

5. Modulación digital.

La portadora y la señal modulada son analógicas como las señales AM y FM. La modulación digital se divide en dos clases:

- PSK (Phase shift keying) Codificación por cambio de fase.
- QAM(Quadrature amplitude modulation) En este caso se cambia la amplitud y fase de la portadora según la modulación/señal digital que representa los datos.

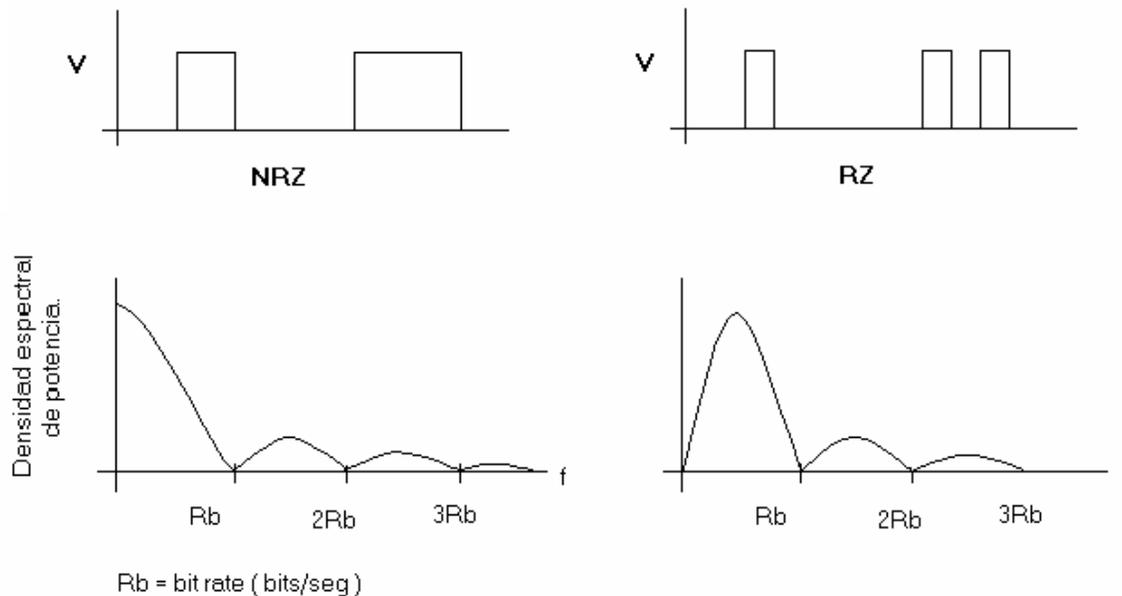
- Ventajas de la modulación digital.

- Inmunidad frente al ruido.
- Fácil de multiplicar.
- Codificado, encriptación.
- Modulación-Demodulación con DSPs.

- Formas de onda.

Un pulso rectangular contiene muchos armónicos y ocupa un ancho de banda. Este ancho de banda debe limitarse antes de enviar el pulso para aprovechar el ancho de banda del sistema.

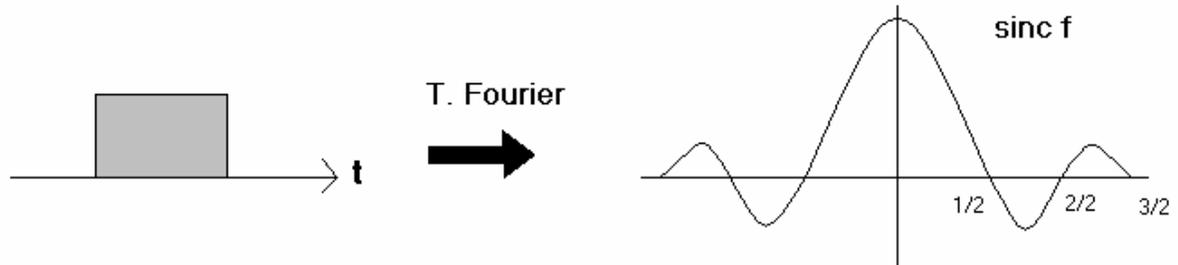
Si un pulso rectangular se pasa por un filtro limita-banda, a la salida se habrá “desparramado” la señal (en el dominio del tiempo) esto puede generar “interferencia intersimbolo” (ISI). A mayor limitación en frecuencia más pronunciado es el “spreading”.



Los pulsos digitales son filtrados antes de entrar al modulador para reducir el ancho de banda de la señal modulada, esto hace que dejen de ser rectángulos.

Se busca un compromiso entre Ancho de banda \leftrightarrow ISI

El filtro mas usado es el Coseno cuadrado (“Raised-cosine”) junto con el Gaussiano.



- Pulso rectangular.

Un pulso rectangular de anchura τ tiene distribución espectral de potencia $\text{sinc}(f)$ que se extiende de $-\infty$ a $+\infty$.

Para mantener la forma cuadrada en el dominio del tiempo harían falta al menos 12 armónicos de la frecuencia fundamental.

Esto es imposible de transmitir \rightarrow Interferiría con los canales adyacentes.

La distribución espectral se debe limitar al máximo, buscar la anchura de banda mínima que permite detectar la presencia del pulso con la tasa de error requerida.

- Filtro de coseno cuadrado.

$$f(t) = \cos^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{\pi}\right)}{2}$$

Mantiene el 50% de la energía en su ancho de banda $R_b/2$.

Dando buen compromiso: forma de pulso- ancho de banda.

- Filtro Gaussiano.

$$H(f) = e^{-\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}$$

- Codificación binaria por cambio de fase. (Binary phase shift keying)

Sé varia la fase para transmitir información de una tira de bits.

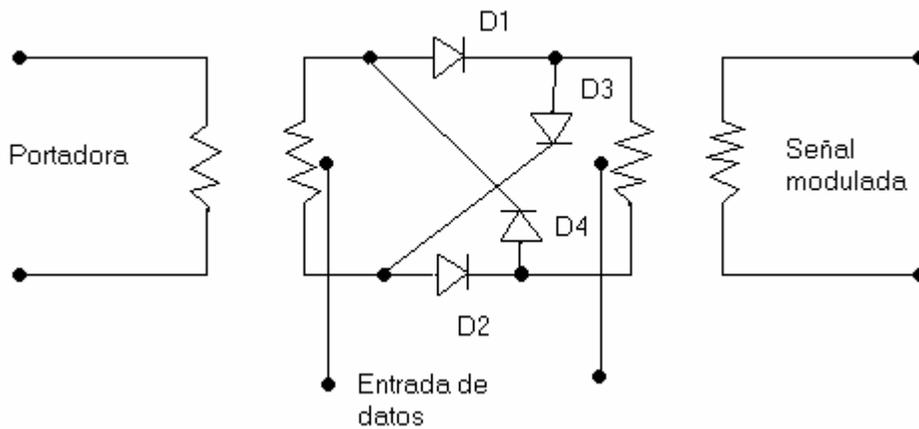
El numero M de fases que es usado es $M = 2^n$ donde n varia de 2 a 16.

M-fase PSK modulador: La tensión de modulación digital introduce la fase de la portadora en uno de los diferentes M-estados.

M = 2 → PSK - binaria (dos fases separadas 180°, una indica estado bajo “0”, otra estado alto “1”)

M = 4 → PSK - cuaternaria.

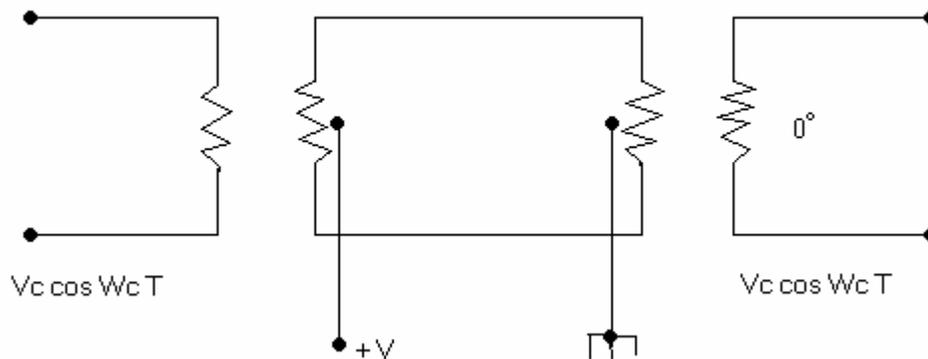
- Diagrama de bloques de un BPSK.



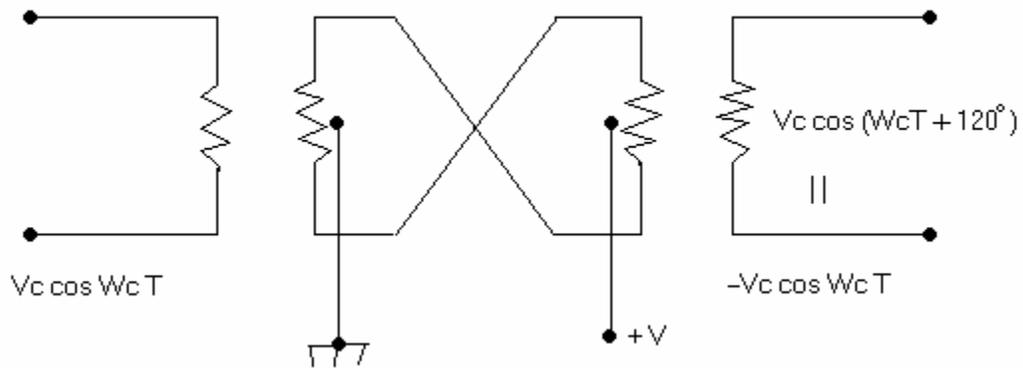
Cambia la polaridad en función de la entrada de datos:

Entrada binaria = 1 D1- D2 conducen D3 - D4 cortados

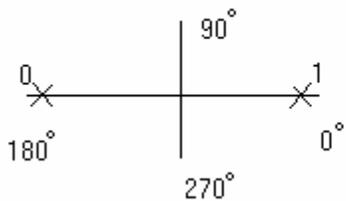
Multiplicador que cambia 120° la fase de la portadora, 0° → por 1, 180° → por -1.



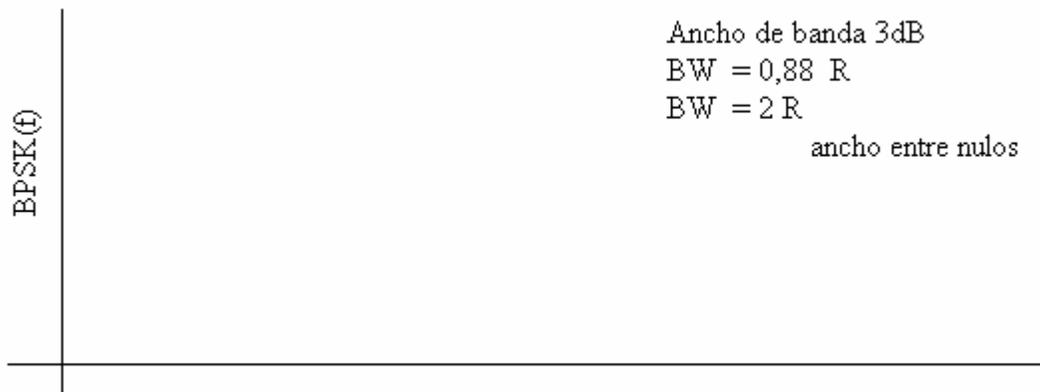
Titulo desconocido



El modulador actúa como un amplificador que multiplica por la lógica +1 → 1 o -1 → 0. La relación de amplitud y fase de una portadora modulada digitalmente se representa mediante un diagrama de constelación.



A mayor separación entre los dos estados mas fácil es para el receptor distinguir entre ellos. (en presencia de ruido e interferencias).



El espectro de la señal BPSK(f) es mucho mayor que el ancho de banda mínimo. Ancho de banda entre nudos = $2K_B$.

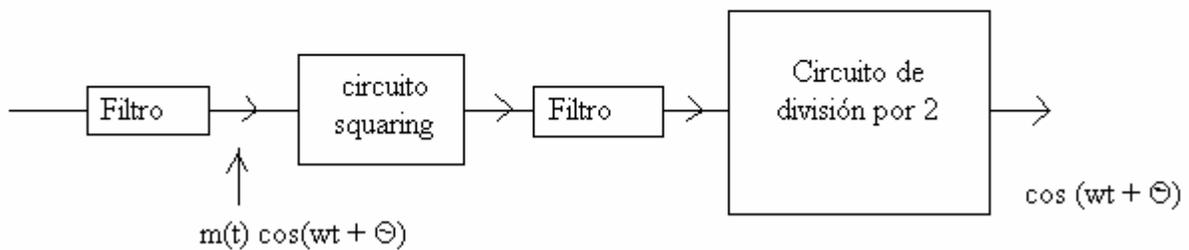
Es necesario aplicar un filtro pasa banda para limitar la banda de señal.

Pulso rectangular → 90% de la energía en $1,6 R_B$.

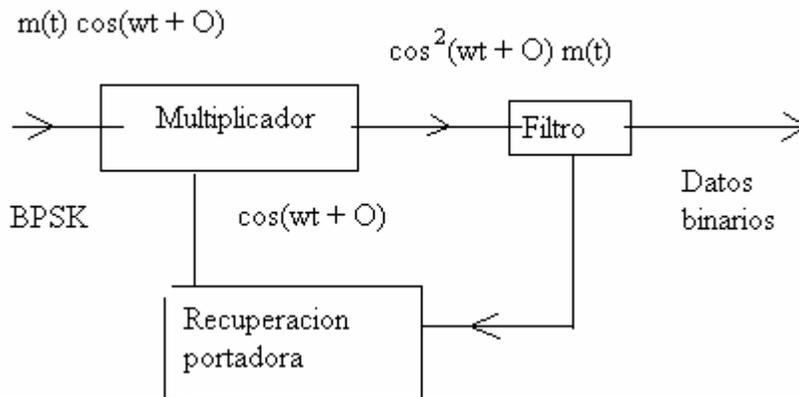
Raised-cosine → 90% de la energía en $1,5 R_B$.

- Receptor BPSK.

Recepción sincrona ; el demodulador compara la fase de la señal con la fase de un oscilador local → circuitos de recuperación de portadora.



Circuito de recuperación de portadora.



La salida del demodulador BPSK es $\pm \cos^2 w_c t = \pm [0,5 + 0,5 \cos 2 w_c t]$.

Un filtro pasa baja recupera $\pm 0,5$ con la lógica 1 (+ 0,5) ó 0 (- 0,5).

- Ancho de banda mínimo.

La frecuencia más alta se presenta cuando se envía una ristra de datos alternando “1” y “0”,
 $F_{m(max)} = \text{bits por segundo}/2 = R_B/2$, esta será la frecuencia de la señal:

$$V_{outBPSK} = \cos w_{m(max)}t * \cos w_c t = \frac{1}{2} \cos(w_c - w_{m(max)})t - \frac{1}{2} \cos(w_c + w_{m(max)})t$$

$$BW |_{m\underline{inimo}} = 2w_{m(max)} = 2 \frac{R_B}{2} = R_B$$

Este ancho de banda es aproximado dada la amplitud del espectro de un pulso cuadrado.
 Si los pulsos cuadrados son filtrados antes del modulador se puede reducir el espectro ocupado.

- Quaternary PSK (QPSK).

Codificación por cambio de fase en cuadratura. Cuatro fases equiespaciadas representan los dígitos 00, 01, 11, 10, cada fase transmite dos bits QPSK tiene el doblo de eficiencia en ancho de banda que BPSK.

$$V_{QPSK}(t) = \cos(w_c t + \Phi) = \cos w_c t * \cos \Phi + \sin w_c t * \sin \Phi$$

Esquemas de modulación QPSK

	00	01	11	10
V ₂₂	90°	0°	270°	180°
V ₂₆	0°	90°	180°	270°
V _{26bis}	45°	135°	225°	315°

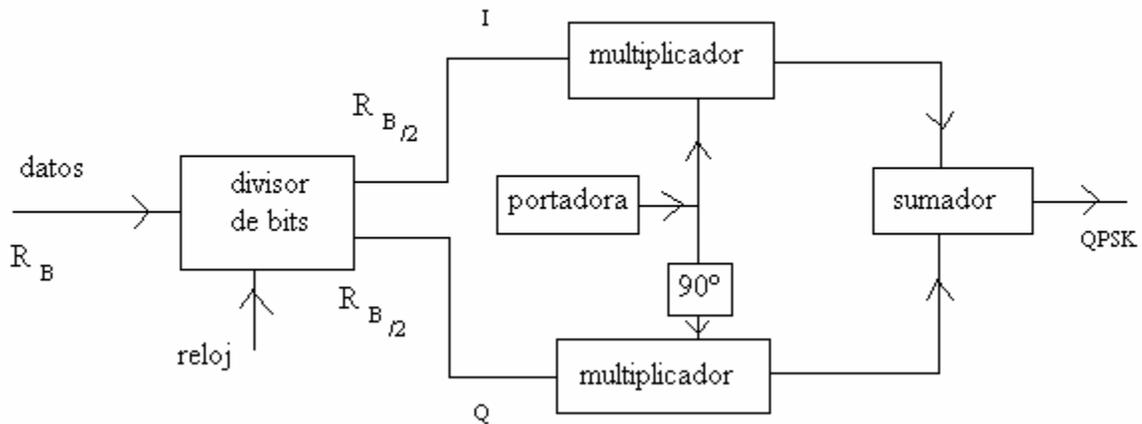
QPSK se puede generar combinando dos señales BPSK en cuadratura

$$V_{QPSK}(t) = I \cos w_c t + Q \sin w_c t$$

I ≡ tira de datos (bits) en la BPSK en fase
 Q ≡ tira de datos (bits) en la BPSK en fase en cuadratura.

En los canales (fase y cuadratura) el valor binario 1 se indica por I = Q = +1
 el valor binario 0 se indica por I = Q = -1

- Si los datos no cambian de un periodo al siguiente la fase de la portadora no cambia.
- Si hay un cambio de un bit la portadora es desfasada 90°.
- Si ambos bits cambian la fase de la portadora cambia 180°.



Modulador QPSK.

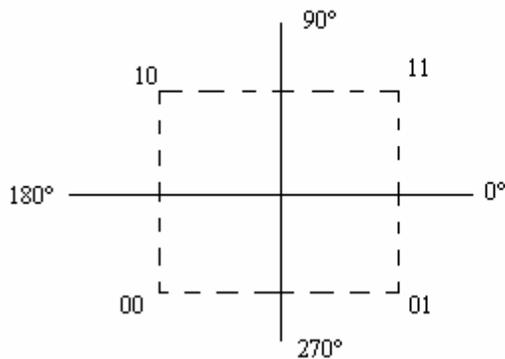
Salida de los multiplicadores:

- Canal I: $+\cos w_c t$ y $-\cos w_c t$
- Canal Q: $+\sin w_c t$ y $-\sin w_c t$

La salida del modulador va al circuito sumador donde se combinan las señales:

- $I_1Q = 11 \rightarrow \cos w_c t + \sin w_c t = 1,414 \sin (w_c t + 45^\circ)$
- $I_1Q = 10 \rightarrow \cos w_c t - \sin w_c t = 1,414 \sin (w_c t + 135^\circ)$
- $I_1Q = 01 \rightarrow -\cos w_c t + \sin w_c t = 1,414 \sin (w_c t - 45^\circ)$
- $I_1Q = 00 \rightarrow -\cos w_c t - \sin w_c t = 1,414 \sin (w_c t - 135^\circ)$

Constelación QPSK



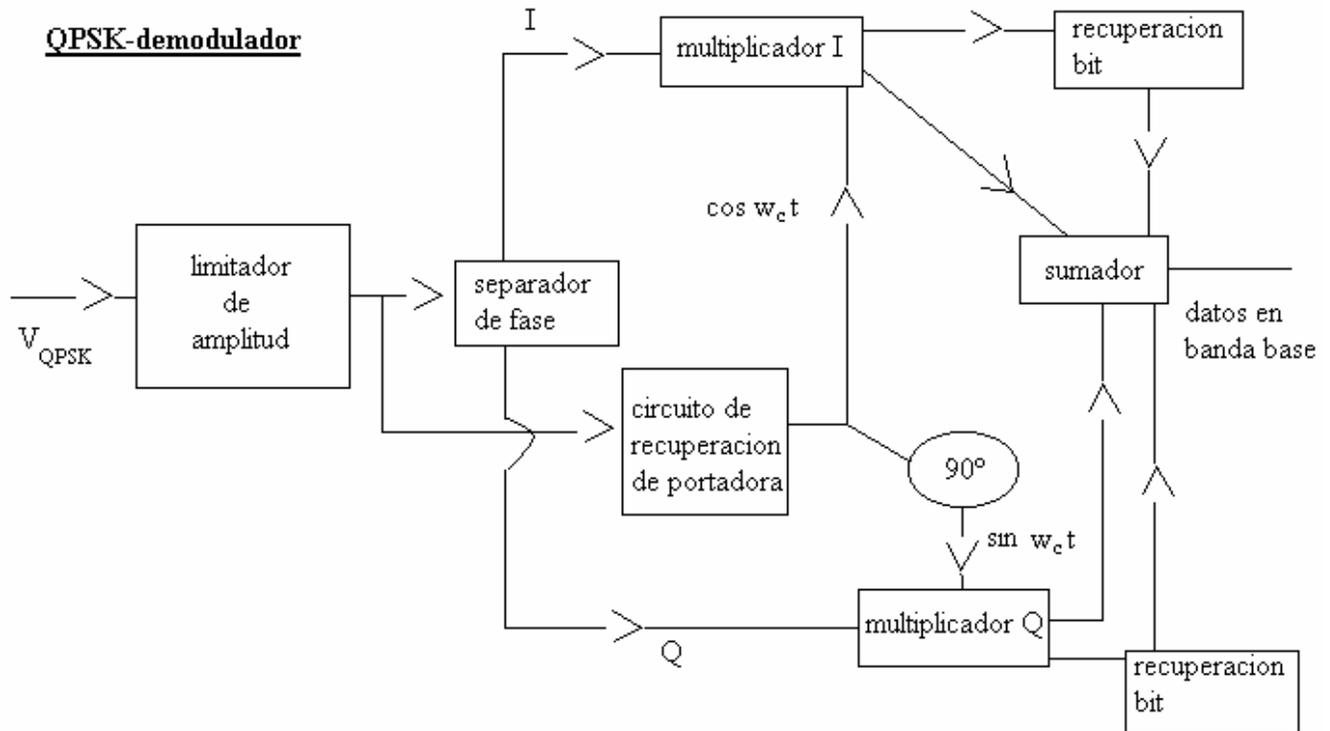
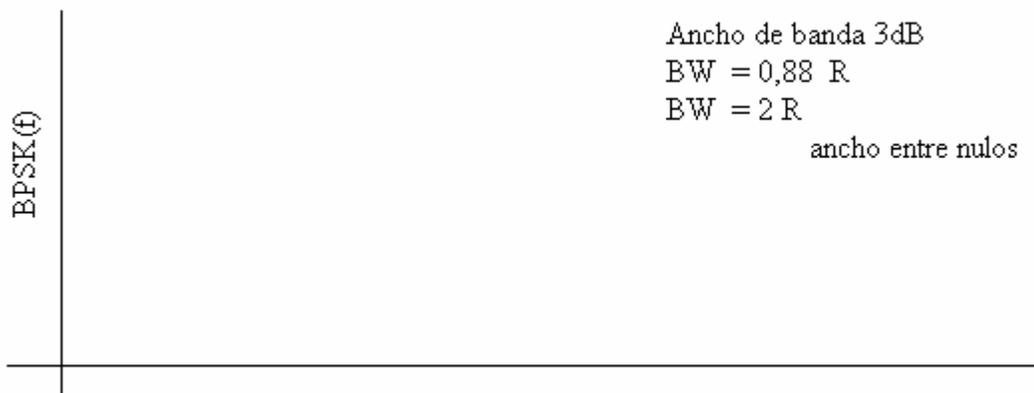
Los cuatro estados de salida tienen la misma amplitud y están separados 90°.

La tasa de bits, la velocidad de transmisión en los canales I y Q es $R_{B/2}$ de modo que la frecuencia fundamental de la forma de onda es $R_{B/4}$ ($f_{m(max)}$) de modo que el ancho de banda mínimo necesario es,

$$B = \left(f_c + \frac{R_B}{4} \right) - \left(f_c - \frac{R_B}{4} \right) = \frac{R_B}{2}$$

$$V_{outQPSK} = \cos\left(\frac{2\pi R_B}{4} t\right) \cos(2\pi f_c t) = \frac{1}{2} \cos\left(2\pi \left(f_c + \frac{R_B}{4}\right) t\right) + \frac{1}{2} \cos\left(2\pi \left(f_c - \frac{R_B}{4}\right) t\right)$$

$$BW_{3dB} = 0,44R_B$$



La salida de los multiplicadores es una señal DC que varia con la modulación de fase.

Ejemplo:

$$V_{QPSK} = 1,414 \cos (w_c t + \theta) \text{ si } \theta = -135^\circ \rightarrow 00$$

$$V_{QPSK} = -\cos w_c t - \sin w_c t \dots\dots\dots$$

$$V_I = -0,5 (1 + \cos 2 w_c t) + 0,5 (\sin 2 w_c t + 0)$$

$$V_I = -0,5 + 0,5 \cos 2 w_c t + 0,5 \sin 2w_c t$$

Filtro pasa-baja deja pasar solamente $-0,5$, que es valor lógico 0.

Análogamente.

$$V_Q = (-\cos w_c t - \sin w_c t) * \sin w_c t = -\cos w_c t \sin w_c t - \sin^2 w_c t = 0,5 \sin 2w_c t - 0,5 (1 - \cos 2w_c t)$$

$$= -0,5 + 0,5 \sin 2w_c t + 0,5 \cos 2w_c t$$

La salida del filtro pasa-baja es el nivel DC $\rightarrow - 0,5$, que es el del valor lógico 0.

Salida con $\theta = -135 \rightarrow IQ/00$.

Angulos QPSK

I	Q	θ
0	0	-135°
1	0	$+135^\circ$
0	1	-45°
1	1	$+45^\circ$

0QPSK

Modulación por cambio de fase en cuadratura con ofset.

QPSK sufre variaciones de amplitud debido a la transición de IQ en cadenas que suceden simultáneamente. La variación de amplitud se soluciona introduciendo un retraso de 1 bit en el canal I.

8QPSK

Modulación con tribits 000, 001, 010, ... con 8 fases de portadora.

16QPSK

Modulación con tiras de 4 bits

MSK

Es una modificación de 0QPSK en la que los pulsos rectangulares se convierten en pulsos de media onda sinusoidal. El medio seno puede ser positivo, negativo o alternado.

MSK → La fase varía suavemente sin saltos discretos.

La amplitud se mantiene constante.

La distribución espectral cae rápidamente.

La frecuencia de portadora se elige $n * \text{bits por segundo}/4$ $n \equiv \text{entero}$.

$BW|_{\text{mínima}} = 1,2/T$ $T \equiv \text{periodo}$.

Dibujo.....

MSK es sencilla de demodular y sincronizar por eso se utiliza en GSM-DCS.

sencilla
MSK ↔ FSK

Diferencia: la desviación en frecuencia indica “0” ó “1”.

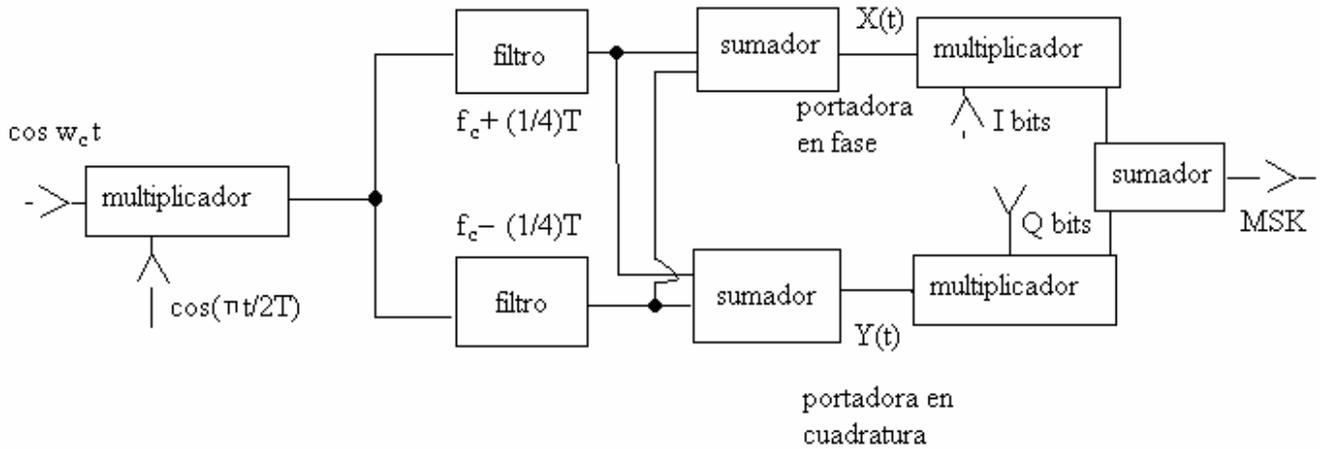
Las dos frecuencias se sincronizan con la velocidad de transmisión (R_B) y se separan de la portadora por un múltiplo de $R_{B/2}$.

Frecuencia baja (0): $-nR_{B/2}$

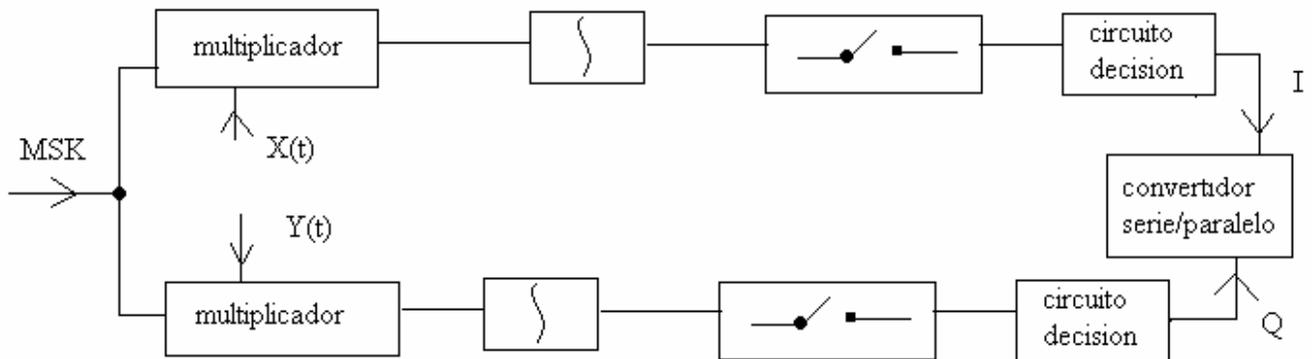
Frecuencia alta (1): $(n+2) R_{B/2}$ $n = \text{entero}$.

$$D = \frac{\Delta f}{R_B} = \frac{R_{B/2}}{R_B} = 0,5$$

MSK – modulador



Demodulador MSK

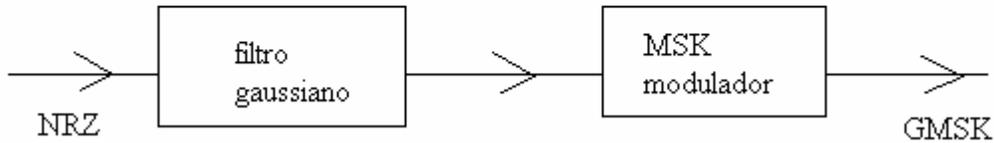


X(t) portadora en fase $\cos w_c t$
 Y(t) portadora en cuadratura $\sin w_c t$

El circuito de decisión establece si el voltaje detectado es “0” ó “1”.

GMSK (Gaussian minimum shift keying)

Es utilizado en GSM-DCS. Es MSK en el que se reduce el espectro pasando la señal NRZ por un filtro Gaussiano antes de atacar el modulador MSK.



Más sencillo: Se puede generar GMSK aplicando la salida de un filtro Gaussiano-pasa.baja a un VCO(varactor) en un transmisor FM.

Se usa GMSK en GSM-DCS por:

- buena eficiencia espectral 1,4 bits/Hz
- resistencia a la interferencia de canales y co-canal

Demodulador GMSK

Falta

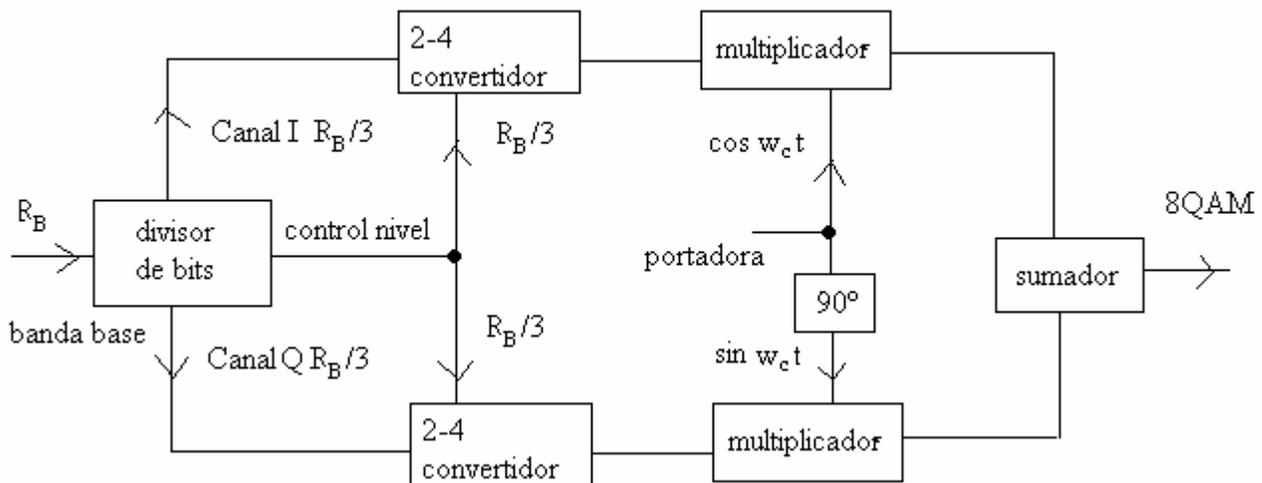
QAM: Modulación en Amplitud Cuadratura

Combinación de modulación en fase y modulación en amplitud.
 La eficiencia espectral de QAM es la misma que PSK. QAM tiene mejor eficiencia en potencia

8QAM

- La amplitud varía entre dos valores
- La fase varía entre cuatro valores (8 estados)

8QAM-modulador



8QAM-tensiones

I(Q)	C	salida(Volts)
0	0	-0.541
0	1	-1.307
1	0	0.541
1	1	1.307

Si entra un tri-bit I, Q, C = 110, según la tabla 8QAM-tensiones :

I = 1, C = 0 salida = 0.541
 Q = 1, C = 0 salida = 0.541

Salida del modulador: $0.541 \cos w_c t + 0.541 \sin w_c t = 0.765 \cos(w_c - 45^\circ) \text{ Volts}$
 $= 0.765 \sin(w_c + 45^\circ) \text{ Volts}$

Si entra I, Q, C = 000

Salida del modulador: $-0.541 \cos w_c t - 0.541 \sin w_c t = 0.765 \cos(w_c + 135^\circ) \text{ Volts}$
 $= 0.765 \sin(w_c - 135^\circ) \text{ Volts}$

Si entra I, Q, C = 001

Salida del modulador: $-0.541 \cos w_c t + 0.541 \sin w_c t = 0.765 \cos(w_c - 135^\circ) \text{ Volts}$
 $= 0.765 \sin(w_c + 45^\circ) \text{ Volts}$

Si entra I, Q, C = 011

Salida del modulador: $-1.307 \cos w_c t + 1.307 \sin w_c t = 1.848 \cos(w_c - 135^\circ)$ Volts
 $= 1.848 \sin(w_c - 45^\circ)$ Volts

Si entra I, Q, C = 100

Salida del modulador: $0.541 \cos w_c t - 0.541 \sin w_c t = 0.765 \cos(w_c + 45^\circ)$ Volts
 $= 0.765 \sin(w_c + 135^\circ)$ Volts

Si entra I, Q, C = 101

Salida del modulador: $1.307 \cos w_c t - 1.307 \sin w_c t = 1.848 \cos(w_c + 45^\circ)$ Volts
 $= 1.848 \sin(w_c + 135^\circ)$ Volts

Si entra I, Q, C = 111

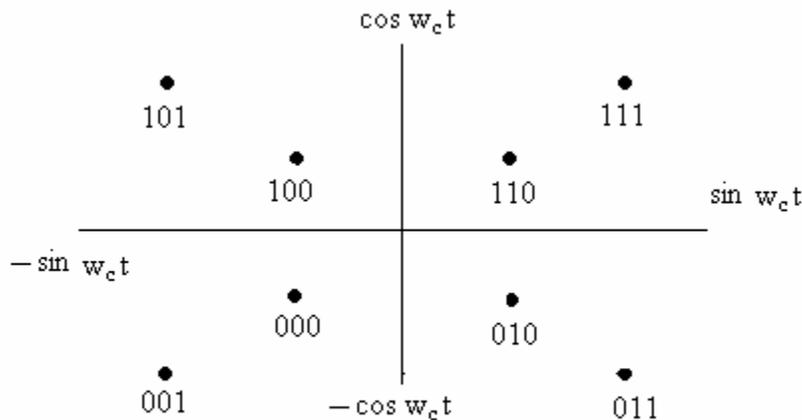
Salida del modulador: $1.307 \cos w_c t + 1.307 \sin w_c t = 1.848 \cos(w_c - 45^\circ)$ Volts
 $= 1.848 \sin(w_c + 45^\circ)$ Volts

$$V_{8QAM} = a \cos w_c t + b \sin w_c t$$

a, b = ±0.541, ±1.307

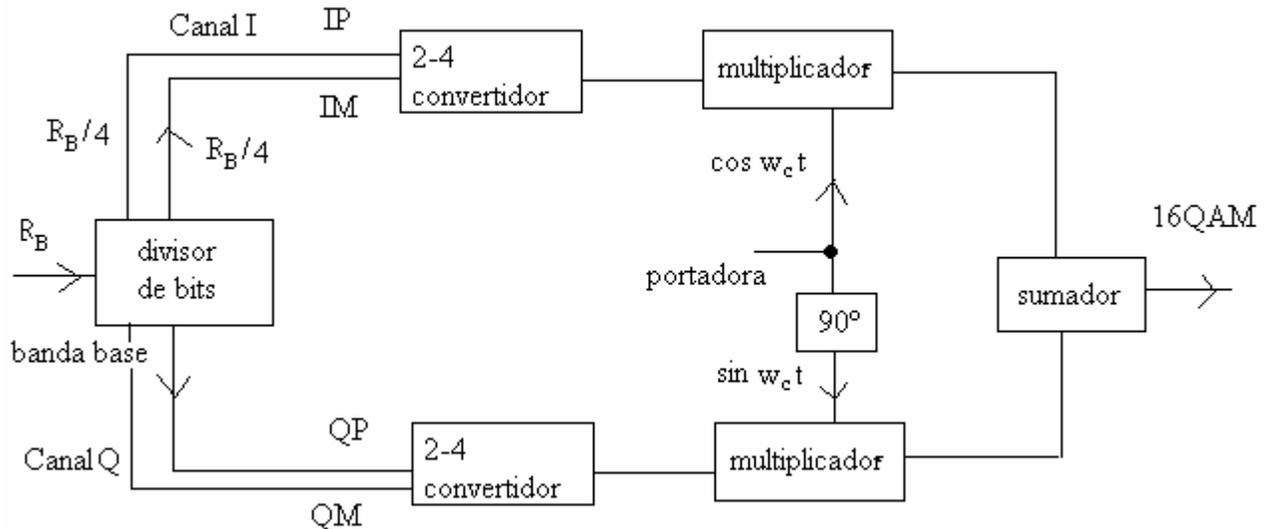
$$BW_{\text{minimo}} = BW_{\text{minimo QPSK}}$$

8QAM-Constelacion



16QAM

Los datos se dividen en grupos de 8-bits, las tiras de datos R_B (bits/segundo) se agrupan en cuatro ($R_{B/4}$ bits/segundo)



16QAM-tensiones

IP	IM	Salida(Volts)	QP	QM	Salida(Volts)
0	0	-0.22	0	0	-0.22
0	1	-0.821	0	1	-0.821
1	0	0.22	1	0	0.22
1	1	0.821	1	1	0.821

Cada qua-bit produce un cambio en la salida.

IP-bits definen la polaridad de la salida del canal I al convertidor 2-4.

QP-bits definen la polaridad de la señal en cuadratura a la salida del convertidor 2-4

La salida de los convertidores 2-4 se aplica a los respectivos multiplicadores para modular

A $\cos w_c t$ (portadora) ó a $\sin w_c t$ (portadora en cuadratura).

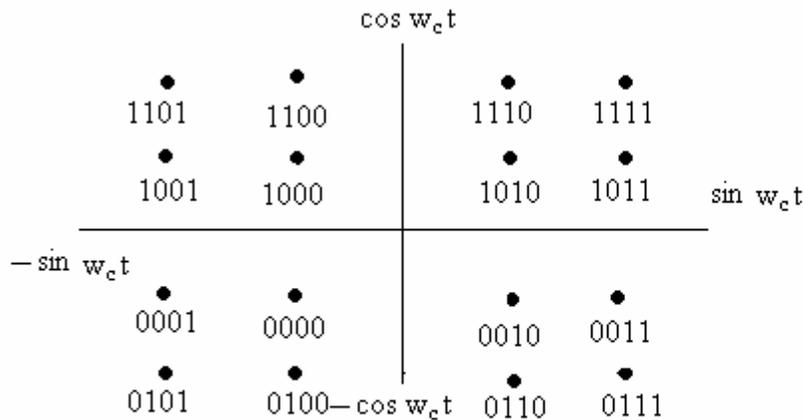
La salida de cada modulador de cada modulador puede tener cualquiera de las siguientes expresiones:

Canal I .- $0.821 \cos w_c t, -0.821 \cos w_c t, 0.22 \cos w_c t, -0.22 \cos w_c t$

Canal Q.- $0.821 \sin w_c t, -0.821 \sin w_c t, 0.22 \sin w_c t, -0.22 \sin w_c t$

La salida de los moduladores balanceados I, Q se aplican a un sumador para producir la señal 16QAM.

16QAM-constelacion



La frecuencia máxima es $R_B/8$, de modo que el ancho de banda es $R_B/4$.

Eficiencia en ancho de banda

$$\gamma = \frac{\text{velocidad de transmisión} \left(\frac{\text{bits}}{\text{segundo}} \right)}{\text{ancho de banda} (\text{Hz})}$$

También llamada densidad de información, permite comparar distintos esquemas de modulación.

Ancho de banda – separación entre nulos

$$\frac{2}{T_s} = \frac{2}{T_B \log_2 M} = \frac{R_B}{\log_2 M} \quad \gamma = \frac{R_B}{2R_B} \log_2 M = \frac{\log_2 M}{2} \left(\frac{\text{bits/segundo}}{\text{Hz}} \right)$$

Ejemplo Determinar la eficiencia en ancho de banda de:

- BPSK- $\gamma = \log_2 2/2 = 0.5$ bits/Hz
 - QPSK- $\gamma = \log_2 4/2 = 1$ bits/Hz
 - 8PSK- $\gamma = \log_2 8/2 = 1.5$ bits/Hz
 - MSK- $\gamma = 2$ bits/Hz
 - 16QAM- $\gamma = 16$ bits/Hz
- estas eficiencias se reducen al filtrar.

Eficiencia en potencia

Es la capacidad que tiene una modulación digital → preservar la integridad de una “palabra” cuando el nivel de señales bajo.

$$\text{Eficiencia en potencia} = \frac{\text{energía por bit}}{\text{Densidad de potencia}} = E_{B/N}$$

Para una BER dada → Para una determinada tasa de error por bit.

Se busca compromiso entre :

Eficiencia en ancho de banda ↔ eficiencia en potencia

Se añaden bits de control de errores para aumentar la eficiencia en potencia → esto reduce la eficiencia en ancho de banda porque reduce la velocidad de transmisión.

BER – Bit error rate

BER en un sistema digital es una figura de mérito

Es la probabilidad de que un bit sea recibido incorrectamente.

BER ----- equivalente digital S/N en los sistemas analógicos.

Un error sucede cuando un símbolo se corrompe por el ruido de modo que el receptor es incapaz de identificar si es “1” ó “0”. Si solo hay ruido se aproxima por:

$$\frac{E_s}{N_0} = \frac{\text{energía de un símbolo en julios}}{\text{densidad de potencia de ruido}}$$

P --- potencia transmitida durante periodo T_s $P T_s = C/R_s$ R_s --- tasa de símbolos

$N_0 = \text{potencia de ruido/ancho de banda} = N/B = KTB/B$ $N_0 = (C/N)(B/R_s)$

En la practica los filtros tienen $B \approx R_s$ $E_s/N_0 \approx C/N$

Ejemplo

Un QPSK opera a 100 Kb/s (tasa de bit velocidad de transmisión) en un ancho de banda de 220KHz. Si la potencia de portadora recibida es de 4 pw y la temperatura de ruido 290K, calcular:

- Densidad de potencia de ruido.
- Potencia de ruido.
- Energía por símbolo.
- E_B/N_0

- $N_0 = KT = 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 290 = 4 \cdot 10^{-21} \text{ W Hz}^{-1}$
- $N = KTB = N_0 B = N_0 \cdot 220 \cdot 10^3 = 8.810^{-6} \text{ W}$
- $E_B = 4 \cdot 10^{-12} / 100 \cdot 10^3 = 4 \cdot 10^{-17} \text{ J/bit}$
- $E_{B/N} = 10 \cdot 10^3$

Probabilidad de error

La probabilidad de error P_e

- función de error complementaria $\text{erfc}(x)$
- función error $\text{erf}(x) = 1 - \text{erfc}(x)$

BPSK ---- QPSK

16QAM

$$P_e = 0.5 \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_B}{N_0}} \right)$$

$$P_e = 0.5 \text{erfc} \sqrt{\frac{3E_B}{N_0}}$$

Ejemplo: Calcular C/N – portadora/ruido necesaria para una BER de $1 \cdot 10^{-5}$ a 140 Mb/s usando:

- BPSK
 - QPSK
- Asumir un ancho de banda 1.2 veces el teórico ancho de banda mínimo

$$1 \cdot 10^{-5} = 0.5 \text{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_B}{N_0}} \right], \text{erfc}(x) = 2 \cdot 10^{-5}$$

de tablas $E_{B/N} = 3.0$

- $C/N = R_B/B \cdot E_B/N_0 = (140 \cdot 10^6 / 1.2 \cdot 140 \cdot 10^6) \cdot 3.0 = 2.5 = 4 \text{ dB}$
- $(140 \cdot 10^6 / 1.2 \cdot 140 \cdot 10^6) \cdot 3 = 5 = 7 \text{ dB}$