone que $\delta_{00} = c_{00}/\sqrt{n}$, $\delta_{11} = c_{11}/(n\sqrt{n})$, de forma que $\mu_1(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}) = \frac{c_{00}}{\sqrt{n}}\tau_1(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})$ y $\mu_1(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}) = \frac{c_{11}}{n\sqrt{n}}\tau_1(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1})$, y $\omega_0^2(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1}) = (\frac{c_1}{n})^2$, con $c_{00}$, $c_{11}$ y $c_1$ cantidades finitas y $c_1 > 0$.

**Comentario 1.** Si en (4.4) y (4.5) se tuviese $\delta_{ij} = O(n^{1/2-\alpha})$ y en (4.6) $\delta_{00} = O(n^{-(1/2+\alpha)})$, $\delta_{01} = O(n^{-(3/2+\alpha)})$, $\omega_0^2(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}) = O(n^{-2(1-\alpha)})$ y $\omega_0^2(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1}) = O(n^{-2(1+\alpha)})$, con $0<\alpha<1/2$, entonces se tendría que $n^{-1/2}\sum_{t=1}^{[nr]} \tilde{\boldsymbol{x}}_{t,p} F_t(\boldsymbol{\gamma}_k) = O_p(n^{-\alpha})$ y, por tanto, el efecto de la contaminación sería asintóticamente nulo e incluso podría ser poco relevante en muestras pequeñas para $\alpha$ próximo a 1/2.

Por otro lado, si para cualquier par de valores $r$, $h \in [0,1]$ con $r > h$ , se considera que $n^{-1}\sum_{t=[nh]}^{[nr]} \tilde{\boldsymbol{x}}_{t,p} \to \boldsymbol{z}_p(r,h) = \int_h^r \boldsymbol{x}_p(s)ds$ , con $\boldsymbol{z}_p(r,0) = \boldsymbol{z}_p(r)$, entonces en (4.4) y (4.5) se tiene

$$\boldsymbol{z}_{p,n}(1,\lambda_{1j}) = \frac{1}{n}\sum_{t=[n\lambda_{1j}]}^{n} \tilde{\boldsymbol{x}}_{t,p} \to \boldsymbol{z}_p(1,\lambda_{1j}) = \int_{\lambda_{1j}}^{1} \boldsymbol{x}_p(s)ds \tag{4.7}$$

Finalmente, para evaluar el límite de (3.15) y (4.4) para $\phi_{ij} \neq 0$ se introduce el siguiente Lema 1 basado en una representación aproximada del parámetro AR(1) $\phi_{ij}$, que determina el grado de persistencia del efecto de la perturbación.[4]

[4] Esta representación se sigue de la aproximación de Phillips (1987) para definir el proceso límite Ornstein-Uhlenbeck para una autorregresión de primer orden con una raíz próxima a la unidad, lo que permite medir las desviaciones respecto de la teoría para procesos de raíz unitaria mediante un parámetro de no centralidad. En nuestro caso se considera únicamente la persistencia durante un intervalo de tiempo finito, de forma que el supuesto $|\phi_{ji}| < 1$ implica la siguiente restricción para el parámetro $\tau_{ji}$: $-2n < \tau_{ji} < 0$.

**Lema 1.** *En el caso de contaminación por AOs persistentes* (*modelo A con* $|\phi_{ij}| < 1$, $\phi_{ij}\neq 0$)*, se tiene que la siguiente representación aproximada para el coeficiente autorregresivo*

$$\phi_{ji} = 1+\tfrac{\tau_{ji}}{n} \sim \exp(\tfrac{\tau_{ji}}{n}) \tag{4.8}$$

*con* $-2n < \tau_{ji} < 0$*, implica que*

$$\frac{1}{n}\sum_{t=[n\lambda_{ij}]}^{n} \phi_{ij}^{t-[n\lambda_{ij}]}\tilde{\boldsymbol{x}}_{t,p} \to \int_{\lambda_{ij}}^{1} e^{(s-\lambda_{ij})\tau_{ij}} d\boldsymbol{z}_p(s) = \boldsymbol{J}_{p,\tau_{ij}}(1,\lambda_{ij}) \tag{4.9}$$

*con* $\boldsymbol{J}_{\tau_{ij}}(1,\lambda_{ij}) = \int_{\lambda_{ij}}^{1} e^{(s-\lambda_{ij})\tau_{ij}} ds$ *en el caso* $p = 0$.

**Prueba.** A partir de la representación aproximada (4.8) y (4.7), se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{t=[n\lambda_{ij}]}^{n} \phi_{ij}^{t-[n\lambda_{ij}]}\tilde{\boldsymbol{x}}_{t,p} &= \frac{1}{n}\sum_{t=[n\lambda_{ij}]}^{n} e^{(t-[n\lambda_{ij}])\tau_{ij}/n}\tilde{\boldsymbol{x}}_{t,p} = \sum_{t=[n\lambda_{ij}]}^{n} e^{(t-[n\lambda_{ij}])\tau_{ij}/n}\int_{(t-1)/n}^{t/n} d\boldsymbol{z}_{p,n}(s) \\
&= \sum_{t=[n\lambda_{ij}]}^{n}\int_{(t-1)/n}^{t/n} e^{(s-\lambda_{ij})\tau_{ij}} d\boldsymbol{z}_{p,n}(s) = \int_{\lambda_{ij}}^{1} e^{(s-\lambda_{ij})\tau_{ij}} d\boldsymbol{z}_{p,n}(s) \\
&\to \int_{\lambda_{ij}}^{1} e^{(s-\lambda_{ij})\tau_{ij}} d\boldsymbol{z}_p(s) = \boldsymbol{J}_{p,\tau_{ij}}(1,\lambda_{ij})
\end{aligned}$$

■

Así, bajo los supuestos (M.1), (M.2) y el Lema 1, en el Apéndice A se han obtenido los siguientes límites para (3.15),

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]} F_t(\boldsymbol{\gamma}_k) \to F(r,\boldsymbol{\gamma}_k) \tag{4.10}$$

con

$$\begin{aligned}
F(r,\boldsymbol{\gamma}_k) &= \sum_{i=1}^{k_0} c_{0i} I(r \geq \lambda_{0i}) + \sum_{i=1}^{k_1} c_{1i}(r-\lambda_{1i}) I(r\geq \lambda_{1i}) \quad \text{si } \phi_{ij}=0 \\
&= \sum_{j=1}^{k_0} c_{0j}\boldsymbol{J}_{\tau_{0j}}(r,\lambda_{0j}) I(r\geq\lambda_{0j}) \\
&+ \sum_{j=1}^{k_1} \tfrac{c_{1j}}{1-\phi_{1j}}[(r-\lambda_{1j}) - \phi_{1j}\boldsymbol{J}_{\tau_{1j}}(r,\lambda_{1j})] I(r\geq\lambda_{1j}) \quad \text{si} |\phi_{ij}|<1 (\phi_{ij}\neq 0)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

mientras que para (4.4) y (4.5) se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]} \tilde{\boldsymbol{x}}_{t,p} F_t(\boldsymbol{\gamma}_k) \to \boldsymbol{F}_p(r,\boldsymbol{\gamma}_k) \tag{4.12}$$

con

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_p(r,\boldsymbol{\gamma}_k) &= \sum_{j=1}^{k_0} c_{0j}\boldsymbol{x}_p(\lambda_{0j}) + \sum_{j=1}^{k_1} c_{1j}\boldsymbol{z}_p(1,\lambda_{1j}) \quad \text{si } \phi_{ij}=0 \\
&= \sum_{j=1}^{k_0} c_{0j}\boldsymbol{J}_{p,\tau_{0j}}(1,\lambda_{0j}) + \sum_{j=1}^{k_1}\tfrac{c_{1j}}{1-\phi_{1j}}[\boldsymbol{z}_p(1,\lambda_{1j}) - \boldsymbol{J}_{p,\tau_{1j}}(1,\lambda_{1j})] \quad \text{si} |\phi_{ij}|<1 (\phi_{ij}\neq 0)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Por otro lado, en el caso de contaminación por outliers estocásticos, teniendo en cuenta el supuesto (M.3), los resultados de convergencia en (3.11) y (3.19) y llamando $d_{10}(r,\boldsymbol{\gamma}_k) = 1+\frac{c_{11}}{c_{00}}\frac{\tau_1(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1})}{\tau_1(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})} r$ , los límites en (4.10) y (4.12) para (3.18) y (4.6) vienen dados por

$$F(r,\boldsymbol{\gamma}_k) = c_{00}\tau_1(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}) r d_{10}(r,\boldsymbol{\gamma}_k) + \omega_0(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})\left(\tilde{W}_0(r) + \tfrac{c_1}{\omega_0(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})}\int_0^r \tilde{W}_1(s)ds\right) \quad (4.14)$$

y

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_p(r,\boldsymbol{\gamma}_k) &= c_{00}\tau_1(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})\int_0^r d_{10}(s,\boldsymbol{\gamma}_k)\boldsymbol{x}_p(s)ds \\ &\quad + \omega_0(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})\left(\int_0^r \boldsymbol{x}_p(s)d\tilde{W}_0(s) + \tfrac{c_1}{\omega_0(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})}\int_0^r \boldsymbol{x}_p(s)\tilde{W}_1(s)ds\right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

respectivamente. Si se definen ahora las autocovarianzas muestrales entre las secuencias $\{\hat{\eta}_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_k),\ \hat{\eta}_{t-h,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)\}$, $\{\hat{\upsilon}_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_k),\ \hat{\upsilon}_{t-h,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)\}$ y $\{\hat{\eta}_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_k),\ \hat{\upsilon}_{t-h,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)\}$ como

$$\hat{G}_{n,p}(h,\boldsymbol{\gamma}_k) = \frac{1}{n}\sum_{t=h+1}^{n}\hat{\eta}_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)\hat{\eta}_{t-h,p}(\boldsymbol{\gamma}_k) \quad (4.16)$$

$$\hat{V}_{n,p}(h,\boldsymbol{\gamma}_k) = \frac{1}{n}\sum_{t=h+1}^{n}\hat{\upsilon}_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)\hat{\upsilon}_{t-h,p}(\boldsymbol{\gamma}_k) \quad (4.17)$$

y

$$\hat{C}_{n,p}(h,\boldsymbol{\gamma}_k) = \frac{1}{n}\sum_{t=h+1}^{n}\hat{\eta}_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)\hat{\upsilon}_{t-h,p}(\boldsymbol{\gamma}_k) \quad (4.18)$$

donde

$$\hat{\upsilon}_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_k) = \hat{\eta}^2_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_k) - \hat{G}_{n,p}(0,\boldsymbol{\gamma}_k) \quad (4.19)$$

se tiene el siguiente Lema 2 relativo a la estructura de estas covarianzas muestrales bajo cada uno de los distintos tipos de contaminación por AOs considerados en este trabajo.

**Lema 2.** *Empleando los residuos MCO en el modelo de nivel-local generalizado bajo contaminación por AOs, tanto en la ecuación de medida como de transición, para uno de los distintos tipos de perturbación considerados, y bajo el supuesto M sobre la magnitud del efecto de los outliers, se tiene que:*

$(i)$ $\hat{G}_{n,p}(h,\boldsymbol{\gamma}_k) = \hat{G}_{n,p}(h) + G(h,\boldsymbol{\gamma}_k) + o_p(1)$

$(ii)$ $\hat{V}_{n,p}(h,\boldsymbol{\gamma}_k) = \hat{V}_{n,p}(h) + V(h,\boldsymbol{\gamma}_k) + o_p(1)$

$(iii)$ $\hat{C}_{n,p}(h,\boldsymbol{\gamma}_k) = \hat{C}_{n,p}(h) + C(h,\boldsymbol{\gamma}_k) + o_p(1)$

*con* $G(h,\boldsymbol{\gamma}_k) = V(h,\boldsymbol{\gamma}_k) = C(h,\boldsymbol{\gamma}_k) = 0$ *en el caso del Modelo A con* $\phi_{ij} \neq 0$, *y*

$$G(h,\boldsymbol{\gamma}_k) = \begin{cases} \sum_{j_1=1}^{k_0}\sum_{j_2=1}^{k_0} c_{0j_1}c_{0j_2}g_{h,n}(\lambda_{0j_1},\lambda_{0j_2}) & \textbf{Modelo A}:\phi_{ij}=0 \\ \Gamma_h(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}) & \textbf{Modelo B} \end{cases} \quad (4.20)$$

$$V(h,\boldsymbol{\gamma}_k) = \begin{cases} n\sum_{j_1=1}^{k_0}\sum_{j_2=1}^{k_0} c^2_{0j_1}c^2_{0j_2}(g_{h,n}(\lambda_{0j_1},\lambda_{0j_2}) - \tfrac{1}{n}) & \textbf{Modelo A}:\phi_{ij}=0 \\ \Gamma^{2,2}_h(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}) & \textbf{Modelo B} \end{cases} \quad (4.21)$$

$$C(h,\boldsymbol{\gamma}_k) = \begin{cases} \sqrt{n}\sum_{j_1=1}^{k_0}\sum_{j_2=1}^{k_0} c_{0j_1}c^2_{0j_2}g_{h,n}(\lambda_{0j_1},\lambda_{0j_2}) & \textbf{Modelo A}:\phi_{ij}=0 \\ \Gamma^{1,2}_h(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}) & \textbf{Modelo B} \end{cases} \quad (4.22)$$

*donde* $\Gamma^{r,s}_h(\gamma_{0,k_0}) = Cov[\xi^r_t(\gamma_{0,k_0}), \xi^s_{t-h}(\gamma_{0,k_0})]$, *r,s = 1,2, y se asume que tales varianzas y covarianzas existen y son finitas.*

**Prueba.** Ver Apéndice B

**Comentario 2.** Los resultados dados en el Lema 2 implican que las estimaciones no paramétricas de las varianzas y covarianzas a largo plazo basadas en las secuencias de residuos obtenidos en el modelo bajo perturbación por AOs vienen dadas por

$$\hat{\omega}_n^2(m_n,\boldsymbol{\gamma}_k)=\hat{\omega}_n^2(m_n)+\sum_{h=-(n-1)}^{(n-1)} w(h,m_n)G(h,\boldsymbol{\gamma}_k)+o_p(1) \tag{4.23}$$

$$\hat{V}_n^2(m_n,\boldsymbol{\gamma}_k)=\hat{V}_n^2(m_n)+\sum_{h=-(n-1)}^{(n-1)} w(h,m_n)V(h,\boldsymbol{\gamma}_k)+o_p(1) \tag{4.24}$$

y

$$\hat{C}_n^2(m_n,\boldsymbol{\gamma}_k)=\hat{C}_n^2(m_n)+\sum_{h=-(n-1)}^{(n-1)} w(h,m_n)C(h,\boldsymbol{\gamma}_k)+o_p(1) \tag{4.25}$$

de forma que, siempre que las cantidades en (4.20)-(4.22) sean finitas y presenten un decrecimiento geométrico, entonces bajo la hipótesis nula de estacionariedad se tendría que

$$\hat{\omega}_n^2(m_n,\boldsymbol{\gamma}_k)\xrightarrow{p}\omega_\varepsilon^2\left(1+\tfrac{G(\boldsymbol{\gamma}_k)}{\omega_\varepsilon^2}\right),\ \hat{V}_n^2(m_n,\boldsymbol{\gamma}_k)\xrightarrow{p}\omega_\upsilon^2\left(1+\tfrac{V(\boldsymbol{\gamma}_k)}{\omega_\upsilon^2}\right),\ \hat{C}_n^2(m_n,\boldsymbol{\gamma}_k)\xrightarrow{p}\omega_{\eta\upsilon}\left(1+\tfrac{C(\boldsymbol{\gamma}_k)}{\omega_{\eta\upsilon}}\right) \tag{4.26}$$

donde se ha llamado

$$G(\boldsymbol{\gamma}_k)=\sum_{h=-(n-1)}^{(n-1)} w(h,m_n)G(h,\boldsymbol{\gamma}_k), V(\boldsymbol{\gamma}_k)=\sum_{h=-(n-1)}^{(n-1)} w(h,m_n)V(h,\boldsymbol{\gamma}_k), C(\boldsymbol{\gamma}_k)=\sum_{h=-(n-1)}^{(n-1)} w(h,m_n)C(h,\boldsymbol{\gamma}_k) \tag{4.27}$$

Con todos estos resultados, se está ya en disposición de enunciar el siguiente Teorema que permitirá establecer la distribución asintótica nula de los estadísticos de contraste KPSS, V/S, KS y de fluctuaciones de Xiao y Lima (2007) construidos empleando el proceso de suma parcial de residuos MCO en el modelo bajo contaminación dado en (4.3) y el proceso de suma parcial de residuos cuadráticos centrados (ecuación (4.19)).

**Teorema 1.** *Bajo la hipótesis nula de estacionariedad estocástica y el supuesto (M), relativo a la magnitud de los efectos de los outliers aditivos, tanto en el caso de intervenciones como para el proceso estocástico de salto tipo Bernoulli, se tiene que:*

$$(i)\ \ \tfrac{1}{\sqrt{n}}\hat{S}_{[nr],p}(\boldsymbol{\gamma}_k)\Rightarrow\omega_\varepsilon B_{0,p}(r)+B_p(r,\boldsymbol{\gamma}_k)=\omega_\varepsilon\left(B_{0,p}(r)+\tfrac{B_p(r,\boldsymbol{\gamma}_k)}{\omega_\varepsilon}\right)$$

$$(ii)\ \ \tfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\hat{\upsilon}_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)\Rightarrow\omega_\upsilon B_\upsilon(r)+\tilde{F}_2(r,\boldsymbol{\gamma}_k)=\omega_\upsilon\left(B_\upsilon(r)+\tfrac{\tilde{F}_2(r,\boldsymbol{\gamma}_k)}{\omega_\upsilon}\right)$$

*con $B_{0,p}(r)$ y $B_\upsilon(r)$ dados en (2.19) y (2.23),*

$$B_p(r,\boldsymbol{\gamma}_k)=F(r,\boldsymbol{\gamma}_k)-\boldsymbol{z}_p(r)\left(\int_0^1\boldsymbol{x}_p(r)\boldsymbol{x}_p'(r)ds\right)^{-1}\boldsymbol{F}_p(r,\boldsymbol{\gamma}_k),$$

*donde los límites $F(r,\boldsymbol{\gamma}_k)$* y *$\boldsymbol{F}_p(r,\boldsymbol{\gamma}_k)$ vienen dados en* (4.11), (4.13) *y* (4.14), (4.15)*, respectivamente, para los modelos A y B de contaminación, mientras que $\tilde{F}_2(r,\boldsymbol{\gamma}_k)$ es el límite de $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}F_t^2(\boldsymbol{\gamma}_k)-\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}F_t^2(\boldsymbol{\gamma}_k)$, dado por:*

$$\begin{aligned}\tilde{F}_2(r,\boldsymbol{\gamma}_k)&=\sqrt{n}\sum_{j=1}^{k_0}c_{0j}^2(I(\lambda_{0j}\le r)-r) && \textbf{Modelo A}:\phi_{ij}=0\\ &=V^{1/2}(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})\tilde{W}_{0,2}(r) && \textbf{Modelo B}\end{aligned}$$

*y $\tilde{F}_2(r,\boldsymbol{\gamma}_k)=0$ en el caso de intervenciones con persistencia* (**Modelo A** *con* $\phi_{ij}\neq 0$).

**Prueba.** Ver Apéndice C

El siguiente Corolario 1 establece finalmente, empleando estos resultados, la distribución asintótica nula de los estadísticos de contraste de estacionariedad en torno a un componente determinista de primer orden, KPSS, V/S y KS, y de estacionariedad en covarianza de Xiao y Lima (2007), frente a la alternativa de no estacionariedad estocástica bajo contaminación por outliers aditivos. Para este último, se define, como en (2.23), el proceso de sumas parciales bivariante como

$$\hat{\boldsymbol{B}}_{[nr],p}(\boldsymbol{\gamma}_k) = \hat{\boldsymbol{\Omega}}_n^{-1/2}(m_n, \boldsymbol{\gamma}_k)\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\hat{\boldsymbol{z}}_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)\,. \tag{4.28}$$

**Corolario 1. Distribuciones asintóticas nula de los estadísticos de contraste.** *Bajo la hipótesis nula de estacionariedad estocástica y las condiciones y supuestos que determinan los resultados obtenidos en el Teorema 1, se tiene que:*

$$(i)\quad \hat{M}_{n,p}^{(1)}(m_n,\boldsymbol{\gamma}_k) \Rightarrow (1+\tfrac{G(\boldsymbol{\gamma}_k)}{\omega_\varepsilon^2})^{-1}\int_0^1 (B_{0,p}(s)+\tfrac{B_p(s,\boldsymbol{\gamma}_k)}{\omega_\varepsilon})^2\,ds$$

$$(ii)\quad \hat{M}_{n,p}^{(2)}(m_n,\boldsymbol{\gamma}_k) \Rightarrow (1+\tfrac{G(\boldsymbol{\gamma}_k)}{\omega_\varepsilon^2})^{-1}\left\{\int_0^1 (B_{0,p}(s)+\tfrac{B_p(s,\boldsymbol{\gamma}_k)}{\omega_\varepsilon})^2\,ds - \left(\int_0^1 (B_{0,p}(s)+\tfrac{B_p(s,\boldsymbol{\gamma}_k)}{\omega_\varepsilon})ds\right)^2\right\}$$

$$(iii)\quad \hat{M}_{n,p}^{(3)}(m_n,\boldsymbol{\gamma}_k) \Rightarrow (1+\tfrac{G(\boldsymbol{\gamma}_k)}{\omega_\varepsilon^2})^{-1/2}\sup_{0\le s\le 1}|(B_{0,p}(s)+\tfrac{B_p(s,\boldsymbol{\gamma}_k)}{\omega_\varepsilon}) - s\cdot(B_{0,p}(1)+\tfrac{B_p(1,\boldsymbol{\gamma}_k)}{\omega_\varepsilon})|$$

$$(iv)\quad \hat{\boldsymbol{B}}_{[nr],p}(\boldsymbol{\gamma}_k) = \hat{\boldsymbol{\Omega}}_n^{-1/2}(m_n,\boldsymbol{\gamma}_k)\tfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\hat{\boldsymbol{z}}_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_k) \Rightarrow (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}))^{-1/2}\boldsymbol{B}_p(r,\boldsymbol{\gamma}_k)$$

*donde en* (*iv*)*, se tiene que*

$$\boldsymbol{B}_p(r,\boldsymbol{\gamma}_k) = \boldsymbol{B}_p(r) + \boldsymbol{\Omega}^{-1/2}\left\{\begin{pmatrix} d(r,\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}) \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{\Sigma}^{1/2}(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})\begin{pmatrix} B_p(r,\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}) \\ \bar{F}_2(r,\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d(r,\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1}) + B_p(r,\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1}) \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

*con* $\boldsymbol{B}_p(r)$ *dado en* (*2.23*)*,* $d(r,\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})$ *y* $d(r,\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1})$ *son funciones deterministas dadas en* (*D.7*)*,* (*D.10*)*,* $B_p(r,\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})$ *y* $B_p(r,\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1})$*, que vienen dadas en (D.8) y (D.11), son como en (2.19) reemplazando* $W_0(r)$ *por* $\tilde{W}_0(r)$ *y* $c_1\int_0^r \tilde{W}_1(s)ds$*, respectivamente. Además, se tiene que* $\bar{F}_2(r,\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}) = \tilde{F}_2(r,\boldsymbol{\gamma}_k)$ *ó* $\bar{F}_2(r,\boldsymbol{\gamma}_k) = \tilde{W}_{0,2}(r)$*, y con* $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}) = \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}) = \begin{pmatrix} G(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}) & C(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}) \\ & V(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}) \end{pmatrix}$ *en el caso de outliers estocásticos y* $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}) = \boldsymbol{I}$ *en el caso de outliers deterministas.*

**Prueba.** Apéndice D.

**Comentario 3.** En el caso de contaminación por outliers aditivos con efecto persistente, donde se tiene que $G(\boldsymbol{\gamma}_k) = 0$, el efecto de las perturbaciones en la distribución asintótica de los estadísticos en (*i*)-(*iii*) indica un incremento en el tamaño empírico de cada uno de los contrastes cuando se emplean las distribuciones habituales, puesto que sólo se manifiesta a través de un incremento en la magnitud de los mismos. En el resto de casos posibles el efecto neto será el resultado del tradeoff entre efecto en el numerador y denominador de cada uno de los estadísticos de contraste. En cuanto al comportamiento del estadístico de fluctuaciones de Xiao y Lima (2007), ecuación (*iv*), se produce el mismo efecto cuando $\phi_{ij} \neq 0$, puesto que $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\gamma}_k) = \boldsymbol{0}$, aunque en este caso la distorsión se transmite únicamente a través del elemento $B_p(r,\gamma_k)$ (ver Teorema 1).

**Comentario 4.** Dado el supuesto M sobre las magnitudes de los efectos de los outliers aditivos y bajo la alternativa de raíz unitaria, $\sigma_u^2 > 0$, siempre que $\sigma_u^2 > \sigma_\varepsilon^2$ de forma que domine el componente no estacionario en (2.6), entonces en (4.3) se tiene que $\frac{1}{\sqrt{n}}\hat{S}_{[nr],p}(\gamma_k) = O_p(n)$, de forma que los contrastes siguen siendo consistentes, como en el caso estándar del modelo libre de contaminación. Por otro lado, bajo este mismo conjunto de supuestos y la secuencia de alternativas locales $\sigma_u^2 = (\frac{c}{n})^2$, $c > 0$, las distribuciones asintóticas bajo las alternativas de estos estadísticos de contraste son también como en el caso de no contaminación, con el proceso límite $B_{0,p}(r)$ reemplazado por $B_{1,p}(r)$.

## 5. Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado el comportamiento de los principales estadísticos utilizados habitualmente para el contraste de la hipótesis nula de estacionariedad de primer y segundo orden en el caso de perturbación por outliers de tipo aditivo de los componentes estocásticos en las ecuaciones de medida y de transición del modelo de nivel-local generalizado. Se ha considerado, de forma muy general, el caso tanto de intervenciones (outliers deterministas con efectos persistentes y no persistentes) como de outliers estocásticos generados por un proceso estocástico de saltos de tipo Bernoulli. Se puede concluir que la presencia de observaciones anómalas de cualquiera de los tipos considerados provocará distorsiones en el comportamiento de estos estadísticos de contraste, generalmente en términos de un aumento del tamaño empírico de los contrastes mostrando, por tanto, una tendencia a identificar erróneamente no estacionariedad estocástica. Empleando el mismo conjunto de supuestos que ha permitido el análisis de este comportamiento bajo la hipótesis nula I(0), la potencia de estos contrastes no se verá afectada.

## Bibliografía


Afonso-Rodríguez, J.A. (2009), "Covariance stationarity tests with additive outliers and random measurement errors", en: Computers and Simulation in Modern Science, pp. 154-159. Eds.: Mastorakis, N., M. Demiralp, I. Rudas y C.A. Bulucea. WSEAS Press.

Afonso-Rodríguez, J.A. (2010), "Contrastes CUSUM de cuadrados para el contraste de inestabilidad estructural en procesos GARCH(1,1) con outliers en nivel y en volatilidad". Mimeografía.

Carrion-i-Silvestre, J.L. y A. Sansó (2006), "A guide to the computation of stationarity tests", Empirical Economics, Vol.31, pp.433-448.

den Haan, W. y A. Levin (1997), "A practitioners guide to robust covariance matrix estimation", en Handbook of Statistics, Vol.15 (Robust Inference). Eds.: G.S. Maddala y C.R. Rao. Amsterdam: North-Holland, pp.299-342.

Giraitis, L.P., R.L. Kokoszka y G. Teyssiere (2003), "Rescaled variance and related tests for long memory in volatility and levels", Journal of Econometrics, Vol.112(2), 265-294.

Kwiatkowski, D., P.C.B. Phillips, P. Schmidt y Y. Shin (1992), "Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root", Journal of Econometrics, Vol.54(1-3), 159-178.

Martin, R.D. y V.J. Yohai (1986), "Influence functionals for time series", The Annals of Statistics, Vol.14(3), pp.781-818.

Otero, J. y J. Smith (2005), "The KPSS test with outliers", Computational Economics, Vol.26, pp.241-249.

Phillips, P.C.B. (1987), "Towards a unified asymptotic theory for autoregression", Biometrika, Vol.74(3), 535-547.

Phillips, P.C.B. (1991), "Spectral regression for cointegrated time series", en: W. Barnett, ed., Nonparametric and semiparametric methods in economics and statistics. Cambridge University Press, Cambridge.

van Dijk, D., P.H. Franses y A. Lucas (1999), "Testing for ARCH in the presence of additive outliers", Journal of Applied Econometrics, Vol.14(5), pp.539-562.

Xiao, Z. (2001), "Testing the null hypothesis of stationarity against an autoregressive unit root alternative", Journal of Time Series Analysis, Vol.22(1), 87-103.

Xiao, Z. y L.R. Lima (2007), "Testing covariance stationarity", Econometric Reviews, Vol.6(6), 643-667.

## Apéndice A. Límite del proceso de suma parcial normalizado de la función de influencia $F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)$ en el caso de intervenciones

Dadas las ecuaciones (3.15)-(3.17), con $\phi_{ij} = 0$, entonces bajo el supuesto (M.1) se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]} F_t(\boldsymbol{\gamma}_k) &= \sum_{i=1}^{k_0}\tfrac{\delta_{0i}}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]} I_t(\lambda_{0i}) + \sum_{i=1}^{k_1}\delta_{1i}\tfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]} h_t(\lambda_{1i}) \\ &= \sum_{i=1}^{k_0} c_{0i} I(r \ge \lambda_{0i}) + \sum_{i=1}^{k_1} c_{1i}\tfrac{1}{n}\sum_{t=1}^{[nr]} h_t(\lambda_{1i}) \\ &= \sum_{i=1}^{k_0} c_{0i} I(r \ge \lambda_{0i}) + \sum_{i=1}^{k_1} c_{1i}\left(\tfrac{1}{n}\sum_{t=[n\lambda_{1i}]}^{[nr]} h_t(\lambda_{1i})\right) I(r \ge \lambda_{1i})\end{aligned} \tag{A.1}$$

donde

$$\tfrac{1}{n}\sum_{t=1}^{[nr]} h_t(\lambda_{1i}) = I(r \ge \lambda_{1i})\left(\tfrac{1}{n}\sum_{t=[n\lambda_{1i}]}^{[nr]} h_t(\lambda_{1i})\right) = I(r \ge \lambda_{1i})\frac{([nr]-[n\lambda_{1i}]+1)}{n} \tag{A.2}$$

de forma que, para $n \to \infty$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]} F_t(\boldsymbol{\gamma}_k) \to F(r,\boldsymbol{\gamma}_k) = \sum_{i=1}^{k_0} c_{0i} I(r \ge \lambda_{0i}) + \sum_{i=1}^{k_1} c_{1i}(r-\lambda_{1i}) I(r \ge \lambda_{1i}) \tag{A.3}$$

Por otro lado, considerando en (3.16)-(3.17) el caso de outliers persistentes, con $|\phi_{ij}| < 1\,(\phi_{ij} \ne 0)$, se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]} F_t(\boldsymbol{\gamma}_k) = \sum_{j=1}^{k_0}\tfrac{\delta_{0j}}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\phi_{0j}^{t-[n\lambda_{0j}]} h_t(\lambda_{0j}) + \sum_{j=1}^{k_1}\tfrac{\delta_{1j}}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\tfrac{(1-\phi_{1j}^{t-[n\lambda_{1j}]+1})}{1-\phi_{1j}}\cdot h_t(\lambda_{1j}) \tag{A.4}$$

que, bajo el supuesto (M.2), puede escribirse también como

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]} F_t(\boldsymbol{\gamma}_k) = \sum_{j=1}^{k_0} c_{0j}\left(\tfrac{1}{n}\sum_{t=[n\lambda_{0j}]}^{[nr]}\phi_{0j}^{t-[n\lambda_{0j}]}\right) I(r \ge \lambda_{0j}) + \sum_{j=1}^{k_1} c_{1j}\left(\tfrac{1}{n}\sum_{t=[n\lambda_{1j}]}^{[nr]}\tfrac{(1-\phi_{1j}^{t-[n\lambda_{1j}]+1})}{1-\phi_{1j}}\right) I(r \ge \lambda_{1j}) \tag{A.5}$$

Entonces, para $r \ge \lambda_{0i}$ y utilizando el Lema 1, entonces para $n \to \infty$,

$$\tfrac{1}{n}\sum_{t=[n\lambda_{0j}]}^{[nr]}\phi_{0j}^{t-[n\lambda_{0j}]} \to \int_{\lambda_{0j}}^{r} e^{(s-\lambda_{0j})\tau_{0j}}\,ds = \boldsymbol{J}_{\tau_{0j}}(r,\lambda_{0j}) \tag{A.6}$$

mientras que para $r \ge \lambda_{1i}$, se tiene que

$$\frac{1}{n}\sum_{t=[n\lambda_{1j}]}^{[nr]}\frac{(1-\phi_{1j}^{t-[n\lambda_{1j}]+1})}{1-\phi_{1j}}=\frac{1}{n(1-\phi_{1j})}\sum_{t=[n\lambda_{1j}]}^{[nr]}(1-\phi_{1j}^{t-[n\lambda_{1j}]+1})=\frac{1}{1-\phi_{1j}}\left(\frac{([nr]-[n\lambda_{1j}]+1)}{n}-\frac{\phi_{1j}}{n}\sum_{t=[n\lambda_{1j}]}^{[nr]}\phi_{1j}^{t-[n\lambda_{1j}]}\right)$$
$$\to\frac{1}{1-\phi_{1j}}\left((r-\lambda_{1j})-\phi_{1j}\int_{\lambda_{1j}}^{r}e^{(s-\lambda_{1j})\tau_{1j}}ds\right)=\frac{1}{1-\phi_{1j}}[(r-\lambda_{1j})-\phi_{1j}\boldsymbol{J}_{\tau_{1j}}(r,\lambda_{1j})] \quad \text{(A.7)}$$

Por tanto, en el caso de AOs persistentes, se tiene el límite no estocástico

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)\to F(r,\boldsymbol{\gamma}_k)=\sum_{j=1}^{k_0}c_{0j}\boldsymbol{J}_{\tau_{0j}}(r,\lambda_{0j})I(r\geq\lambda_{0j})$$
$$+\sum_{j=1}^{k_1}\frac{c_{1j}}{1-\phi_{1j}}[(r-\lambda_{1j})-\phi_{1j}\boldsymbol{J}_{\tau_{1j}}(r,\lambda_{1j})]I(r\geq\lambda_{1j}) \quad \text{(A.8)}$$

## Apéndice B. Prueba del Lema 2

A partir de los resultados en (4.10)-(4.15), se tiene que $\boldsymbol{b}_{n,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)=\bar{\boldsymbol{Q}}_n^{-1}(p)\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{s=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{x}}_{s,p}F_s(\boldsymbol{\gamma}_k)=O_p(1)$, $d_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)=\frac{1}{\sqrt{n}}\tilde{\boldsymbol{x}}'_{t,p}\boldsymbol{b}_{n,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)=O_p(n^{-1/2})$, y $a_{t,t-h}(p,\boldsymbol{\gamma}_k)=d_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)d_{t-h,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)=O_p(n^{-1})$, de forma que el $t$-ésimo residuo MCO en (4.2) puede escribirse como

$$\hat{\eta}_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)=\hat{\eta}_{t,p}+F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)-\frac{1}{\sqrt{n}}\tilde{\boldsymbol{x}}'_{t,p}\boldsymbol{b}_{n,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)=\hat{\eta}_{t,p}+F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)+O_p(n^{-1/2}) \quad \text{(B.1)}$$

y, de la misma forma, el $t$-ésimo residuo cuadrático viene dado por

$$\hat{\eta}^2_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)=\hat{\eta}^2_{t,p}+F_t^2(\boldsymbol{\gamma}_k)+O_p(n^{-1}) \quad \text{(B.2)}$$

Sea $\hat{G}_{n,p}(h,\boldsymbol{\gamma}_k)$, definido en (4.16), la autocovarianza muestral de orden $h$ de los residuos MCO en (B.1). Bajo el supuesto (M) que determina un límite (determinista o estocástico) finito para $\boldsymbol{b}_{n,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)$ y empleando los mismos argumentos que en la sección 2 para obtener los límites (2.14) y (2.16) bajo la hipótesis nula de estacionariedad, se tiene que a partir de (B.1)

$$\hat{G}_{n,p}(h,\boldsymbol{\gamma}_k)=\hat{G}_{n,p}(h)+\frac{1}{n}\sum_{t=h+1}^{n}F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)F_{t-h}(\boldsymbol{\gamma}_k)+o_p(1) \quad \text{(B.3)}$$

con

$$\hat{G}_{n,p}(0,\boldsymbol{\gamma}_k)=\hat{G}_{n,p}(0)+\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}F_t^2(\boldsymbol{\gamma}_k)+o_p(1) \quad \text{(B.4)}$$

para $h$ = 0, de forma que, empleando (B.2) y (B.4), el $t$-ésimo residuo MCO cuadrático y centrado, $\hat{\upsilon}_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)=\hat{\eta}^2_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)-\hat{G}_{n,p}(0,\boldsymbol{\gamma}_k)$, puede escribirse también como

$$\hat{\upsilon}_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)=\hat{\upsilon}_{t,p}+F_t^2(\boldsymbol{\gamma}_k)-\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}F_s^2(\boldsymbol{\gamma}_k)+o_p(1) \quad \text{(B.5)}$$

De esta forma, se tiene que, bajo el mismo conjunto de supuestos, las autocovarianzas muestrales de las secuencias $\{\hat{\upsilon}_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_k),\hat{\upsilon}_{t-h,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)\}$, $\{\hat{\eta}_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_k),\hat{\upsilon}_{t-h,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)\}$, definidas en (4.17) y (4.18), pueden escribirse, aproximadamente, como

$$\hat{V}_{n,p}(h,\boldsymbol{\gamma}_k)=\hat{V}_{n,p}(h)+\frac{1}{n}\sum_{t=h+1}^{n}\left(F_t^2(\boldsymbol{\gamma}_k)-\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}F_s^2(\boldsymbol{\gamma}_k)\right)\left(F_{t-h}^2(\boldsymbol{\gamma}_k)-\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}F_s^2(\boldsymbol{\gamma}_k)\right)+o_p(1) \quad \text{(B.6)}$$

y

$$\hat{C}_{n,p}(h,\boldsymbol{\gamma}_k)=\hat{C}_{n,p}(h)+\frac{1}{n}\sum_{t=h+1}^{n}F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)\left(F_{t-h}^2(\boldsymbol{\gamma}_k)-\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}F_s^2(\boldsymbol{\gamma}_k)\right)+o_p(1) \quad \text{(B.7)}$$

respectivamente. Utilizando la ecuación (3.15), se tiene que en el caso de AOs deterministas no persistentes, $\phi_{ij}$ = 0, y bajo el supuesto (M.1), la función $F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)$ viene dada por

$$F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)=\sqrt{n}\sum_{j=1}^{k_0}c_{0j}I_t(\lambda_{0j})+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{k_1}c_{1j}h_t(\lambda_{1j}) \quad \text{(B.8)}$$

de forma que

$$\frac{1}{n}\sum_{t=h+1}^{n}F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)F_{t-h}(\boldsymbol{\gamma}_k)=\sum_{j_1=1}^{k_0}\sum_{j_2=1}^{k_0}c_{0j_1}c_{0j_2}g_{h,n}(\lambda_{0j_1},\lambda_{0j_2})+o(1) \quad \text{(B.9)}$$

con $g_{h,n}(\lambda_{0j_1},\lambda_{0j_2})=I(h=[n(\lambda_{0j_1}-\lambda_{0j_2})])$, mientras que en el caso de AOs deterministas persistentes, bajo el supuesto (M.2) sobre las magnitudes $\delta_{ij}$ de los efectos, con

$$F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{k_0}c_{0j}\phi_{0j}^{t-[n\lambda_{0j}]}h_t(\lambda_{0j})+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{k_1}\tfrac{c_{1j}}{1-\phi_{1j}}(1-\phi_{1j}^{t-[n\lambda_{1j}]+1})\cdot h_t(\lambda_{1j}) \tag{B.10}$$

se tiene que $n^{-1}\sum_{t=h+1}^{n}F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)F_{t-h}(\boldsymbol{\gamma}_k)=o(1)$ por el efecto de la normalización. Haciendo $h$ = 0 en (B.9), se tiene que

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}F_t^2(\boldsymbol{\gamma}_k)=\sum_{j=1}^{k_0}c_{0j}^2+o(1) \tag{B.11}$$

en el caso $\phi_{ij}$ = 0, mientras que es $o(1)$ en caso de outliers persistentes. Así, a partir del cuadrado de (B.8) y empleando (B.11), se tiene que

$$F_t^2(\boldsymbol{\gamma}_k)-\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}F_s^2(\boldsymbol{\gamma}_k)=n\sum_{j=1}^{k_0}c_{0j}^2I_t(\lambda_{0j})-\sum_{j=1}^{k_0}c_{0j}^2+o(1) \tag{B.12}$$

de forma que si se utiliza para (B.8) la siguiente representación $F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)=\sqrt{n}\sum_{j=1}^{k_0}c_{0j}I_t(\lambda_{0j})+o(1)$, cuando $n\to\infty$, entonces

$$\begin{aligned}F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)\left(F_{t-h}^2(\boldsymbol{\gamma}_k)-\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}F_s^2(\boldsymbol{\gamma}_k)\right)&=\sqrt{n}\sum_{j=1}^{k_0}c_{0j}I_t(\lambda_{0j})\left(n\sum_{j=1}^{k_0}c_{0j}^2I_{t-h}(\lambda_{0j})-\sum_{j=1}^{k_0}c_{0j}^2\right)+o(1)\\&=n\sqrt{n}\sum_{j_1=1}^{k_0}\sum_{j_2=1}^{k_0}c_{0j_1}c_{0j_2}^2I_t(\lambda_{0j_1})I_{t-h}(\lambda_{0j_2})-\sqrt{n}\sum_{j=1}^{k_0}c_{0j}^2\sum_{j=1}^{k_0}c_{0j}I_t(\lambda_{0j})+o(1)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\left(F_t^2(\boldsymbol{\gamma}_k)-\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}F_s^2(\boldsymbol{\gamma}_k)\right)\left(F_{t-h}^2(\boldsymbol{\gamma}_k)-\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}F_s^2(\boldsymbol{\gamma}_k)\right)&=n^2\sum_{j_1=1}^{k_0}\sum_{j_2=1}^{k_0}c_{0j_1}^2c_{0j_2}^2I_t(\lambda_{0j_1})I_{t-h}(\lambda_{0j_1})+\left(\sum_{j=1}^{k_0}c_{0j}^2\right)^2\\&\quad-n\sum_{j=1}^{k_0}c_{0j}^2\left(\sum_{j=1}^{k_0}c_{0j}^2I_t(\lambda_{0j})+\sum_{j=1}^{k_0}c_{0j}^2I_{t-h}(\lambda_{0j})\right)+o(1)\end{aligned}$$

Por tanto, en el caso de contaminación por outliers aditivos deterministas (intervenciones) y únicamente en el caso de outliers no persistentes, se tiene que las autocovarianzas en (B.3), (B.6) y (B.7) vienen dadas por

$$\hat{G}_{n,p}(h,\boldsymbol{\gamma}_k)=\hat{G}_{n,p}(h)+\sum_{j_1=1}^{k_0}\sum_{j_2=1}^{k_0}c_{0j_1}c_{0j_2}g_{h,n}(\lambda_{0j_1},\lambda_{0j_2})+o_p(1) \tag{B.13}$$

$$\begin{aligned}\hat{V}_{n,p}(h,\boldsymbol{\gamma}_k)&=\hat{V}_{n,p}(h)+n\sum_{j_1=1}^{k_0}\sum_{j_2=1}^{k_0}c_{0j_1}^2c_{0j_2}^2g_{h,n}(\lambda_{0j_1},\lambda_{0j_2})-\left(\sum_{j=1}^{k_0}c_{0j}^2\right)^2+o_p(1)\\&=\hat{V}_{n,p}(h)+n\sum_{j_1=1}^{k_0}\sum_{j_2=1}^{k_0}c_{0j_1}^2c_{0j_2}^2(g_{h,n}(\lambda_{0j_1},\lambda_{0j_2})-\tfrac{1}{n})+o_p(1)\end{aligned} \tag{B.14}$$

y

$$\hat{C}_{n,p}(h,\boldsymbol{\gamma}_k)=\hat{C}_{n,p}(h)+\sqrt{n}\sum_{j_1=1}^{k_0}\sum_{j_2=1}^{k_0}c_{0j_1}c_{0j_2}^2g_{h,n}(\lambda_{0j_1},\lambda_{0j_2})+o_p(1) \tag{B.15}$$

respectivamente. A pesar de que el término central en las expresiones (B.14) y (B.15) depende del tamaño muestral, puesto que aparecen las magnitudes relativas de impacto de los outliers aditivos en la ecuación de medida $c_{0j}$, $j$ = 1, ..., $k_0$, con $c_{0j}=\delta_{0j}/\sqrt{n}$ (supuesto (M.1)), es de esperar que estas magnitudes relativas sean pequeñas de forma que los términos indicados tengan magnitud finita y no diverjan con $n$ grande. Por tanto, se considera que estas cantidades son finitas y se designan como

$$G(h,\boldsymbol{\gamma}_k)=\sum_{j_1=1}^{k_0}\sum_{j_2=1}^{k_0}c_{0j_1}c_{0j_2}g_{h,n}(\lambda_{0j_1},\lambda_{0j_2}) \tag{B.16}$$

$$V(h,\boldsymbol{\gamma}_k)=n\sum_{j_1=1}^{k_0}\sum_{j_2=1}^{k_0}c_{0j_1}^2c_{0j_2}^2(g_{h,n}(\lambda_{0j_1},\lambda_{0j_2})-\tfrac{1}{n}) \tag{B.17}$$

$$C(h,\boldsymbol{\gamma}_k)=\sqrt{n}\sum_{j_1=1}^{k_0}\sum_{j_2=1}^{k_0}c_{0j_1}c_{0j_2}^2g_{h,n}(\lambda_{0j_1},\lambda_{0j_2}) \tag{B.18}$$

Por otro lado, en el caso de contaminación por outliers generados de acuerdo con el modelo B, proceso estocástico de saltos en tiempo discreto, se tiene que, a partir de (3.18) y bajo el supuesto (M.3),

$$\begin{aligned}F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)&=\tfrac{c_{00}}{\sqrt{n}}\tau_1(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})+\tfrac{c_{11}}{\sqrt{n}}\tau_1(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1})\tfrac{t}{n}+\xi_t(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})+\sum_{s=1}^{t}\xi_s(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1})\\&=\xi_t(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})+\sum_{s=1}^{t}\xi_s(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1})+o(1)=\xi_t(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})+o_p(1)\end{aligned} \tag{B.19}$$

y, de la misma forma

$$F_t^2(\boldsymbol{\gamma}_k)=\tilde{\xi}_t^2(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})+\left(\sum_{s=1}^{t}\overline{\xi}_s(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1})\right)^2+o_p(1)=\tilde{\xi}_t^2(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})+o_p(1) \tag{B.20}$$

puesto que se tiene $\overline{\xi}_t(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1})=\omega_0(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1})\overline{\xi}_t(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1})=\frac{c_1}{n}\overline{\xi}_t(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1})=O_p(n^{-1})$. Puesto que, por construcción, la secuencia $\{\tilde{\xi}_t(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})\}$ es estrictamente estacionaria y ergódica, y por la Ley Débil de los Grandes Números, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{t=h+1}^{n}F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)F_{t-h}(\boldsymbol{\gamma}_k)&=\frac{1}{n}\sum_{t=h+1}^{n}\tilde{\xi}_t(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})\tilde{\xi}_{t-h}(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})+o_p(1)\\&\to\lim_{n\to\infty}E[\tilde{\xi}_t(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})\tilde{\xi}_{t-h}(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})]=\Gamma_h(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})\end{aligned} \tag{B.21}$$

y

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}F_t^2(\boldsymbol{\gamma}_k)=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\tilde{\xi}_t^2(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})+o_p(1)\to\lim_{n\to\infty}E[\tilde{\xi}_t^2(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})]=\Gamma_0(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}) \tag{B.22}$$

de forma que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\sum_{t=h+1}^{n}\left(F_t^2(\boldsymbol{\gamma}_k)-\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}F_t^2(\boldsymbol{\gamma}_k)\right)\left(F_{t-h}^2(\boldsymbol{\gamma}_k)-\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}F_t^2(\boldsymbol{\gamma}_k)\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{t=h+1}^{n}(\tilde{\xi}_t^2(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})-\Gamma_h(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}))(\tilde{\xi}_{t-h}^2(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})-\Gamma_h(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}))+o_p(1)\\&\to\lim_{n\to\infty}E[(\tilde{\xi}_t^2(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})-\Gamma_h(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}))(\tilde{\xi}_{t-h}^2(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})-\Gamma_h(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}))]\\&=Cov[\tilde{\xi}_t^2(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}),\tilde{\xi}_{t-h}^2(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})]=\Gamma_h^{2,2}(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})\end{aligned} \tag{B.23}$$

y

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\sum_{t=h+1}^{n}F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)\left(F_{t-h}^2(\boldsymbol{\gamma}_k)-\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}F_t^2(\boldsymbol{\gamma}_k)\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{t=h+1}^{n}\tilde{\xi}_t(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})(\tilde{\xi}_{t-h}^2(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})-\Gamma_h(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}))+o_p(1)\\&\to\lim_{n\to\infty}E[\tilde{\xi}_t(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})(\tilde{\xi}_{t-h}^2(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})-\Gamma_h(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}))]\\&=Cov[\tilde{\xi}_t(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}),\tilde{\xi}_{t-h}^2(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})]=\Gamma_h^{1,2}(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})\end{aligned} \tag{B.24}$$

■

## Apéndice C. Prueba del Teorema 1

**Prueba de (*i*).** Para obtener este resultado, únicamente hay que tener en cuenta el obtenido en (2.18)-(2.19) para el componente de (4.3) basado en los residuos MCO del modelo libre de perturbación por AOs, y los límites dados en (4.11), (4.14) para $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)$ y en (4.13), (4.15) para el término $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{x}}_{t,p}F_t(\boldsymbol{\gamma}_k)$, bajo el correspondiente supuesto (M) sobre la magnitud relativa de los efectos de los distintos tipos de mecanismos generadores de outliers considerados.

**Prueba de (*ii*).** Puesto que a partir de de (B.5), se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\hat{\upsilon}_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\hat{\upsilon}_{t,p}+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}F_t^2(\boldsymbol{\gamma}_k)-\frac{[nr]}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}F_s^2(\boldsymbol{\gamma}_k)\right)+o_p(1) \tag{C.1}$$

con

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\hat{\upsilon}_{t,p}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\upsilon_t-\frac{[nr]}{n}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\upsilon_t\Rightarrow\omega_\upsilon B_\upsilon(r) \tag{C.2}$$

como en la sección, en el caso del ajuste MCO del modelo libre de contaminación, entonces, dado que (B.8) y (B.10) implican que, bajo los supuestos (M.1) y (M.2), $F_t^2(\boldsymbol{\gamma}_k)=n\sum_{j=1}^{k_0}c_{0j}^2I_t(\lambda_{0j})+o(1)$, en el caso de AOs deterministas no persistentes ($\phi_{ij}=0$, $i=0,1$), y $F_t^2(\boldsymbol{\gamma}_k)=0$ si $\phi_{ij}\neq 0$, entonces empleando también la ecuación (B.11),

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}F_t^2(\boldsymbol{\gamma}_k)-\frac{[nr]}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}F_s^2(\boldsymbol{\gamma}_k)\right)=\sqrt{n}\sum_{j=1}^{k_0}c_{0j}^2\sum_{t=1}^{[nr]}I_t(\lambda_{0j})-\frac{[nr]}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{k_0}c_{0j}^2+o(1)$$
$$=\sqrt{n}\sum_{j=1}^{k_0}c_{0j}^2\left(I(\lambda_{0j}\le r)-\frac{[nr]}{n}\right)+o(1)$$
$$=\sqrt{n}\sum_{j=1}^{k_0}c_{0j}^2(I(\lambda_{0j}\le r)-r)+o(1) \tag{C.3}$$

Por otro lado, en el caso de outliers aditivos generados por el modelo general de saltos estocástico, se tiene que, por las ecuaciones (B.20) y (B.22)

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}F_t^2(\boldsymbol{\gamma}_k)-\frac{[nr]}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}F_s^2(\boldsymbol{\gamma}_k)\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\tilde{\xi}_t^2(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})-\frac{[nr]}{\sqrt{n}}\Gamma_0(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})+o_p(1)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}(\tilde{\xi}_t^2(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})-\Gamma_0(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}))+o_p(1) \tag{C.4}$$
$$\Rightarrow V^{-1/2}(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})\cdot\tilde{W}_{0,2}(r)$$

donde, por (B.23), $V(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})=\Gamma_0^{2,2}(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})+2\sum_{h=1,\infty}\Gamma_h^{2,2}(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})$ es la varianza a largo plazo de la secuencia estacionaria $\{\tilde{\xi}_t^2(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})-\Gamma_0(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})\}$. Llamando entonces $\tilde{F}_2(r,\boldsymbol{\gamma}_k)$ a los límites en (C.3) y (C.4), se tiene el resultado establecido.

■

## Apéndice D. Prueba del Corolario 1

**Prueba de (*i*)-(*iii*).** Estas expresiones se siguen directamente de los resultados obtenidos anteriormente, en el Lema 2 y Teorema 1, por el Teorema del Mapeado Continuo.

**Prueba de (*iv*).** En primer lugar, puesto que por el Lema 2 y (4.23)-(4.25), se tiene que

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_n(m_n,\boldsymbol{\gamma}_k)=\hat{\boldsymbol{\Omega}}_n(m_n)[\boldsymbol{I}+\hat{\boldsymbol{\Omega}}_n^{-1}(m_n)\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\gamma}_k)]+o_p(1)\xrightarrow{p}\boldsymbol{\Omega}[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\gamma}_k)] \tag{D.1}$$

entonces, por el Teorema de Slutsky, se tiene que

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_n^{-1/2}(m_n,\boldsymbol{\gamma}_k)\xrightarrow{p}[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\gamma}_k)]^{-1/2}\boldsymbol{\Omega}^{-1/2} \tag{D.2}$$

En segundo lugar, se tiene en cuenta que (4.2) puede escribirse como $\hat{\eta}_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)=\hat{\eta}_{t,p}+F_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)$, con $F_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)=F_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})+F_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1})$, y donde se ha llamado

$$F_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i})=F_t(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i})-\tfrac{1}{\sqrt{n}}\tilde{\boldsymbol{x}}'_{t,p}\bar{\boldsymbol{Q}}_n^{-1}(p)\tfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{s=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{x}}_{s,p}F_s(\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i}),\ i=0,1 \tag{D.3}$$

con $F_t(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})=\frac{c_{00}}{\sqrt{n}}\tau_1(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})+\tilde{\xi}_t(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})$ y $F_t(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1})=\frac{c_{11}}{\sqrt{n}}\tau_1(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1})\frac{t}{n}+\sum_{s=1}^{t}\tilde{\xi}_s(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1})$ (ecuación (B.19)). De la misma forma, y teniendo en cuenta los resultados del Apéndice C, (4.19) puede escribirse como

$$\hat{\upsilon}_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)=\hat{\upsilon}_{t,p}+[\tilde{\xi}_t^2(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})-\Gamma_0(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})]+o_p(n^{1/2}) \tag{D.4}$$

Así se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\hat{\boldsymbol{z}}_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_k)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\hat{\boldsymbol{z}}_{t,p}+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\begin{pmatrix}F_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})\\ [\tilde{\xi}_t^2(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})-\Gamma_0(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})]\end{pmatrix}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\begin{pmatrix}F_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1})\\ 0\end{pmatrix}+o_p(n^{1/2}) \tag{D.5}$$

donde, por los resultados en (4.14), (4.15) y (C.4), se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]}\begin{pmatrix}F_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})\\ [\tilde{\xi}_t^2(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})-\Gamma_0(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})]\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}d(r,\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})\\ 0\end{pmatrix}+\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})\begin{pmatrix}B_p(r,\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})\\ \tilde{W}_{0,2}(r)\end{pmatrix} \tag{D.6}$$

con $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})=\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})$,

$$d(r,\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})=c_{00}\tau_1(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})\left\{r-\int_0^r\boldsymbol{x}'_p(s)ds\left(\int_0^1\boldsymbol{x}_p(s)\boldsymbol{x}'_p(s)ds\right)^{-1}\int_0^r\boldsymbol{x}_p(s)ds\right\} \tag{D.7}$$

y

$$B_p(r,\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0})=\tilde{W}_0(r)-\int_0^r\boldsymbol{x}'_p(s)ds\left(\int_0^1\boldsymbol{x}_p(s)\boldsymbol{x}'_p(s)ds\right)^{-1}\int_0^r\boldsymbol{x}_p(s)d\tilde{W}_0(s) \tag{D.8}$$

y, además

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{[nr]} F_{t,p}(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1}) \Rightarrow d(r,\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1}) + B_p(r,\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1}) \tag{D.9}$$

con

$$d(r,\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1}) = c_{11}\tau_1(\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1})\left\{r^2 - \int_0^r \boldsymbol{x}'_p(s)ds\left(\int_0^1 \boldsymbol{x}_p(s)\boldsymbol{x}'_p(s)ds\right)^{-1}\int_0^r s\,\boldsymbol{x}_p(s)ds\right\} \tag{D.10}$$

y

$$B_p(r,\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1}) = c_1\left\{\int_0^r \tilde{W}_1(s)ds - \int_0^r \boldsymbol{x}'_p(s)ds\left(\int_0^1 \boldsymbol{x}_p(s)\boldsymbol{x}'_p(s)ds\right)^{-1}\int_0^r \boldsymbol{x}_p(s)\tilde{W}_1(s)ds\right\} \tag{D.11}$$

El resultado final, para el caso del modelo de contaminación por intervenciones, se obtiene considerando las expresiones (4.11) y (4.13) para los límites $F(r, \boldsymbol{\gamma}_k)$ y $\boldsymbol{F}_p(r, \boldsymbol{\gamma}_k)$, considerando que $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}) = \boldsymbol{I}$ . De otra forma, llamando

$$d(r,\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i}) + B_p(r,\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i}) = F(r,\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i}) - \int_0^r \boldsymbol{x}'_p(s)ds\left(\int_0^1 \boldsymbol{x}_p(s)\boldsymbol{x}'_p(s)ds\right)^{-1}\boldsymbol{F}_p(r,\boldsymbol{\gamma}_{i,k_i}),\ i = 0,1 \tag{D.12}$$

con

$$\begin{aligned}
F(r,\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}) &= \sum_{i=1}^{k_0} c_{0i} I(r \ge \lambda_{0i}) && \phi_{ij} = 0\\
&= \sum_{j=1}^{k_0} c_{0j}\boldsymbol{J}_{\tau_{0j}}(r,\lambda_{0j}) I(r \ge \lambda_{0j}) && |\phi_{ij}| < 1\,(\phi_{ij} \ne 0)\\
F(r,\boldsymbol{\gamma}_{1,k1}) &= \sum_{i=1}^{k_1} c_{1i}(r-\lambda_{1i}) I(r \ge \lambda_{1i}) && \phi_{ij} = 0\\
&= \sum_{j=1}^{k_1} \tfrac{c_{1j}}{1-\phi_{1j}}[(r-\lambda_{1j}) - \phi_{1j}\boldsymbol{J}_{\tau_{1j}}(r,\lambda_{1j})] I(r \ge \lambda_{1j}) && |\phi_{ij}| < 1\,(\phi_{ij} \ne 0)
\end{aligned} \tag{D.13}$$

y

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_p(r,\boldsymbol{\gamma}_{0,k_0}) &= \sum_{j=1}^{k_0} c_{0j}\boldsymbol{x}_p(\lambda_{0j}) && \phi_{ij} = 0\\
&= \sum_{j=1}^{k_0} c_{0j}\boldsymbol{J}_{p,\tau_{0j}}(1,\lambda_{0j}) && |\phi_{ij}| < 1\,(\phi_{ij} \ne 0)\\
\boldsymbol{F}_p(r,\boldsymbol{\gamma}_{1,k_1}) &= \sum_{j=1}^{k_1} c_{1j}\boldsymbol{z}_p(1,\lambda_{1j}) && \phi_{ij} = 0\\
&= \sum_{j=1}^{k_1} \tfrac{c_{1j}}{1-\phi_{1j}}[\boldsymbol{z}_p(1,\lambda_{1j}) - \boldsymbol{J}_{p,\tau_{1j}}(1,\lambda_{1j})] && |\phi_{ij}| < 1\,(\phi_{ij} \ne 0)
\end{aligned} \tag{D.14}$$

■