INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

PARA TITULACIONES DE ECONOMÍA Y EMPRESA

Clara Calvo **Carlos Ivorra**

Índice general

Parte I
Fundamentos teóricos

1 Conceptos básicos de la programación matemática

El objetivo de esta primera sección es que te formes una idea general de lo que es la programación matemática así como que asimiles el vocabulario básico que necesitarás manejar en su estudio.

1.1 Un ejemplo de problema de programación matemática

• Los problemas de los que se ocupa la programación matemática son problemas en los que debemos determinar cuál es la mejor opción entre una serie de posibilidades: la producción que proporciona el máximo beneficio, el consumo que proporciona la mayor utilidad, la asignación de tareas a trabajadores que permite realizar un trabajo en el menor tiempo posible, etc. Vamos a considerar un ejemplo muy sencillo —pero representativo— de este tipo de situaciones:

Ejemplo 1a Una fábrica de cosméticos quiere lanzar dos nuevas cremas de belleza, una de gama alta A y una variedad más económica B. Aunque el coste de las materias primas de la crema de gama alta es inferior: 2 u.m. por hectolitro, frente a las 3 u.m. por hectolitro que cuestan las de la crema de gama baja, el proceso de elaboración de la crema A es más largo y costoso, pues requiere 8 horas por hectolitro, frente a las 3 horas por hectolitro que necesita la crema B. Por otro lado, para que el precio de venta de la crema de gama alta no resulte excesivo, la empresa le aplica un margen de beneficio ligeramente menor: 4 u.m., frente al margen de 5 u.m. que aplica a la crema de gama baja.

La producción está en gran parte automatizada, y no requiere más que la intervención de unos pocos trabajadores para supervisar el proceso y realizar puntualmente algunas tareas concretas. Por ello, la empresa ha destinado a la producción de los cosméticos a cuatro de sus trabajadores, cada uno de los cuales tiene una jornada laboral de seis horas.

Determina cuántos hectolitros conviene fabricar diariamente de cada tipo de crema para obtener el máximo beneficio con un presupuesto de 12 u.m. diarias para las materias primas empleadas.

Vemos así que en la situación planteada por el problema tenemos muchas alternativas posibles. Una de ellas sería, por ejemplo, producir 2 hl de cada tipo de crema, con lo que conseguiríamos un beneficio $B = 4 \times 2 + 5 \times 2 = 18$ u.m., pero también podríamos producir 1 hl de crema de gama alta y 3 hl de crema de gama baja, con lo que el beneficio sería $B = 4\times 1+5\times 3 = 19$ u.m., o también podríamos producir 1 hl de gama alta y 3.3 hl de gama baja, con lo que el beneficio sería un poco mayor: $B = 4 \times 1 + 5 \times 3.3 = 20.5$ u.m., etc.

El problema que se nos plantea es encontrar la más conveniente de todas las soluciones posibles, que en este caso es aquella que proporciona el máximo beneficio.

1.2 Modelización y elementos básicos de un modelo

• El primer paso para resolver un problema como el que acabamos de plantear consiste en *modelizarlo,* es decir, expresarlo en términos de funciones y relaciones matemáticas a las que podamos aplicar las técnicas de resolución que vamos a estudiar, por ejemplo, la más sencilla de todas, que consiste en hacer que un ordenador nos encuentre la solución. Es evidente que, si queremos que un ordenador nos resuelva el problema, tendremos que plantearlo en términos matemáticos precisos, pues no podemos aspirar a que el ordenador "entienda" el enunciado tal y como lo tenemos expresado.

En esta sección precisaremos en qué consiste la modelización de un problema. Concretamente, modelizar un problema supone identificar los elementos siguientes:

A la hora de identificar las variables de decisión en el enunciado de un problema debes centrarte en entender qué decisión se nos pide que tomemos, sobre todo para no tomar como variables cantidades que no lo son. Por ejemplo, en el Ejemplo 1a no se nos pide que decidamos cuántos trabajadores vamos a emplear, ni cuántas horas destinamos a la producción, ni cuánto nos vamos a gastar cada día en materias primas, etc. Lo que tenemos que decidir es qué cantidad producimos de cada clase de crema, y según cuánta decidamos producir ya se verá cuántas horas necesitamos emplear, y cuánto costarán las materias primas, etc.

Siempre que sea posible habrá que especificar las unidades en que se mide cada cosa, y en particular las variables de decisión. En este caso las variables x e y se miden en hectolitros. Esto será muy importante si en un enunciado se manejan unidades alternativas para datos distintos (por ejemplo, si unos están en litros y otros en hectolitros), pues entonces será necesario convertir algunas unidades en otras para no caer en incoherencias.

Así pues, a la hora de describir las variables de un problema, trata de ser preciso y evita siempre que sea posible expresiones lacónicas como:

x : gama alta, y: gama baja.

• **Las variables de decisión** *Son las variables que representan lo que tenemos que decidir.*

En este caso lo que se nos pide es que decidamos cuántos hl conviene producir diariamente de cada tipo de crema, luego tenemos dos variables de decisión:

x = *hl diarios de crema de gama alta (A) que conviene producir,*

y = *hl diarios de crema de gama baja (B) que conviene producir.*

• **La función objetivo** *Es la función que determina qué soluciones son mejores o peores que otras, más concretamente, la función que se desea maximizar o minimizar.*

En el ejemplo que estamos considerando el objetivo es **maximizar el beneficio,** luego la función objetivo es la que, a partir de las variables de decisión (a partir de las cantidades producidas de las dos cremas), proporciona el beneficio correspondiente:

$$B(x, y) = 4x + 5y.$$

• **Restricciones** *Son las condiciones que garantizan que una solución dada sea aceptable, ya sea porque en caso de no cumplirse la solución sería inviable (p.ej., porque requiriera un presupuesto mayor que el disponible), ya sea porque sería indeseable (p.ej., porque provocara un nivel de contaminación mayor que el admitido).*

En nuestro ejemplo no podemos admitir soluciones como producir diariamente $x = 100\,000$, $y = 100\,000$ hl de crema, porque, aunque proporcionarían un gran beneficio, no son viables, ya que requerirían muchas más horas de trabajo diario que las disponibles. En general, para que una solución (x, y) sea aceptable en nuestro ejemplo, debe cumplir las restricciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} 2x + 3y \leq 12 & \text{coste de producción} \leq \text{presupuesto} \\ 8x + 3y \leq 24 & \text{horas empleadas} \leq \text{horas disponibles} \\ x \geq 0, \ y \geq 0 & \end{array}$$

Notemos que es evidente que no tendría sentido decir que conviene producir $x = -5$ hl de crema de gama alta, pero, por muy obvio que sea que tiene que ser $x \geq 0$, es necesario hacerlo constar explícitamente en el problema, pues las técnicas de resolución que emplearemos necesitan considerar explícitamente restricciones como ésta.

En definitiva, la modelización del problema descrito en el ejemplo 1a es la siguiente:

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & 4x+5y & \text{beneficio} \\ \text{s.a} & 2x+3y \leq 12 & \text{coste de materias primas} \leq \text{presupuesto} \\ & 8x+3y \leq 24 & \text{horas empleadas} \leq \text{horas disponibles} \\ & x,\, y \geq 0 & \end{array}$$

Ésta es la forma en que se disponen habitualmente los elementos de un modelo. Con más detalle:

Objetivo: Puede ser

Max. (maximizar),
Min. (minimizar),

o, cuando nos interesan tanto las soluciones que maximizan como las que minimizan la función objetivo, se escribe

Opt. (optimizar).

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 4x+5y \\ \text{s.a} & 2x+3y \leq 12 \\ & 8x+3y \leq 24 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

Función objetivo

Restricciones: pueden ser de $\leq$, de $\geq$ o de $=$. Nunca consideraremos restricciones de $<$ o de $>$.

s.a significa “sujeto a”. Quiere decir que el objetivo de maximizar $4x+5y$ está sujeto a que se cumplan las restricciones que se indican.

Condiciones de no negatividad: Son las restricciones más sencillas (pero que no pueden ser omitidas cuando el problema las requiere).
Otras restricciones sencillas son las de **cota superior**, como $x \leq 5$ o las de **cota inferior**, como $x \geq 2$.

Un problema de *programación matemática* es un problema que puede plantearse en estos términos: maximizar o minimizar una función objetivo sujeta a unas restricciones.

- Una *solución* de un problema de programación matemática es cualquier asignación de valores para sus variables de decisión.
- Una solución de un problema de programación matemática es *factible* si cumple todas las restricciones, y es *infactible* si no cumple alguna de las restricciones.

Ejemplo 1b Algunas soluciones del problema que acabamos de modelizar son

$$(x,y)=(1,3), \quad (x,y)=(3,1), \quad (x,y)=(-1,0).$$

La primera consiste en producir 1 hl de cosmético A y 3 hl de cosmético B. Es una solución factible, porque cumple las cuatro restricciones del problema:

$$2\cdot 1+3\cdot 3=11\leq 12, \qquad 8\cdot 1+3\cdot 3=17\leq 24, \quad 1\geq 0, \quad 3\geq 0.$$

Más concretamente, vemos que esta solución tiene un coste de 11 u.m., que no excede el presupuesto disponible de 12 u.m., y requiere 17 horas de mano de obra, que está en el rango de las 24 horas disponibles. Además, ninguna cantidad es negativa, cosa que no tendría sentido.

La segunda solución es infactible, pues

$$2\cdot 3+3\cdot 1=9\leq 12, \qquad 8\cdot 3+3\cdot 1=27\not\leq 24, \quad 3\geq 0, \quad 1\geq 0.$$

Observa que las soluciones que no cumplen las restricciones se consideran igualmente soluciones (pero infactibles), de modo que no debes decir que $(x, y) = (1, 3)$ o $(x, y) = (-1, 0)$ no son soluciones del problema, sino que son soluciones infactibles.

Observa también que para que una solución sea factible debe cumplir **todas** las restricciones, mientras que basta con que incumpla **una** cualquiera para que sea infactible.

En este caso nos encontramos con que, aunque el coste es de 9 u.m., por lo que entra dentro del presupuesto disponible, necesita 27 horas diarias de mano de obra, y no disponemos de tantas, por lo que se trata de una solución inviable (imposible de llevar a la práctica). Por eso decimos que es infactible.

La tercera solución, en cambio, cumple tanto la restricción presupuestaria como la de las horas disponibles, pero incumple lo más obvio, y es que no tiene sentido producir -1 hl del cosmético de gama alta. Por ello es también infactible.

• Una solución de un problema de programación matemática es un *máximo global* si es factible y el valor que toma en ella la función objetivo es mayor o igual que el valor que ésta toma en cualquier otra solución factible.

• Una solución de un problema de programación matemática es un *mínimo global* si es factible y el valor que toma en ella la función objetivo es menor o igual que el valor que ésta toma en cualquier otra solución factible.

• Un *óptimo global* (o *una solución óptima*) es un máximo global para un problema de maximizar o bien un mínimo global para un problema de minimizar, es decir, empleamos la palabra "óptimo" cuando no queremos especificar si hablamos de máximos o de mínimos.

Por ejemplo, ahora podemos decir que *resolver un problema de programación matemática* es encontrar sus óptimos globales, lo cual significa encontrar sus máximos globales si el problema es de maximizar o encontrar sus mínimos globales si el problema es de minimizar.

• Cuando no queremos especificar si hablamos de maximizar o de minimizar podemos emplear también las palabras mejor/peor: una solución es mejor que otra si la función objetivo toma en ella un valor mayor si el problema es de maximizar, o cuando la función objetivo toma un valor menor si el problema es de minimizar.

Por ejemplo, si estamos maximizando el beneficio, las soluciones que proporcionan un beneficio mayor son mejores, mientras que si estamos minimizando el coste las soluciones que proporcionan un coste menor son mejores. En resumen:

Las soluciones factibles de un problema son las que cumplen todas las restricciones, y las soluciones óptimas son las mejores soluciones factibles (puede haber más de una si hay soluciones distintas que dan lugar al mismo valor de la función objetivo), pero conviene tener presente que un problema puede tener soluciones mejores que las óptimas, a condición de que sean soluciones infactibles.

Ejemplo 1c Ya hemos considerado varias soluciones factibles del problema del ejemplo 1a, como son la solución $(x, y) = (2, 2)$, que proporciona un beneficio $B(2, 2) = 18$ u.m., o la solución $(x, y) = (1, 3)$, con $B(1, 3) = 19$ u.m., o $(x, y) = (1, 3.3)$, con $B(1, 3.3) = 20.5$ u.m. Sin embargo, no sabemos cuál es la solución óptima del problema, es decir, la solución factible que proporciona el máximo beneficio posible.

Lo que sí que podemos asegurar es que $(2, 2)$ no puede ser la solución óptima, ya que hay soluciones factibles mejores, como $(1, 3)$, la cual tampoco puede ser óptima, porque $(1, 3.3)$ es una solución factible aún mejor. Sin embargo, no sabemos si $(1, 3.3)$ es ya la solución óptima o si, por el contrario, se pueden encontrar soluciones factibles aún mejores.

Todavía no sabemos resolver ningún problema de programación matemática, pero más adelante veremos cómo llegar a la conclusión de que la solución óptima resulta ser $(x, y) = (2, 8/3)$, es decir, que conviene producir 2 hl del cosmético A y $8/3 = 2.66$ hl del cosmético B cada día. Podemos comprobar que es una solución factible:

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 8/3 = 12 \leq 12, \qquad 8 \cdot 2 + 3 \cdot 8/3 = 24 \leq 24,$$

$$2 \geq 0, \quad 8/3 \geq 0,$$

y el beneficio que proporciona, $B(2, 8/3) = 21.33$ u.m., es mejor que el de todas las soluciones factibles que conocíamos.

Lo que tenemos pendiente es descubrir cómo podemos llegar a encontrar esta solución y cómo justificar que es imposible encontrar soluciones factibles mejores.

Notemos que la solución $(x, y) = (2, 3)$ proporciona un beneficio aún mayor, $B(2, 3) = 23$, pero esto no contradice al hecho de que $(2, 8/3)$ sea la solución óptima, ya que $(2, 3)$ es una solución infactible. Recordemos que la solución óptima es la mejor de las soluciones factibles, pero no tiene nada de extraño que con más presupuesto y más horas de las disponibles podamos obtener soluciones mejores que la solución óptima (la mejor solución posible que respeta las restricciones de presupuesto y horas).

> Es importante que la solución óptima de un problema es el valor que deben tomar las variables para maximizar la función objetivo y no el valor que toma la función objetivo. Por ejemplo, cuando sepas resolver problemas como éste, sería incorrecto que dijeras que la solución óptima es
>
> $$B = 21.33.$$
>
> Lo correcto es decir que la solución óptima es
>
> $$(x, y) = (2, 2.66),$$
>
> o, equivalentemente, que la solución óptima es producir 2 hl de crema de tipo A y 2.66 hl de crema de tipo B al día. También es relevante que $B = 21.33$, pero eso no es la solución óptima, sino lo que llamaremos **el valor óptimo de la función objetivo**, en este caso el beneficio máximo, ¡pero no la solución óptima!

Hay una observación del ejemplo precedente que conviene resaltar:

> Si una solución de un problema de programación matemática es peor que otra solución factible, entonces no puede ser la solución óptima. Similarmente, si la función objetivo en una solución factible toma un cierto valor, digamos $F = 20$, entonces el valor óptimo de la función objetivo será 20 o mejor que 20, pero no puede ser peor.[1]

Ejemplo 2a Modeliza el problema siguiente:

Una empresa se propone contratar nuevos trabajadores, y se plantea dos modalidades de contrato: una para trabajadores no cualificados y otra para trabajadores cualificados. El rendimiento de los segundos es superior y, concretamente, la empresa estima que si el rendimiento de los trabajadores no cualificados se mide en 4 unidades, entonces el de los cualificados es de 5 unidades. El salario que ofrece a los trabajadores no cualificados es de 2 u.m. mensuales, mientras que el de los cualificados es de 3 u.m. mensuales. Por otra parte, los trabajadores nuevos requieren un proceso de formación que es más caro en el caso de los no cualificados: 8 u.m. frente a las 3 u.m. requeridas por cada trabajador cualificado.

[1] Por ejemplo, si en un grupo de personas hay una que tiene 20 años, sería absurdo plantearse que la persona de más edad del grupo tuviera 19 años. Si ya hay una solución factible con $F = 20$, entonces la solución óptima será ésa u otra mejor, pero no puede ser otra peor.

Determina a cuántos trabajadores de cada tipo conviene contratar para obtener el máximo rendimiento si la empresa dispone de un presupuesto de 12 u.m. mensuales para los salarios y de 24 u.m. para la formación inicial.

La modelización de este problema es muy similar a la del ejemplo 1. Ahora las variables son:

$x =$ *trabajadores no cualificados que conviene contratar,*

$y =$ *trabajadores cualificados que conviene contratar.*

y el modelo es:

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & 4x + 5y & \text{rendimiento} \\ \text{s.a} & 2x + 3y \leq 12 & \text{salario mensual total} \leq \text{presupuesto mensual} \\ & 8x + 3y \leq 24 & \text{coste de formación inicial} \leq \text{presupuesto inicial} \\ & x,\, y \geq 0 \text{ enteras} & \end{array}$$

La única diferencia es que, a las restricciones del problema del ejemplo 1 hemos tenido que añadir una de naturaleza especial, en cuanto que no viene expresada por igualdades o desigualdades, que es la exigencia de que las variables x e y sólo tomen valores enteros.

Si no incluyéramos esta restricción (que son dos restricciones en realidad, una para x y otra para y) la solución óptima sería la misma que la del problema del ejemplo 1, que ya hemos indicado que es contratar $x = 2$ trabajadores no cualificados e $y = 2.66$ trabajadores cualificados, lo cual obviamente carece de sentido.

Ahora la solución $(x, y) = (2, 2.66)$ es infactible, a pesar de que cumple las restricciones del problema expresadas por desigualdades, porque incumple una de las restricciones de integridad, concretamente la de la variable y.

• Las únicas restricciones que vamos a considerar en los problemas de programación matemática que vamos a estudiar son las que vienen expresadas por desigualdades o igualdades (como $x+y \leq 5$, $3xy \geq 10$, $x^2+y^2 = 9$, etc.) o bien las condiciones de integridad, que exigen que determinadas variables de un modelo sólo tomen valores enteros. Más concretamente, distinguiremos tres tipos de variables:

Variables enteras Son variables a las que se les exige que sólo tomen valores enteros. En la práctica, si exigimos que una variable x sea entera, se sobrentiende que además tiene que cumplir $x \geq 0$, por lo que una variable entera es aquella que sólo puede tomar los valores $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Variables binarias Son un caso particular de las variables enteras, concretamente, aquellas que sólo pueden tomar los valores $x = 0, 1$. Más adelante veremos que tienen gran utilidad a la hora de modelizar ciertos problemas.

Variables continuas Son aquellas a las que no se les exige ninguna condición de integridad, de modo que pueden tomar valores decimales.

Dentro de las variables continuas conviene distinguir las *variables no negativas,* que son aquellas a las que se les exige la condición de no negatividad $x \geq 0$. Cuando a una variable continua no se le exige la condición de no negatividad[2] se dice que es una *variable libre.*

[2]Ni tampoco la condición $x \leq 0$ de no positividad, aunque nunca nos aparecerán restricciones de este tipo.

Ejemplo 2b Continuando con el ejemplo 2, conviene observar que aunque sepamos que la solución óptima del problema sin considerar variables enteras es $(x, y) = (2, 2.66)$, esto no nos ayuda en principio a encontrar la solución óptima del problema con variables enteras.

Por ejemplo, ya que no nos sirve $(x, y) = (2, 2.66)$ porque no podemos contratar 2.66 nuevos trabajadores, uno podría pensar en redondear a $(x, y) = (2, 3)$, pero sucede que esta solución es infactible:

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13 \not\leq 12, \quad 8 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 25 \not\leq 24, \quad 2 \geq 0, \quad 3 \geq 0,$$

de modo que para llevarla a la práctica el salario mensual requerido excedería el presupuesto y, además, los gastos de formación inicial superarían también el presupuesto disponible para ese fin.

Para evitar esto podríamos redondear hacia abajo y considerar la solución $(x, y) = (2, 2)$, que es factible, pero proporciona un rendimiento $R(2, 2) = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 18$, pero vemos entonces que no es la solución óptima, ya que, por ejemplo, $(1, 3)$ también es una solución factible y es mejor, pues $R(1, 3) = 19$.

Veremos más adelante que la solución óptima de este problema es $(x, y) = (0, 4)$, es decir, que conviene contratar 4 trabajadores cualificados y a ninguno no cualificado, con lo que el rendimiento obtenido es $R(0, 4) = 20$.

Del ejemplo precedente extraemos esta conclusión:

> La resolución de un problema de programación matemática en la que algunas de sus variables son enteras (o binarias, en particular) requiere técnicas específicas, que no pueden consistir en resolver el problema sin tener en cuenta las restricciones de integridad y luego redondear el resultado.

1.3 Resolución de problemas de programación matemática

A lo largo de los temas siguientes vamos a presentar cinco técnicas de resolución de problemas de programación matemática que vamos a describir aquí brevemente:

Resolución gráfica No tiene ninguna utilidad práctica, porque *sólo es aplicable a problemas con dos variables,* y sólo en casos sencillos nos permite determinar la solución óptima, pero tiene interés didáctico, ya que nos permite visualizar muchos de los conceptos que intervienen igualmente en la resolución de problemas más complejos.

Método símplex Es el proceso de resolución más sencillo, pues no requiere hacer operaciones más complicadas que sumar, restar, multiplicar y dividir, pero *sólo es aplicable a problemas de programación lineal,* es decir, a problemas en los que tanto la función objetivo como las restricciones están determinadas por funciones lineales (y no hay restricciones de integridad).

> Recordemos que una función lineal es una función de la forma
>
> $$5x + 6y - 3z,$$
>
> es decir, una suma donde cada variable aparece únicamente multiplicada por un número. Todas las funciones que aparecen en el modelo del problema 1 son lineales. En cambio,
>
> $$xy, \quad x^2 + 3y, \quad \sqrt{x} + \sqrt{y}$$
>
> son ejemplos de funciones no lineales

Método de Kuhn y Tucker Es más general que el método símplex, porque es aplicable tanto si las funciones que determinan el modelo son lineales o no lineales (pero tampoco admite restricciones de integridad). A cambio, el proceso de resolución es más complejo, pues requiere calcular derivadas y resolver sistemas de ecuaciones que pueden llegar a ser muy complicados (por lo que en la práctica consideraremos sólo ejemplos cuya resolución no se complique mucho).

Método de ramificación y acotación Es un procedimiento que permite resolver problemas con variables enteras. Más concretamente, lo que hace es reducir la resolución de un problema con variables enteras a la resolución de varios problemas sin variables enteras, que a su vez pueden ser resueltos por cualquiera de los otros métodos (que sea adecuado para el tipo de problema).

Resolución con ordenador Existen numerosos paquetes informáticos capaces de resolver problemas de programación matemática. Nosotros usaremos LINGO, cuya versión demo es gratuita y es suficiente para resolver todos los problemas que vamos a considerar. Estos paquetes usan versiones más refinadas de las técnicas que nosotros vamos a estudiar y también otras en las que no vamos a entrar.

A la hora de elegir el método más adecuado para resolver cada problema conviene clasificar los problemas según las características relevantes para ello. Concretamente vamos a distinguir los tipos de problemas siguientes:

Programación lineal Un problema es de programación lineal (PL) si no tiene variables enteras y tanto su función objetivo como sus restricciones están determinadas por funciones lineales. Son, por lo tanto, los problemas que pueden resolverse mediante el método símplex.

Programación no lineal Un problema es de programación no lineal (PNL) si no tiene variables enteras, sin que importe si las funciones que determinan su objetivo y sus restricciones sean o no lineales.

Son los problemas que pueden resolverse mediante el método de Kuhn y Tucker. Observemos que todo problema de programación lineal es también de programación no lineal, y puede resolverse tanto por el método símplex como por el método de Kuhn y Tucker, pero en la práctica, como el método símplex es más sencillo, el método de Kuhn y Tucker sólo se emplea en los problemas de programación no lineal en los que alguna de las funciones que lo determinan no es lineal (lo que vuelve al símplex no aplicable).

Dentro de los problemas de programación no lineal son especialmente simples los llamados problemas de **programación clásica**, que son los problemas en los que no hay restricciones o éstas son todas de igualdad. Para este tipo de problema el método de Kuhn y Tucker se simplifica considerablemente.

Programación entera Un problema es de programación entera si a alguna de sus variables se le exige que sea entera (o en particular binaria). Es de *programación entera pura* si todas las variables tienen que ser enteras (o binarias), mientras que si el problema tiene tanto variables enteras como variables continuas se dice que es de *programación entera mixta.*

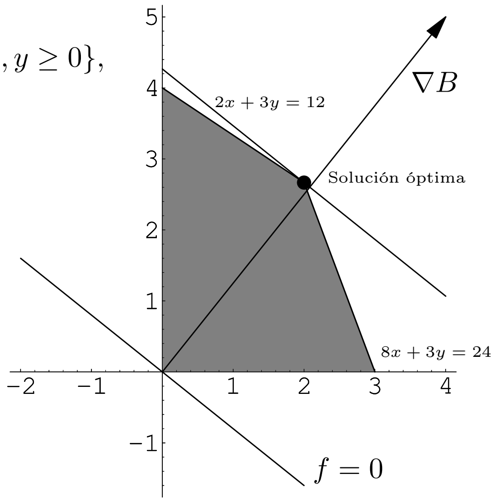
Los problemas de este tipo los resolveremos mediante el método de ramificación y acotación.

Un problema es de *programación lineal entera* (PLE) si además de tener variables enteras todas las funciones que lo determinan son lineales. Notemos que un problema de programación lineal entera NO es de programación lineal, porque para ser de programación lineal no puede tener variables enteras. Los problemas de PLE tienen que resolverse mediante ramificación y acotación, pero no pueden resolverse por el método símplex.

Como ilustración vamos a resolver los dos problemas que hemos puesto como ejemplo mediante todos los métodos que vamos a estudiar. En una primera lectura, aunque no estarás en condiciones de entender los ejemplos, sólo se trata de darte una visión general de lo que supone resolver un problema de programación matemática, pero cuando hayas estudiado cada una de las técnicas conviene que vuelvas a este punto para comparar las diferencias de cada método:

Resolución gráfica Para resolver gráficamente el problema del ejemplo 1 dibujamos su conjunto de oportunidades:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y \leq 12, 8x + 3y \leq 24, x \geq 0, y \geq 0\},$$



que es la zona sombreada de la figura. Representamos también el gradiente de la función objetivo, que es $\nabla B = (4, 5)$, así como la curva de nivel $B = 0$.

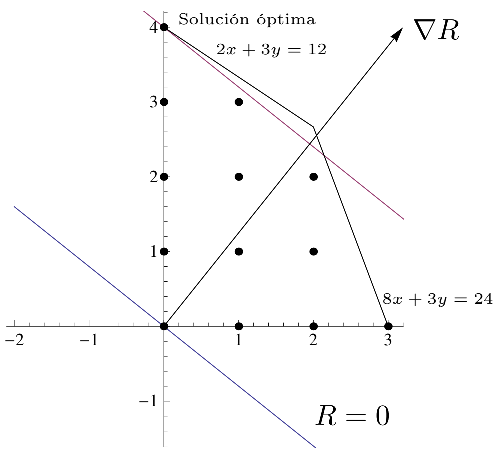
Como el objetivo es maximizar, desplazamos esta curva de nivel todo lo posible en la dirección dada por el gradiente sin salirnos del conjunto de oportunidades y concluimos que la solución óptima es la señalada en la figura.

Como la solución óptima se encuentra sobre las rectas de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 12 \\ 8x + 3y &= 24 \end{aligned}$$

sólo tenemos que resolver el sistema que forman. Por ejemplo, restando la segunda menos la primera queda $6x = 12$, luego $x = 2$ y sustituyendo en la primera

$$4 + 3y = 12 \quad \Rightarrow \quad 3y = 8 \quad \Rightarrow \quad y = 8/3.$$



Concluimos que la solución óptima es

$$(x, y) = (2, 8/3) = (2, 2.66)$$

y que $B(2, 8/3) = 21.33$ es el valor óptimo de la función objetivo.

Para resolver gráficamente el problema del ejemplo 2 la diferencia es que el conjunto de oportunidades está formado únicamente por las soluciones enteras dentro del conjunto de oportunidades anterior, es decir, por los puntos señalados en la segunda figura.

Al desplazar la curva de nivel $R = 0$ en la dirección del gradiente, el último punto del conjunto de oportunidades que encontramos es $(x, y) = (0, 4)$. Por lo tanto, ésta es la solución óptima, y el valor óptimo de la función objetivo es $R(0, 4) = 20$.

Método símplex El método símplex puede aplicarse al problema del ejemplo 1, porque es de programación lineal, pero no al del ejemplo 2, porque no es de programación lineal, ya que tiene variables enteras. Para aplicarlo ponemos el problema en forma estándar introduciendo variables de holgura:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 4x+5y \\ \text{s.a} & 2x+3y+s=12 \\ & 8x+3y+t=24 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

La matriz técnica es

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 12 \\ 8 & 3 & 0 & 1 & 24 \end{array}\right)$$

Como tiene una matriz identidad, podemos tomar como variables básicas s y t, con lo que una tabla del símplex es

		4	5	0	0	
		x	y	s	t	
0	s	2	3	1	0	12
0	t	8	3	0	1	24
		0	0	0	0	0
		4	5	0	0	

Entra la variable y porque tiene el marginal más positivo y sale la variable s porque $12/3 < 24/3$. Al iterar obtenemos

		4	5	0	0	
		x	y	s	t	
5	y	$2/3$	1	$1/3$	0	4
0	t	6	0	-1	1	12
		$10/3$	5	$5/3$	0	20
		$2/3$	0	$-5/3$	0	

Ahora entra la variable x porque es la única con marginal positivo, y sale t porque $\frac{12}{6} < \frac{4}{2/3} = 6$.

		4	5	0	0	
		x	y	s	t	
5	y	0	1	$4/9$	$-1/9$	$8/3$
4	x	1	0	$-1/6$	$1/6$	2
		4	5	$14/9$	$1/9$	$64/3$
		0	0	$-14/9$	$-1/9$	

Esta tabla es óptima porque todos los marginales no básicos son negativos, luego la solución óptima es $(x, y) = (2, 8/3)$ y el valor óptimo de la función objetivo es $B = 64/3 = 21.33$.

Método de Kuhn y Tucker El método de Kuhn y Tucker puede aplicarse al problema del ejemplo 1 porque es de programación no lineal, pero no al del ejemplo 2, porque no es de programación no lineal, ya que tiene variables enteras. Para ello escribimos la función lagrangiana:

$$L = 4x + 5y + \lambda(12 - 2x - 3y) + \mu(24 - 8x - 3y) - \nu_1 x - \nu_2 y$$

y las condiciones de Kuhn y Tucker:

Factibilidad $2x+3y \leq 12$, $8x+3y \leq 24$, $x \geq 0$, $y \geq 0$,

Punto crítico $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 4 - 2\lambda - 8\mu - \nu_1 = 0, \quad \dfrac{\partial L}{\partial y} = 5 - 3\lambda - 3\mu - \nu_2 = 0,$

Signo $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\nu_1 \leq 0$, $\nu_2 \leq 0$,

Holgura complementaria $\lambda(12-2x-3y)=0$, $\mu(24-8x-3y)=0$, $\nu_1 x = 0$, $\nu_2 y = 0$.

Estas condiciones dan lugar a 16 casos:

1)	$\lambda = 0,\ \mu = 0,\ \nu_1 = 0,\ \nu_2 = 0,$	9)	$12-2x-3y=0,\ \mu=0,\ \nu_1=0,\ \nu_2=0,$
2)	$\lambda = 0,\ \mu = 0,\ \nu_1 = 0,\ y = 0,$	10)	$12-2x-3y=0,\ \mu=0,\ \nu_1=0,\ y=0,$
3)	$\lambda = 0,\ \mu = 0,\ x = 0,\ \nu_2 = 0,$	11)	$12-2x-3y=0,\ \mu=0,\ x=0,\ \nu_2=0,$
4)	$\lambda = 0,\ \mu = 0,\ x = 0,\ y = 0,$	12)	$12-2x-3y=0,\ \mu=0,\ x=0,\ y=0,$
5)	$\lambda = 0,\ 24-8x-3y=0,\ \nu_1 = 0,\ \nu_2 = 0,$	13)	$12-2x-3y=0,\ 24-8x-3y=0,\ \nu_1=0,\ \nu_2=0,$
6)	$\lambda = 0,\ 24-8x-3y=0,\ \nu_1 = 0,\ y = 0,$	14)	$12-2x-3y=0,\ 24-8x-3y=0,\ \nu_1=0,\ y=0,$
7)	$\lambda = 0,\ 24-8x-3y=0,\ x = 0,\ \nu_2 = 0,$	15)	$12-2x-3y=0,\ 24-8x-3y=0,\ x=0,\ \nu_2=0,$
8)	$\lambda = 0,\ 24-8x-3y=0,\ x = 0,\ y = 0,$	16)	$12-2x-3y=0,\ 24-8x-3y=0,\ x=0,\ y=0.$

Los cuatro primeros casos son imposibles, porque en ellos $\lambda = \mu = 0$, luego la primera condición de punto crítico nos da $\nu_1 = 5$, que contradice a la condición de signo.

En los casos 5) y 6) tenemos $\lambda = 0$ y $\nu_1 = 0$, con lo que las ecuaciones de punto crítico nos dan

$$8\mu = 4, \quad 3\mu + \nu_2 = 5,$$

de donde $\mu = 1/2$ y $\nu_2 = 7/2 > 0$, y no se cumple la condición de signo.

Los casos 9) y 10), en los que $\mu = 0$ y $\nu_1 = 0$ se llega igualmente a que $\nu_2 > 0$ y tampoco se cumple la condición de signo.

> Observemos que el método símplex es mucho más sencillo, pues nos lleva a la solución óptima con unos pocos cálculos elementales, mientras que por este método tenemos que resolver 16 sistemas de ecuaciones distintos. Si hubiera habido una variable más o una restricción más, la solución por el símplex apenas se complicaría, mientras que por este método el número de sistemas de ecuaciones pasaría a ser de 32. Así pues, elegir adecuadamente el método de resolución puede simplificar drásticamente el proceso de resolución.

También son parecidos el caso 7) (con $\lambda = 0$ y $\nu_2 = 0$, que lleva a que $\nu_1 > 0$) y el caso 11) (con $\mu = 0$ y $\nu_2 = 0$, que lleva también a que $\nu_1 > 0$).

Los casos 8), 12) y 16), en los que $x = y = 0$, son también imposibles, porque llevan a que $24 = 0$ o a que $12 = 0$.

El caso 14) lleva a $2x = 12$ y $8x = 24$, que también es imposible, y el 15) a $3y = 12$ y $3y = 24$, que tampoco puede ser.

Sólo queda el caso 13), en el que tenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 12 \\ 8x + 3y &= 24 \\ 2\lambda + 8\mu &= 4 \\ 3\lambda + 3\mu &= 5 \end{aligned}$$

cuya solución es $(x, y, \lambda, \mu, \nu_1, \nu_2) = (2, 8/3, 14/9, 1/9, 0, 0)$, que cumple las condiciones de factibilidad y signo, luego es un punto de Kuhn y Tucker.

Como la función objetivo es lineal, es cóncava, y como las restricciones son lineales, el conjunto de oportunidades es convexo, luego podemos aplicar la condición suficiente de Kuhn y Tucker que nos asegura que el punto $(x, y) = (2, 8/3)$ es la solución óptima del problema, y el valor óptimo de la función objetivo es $B = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 8/3 = 21.33$.

Resolución con ordenador Para resolver con LINGO el problema del ejemplo 1 tecleamos:

```
[Beneficio] Max=4*x+5*y;
[Coste] 2*x+3*y<12;
[Horas] 8*x+3*y<24;
```

Y la respuesta de LINGO es:

```
      Variable           Value        Reduced Cost
             X        2.000000            0.000000
             Y        2.666667            0.000000

           Row    Slack or Surplus      Dual Price
     BENEFICIO        21.33333            1.000000
         COSTE        0.000000            1.555556
         HORAS        0.000000           0.1111111
```

Por lo tanto, la solución óptima es $(x, y) = (2, 2.66)$ y el valor óptimo de la función objetivo es 21.33.

Para resolver el problema del ejemplo 2 tenemos que exigir además que las variables sean enteras:

```
[Rendimiento] Max=4*x+5*y;
[Salario] 2*x+3*y<12;
[Formacion] 8*x+3*y<24;
@GIN(x); @GIN(y);
```

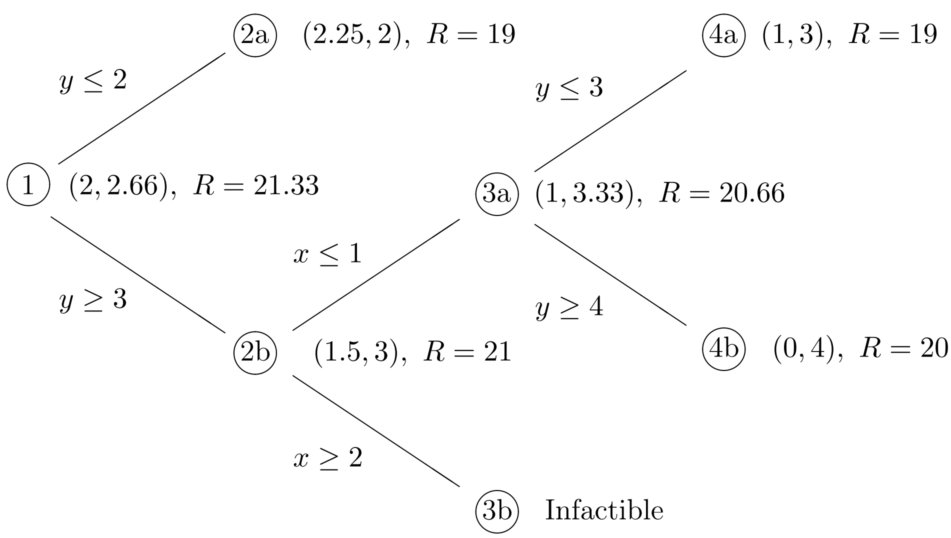
Así obtenemos:

```
      Variable           Value        Reduced Cost
             X        0.000000           -4.000000
             Y        4.000000           -5.000000

           Row    Slack or Surplus      Dual Price
   RENDIMIENTO        20.00000            1.000000
       SALARIO        0.000000            0.000000
     FORMACION        12.00000            0.000000
```

Con lo que concluimos que la solución óptima es $(x, y) = (0, 4)$ y que el valor óptimo de la función objetivo es $R = 20$.

Ramificación y acotación Finalmente vamos a resolver el problema del ejemplo 2 mediante el método de ramificación y acotación. Este método resuelve el problema con variables enteras resolviendo un árbol de problemas auxiliares sin variables enteras, por lo que en la práctica el método de ramificación y acotación tiene que combinarse con otro método que resuelva los problemas auxiliares. En este caso usamos LINGO, y el resultado es el árbol siguiente:



Los nodos 4a y 4b terminan porque corresponden a soluciones enteras, el nodo 3b termina porque corresponde a un problema infactible y el nodo 2a termina porque corresponde a una solución peor que la solución entera del nodo 4b. Por lo tanto, podemos concluir que la solución óptima es la del nodo 4b (la mejor del árbol) y es $(x, y) = (0, 4)$ con valor óptimo de la función objetivo $R = 20$.

1.4 El conjunto de oportunidades, soluciones interiores y de frontera

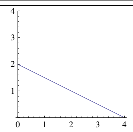
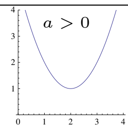
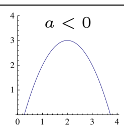
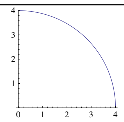
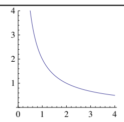
El conjunto de oportunidades El *conjunto de oportunidades* de un problema de programación matemática es el conjunto de sus soluciones factibles, es decir, el conjunto de las soluciones que cumplen todas las restricciones del problema.

Ejemplo 3a Escribe el conjunto de oportunidades del problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x + y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \leq 18 \\ & y - x^2 \leq 1 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

SOLUCIÓN: $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 18,\ y - x^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

Para problemas de dos variables a menudo es ilustrativo representar gráficamente el conjunto de oportunidades. Para ello ayuda saber *a priori* a qué tipo de curvas dan lugar algunas ecuaciones sencillas:

$ax + by = c$	recta	
$y = ax^2 + bx + c$	parábola	 
$x^2 + y^2 = c$	circunferencia	
$xy = c \quad (c > 0)$	hipérbola	

Ejemplo 3b Representa gráficamente el conjunto de oportunidades del ejemplo anterior.

SOLUCIÓN: Consideramos primero las restricciones con igualdad.

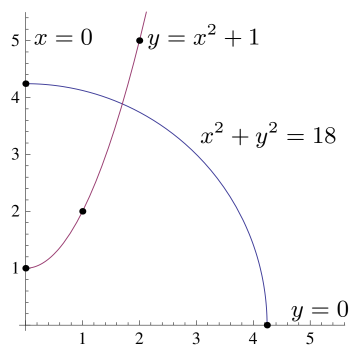
- La primera es $x^2 + y^2 = 18$, que corresponde a una circunferencia (las circunferencias con una ecuación de esta forma tienen siempre el centro en $(0,0)$). Para representar una circunferencia basta con hacer una tabla con dos valores, como en el ejemplo.
- La segunda es $y = x^2 + 1$, que corresponde a una parábola en forma de "copa" porque el coeficiente de x^2 es positivo. En el caso de una parábola conviene hacer una tabla con algunos valores más.
- Las ecuaciones $x = 0$ e $y = 0$ corresponden al eje vertical y el eje horizontal, respectivamente.

$x^2 + y^2 = 18$

x	y
0	4.24
4.24	0

$y = x^2 + 1$

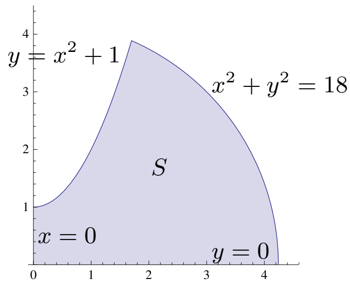
x	y
0	1
1	2
2	5



Así hemos representado los puntos que cumplen la igualdad $x^2+y^2 = 18$, pero los puntos que cumplen la primera restricción son los que cumplen la desigualdad $x^2+y^2 \leq 18$. Éstos serán los que quedan en una de las dos partes de la circunferencia. Para saber cuál de las dos es la correcta, tomamos un punto cualquiera que no esté en la circunferencia, por ejemplo $(0,0)$ y observamos que este punto cumple la restricción $0^2 + 0^2 \leq 18$. Por lo tanto, los puntos que la cumplen son los que están en el mismo lado que el $(0,0)$, es decir, los de dentro de la circunferencia, y no los de fuera.

Similarmente, los puntos que cumplen la restricción $y - x^2 \leq 1$ serán o bien los de arriba de la parábola o bien los de abajo. Para averiguarlo tomamos un punto que no esté en la parábola, por ejemplo el $(0,2)$ y observamos que este punto no cumple la restricción $2 - 0^2 \not\leq 1$. Por lo tanto, como $(0,2)$ está arriba de la parábola, los puntos que cumplen la restricción son del lado opuesto, los que están debajo de la parábola.

Ahora sólo tenemos que sombrear los puntos que están a la vez debajo de la parábola, dentro de la circunferencia, a la derecha del eje y (esto es la condición $x \geq 0$) y arriba del eje x (esto es la condición $y \geq 0$). El resultado es el que se muestra en la figura.



Ejemplo 4a Representa gráficamente el conjunto de oportunidades del problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \leq 16 \\ & 2x - y \geq 0 \\ & y - 2x^2 + 6x \leq 5 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array}$$

Solución: Se trata del conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16,\ 2x - y \geq 0,\ y - 2x^2 + 6x \leq 5,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

La curva $x^2 + y^2 = 16$ es una circunferencia de centro $(0,0)$, luego basta calcular dos de sus puntos, la curva $2x - y = 0$ es una recta, luego también nos basta con dos puntos, mientras que $y = 2x^2 - 6x + 5$ es una parábola en forma de "copa", y conviene calcular varios puntos:

$x^2 + y^2 = 16$

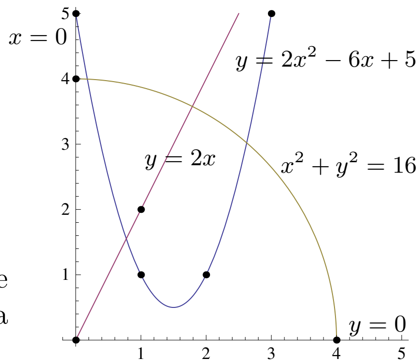
x	y
0	4
4	0

$y = 2x$

x	y
0	0
1	2

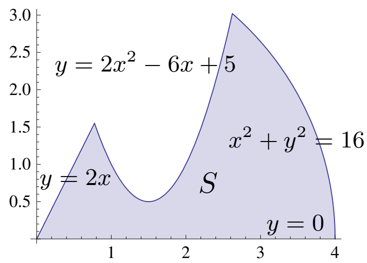
$y = 2x^2 - 6x + 5$

x	y
0	5
1	1
2	1
3	5



Con los puntos calculados, y sabiendo la forma que tiene que tener la curva, es fácil esbozar cada una de ellas como muestra la figura.

Ahora tomamos un punto que no esté sobre las curvas, por ejemplo el $(0,1)$ y observamos que cumple la primera restricción $0^2 + 1^2 \leq 16$, no cumple la segunda $2 \cdot 0 - 1 \not\geq 0$ y cumple la tercera $1 - 2 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 \leq 5$. Como el punto $(0,1)$ está dentro de la circunferencia, los puntos que cumplen la primera restricción son los de dentro de la circunferencia, como está encima de la recta (y no cumple la restricción), los puntos que cumplen la segunda restricción son los de debajo de la recta, y como está debajo de la parábola y cumple la tercera restricción, los puntos que la cumplen son los de debajo de la parábola.



Ahora sólo queda sombrear los puntos que están a la vez debajo de la recta, debajo de la parábola, dentro de la circunferencia, a la derecha del eje vertical y encima del eje horizontal. El resultado es el conjunto que muestra la segunda figura.

Soluciones interiores y de frontera Supongamos que en un problema aparece una restricción de $\leq$ o de $\geq$, por ejemplo, $2x - y \geq 0$. Entonces, una solución puede cumplirla de dos formas distintas: puede cumplirla con igualdad, como $(1, 2)$, que cumple $2 \cdot 1 - 2 = 0$, o bien puede cumplirla con desigualdad estricta, como $(5, 1)$, que cumple $2 \cdot 5 - 1 = 9 > 0$. En ambos casos se cumple la restricción, pero en el primero decimos que la solución *satura* la restricción, o que la restricción *está saturada* en dicha solución. En general:

- Una solución de un problema de programación matemática *satura* una restricción si la cumple con igualdad, y *no la satura* si la cumple con desigualdad estricta (de modo que si la restricción es de igualdad, todas las soluciones que la cumplen la saturan necesariamente).
- Una solución de un problema de programación matemática es *interior* si es factible pero no satura ninguna de sus restricciones, y es *de frontera* si es factible y satura al menos una de las restricciones.

De este modo, las soluciones de cualquier problema de programación matemática quedan clasificadas de este modo:

$$\text{Soluciones}\begin{cases}\text{infactibles} & \text{no cumplen alguna restricción,}\\[1em] \text{factibles} & \begin{cases}\text{interiores} & \text{cumplen las restricciones con desigualdad estricta,}\\ \text{de frontera} & \text{cumplen las restricciones, alguna con igualdad.}\end{cases}\end{cases}$$

Ejemplo 3c Considera de nuevo el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x + y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \leq 18 \\ & y - x^2 \leq 1 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

y determina si las soluciones $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 3)$ son factibles o infactibles, interiores o de frontera.

Solución:

$$2^2 + 2^2 = 8 < 18, \quad 2 - 2^2 = -2 < 1, \quad 2 > 0, \quad 2 > 0$$

por lo tanto, $(2, 2)$ cumple todas las restricciones y no satura ninguna: es una solución factible interior.

> A la hora de comprobar si una solución es interior o de frontera no debes olvidar las condiciones de no negatividad. La solución $(2, 0)$ es de frontera porque satura una de ellas. Si no las tuvieras en cuenta y consideraras sólo las otras dos restricciones, dirías que es una solución interior, y sería incorrecto.

$$3^2 + 3^2 = 18, \quad 3 - 3^2 = -6 < 1, \quad 3 > 0, \quad 3 > 0$$

por lo tanto $(3, 3)$ cumple todas las restricciones y satura una de ellas (la primera), luego es una solución factible de frontera.

$$2^2 + 0^2 = 4 < 18, \quad 0 - 2^2 = -4 < 1, \quad 2 > 0, \quad 0 = 0$$

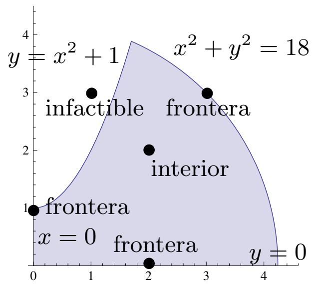
por lo tanto $(2, 0)$ cumple todas las restricciones y satura una de ellas (la cuarta), luego es una solución factible de frontera.

$$0^2 + 1^2 = 1 < 18, \quad 1 - 0^2 = 1, \quad 0 = 0, \quad 1 > 0$$

por lo tanto $(0, 1)$ cumple todas las restricciones y satura dos de ellas (la segunda y la tercera), luego es una solución factible de frontera.

$$1^2 + 3^2 = 10 < 18, \quad 3 - 1^2 = 2 \not\leq 1, \quad 1 > 0, \quad 3 > 0$$

por lo tanto, $(1,3)$ no cumple una restricción (la segunda), por lo que es una solución infactible.



El concepto de solución interior y de frontera tiene una interpretación geométrica muy simple: las soluciones de frontera son las que están "en el borde" del conjunto de oportunidades, mientras que las interiores son las que no tocan este borde.

La figura muestra las cinco soluciones que hemos estudiado en el ejemplo anterior. Hemos visto que $(2,2)$ era interior y, en efecto, está dentro del conjunto S, pero no en el borde, las soluciones $(3,3)$, $(2,0)$ y $(0,1)$ son de frontera y, en efecto, están en el borde de S, y la solución $(1,3)$ es infactible, lo que se traduce en que está fuera del conjunto S. Más aún, en la figura puede verse cuáles son las restricciones que satura cada solución de frontera. Por ejemplo, la solución $(3,3)$ satura la restricción $x^2 + y^2 = 18$, porque está sobre esa curva. La solución $(0,1)$ satura $x = 0$ e $y = x^2 + 1$ porque está sobre ambas curvas, etc.

1.5 Resolución gráfica

Veamos ahora cómo encontrar gráficamente la solución de un problema de programación matemática. Para ello será necesario que tenga únicamente dos variables. Como la finalidad de la resolución gráfica es meramente didáctica, para que podamos visualizar muchos de los conceptos relacionados con la programación matemática, consideraremos únicamente un caso particular que es lo suficientemente general para este fin: sólo consideraremos problemas cuya función objetivo sea lineal.

Explicaremos el método resolviendo el problema del ejemplo 3:

Ejemplo 3d Resuelve gráficamente el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x + y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \leq 18 \\ & y - x^2 \leq 1 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

SOLUCIÓN: Observamos en primer lugar que se trata de un problema con dos variables y función objetivo lineal, $F(x,y) = x + y$. Las restricciones no son lineales, pero eso no importa. El proceso es el siguiente:

1 Representamos gráficamente el conjunto de oportunidades. Esto lo hemos hecho ya en el ejemplo 3b.

2 Calculamos el gradiente de la función objetivo. $\nabla F = (1,1)$.

3 Representamos gráficamente el gradiente y una curva de nivel cualquiera de la función objetivo (por ejemplo $F = 0$).

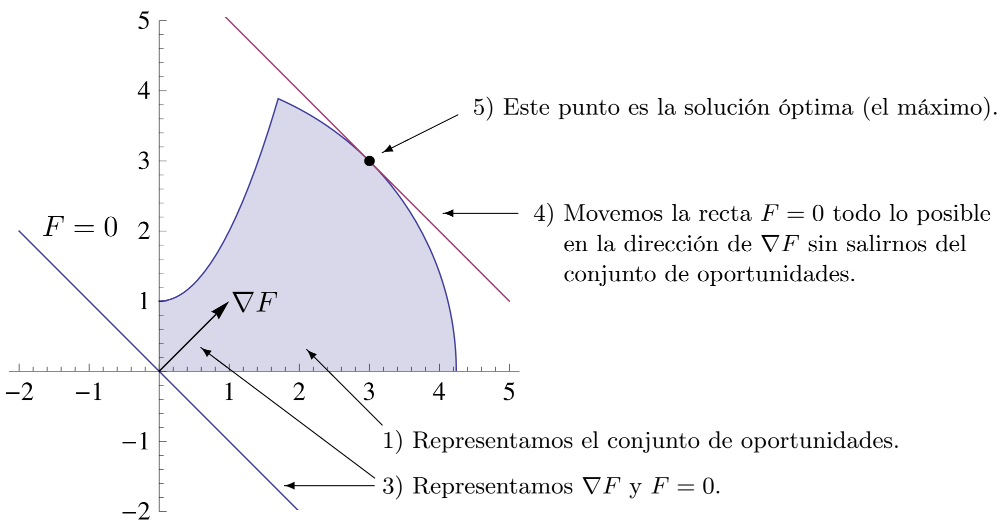
Para representar el gradiente dibujamos una flecha que empiece en $(0,0)$ y termine en el valor del gradiente, en este caso $(1,1)$.

La curva de nivel $F = 0$ es en este caso la recta $x + y = 0$ (siempre será una recta, porque sólo consideramos funciones objetivo lineales) y la representamos calculando dos puntos que cumplan la ecuación, por ejemplo $(0, 0)$ y $(1, -1)$. Al unirlos obtenemos la recta. También podemos dibujar la recta usando que siempre es perpendicular al gradiente.

Ahora sólo tenemos que recordar que el gradiente de una función indica su dirección de máximo crecimiento, así que si desplazamos la curva de nivel en la dirección del gradiente obtendremos otras curvas de nivel (otras rectas) en las que la función objetivo tomará un valor cada vez mayor, mientras que si desplazamos la curva de nivel en la dirección opuesta al gradiente obtendremos curvas de nivel donde la función objetivo es cada vez menor.

4 Para problemas de maximizar, desplazamos la curva de nivel todo lo posible en la dirección del gradiente sin salirnos del conjunto de oportunidades, para problemas de minimizar, la desplazamos en la dirección opuesta al gradiente.

5 El punto (o los puntos) del conjunto de oportunidades que esté sobre la curva de nivel obtenida es la solución óptima del problema.



En la figura vemos que la solución óptima es $(x, y) = (3, 3)$, y que el valor máximo de la función objetivo es $F(3, 3) = 6$.

Ejemplo 5 Resuelve gráficamente el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & 3x + 2y \\ \text{s.a} & xy \le 12 \\ & y - x^2 \le 2 \\ & 3x + 2y \ge 6 \\ & -x + 2y \ge 2 \\ & x,\, y \ge 0 \end{array}$$

SOLUCIÓN: En primer lugar dibujamos el conjunto de oportunidades. Vemos que $xy = 12$ es una hipérbola, $y = x^2 + 2$ es una parábola, $3x + 2y = 6$ es una recta y $-x + 2y = 2$ es también una recta. Calculamos algunos puntos y dibujamos las curvas:

$xy = 12$

x	y
1	12
2	6
3	4
4	3
6	2
12	1

$y = x^2 + 2$

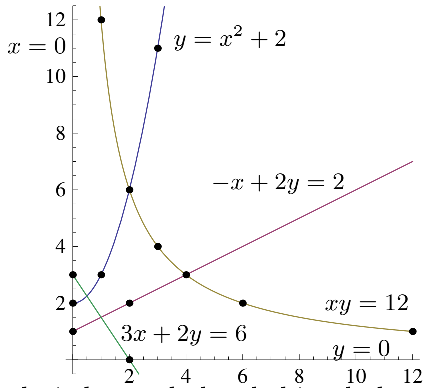
x	y
0	2
1	3
2	6
3	11

$3x + 2y = 6$

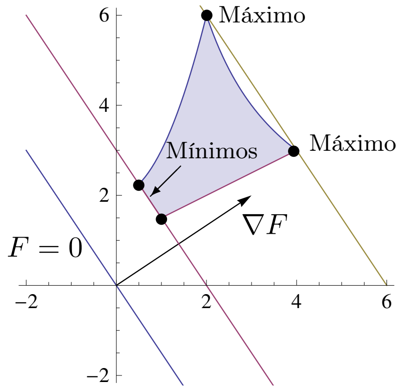
x	y
0	3
2	0

$-x + 2y = 2$

x	y
0	1
2	2



Tomamos, por ejemplo, el punto $(0, 0)$ y observamos que cumple las restricciones primera y segunda, pero no la tercera ni la cuarta. Eso implica que el conjunto de oportunidades es el situado bajo la parábola y la hipérbola, pero sobre las dos rectas.



Representamos el gradiente de la función objetivo, que es $\nabla F = (3, 2)$ y la curva de nivel $F = 0$, que es $3x + 2y = 0$.

Como el objetivo es OPTIMIZAR tenemos que calcular tanto el máximo como el mínimo del problema. Para calcular el máximo trasladamos la recta $F = 0$ todo lo posible en la dirección del gradiente sin salirnos del conjunto de oportunidades, y observamos que no hay un único máximo, sino dos, pues en los puntos $(x, y) = (2, 6)$ y $(x, y) = (4, 3)$ la función objetivo toma el mismo valor máximo $F(2, 6) = F(4, 3) = 18$.

Para calcular el mínimo desplazamos todo lo posible la curva de nivel en la dirección opuesta al gradiente sin salirnos del conjunto de oportunidades, y ahora nos encontramos con que hay infinitos mínimos, pues todos los puntos del segmento señalado en la figura tienen el mismo valor de la función objetivo.

Podemos calcular los dos extremos del segmento resolviendo las ecuaciones de las restricciones que saturan. Por ejemplo, vemos en la figura que el extremo inferior satura las restricciones $3x+2y = 6$ y $-x+2y = 2$. Para resolver el sistema de ecuaciones las restamos, y resulta $4x = 4$, luego $x = 1$ y entonces $y = 1.5$.

Similarmente, vemos que el extremo superior satura las restricciones $y = x^2+2$ y $3x+2y = 6$, y al resolverlas obtenemos el punto $(x, y) = (0.5, 2.25)$.

En conclusión: El problema tiene dos máximos, que son las soluciones $(x, y) = (2, 6)$ y $(x, y) = (4, 3)$, y el valor máximo de la función objetivo es $F(2, 6) = F(4, 3) = 18$. El problema tiene infinitos mínimos, que son todos los puntos situados entre $(x, y) = (1, 1.5)$ y $(x, y) = (0.5, 2.25)$. El valor mínimo de la función objetivo es $F(1, 1.5) = F(0.5, 2.25) = 6$.

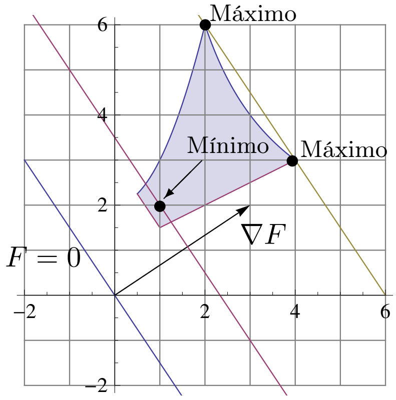
Óptimos estrictos y no estrictos Ahora podemos entender la definición siguiente:

> Cuando un problema de programación matemática tiene una única solución óptima, se dice que es un óptimo estricto, mientras que si tiene varias soluciones óptimas (en las que la función objetivo toma el mismo valor, de modo que ninguna es ni mejor ni peor que otra) se dice que son óptimos no estrictos.

Por ejemplo, el problema del ejemplo 3d tiene un único máximo estricto, mientras que el problema del ejemplo 5 tiene dos máximos no estrictos e infinitos mínimos no estrictos.

Ejemplo 6 Resuelve gráficamente el problema siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Opt.}\quad & 3x + 2y \\ \text{s.a}\quad & xy \leq 12 \\ & y - x^2 \leq 2 \\ & 3x + 2y \geq 6 \\ & -x + 2y \geq 2 \\ & x,\, y \geq 0 \text{ enteras} \end{aligned}$$



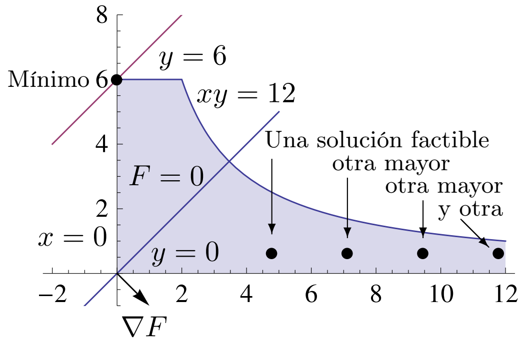
SOLUCIÓN: El problema es el mismo que el del ejemplo precedente, salvo que ahora las variables son enteras. Para resolver un problema con variables enteras el procedimiento es el mismo, sólo que ahora sólo admitimos soluciones que aparezcan en la cuadrícula formada por los pares de números enteros. Vemos que sigue habiendo dos máximos no estrictos, pues los máximos del problema del ejemplo 5 eran soluciones enteras. En cambio, al desplazar la curva de nivel en la dirección opuesta al gradiente hasta llegar a la última solución entera posible, ahora nos encontramos con que hay un único mínimo estricto, que es la solución $(x, y) = (1, 2)$.

En definitiva, este problema tiene dos máximos no estrictos: $(2, 6)$ y $(4, 3)$ con valor máximo de la función objetivo $F(2, 6) = F(4, 3) = 18$, y un único mínimo estricto: $(1, 2)$, con valor mínimo de la función objetivo $F(1, 2) = 7$.

Llegados a este punto no deberías tener problemas en entender el ejemplo de la página 19.

Ejemplo 7 Resuelve gráficamente el problema

$$\begin{aligned} \text{Opt.}\quad & x - y \\ \text{s.a}\quad & xy \leq 12 \\ & y \leq 6 \\ & x,\, y \geq 0 \end{aligned}$$



SOLUCIÓN: No detallamos la representación de la hipérbola $xy = 12$ y la recta $y = 6$. La figura muestra el conjunto de oportunidades, el gradiente de la función objetivo y la curva de nivel $F = 0$. Para encontrar la solución mínima debemos desplazarla en la dirección opuesta al gradiente, es decir, hacia arriba a la izquierda, y si la desplazamos todo lo posible sin salirnos del conjunto de oportunidades llegamos al punto $(0, 6)$ que es la solución óptima, y el valor mínimo de la función objetivo es $F(0, 6) = -6$.

En cambio, para encontrar el máximo debemos desplazar la curva de nivel hacia abajo a la derecha, y nos encontramos con que no hay ninguna solución que sea la mayor de todas: en la figura se señala una solución factible, y a continuación otra mayor, y luego otra mayor, y luego otra mayor, y como el conjunto de oportunidades no se acaba nunca, sino que se puede prolongar todo lo que se quiera hacia la derecha, resulta que no hay ninguna solución que sea la mayor de todas. El problema (de maximizar) es no acotado, según la definición siguiente:

Problemas infactibles y no acotados Hay dos situaciones en las que un problema puede no tener solución óptima. En el ejemplo anterior hemos encontrado una de ellas:

> Un problema de programación matemática es no acotado si tiene soluciones factibles, pero no hay ninguna que sea la mejor de todas, de modo que toda solución factible puede ser mejorada por otra solución factible.

Así, un problema no acotado no tiene solución óptima, pero no es el único caso en el que puede suceder que un problema no tenga solución óptima:

> Un problema de programación matemática es infactible si no tiene soluciones factibles.

Así pues, en cuanto a la existencia de soluciones, los problemas se clasifican de esta forma:

Problemas
- infactibles — sin soluciones factibles (ni óptimas, en particular)
- factibles
  - no acotados — con soluciones factibles, pero no óptimas
  - con óptimo
    - con óptimo estricto — un solo óptimo
    - con óptimo no estricto — varios óptimos

Ejemplo 8 Razona gráficamente si el problema siguiente tiene óptimo, es infactible o es no acotado:

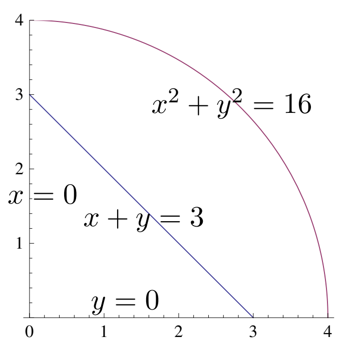
$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x+3y \\ \text{s.a} & x^2+y^2 \geq 16 \\ & x+y \leq 3 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

> No debes confundir los conceptos de solución infactible y problema infactible. Que un problema tenga soluciones infactibles no significa que sea infactible. De hecho, todos los problemas que hemos considerado hasta ahora tenían soluciones infactibles, pero ninguno era infactible, porque también tenían soluciones factibles.
> Para que un problema sea infactible no basta con que tenga soluciones infactibles (cosa habitual), sino que **todas** sus soluciones tienen que ser infactibles.

Solución: La curva $x^2+y^2=16$ es una circunferencia, mientras que $x+y=3$ es una recta. Calculamos

x	y
0	4
4	0

x	y
0	3
3	0

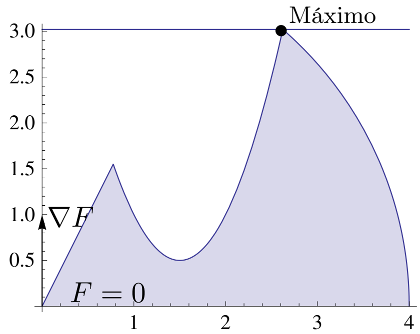


y obtenemos lo que muestra la figura. Ahora tomamos un punto que no esté sobre las curvas, por ejemplo $(0,0)$. Como $(0,0)$ cumple $0^2+0^2 \not\geq 16$ las soluciones factibles tienen que estar al lado de la circunferencia opuesto al $(0,0)$, es decir, fuera de la circunferencia. Por otra parte, $0+0 \leq 3$, luego las soluciones factibles tienen que estar al mismo lado de la recta que $(0,0)$, es decir, debajo de la recta.

En conclusión, las soluciones factibles tienen que estar **a la vez** debajo de la recta, fuera de la circunferencia, a la derecha del eje vertical (por $x \geq 0$) y encima del eje horizontal (por $y \geq 0$), pero ninguna solución cumple todo esto a la vez, luego no hay soluciones factibles, y el problema es, por consiguiente, infactible.

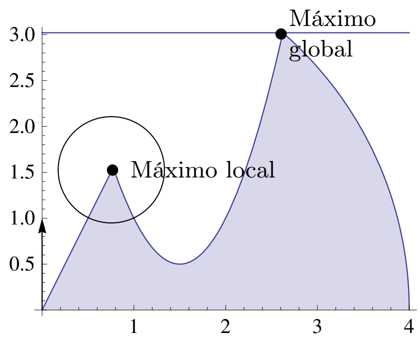
Ejemplo 4b Resuelve gráficamente el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & y \\ \text{s.a} & x^2+y^2 \leq 16 \\ & 2x-y \geq 0 \\ & y-2x^2+6x \leq 5 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$



Solución: El conjunto de oportunidades lo hemos representado en el ejemplo 4a. El gradiente de la función objetivo es $\nabla F = (0, 1)$, luego la situación es la que muestra la figura.

La curva de nivel $F = 0$ es simplemente $y = 0$ (el eje horizontal) y al desplazarla en la dirección del gradiente (hacia arriba) llegamos al punto máximo señalado en la figura. Calcularlo analíticamente no es fácil, porque habría que resolver las ecuaciones $x^2 + y^2 = 16$, $y = 2x^2 - 6x + 5$ y no son sencillas. Puede probarse que la solución óptima es $(x, y) = (2.62, 3.02)$, y el valor máximo de la función objetivo es $F = 3.02$.



Óptimos locales El ejemplo anterior ilustra el último concepto que vamos a introducir en esta sección. En este problema, como el objetivo es maximizar y, una solución es mejor cuanto más alta está, y es obvio que la solución óptima es la que hemos encontrado, la más alta. Sin embargo, la solución que aparece en el centro del círculo de la figura de la derecha es también un máximo en un sentido débil.

Lo que hasta ahora hemos llamado simplemente un "máximo" es lo que, con más precisión se llama un *máximo global,* es decir, una solución factible en la que la función objetivo es mayor o igual que en **todas** las demás soluciones factibles. En cambio, la solución que aparece en el círculo es un *máximo local,* es decir, una solución factible en la que la función objetivo es mayor o igual que en **todas** las demás soluciones factibles **cercanas.** Si sólo miramos las soluciones factibles que caen dentro del círculo, la mejor de todas (la más alta) es precisamente la que está señalada en la figura como máximo local. En general:

• Un *óptimo local* de un problema de programación matemática es una solución factible en la que la función objetivo es mejor o igual que en todas las demás soluciones factibles cercanas. Los óptimos propiamente dichos, es decir, las soluciones factibles en las que la función objetivo es mejor o igual que en todas las demás soluciones factibles (cercanas o lejanas) se llaman *óptimos globales.*

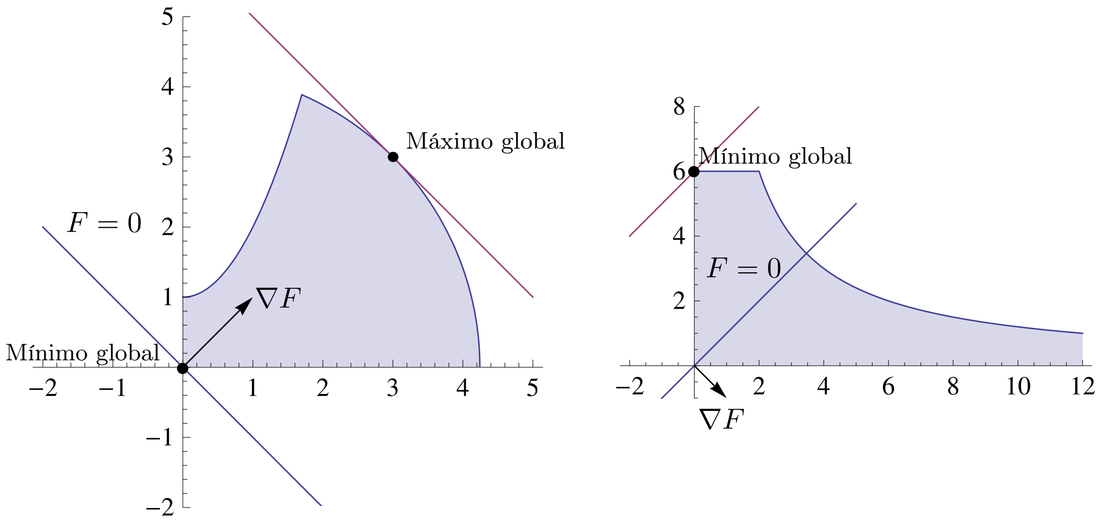
En los contextos económicos que nos interesan, resolver un problema de programación matemática es encontrar sus óptimos globales (máximos si el problema es de maximizar o mínimos si es de minimizar). Introducimos el concepto de óptimo local, no porque tenga interés en sí mismo, sino porque muchas técnicas de búsqueda de óptimos pueden confundir un óptimo local con un óptimo global, y sería un grave error tomar un óptimo local que no sea el óptimo global como la auténtica solución del problema. (Por ejemplo, no es extraño que un software informático pueda presentar como óptimo global lo que es un mero óptimo local o, en el mejor de los casos, puede ocurrir que nos indique que ha obtenido un óptimo local y que no sabe si es global o no.) Por ello, a la hora de resolver problemas de programación matemática debemos ser conscientes de la necesidad de asegurar que el procedimiento que seguimos nos proporciona realmente óptimos globales y no los meros "sucedáneos" que son los óptimos locales.

1.6 El teorema de Weierstrass

Presentamos ahora un resultado según el cual, si un problema de programación matemática satisface unos requisitos muy generales, entonces tiene seguro un óptimo global. De hecho, todos los problemas que vamos a considerar cumplirán todos estos requisitos excepto posiblemente uno (ser acotado), al cual le tendremos que dedicar más atención. Para introducirlo recordemos los problemas de los ejemplos 3 y 7:

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & x+y \\ \text{s.a} & x^2+y^2 \leq 18 \\ & y-x^2 \leq 1 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} \text{Opt.} & x-y \\ \text{s.a} & xy \leq 12 \\ & y \leq 6 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

(En el primero hemos cambiado el objetivo de maximizar por el doble objetivo de optimizar, para estudiar en ambos problemas tanto la existencia de máximo como la de mínimo.) La resolución gráfica es la siguiente, donde hemos añadido que el mínimo global para el primer problema es obviamente el punto $(0,0)$, pues no podemos desplazar más la curva de nivel $F=0$ en la dirección opuesta al gradiente sin salirnos del conjunto de oportunidades.



Observemos que hay una diferencia entre los dos conjuntos de oportunidades: las variables de las soluciones factibles (x,y) del primer problema están acotadas, en el sentido de que, por ejemplo, $0 \leq x \leq 5$ y $0 \leq y \leq 4$. En otras palabras, podemos fijar valores mínimos (cotas inferiores) y valores máximos (cotas superiores) que cada variable de una solución factible no puede rebasar.

Esto no es válido para el segundo conjunto de oportunidades. Para la variable y tenemos cotas, ya que toda solución factible (x,y) tiene que cumplir $0 \leq y \leq 6$, y la variable x debe cumplir $0 \leq x$, pero no podemos dar una cota superior para la variable x. En el conjunto de oportunidades del segundo problema hay soluciones factibles en las que la variable x es tan grande como se quiera. Las soluciones $(10,0)$, $(100,0)$, $(1\,000,0)$, $(1\,000\,000,0)$, etc. son todas ellas soluciones factibles.

Un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ (en particular, un conjunto de oportunidades) está acotado si podemos dar cotas inferiores y cotas superiores para cada variable de $\mathbb{R}^n$, de modo que todo $x \in S$ (toda solución factible) tiene a cada una de sus variables comprendida entre la cota inferior y la cota superior correspondiente.

Así, según hemos dicho, el conjunto de oportunidades del primer problema que estamos considerando está acotado, pues hemos encontrado cotas para todas sus variables: cualquier $(x,y) \in S$ cumple

$$\begin{array}{lcl} \text{cota inferior} & 0 \leq x \leq 5 & \text{cota superior} \\ \text{cota inferior} & 0 \leq y \leq 4 & \text{cota superior} \end{array}$$

En cambio, el conjunto de oportunidades del segundo problema no está acotado porque, si $(x,y) \in S$, lo máximo que podemos decir es que

$$\begin{array}{lcl} \text{cota inferior} & 0 \leq x \leq\ ? & \text{no hay cota superior} \\ \text{cota inferior} & 0 \leq y \leq 6 & \text{cota superior} \end{array}$$

y basta con que una variable no tenga una de las dos cotas (superior o inferior) para que el conjunto no esté acotado.

Otro requisito del teorema de Weierstrass es que el conjunto de oportunidades sea cerrado. La definición de este concepto es bastante técnica,[3] pero no vamos a necesitarla porque todos los conjuntos de oportunidades que vamos a considerar serán cerrados, sin necesidad de comprobar nada. Ello se debe al hecho siguiente:

• *Todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ definido por restricciones de $\leq$, $\geq$ o de $=$ a partir de funciones continuas es cerrado.*

• Los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que son a la vez cerrados y acotados se llaman *compactos.*

El teorema de Weierstrass requiere que el conjunto de oportunidades de un problema sea compacto y no vacío. Lo segundo significa que tiene que haber alguna solución que pertenezca al conjunto, es decir, que tiene que haber soluciones factibles.

Hay que tener claro que una cota es un valor que podamos asegurar que una variable no va a rebasar nunca, pero no importa si la variable puede alcanzar o no la cota. Por ejemplo, la representación del conjunto de oportunidades del primer problema muestra que en realidad la variable x de una solución factible no puede llegar a valer 5. El máximo valor que puede tomar es $\sqrt{18} = 4.2426\ldots$, por lo que podríamos escribir igualmente

$$0 \leq x \leq 4.2426\ldots$$

pero no necesitamos preocuparnos por encontrar esa cota, que es la mejor posible. Si la variable x no puede rebasar el valor $4.24\ldots$, con mayor motivo podemos asegurar que tampoco rebasará el valor 5, luego si $4.24\ldots$ es una cota superior para x, entonces 5 **también** es una cota superior válida. Es una cota menos ajustada, pero lo único que necesitaremos es saber si hay o no hay cotas, sin que nunca tengamos necesidad de encontrar la cota más ajustada.

Por ejemplo, una cota superior para la edad x de cualquier ser humano es $x \leq 200$ años. No importa que 150 años sea una cota mejor. Como no hay duda de que no existen seres humanos de más de 200 años, es correcto decir que 200 es una cota superior.

[3] Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si su complementario $\mathbb{R}^n \setminus S$ es abierto, y esto a su vez significa que si $x \in \mathbb{R}^n \setminus S$ existe un $\epsilon > 0$ tal que todo $y \in \mathbb{R}^n$ cuya distancia a x sea menor que ϵ cumple $y \in \mathbb{R}^n \setminus S$.

Teorema de Weierstrass Si en un problema de programación matemática la función objetivo es continua y el conjunto de oportunidades es compacto y no vacío, entonces el problema tiene máximo y mínimo global.

Ejemplo 9 Estudia si los problemas siguientes cumplen las condiciones del teorema de Weierstrass. ¿Qué podemos concluir en consecuencia?

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & xyz \\ \text{s.a} & 2x^2+3y^2+z \leq 23 \\ & z \geq 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & xyz \\ \text{s.a} & 2x^2-3y^2+z \leq 23 \\ & z \geq 0 \end{array}$$

SOLUCIÓN: Consideremos el primer problema:

- La función objetivo, xyz, es continua porque es un polinomio.
- El conjunto de oportunidades es

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2+3y^2+z \leq 23,\ z \geq 0\}.$$

- Es un conjunto no vacío, porque contiene, por ejemplo, a la solución $(x,y,z) = (0,0,0)$.
- Es un conjunto cerrado, pues está definido por restricciones de $\leq$ y $\geq$ a partir de las funciones $2x^2+3y^2+z$ y z, que son continuas porque son polinomios.
- Es un conjunto acotado, porque toda solución (x,y,z) que esté en S (es decir, que cumpla las restricciones) cumple también que

$$-4 \leq x \leq 4, \quad -3 \leq y \leq 3, \quad 0 \leq z \leq 23.$$

- Como es cerrado y acotado, S es compacto, luego se cumplen todas las condiciones del teorema de Weierstrass.

Lo que podemos concluir es que el problema tiene un máximo global (y también un mínimo global, pero como el problema es de maximizar sólo interesa el máximo).

Para el segundo problema podemos razonar igualmente salvo que ahora S no está acotado. Salvo que la z tiene la cota inferior $0 \leq z$, ninguna otra variable tiene cota superior o inferior. Así, nada impide que una solución factible tenga $x = 1\,000$, pues, por ejemplo, $(1\,000, 1\,000, 0)$ es factible.

Por lo tanto en este caso S no es acotado, ni por tanto compacto, y el teorema de Weierstrass no es aplicable.

Las cotas de x se pueden razonar así: es posible formar una solución factible con $x = 0, 1, 2, 3$, pues, por ejemplo, $2 \cdot 3^2 = 18$ y aún "queda espacio" para dar valores a y, z sin pasarnos de 23, por ejemplo, $(3,0,0)$ es una solución factible. En cambio, no puede haber soluciones factibles con $x = 4$, porque entonces sería $2 \cdot x^2 = 32$, que se pasa de 23 y **como $3y^2+z$ tiene que ser ≥ 0** (y aquí interviene la restricción $z \geq 0$), al sumar $3y^2+z$ a $2x^2$ el resultado sería aún mayor que 23. Igualmente x puede valer $-1, -2, -3$, pero si $x = -4$ de nuevo $2x^2 = 32$ y los términos $3y^2+z$ **no pueden compensar** el habernos pasado de 23, porque son ≥ 0.

Podríamos comprobar que el mayor valor que puede tomar x en una solución factible es $\sqrt{23/2} = 3.39\ldots$, por lo que podríamos haber puesto

$$-3.39\ldots \leq x \leq 3.39\ldots$$

pero no tenemos necesidad de buscar la mejor cota, sino que -4 y 4 son también cotas válidas y más sencillas de determinar. Lo que sería incorrecto al ver que x puede tomar el valor 3, pero no el valor 4, sería afirmar que

$$-3 \leq x \leq 3.$$

Eso no es cierto porque, por ejemplo, x puede tomar el valor 3.2, ya que $(3.2, 0, 0)$ es una solución factible, luego no es cierto que tenga que ser $x \leq 3$.

> Observemos que la desigualdad $2x^2 - 3y^2 + z \leq 23$ no permite acotar las variables porque aunque $2x^2$ se pase de 23 un valor grande de y permite compensar el exceso y dar un resultado que vuelva a ser ≤ 23. Por eso, cuando afirmamos que sí que hay cota, no basta con observar que a partir de cierto valor de x se excede el límite de 23, sino que hay que asegurar que ese exceso no puede ser compensado.

Aquí es importante tener presente que del hecho de que no se pueda aplicar el teorema de Weierstrass no podemos concluir que el problema no tenga óptimo global. En general **no podemos concluir nada:** si se cumplen las condiciones del teorema de Weierstrass el problema tiene óptimo global, y si no se cumplen entonces puede tenerlo y puede no tenerlo.

• Es importante no confundir lo que es un "problema no acotado" con un "problema con conjunto de oportunidades no acotado". Por ejemplo, el problema

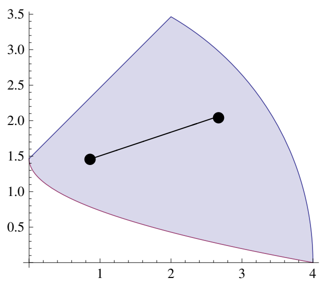
$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x - y \\ \text{s.a} & xy \leq 12 \\ & y \leq 6 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

tiene un conjunto de oportunidades no acotado (está dibujado en la página 33, figura de la derecha, y vemos que no hay una cota superior para la coordenada x de las soluciones factibles), pero no es un problema no acotado, ya que tiene un óptimo global, que es la solución $(0, 6)$. El teorema de Weierstrass nos garantiza que para que un problema pueda ser no acotado su conjunto de oportunidades tiene que ser no acotado (porque si está acotado el problema es infactible o tiene óptimo global), pero si el conjunto de oportunidades es no acotado, entonces el problema puede ser no acotado o puede tener óptimo global, como en el ejemplo que acabamos de considerar.

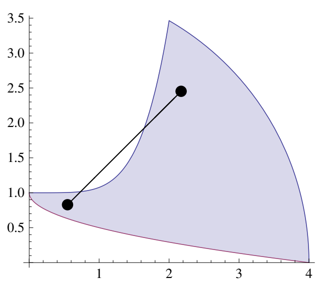
1.7 Convexidad

Algunos resultados para reconocer óptimos globales de problemas de programación no lineal utilizan los conceptos de conjunto convexo y función cóncava o convexa. En esta sección recogeremos sucintamente los criterios de convexidad que vamos a necesitar. No necesitaremos tratar con las definiciones formales de estos conceptos, de modo que nos limitaremos a explicar su interpretación geométrica:

• Un conjunto es convexo si cuando unimos dos cualesquiera de sus puntos con un segmento, éste está contenido en el conjunto:



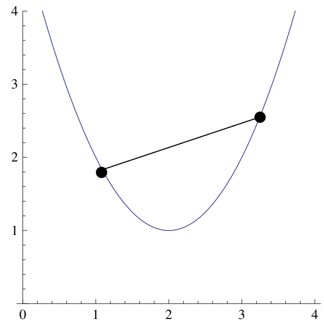
Conjunto convexo



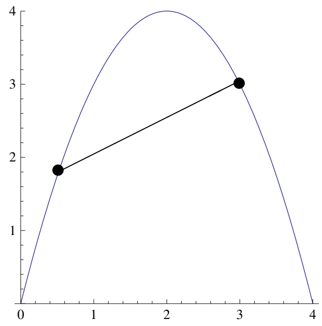
Conjunto no convexo

El conjunto de la izquierda es convexo porque al unir dos cualesquiera de sus puntos nunca nos salimos del conjunto, mientras que el conjunto de la derecha no es convexo, porque la figura muestra que hay puntos que, al unirlos con un segmento, éste se sale del conjunto.

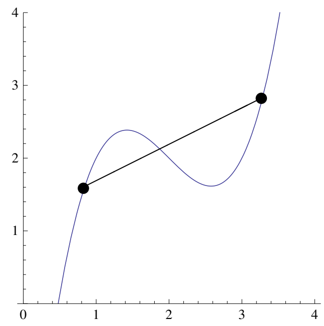
• Una función es *convexa* si cuando se unen con un segmento dos puntos cualesquiera de su gráfica, ésta queda siempre debajo del segmento, y es *cóncava* si la gráfica queda siempre arriba del segmento.



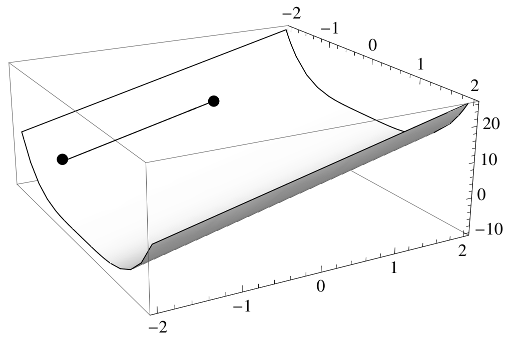
Función convexa



Función cóncava



Función ni cóncava ni convexa



• Si la gráfica queda siempre estrictamente por debajo o estrictamente por encima del segmento (es decir, sin tocarlo más que en los extremos) la función es estrictamente convexa o estrictamente cóncava.

La figura muestra una función convexa que no es estrictamente convexa, pues es posible unir dos puntos de su gráfica de modo que el segmento coincida con la gráfica.

En la práctica nos bastará conocer algunos criterios para reconocer si una función dada es cóncava o convexa o si un conjunto dado es o no convexo. El más elemental es el siguiente:

> Las funciones lineales son cóncavas y convexas.

> Observa que una función puede ser cóncava, convexa o ni lo uno ni lo otro, pero un conjunto sólo puede ser convexo o no ser convexo. No digas nunca que un conjunto es cóncavo, pues no hemos definido tal cosa.

Ejemplo 10 Estudia si la función $f(x, y, z) = 3x + 2y - z$ es o no convexa.

Solución: Se trata de una función convexa (y también de una función cóncava, de hecho) porque es lineal.

• Para estudiar la concavidad o convexidad de una función no lineal (que supondremos siempre dos veces derivable con derivadas continuas) calcularemos su matriz hessiana. Hay un caso especial en el que la conclusión es muy simple:

> Si la matriz hessiana de una función f es diagonal, entonces la función es convexa si todos los coeficientes de la diagonal son ≥ 0 y es cóncava si todos son ≤ 0 (en cualquier punto de su dominio). Si todos son > 0 la función es estrictamente convexa y si todos son < 0 la función es estrictamente cóncava.

Ejemplo 11 Estudia si la función $f(x,y,z) = 10 + 4x + 2y - y^2 - 3z^2$ es cóncava o convexa.

SOLUCIÓN: Como no es una función lineal calculamos su matriz hessiana, para lo cual empezamos calculando sus derivadas parciales de orden 1:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 - 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -6z,$$

luego

$$Hf = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Vemos que se trata de una matriz diagonal (porque fuera de la diagonal sólo toma el valor 0) y como todos los coeficientes de la diagonal son ≤ 0, podemos afirmar que f es una función cóncava. No podemos decir que sea estrictamente cóncava porque uno de los coeficientes es 0.

• Si la matriz hessiana no es diagonal, para estudiar la concavidad o convexidad tendremos que calcular sus menores principales:

> Los menores principales de orden $n = 1, 2, 3, \ldots$ de una matriz son todos los determinantes que pueden formarse eligiendo n filas (en orden) y las mismas columnas. Los menores principales formados por las primeras filas y las primeras columnas de la matriz (en orden) se llaman menores principales conducentes.

Ejemplo 12 a Estudia si la función $f(x,y,z) = 2x^2 + 4.5y^2 - z^2 + 6xy + 2xz + 3yz$ es cóncava o convexa.

SOLUCIÓN: Como no es una función lineal calculamos su matriz hessiana:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 6y + 2z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 9y + 6x + 3z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -2z + 2x + 3y,$$

> Recuerda que la matriz hessiana de una función de clase C^2 tiene que ser simétrica, es decir, que la primera fila debe coincidir con la primera columna, la segunda fila debe coincidir con la segunda columna, etc. Conviene que compruebes que esto sucede y, si no es así, significa que has cometido algún error.

luego

$$Hf = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 9 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Como no es una matriz diagonal, no podemos aplicar el criterio anterior, por lo que calculamos los menores principales de la matriz:

Orden 1	**Orden 2**	**Orden 3**
$H_1 = \|4\| = 4$	$H_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$	
$H_2 = \|9\| = 9$	$H_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -12$	$H_{123} = 0$
$H_3 = \|-2\| = -2$	$H_{23} = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -27$	

Los menores principales de orden 1 son los que se forman eligiendo una fila y *la misma* columna, con lo que tenemos tres posibilidades: H_1 es el menor formado por el número que está en la fila 1 y en la columna 1, H_2 es el número que está en la fila 2 y en la columna 2, y H_3 es el número que está en la fila 3 y en la columna 3.

Los menores principales de orden 2 se forman eligiendo dos filas y *las mismas* dos columnas. También hay tres posibilidades: H_{12} está formado por los cuatro números que están en las filas 1 y 2 y a la vez en las columnas 1 y 2, para calcular H_{13} miramos únicamente las filas y las columnas 1 y 3, y para calcular H_{23} miramos únicamente las filas y las columnas 2 y 3.

Finalmente, sólo hay un menor principal de orden 3, pues es el determinante formado por las tres filas y las tres columnas de la matriz. Se comprueba que en este ejemplo vale 0.

Éstos son todos los menores principales de la matriz hessiana. Los menores principales conducentes son H_1, H_{12} y H_{123} (los formados por la primera fila y columna, las dos primeras filas y columnas y las tres primeras filas y columnas).

Ésta es toda la información que necesitamos para saber si la función dada es cóncava o convexa. Para determinarlo aplicaremos la *Regla de Jacobi,* que es el criterio que enunciamos a continuación.

Regla de Jacobi Sea H la matriz hessiana de una función f. Para estudiar si es cóncava o convexa empezamos calculando el determinante de H y distinguimos dos casos:

CASO 1 Si el determinante de H es $|H| \neq 0$, entonces basta calcular los menores principales conducentes de la matriz.

CASO 2 Si el determinante de H es $|H| = 0$, entonces es necesario calcular todos los menores principales de la matriz.

En el CASO 1 (si $|H| \neq 0$) hay tres posibilidades:

a) Si todos los menores principales conducentes son > 0, entonces la función f es estrictamente convexa.

b) Si los menores principales conducentes alternan en signo empezando en negativo, es decir, si cumplen $H_1 < 0, \quad H_{12} > 0, \quad H_{123} < 0, \ \dots$, entonces la función es estrictamente cóncava.

c) Si no se da ninguno de los casos anteriores, la función no es ni cóncava ni convexa.

En el CASO 2 (si $|H| = 0$) hay también tres posibilidades:

a) Si todos los menores principales son ≥ 0, entonces la función es convexa.

b) Si los menores principales de orden 1 son ≤ 0, los de orden 2 son ≥ 0, los de orden 3 son ≤ 0, etc., entonces la función es cóncava.

c) Si no se da ninguno de los casos anteriores, la función no es ni cóncava ni convexa.

Ejemplo 12 b Continuando con el ejemplo 12 a, sólo nos falta aplicar la regla de Jacobi. En primer lugar nos fijamos en el determinante de la matriz, que es $|H| = 0$, luego estamos en el caso 2 de la regla. Tenemos que mirar todos los menores principales (no sólo los conducentes).

Sería un error razonar así:

Calculamos los menores principales conducentes, que son: $H_1 = 4 \geq 0$, $H_{12} = 0 \geq 0$ *y* $H_{123} = 0 \geq 0$.

Como todos son ≥ 0, *la función es convexa.*

Como el determinante de H es 0, la regla de Jacobi exige considerar todos los menores principales, y no sólo los conducentes.

Para que la función fuera convexa todos los menores principales tendrían que ser ≥ 0, y vemos que esto no sucede, luego la función no es convexa. Para que fuera cóncava todos los menores de orden 1 tendrían que ser ≤ 0, los de orden 2 tendrían que ser ≥ 0 y el de orden 3 tendría que ser ≤ 0, pero esto tampoco sucede, luego la función no es ni cóncava ni convexa.

Ejemplo 13 Estudia si la función

$$f(x, y, z) = -2x^2 - y^2 - 14z^2 + 2xy + 2xz + 4yz$$

es cóncava o convexa.

SOLUCIÓN: Como no es una función lineal calculamos su matriz hessiana:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -4x + 2y + 2z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 2x + 4z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -28z + 2x + 4y,$$

luego

$$Hf = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -28 \end{pmatrix}.$$

Como no es diagonal, aplicamos la regla de Jacobi, para lo cual empezamos calculando el determinante $|H| = -8 \neq 0$. Como es distinto de 0, basta calcular los menores principales conducentes:

$$H_1 = |-4| = -4 < 0, \quad H_{12} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad H_{123} = -8 < 0.$$

Como los menores principales conducentes alternan en signo empezando en negativo, la función es estrictamente cóncava.

- Para estudiar si un conjunto es convexo aplicaremos el criterio siguiente:

Los conjuntos definidos por restricciones lineales son convexos. Si hay restricciones no lineales el conjunto será convexo si se cumplen las condiciones siguientes:
- Las funciones que aparecen en las restricciones (no lineales) de $\leq$ son convexas.
- Las funciones que aparecen en las restricciones (no lineales) de $\geq$ son cóncavas.

Observemos que este criterio no contempla restricciones no lineales de igualdad:

Si entre las restricciones que definen un conjunto hay alguna de igualdad con una función no lineal, no podemos asegurar que el conjunto sea convexo.

Ejemplo 14 Determina si el conjunto siguiente es convexo:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 5y = 2,\ x^2 - xy + 3y^2 \leq 10\}.$$

SOLUCIÓN: La primera restricción es lineal, luego no necesitamos comprobar nada sobre ella. La segunda restricción es no lineal y, como es de $\leq$, para que podamos afirmar que S es convexo necesitamos comprobar que la función $f(x, y) = x^2 - xy + 3y^2$ es convexa (si hubiera sido una restricción de $\geq$ tendríamos que probar que la función es cóncava para que el conjunto sea convexo).

Como la función no es lineal calculamos la matriz hessiana:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 6y, \qquad Hf = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Como no es diagonal aplicamos la regla de Jacobi. Para ello calculamos el determinante $|H| = 11 \neq 0$. Como no es cero, basta calcular los menores principales conducentes:

$$H_1 = 2 > 0, \qquad H_{12} = 11 > 0.$$

Como todos los menores principales conducentes son > 0, la función f es convexa, luego el conjunto S es convexo.

1.8 El teorema local-global

Básicamente, necesitaremos estudiar la concavidad o convexidad de las funciones que definen un problema a la hora de aplicar dos resultados. Ahora podemos presentar el primero de ellos:

Teorema local-global Si un problema de programación no lineal cumple las condiciones siguientes:

1) El conjunto de oportunidades es convexo.

2) La función objetivo es cóncava (si el problema es de maximizar) o convexa (si el problema es de minimizar).

Entonces todo óptimo local es un óptimo global.

Si la función objetivo es estrictamente cóncava o convexa (según el caso) todo óptimo local es un óptimo global estricto.

Ejemplo 15 Estudia si se puede aplicar el teorema local-global al problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 5x + 6y + 3z \\ \text{s.a} & x + y + z = 20 \\ & x^2 + 3y + 2z^4 \leq 15 \\ & 10x + 5y + 2z - 2x^2 - y^2 - z^2 - 2yz \geq 1 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

Solución: El teorema local-global requiere que se cumplan dos condiciones:

1- Como el problema es de maximizar, la función objetivo debe ser cóncava. En este caso lo es porque se trata de una función lineal.

2- El conjunto de oportunidades debe ser convexo. El conjunto es:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 20,\ x^2 + 3y + 2z^4 \leq 15,$$

$$10x + 5y + 2z - 2x^2 - y^2 - z^2 - 2yz \geq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

Para que podamos afirmar que S es convexo (según el criterio que conocemos) tiene que cumplirse que la función

$$f(x,y,z) = x^2 + 3y + 2z^4$$

sea convexa (porque su restricción es de $\leq$) y que la función

$$g(x,y,z) = 10x + 5y + 2z - 2x^2 - y^2 - z^2 - 2yz$$

sea cóncava (porque su restricción es de $\geq$). Las demás restricciones son lineales, luego no hay que comprobar nada sobre ellas.

Calculamos la hessiana de f:

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24z^2 \end{pmatrix}$$

Vemos que es diagonal y los elementos de la diagonal son todos ≥ 0. Esto implica que la función f es convexa, como queríamos probar.

Calculamos la hessiana de g:

$$Hg = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Como no es diagonal, aplicamos la regla de Jacobi. En primer lugar calculamos el determinante: $|Hg| = 0$. Al ser cero, debemos calcular todos los menores principales:

$$\begin{array}{lll} H_1 = -4 \leq 0 & H_{12} = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 \geq 0 & \\ H_2 = -2 \leq 0 & H_{13} = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 \geq 0 & H_{123} = 0 \leq 0 \\ H_3 = -2 \leq 0 & H_{23} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \geq 0 & \end{array}$$

Sería un error concluir que, como se cumplen las condiciones del teorema local-global, el problema tiene un máximo global. El teorema sólo afirma que **si** existen óptimos locales serán globales, pero no asegura que haya óptimos, ni locales ni globales.

Como se cumplen las desigualdades indicadas, la función es cóncava.

Con esto tenemos probado que el conjunto S es convexo, luego podemos aplicar el teorema local-global para concluir que todos los máximos locales del problema serán de hecho máximos globales.

1.9 Problemas resueltos

1. Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 3x + 2y + z \\ \text{s.a} & 2x^2 + y^2 + z \leq 10 \\ & x + y + z \geq 1 \\ & x \leq 0,\ z \geq 0 \end{array}$$

(a) Escribe el conjunto de oportunidades y razona si es compacto.

(b) ¿Podemos asegurar que el problema tiene solución óptima?

(c) Estudia si la solución $(-1, 1, 1)$ es factible y, si lo es, si es interior o de frontera.

SOLUCIÓN:

(a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + y^2 + z \leq 10,\ x + y + z \geq 1,\ x \leq 0,\ z \geq 0\}$.
S es cerrado porque está definido por restricciones de $\leq$ y $\geq$ a partir de funciones continuas (son continuas porque son polinomios).

S está acotado porque si $(x, y, z) \in S$, entonces se cumple que

$$-3 \leq x \leq 0, \qquad -4 \leq y \leq 4, \qquad 0 \leq z \leq 10.$$

Como S es cerrado y acotado, es compacto.

> Sería un error poner como cotas
> $$x,\ y \geq 1.$$
> De la segunda restricción no puede extraerse ninguna cota, pues la suma total puede ser ≥ 1 aunque algunos sumandos no lo sean.

(b) Podemos asegurar que hay solución óptima por el teorema de Weierstrass. Para ello hemos de comprobar tres cosas:

i. La función objetivo es continua (porque es un polinomio).

ii. El conjunto de oportunidades es compacto (lo hemos visto en la pregunta anterior).

iii. El conjunto de oportunidades no es vacío, porque, por ejemplo, $(-1, 1, 1) \in S$.

(c) Vemos que

$$2(-1)^2 + 1^2 + 1 = 3 < 10, \qquad -1 + 1 + 1 = 1, \qquad -1 < 0, \qquad 1 > 0,$$

luego la solución dada cumple todas las restricciones y satura una de ellas (la segunda). Por lo tanto, es una solución factible de frontera.

2. ¿Puedes razonar si alguno de los conjuntos siguientes es convexo?

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 5y + 2z \leq 5,\ 5x + 8y + xy + xz - 2x^2 - y^2 - z^2 \geq 3\},$$

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 5y + 2z \leq 5,\ 5x + 8y + xy + xz - 2x^2 - y^2 - z^2 \leq 3\}.$$

SOLUCIÓN: La primera restricción no hace falta estudiarla porque es lineal. El conjunto S será convexo si la función $f(x, y, z) = 5x + 8y + xy + xz - 2x^2 - y^2 - z^2$ es cóncava, ya que aparece en una restricción de $\geq$. Para estudiarlo calculamos su hessiana:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5 + y + z - 4x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 8 + x - 2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = x - 2z,$$

$$Hf = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|Hf| = -16 + 2 + 2 = -12 \neq 0.$$

Como el determinante no es 0, basta calcular los menores principales conducentes:

$$H_1 = -4 < 0, \quad H_{12} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 7 > 0, \quad H_{123} = -12 < 0.$$

Como los menores alternan en signo empezando en negativo, el criterio de Jacobi nos da que la función f es cóncava, luego el conjunto S es convexo.

No podemos asegurar que T sea convexo porque para ello la función f tendría que ser convexa, ya que aparece en una restricción de $\leq$, y hemos comprobado que es cóncava.

3. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x - y + z \\ \text{s.a} & y^3 + 3z \leq 10 \\ & x + y + 2z \leq 2 \\ & x^2 + z \leq 20 \\ & x \leq 0 \qquad y,\, z \geq 0 \end{array}$$

   (a) Enuncia el teorema de Weierstrass y estudia si se puede aplicar al problema anterior. ¿Qué conclusión obtienes?
   (b) Estudia si la solución $(-4, 1, 0)$ es factible y, si lo es, si es interior o de frontera. Justifica la respuesta.
   (c) Razona que el valor óptimo de la función objetivo es negativo.

Solución: (a) El teorema de Weierstrass afirma que un problema de programación no lineal cuya función objetivo sea continua y su conjunto de oportunidades sea compacto y no vacío tiene un máximo y un mínimo global.

En el problema dado, la función objetivo es continua porque es un polinomio, el conjunto de oportunidades

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^3 + 3z \leq 10,\ x + y + 2z \leq 2,\ x^2 + z \leq 20,\ x \leq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$$

es cerrado porque está definido por restricciones de $\leq$ y $\geq$ a partir de funciones que son continuas por ser polinomios, y es acotado porque todo $(x, y, z) \in S$ cumple

$$-5 \leq x \leq 0 \qquad 0 \leq y \leq 3 \qquad 0 \leq z \leq 4.$$

Como es cerrado y acotado es compacto, y además es no vacío, porque, por ejemplo, $(0, 0, 0) \in S$.

Por lo tanto, el teorema de Weierstrass es aplicable al problema, y la conclusión es que tiene un mínimo global.

(b) Vemos que

$$1^3 + 3 \cdot 0 = 1 < 10, \quad -4 + 1 + 2 \cdot 0 = -1 < 2, \qquad (-4)^2 + 0 = 16 < 20,$$

$$-4 < 0, \qquad 1 > 0, \qquad 0 = 0$$

Por lo tanto, la solución es factible, ya que cumple todas las restricciones, y es de frontera, porque satura una de ellas ($z \geq 0$).

(c) La solución $(-4, 1, 0)$ es factible, y la función objetivo vale en ella $f(-4, 1, 0) = -5$. La solución óptima es la mejor solución factible, luego será ésta u otra mejor, en la que la función objetivo será menor que -5. En cualquier caso, el valor óptimo será negativo.

4. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x + y \\ \text{s.a} & x^3 + y \leq 25 \\ & x^4 + 2y \geq 16 \\ & x^2 + 3y \leq 20 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

(a) Enuncia el teorema de Weierstrass y estudia si se puede aplicar al problema anterior. ¿Qué conclusión obtienes?

(b) Estudia si la solución $(2, 1)$ es factible y, si lo es, si es interior o de frontera. Justifica la respuesta.

(c) Razona que el valor óptimo de la función objetivo es menor o igual que 3.

Solución: (a) El teorema de Weierstrass afirma que un problema de programación no lineal cuya función objetivo sea continua y su conjunto de oportunidades sea compacto y no vacío tiene un máximo y un mínimo global.

En el problema dado, la función objetivo es continua porque es un polinomio, el conjunto de oportunidades

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y \leq 25 \;\; x^4 + 2y \geq 16, \; x^2 + 3y \leq 20, \; y \geq 0\}$$

es cerrado porque está definido por restricciones de $\leq$ y $\geq$ a partir de funciones que son continuas por ser polinomios, y es acotado porque todo $(x, y) \in S$ cumple

$$-5 \leq x \leq 5, \quad 0 \leq y \leq 7.$$

Como es cerrado y acotado es compacto, y además es no vacío, porque, por ejemplo, $(2, 1) \in S$.

Por lo tanto, el teorema de Weierstrass se puede aplicar al problema, y la conclusión es que éste tiene un mínimo global.

(b) Se cumple que

$$2^3 + 1 = 9 < 25, \qquad 2^4 + 2 \cdot 1 = 17 > 16, \qquad 2^2 + 3 \cdot 1 = 7 < 20, \qquad 1 > 0,$$

luego $(2, 1)$ es una solución factible, porque cumple todas las restricciones, y es interior, porque no satura ninguna de ellas.

(c) La solución $(2, 1)$ es factible, y en ella la función objetivo vale $f(2, 1) = 3$. La solución óptima es la mejor solución factible, luego será ésta (con función objetivo igual a 3), u otra mejor (en la que la función objetivo será menor que 3). En cualquier caso, el valor óptimo de la función objetivo será ≤ 3.

5. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 3x+2y+5z \\ \text{s.a} & x^2+y^3+z^4 \leq 10 \\ & x+y+z \geq 1 \\ & y \geq 0,\ z \leq 0 \end{array}$$

(a) Enumera las condiciones que ha de cumplir para que se le pueda aplicar el teorema de Weierstrass y comprueba si se cumplen para el problema dado. Si es así, ¿qué podemos afirmar sobre el mismo?

(b) Sabiendo que el valor óptimo de la función objetivo es 11.04, en caso de añadir como nueva restricción $x+z \geq 3$, ¿el nuevo valor óptimo podría ser 11.05?

Solución: (a) El problema ha de cumplir:

- La función objetivo ha de ser continua, y en este caso lo es porque es un polinomio.
- El conjunto de oportunidades:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^3+z^4 \leq 10,\ x+y+z \geq 1,\ y \geq 0,\ z \leq 0\}$$

  ha de ser compacto, es decir, cerrado y acotado.
  En este caso es cerrado porque está definido por restricciones de $\geq$ y $\leq$ a partir de funciones que son continuas porque son polinomios.
  También es acotado, pues todo $(x,y,z) \in S$ cumple:

$$-4 \leq x \leq 4, \qquad 0 \leq y \leq 3, \qquad -2 \leq z \leq 0$$

- El conjunto de oportunidades ha de ser no vacío, y esto se cumple porque, por ejemplo, $(0,1,0) \in S$.

Así pues, el problema cumple las hipótesis del teorema de Weierstrass, y la conclusión es que tiene un máximo global.

(b) Al añadir una restricción, la nueva solución óptima será igual o peor que la solución del problema original, luego no puede ser 11.05, que sería un valor mejor, ya que el problema es de maximizar.

6. Considera los problemas siguientes:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x+y^2+z \\ \text{s.a} & x^2+2y \leq 10 \\ & z^4 \leq 20 \\ & y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Min.} & x+y^2+z \\ \text{s.a} & x^3+2y \leq 10 \\ & z^4 \leq 20 \\ & y,\ z \geq 0 \end{array}$$

(a) Escribe sus conjuntos de oportunidades y razona si son compactos.

(b) Razona que al menos uno de los problemas tiene óptimo global.

(c) Razona si la solución $(-1\,000, 1, 0)$ es factible o infactible para cada uno de los problemas y, en caso de que sea factible, si es interior o de frontera.

(d) Explica lo que es un problema infactible y un problema no acotado. ¿Alguno de los dos problemas del enunciado es de uno de estos tipos?

SOLUCIÓN: (a) En el primer problema: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+2y \leq 10,\ z^4 \leq 20,\ y \geq 0\}$. El conjunto es cerrado porque está definido por restricciones de $\leq$ y $\geq$ a partir de funciones que son continuas porque son polinomios. Además está acotado porque todo $(x, y, z) \in S$ cumple:

$$-4 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y \leq 5, \quad -3 \leq z \leq 3.$$

Como S es cerrado y acotado, es compacto.

Para el segundo problema: $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + 2y \leq 10,\ z^4 \leq 20,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$ no está acotado, porque la variable x no tiene cota inferior. Todas las restricciones se pueden cumplir con cualquier valor negativo de x. Por lo tanto, T no es compacto.

(b) El primero de los dos problemas tiene óptimo global, porque satisface las hipótesis del teorema de Weierstrass: la función objetivo es continua (porque es un polinomio), el conjunto de oportunidades es compacto (lo hemos visto en la pregunta anterior) y es no vacío, pues $(0, 0, 0) \in S$.

(c) La solución $(-1\,000, 1, 0)$ es infactible para el primer problema, pues no cumple la primera restricción. Para el segundo tenemos que

$$(-1\,000)^3 + 2 \cdot 1 = -999999998 < 10, \qquad 0^4 = 0 < 20, \qquad 1 > 0, \qquad 0 = 0$$

luego se trata de una solución factible (porque cumple todas las restricciones, y es de frontera porque satura una de ellas ($z \geq 0$).

(d) Un problema infactible es un problema sin soluciones factibles, mientras que un problema es no acotado si toda solución factible puede ser mejorada por otra.

El primero de los dos problemas tiene solución óptima (apartado b), luego no es de ninguno de los dos tipos. Por el contrario, el segundo problema es no acotado, pues las soluciones

$$(-10, 1, 0), \quad (-100, 1, 0), \quad (-1\,000, 1, 0), \quad (-10\,000, 1, 0), \ldots$$

son todas factibles y cada una de ellas es mejor que la anterior.

7. Comprueba si el problema siguiente satisface las hipótesis del teorema local-global. En caso afirmativo, ¿cuál es la conclusión?

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x + 3y + 2z \\ \text{s.a} & 2x^2 + y^2 + z^2 + 2yz \leq 10 \\ & y \geq 0,\ z \leq 0 \end{array}$$

SOLUCIÓN: El problema ha de cumplir que la función objetivo sea cóncava (y lo es, porque es lineal) y que el conjunto de oportunidades

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + y^2 + z^2 + 2yz \leq 10,\ y \geq 0,\ z \leq 0\}$$

sea convexo. Para ello, a su vez, es necesario que la función $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2yz$ sea convexa, porque aparece en una restricción de $\leq$. Estudiamos si lo es mediante la regla de Jacobi. Calculamos la hessiana de f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2z, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z + 2y,$$

luego

$$Hf = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $|Hf| = 0$, hemos de calcular todos los menores principales:

$$H_1 = 4,\ H_2 = 2,\ H_3 = 2,$$

$$H_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8, \quad H_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8, \qquad H_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$H_{123} = 0.$$

Como son todos mayores o iguales que 0, la función f es convexa, el conjunto S es convexo.

Así pues, el problema satisface las hipótesis del teorema local-global. La conclusión es que, si tiene un máximo local, será de hecho un máximo global.

8. Comprueba si el problema siguiente satisface las hipótesis del teorema local-global. En caso afirmativo ¿cuál es la conclusión?

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x + 2y + z \\ \text{s.a} & 2xy - 2x^2 - y^2 - z^2 - 20y \geq 10 \\ & x \geq 0,\ y \leq 0 \end{array}$$

Solución: Hemos de comprobar que la función objetivo es convexa (y lo es, porque es lineal) y que el conjunto de oportunidades

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2xy - 2x^2 - y^2 - z^2 - 20y \geq 10,\ x \geq 0,\ y \leq 0\}$$

sea convexo. Para ello basta con que la función $f(x,y,z) = 2xy - 2x^2 - y^2 - z^2 - 20y$ sea cóncava. Estudiamos si lo es mediante la regla de Jacobi. Calculamos la hessiana:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y - 4x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2y - 20, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -2z$$

$$Hf = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Como $|Hf| = -8 \neq 0$, basta calcular los menores principales conducentes:

$$H_1 = -4 < 0, \qquad H_{12} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \qquad H_{123} = -8 < 0.$$

Como alternan en signo empezando en negativo, la función f es cóncava, luego el conjunto S es convexo. Así pues, el problema satisface las hipótesis del teorema local-global. La conclusión es que si tiene un mínimo local, será de hecho un mínimo global.

9. Razona si el teorema local-global se puede aplicar o no a los problemas siguientes:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 3x - y + z \\ \text{s.a} & 50x + xy - xz + 2yz - 2x^2 - y^2 - z^2 \geq 10 \\ & x + y + 3z = 10 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Min.} & 50x + xy - xz + 2yz - 2x^2 - y^2 - z^2 \\ \text{s.a} & x + y + 3z \leq 10 \\ & 3x - y + z \geq 4 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

En caso de que se pueda aplicar, ¿nos asegura esto que el problema tenga óptimo global?

Solución: Para el primer problema: la función objetivo ha de ser convexa, y lo es porque es lineal, y el conjunto de oportunidades

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 50x + xy - xz + 2yz - 2x^2 - y^2 - z^2 \geq 10,\ x + y + 3z = 10\}$$

ha de ser convexo. Para ello basta con que la función

$$f(x, y, z) = 50x + xy - xz + 2yz - 2x^2 - y^2 - z^2$$

sea cóncava. Estudiamos si lo es mediante la regla de Jacobi. Calculamos la hessiana:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 50 + y - z - 4x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2z - 2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -x + 2y - 2z$$

$$Hf = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Como $|Hf| = 0$, hemos de calcular todos los menores principales:

$$H_1 = -4 \leq 0, \qquad H_2 = -2 \leq 0, \qquad H_3 = -2 \leq 0,$$

$$H_{12} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 7 \geq 0, \quad H_{13} = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 7 \geq 0, \quad H_{23} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \geq 0,$$

$$H_{123} = 0 \leq 0$$

Como los menores de cada orden alternan en signo empezando en negativo, la función f es cóncava, luego el conjunto A es convexo, luego S es convexo por ser intersección de convexos.

Ahora vemos que al segundo problema no se le puede aplicar el teorema local-global, pues la función objetivo tendría que ser convexa, y acabamos de ver que es cóncava.

En el caso del primer problema, en el que sí que se puede aplicar el teorema, esto no nos asegura que tenga óptimo global, sino únicamente que, en caso de tener un óptimo local, será de hecho un óptimo global.

10. Para cada problema del problema anterior, razona si $(2,1,0)$ es o no una solución factible. En caso de que sea factible razona si es interior o de frontera.

    SOLUCIÓN: La solución $(2,1,0)$ es infactible para el primer problema, pues no cumple la segunda restricción: $2+1+3\cdot 0 = 3 \neq 10$. Para el segundo tenemos que

    $$2+1+3\cdot 0 = 3 < 10, \qquad 3\cdot 2 - 1 + 0 = 5 > 4, \qquad 2 > 0, \qquad 1 > 0, \qquad 0 = 0,$$

    luego se trata de una solución factible (porque cumple todas las restricciones) y de frontera (porque satura una de ellas, $z \geq 0$).

11. Enuncia el teorema local-global y razona si se puede aplicar al problema siguiente:

    $$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x^2+y^2+z^2 \\ \text{s.a} & 5xy - x^2 - 3y^2 - 2z^2 \geq 5 \\ & z \leq 10 \\ & x \geq 0,\ y \leq 0 \end{array}$$

    SOLUCIÓN: El teorema local-global afirma que si, en un problema de programación no lineal con conjunto de oportunidades convexo, si la función objetivo es cóncava todos los máximos locales son globales, mientras que si la función objetivo es convexa, todos los mínimos locales son globales.

    En el problema dado, la función objetivo ha de ser convexa. Para estudiar si lo es, calculamos su hessiana:

    $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z,$$

    $$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

    Como es diagonal y la diagonal es positiva, la función objetivo es convexa.

    El conjunto de oportunidades es

    $$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5xy - x^2 - 3y^2 - 2z^2 \geq 5,\ z \leq 10,\ x \geq 0,\ y \leq 0\}.$$

    Para ver que sea convexo basta con que la función $g(x,y,z) = 5xy - x^2 - 3y^2 - 2z^2$ sea cóncava. Para estudiar si lo es calculamos su hessiana:

    $$\frac{\partial g}{\partial x} = 5y - 2x, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 5x - 6y, \qquad \frac{\partial g}{\partial z} = -4z$$

$$Hg = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Como $|Hg| = 52 \neq 0$, basta calcular los menores principales conducentes:

$$H_1 = -2, \quad H_{12} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -13, \qquad H_{123} = 52.$$

Para que g fuera cóncava, los signos habrían tenido que ser $H_1 < 0$, $H_{12} > 0$, $H_{123} < 0$. Como no es así, la función g no es cóncava, y no podemos asegurar que el conjunto S sea convexo. Así pues, no podemos aplicar el teorema local-global al problema.

1.10 Problemas propuestos

Compacidad, teorema de Weierstrass

1. Determina si los conjuntos siguientes son o no compactos:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z \leq 10,\ x,\ y,\ z \geq 0\},$$

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 20,\ -5 \leq z \leq 2\}.$$

2. Determina si los conjuntos siguientes son o no compactos:

(a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 16\}$,
(b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\}$,
(c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \geq 16\}$,
(d) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 16\}$,
(e) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^3 \leq 16\}$,
(f) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y \leq 5,\ z \leq 3\}$,
(g) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y \leq 5,\ z^2 \leq 3, x \geq 0,\ y \geq 0\}$,
(h) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z \leq 6,\ x + y \leq 10,\ y + z \leq 8,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$,
(i) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + x^2 + 3z^4 \leq 10,\ y \geq 0\}$.

3. Razona si los conjuntos de oportunidades de los problemas siguientes son o no compactos:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x^2 + y + z \\ \text{s.a} & x + y + 5z = 1, \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & x^2 + y + z \\ \text{s.a} & -x + y + 5z = 1, \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & x^2 + y + z \\ \text{s.a} & x^4 + y^4 + z \leq 10, \\ & z \geq 0 \end{array}$$

4. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 3x + 2y + z^2 \\ \text{s.a} & x^2 + y + z \leq 10 \\ & x + y + z \leq 20 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

(a) Escribe el conjunto de oportunidades. Razona si es cerrado. ¿Es vacío?
(b) Razona si se puede aplicar el teorema de Weierstrass.

5. Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x+y+z \\ \text{s.a} & x^2+y^2+z^2=2 \end{array}$$

   (a) Clasifícalo.
   (b) Escribe el conjunto de oportunidades. Razona si es cerrado.
   (c) ¿Es acotado el conjunto de oportunidades?
   (d) Razona que el problema tiene solución óptima.
   (e) Encuentra una solución factible (no necesariamente óptima) y determina si es interior o de frontera.
   (f) Razona que el valor óptimo de la función objetivo es mayor o igual que 2.
   (g) Encuentra una solución en la que la función objetivo tome el valor 5.

6. Dado el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x+5y+z \\ \text{s.a} & x^3+z^3 \leq 5 \\ & 2x+y^2+z^2 \leq 30 \\ & x+y^2 \geq 1 \\ & x \geq 0,\ y \leq 0 \end{array}$$

   (a) Comprueba que tiene solución óptima.
   (b) Estudia si las soluciones $(0,-2,0)$ y $(1,-1,1)$ son factibles o infactibles, interiores o de frontera. (Escribe los cálculos que hagas para comprobarlo). ¿Cuánto vale en ellas la función objetivo?
   (c) ¿Podría ser $(1,-1,1)$ la solución óptima?

7. Considera los dos problemas siguientes (en las respuestas, deja claro cuándo hablas de (A) y cuándo hablas de (B)):

$$\begin{array}{rl} \text{(A) Min.} & 5x+2y+z \\ \text{s.a} & x^2+y+z \leq 30 \\ & x-y \leq 5 \\ & y+z \geq 50 \\ & y,\ z \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{(B) Max.} & x+y+z \\ \text{s.a} & 2x+y+5z \geq 30 \\ & x-y-2z \leq 50 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

   (a) Escribe sus conjuntos de oportunidades y razona si son compactos.
   (b) Razona si la solución $(x,y,z)=(0,1\,000,1\,000)$ es factible o infactible, interior o de frontera, para cada uno de ellos.
   (c) Razona si alguno de ellos cumple las hipótesis del teorema de Weierstrass. En caso negativo, deja claro qué hipótesis no se cumple.
   (d) Razona brevemente si alguno de los dos problemas cumple cada una de las propiedades siguientes:
      i. Es de programación lineal.
      ii. Es de programación no lineal.
      iii. Es infactible.
      iv. Es no acotado (el problema, no el conjunto de oportunidades).

8. Considera el problema:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x + 3y + z \\ \text{s.a} & x - y + z \leq 5 \\ & x + 2y + z \leq 10 \\ & x \geq 3 \\ & y, z \geq 0 \end{array}$$

   (a) Razona si tiene máximo global.
   (b) ¿Podríamos asegurarlo también si las variables fueran libres?
   (c) Pon un ejemplo de solución en la que la función objetivo tome el valor 1 000.

9. Considera el problema:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x + y + z \\ \text{s.a} & x + 5y \geq 3 \\ & x - y + z \leq 5 \\ & x^2 + y + z^2 \leq 10 \\ & x \leq 0,\ y \geq 0 \end{array}$$

   (a) Razona si cumple las hipótesis del teorema de Weierstrass. En caso de que las cumpliera ¿qué podríamos afirmar sobre el problema?
   (b) Razona si las soluciones $(-1, 1, 1)$ y $(8, -1, 1)$, $(0, 1, 1)$ son factibles o infactibles, interiores o de frontera.
   (c) ¿Tiene el problema soluciones infactibles? ¿Es el problema infactible? ¿Puede ser no acotado?

10. Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & xyz \\ \text{s.a} & x^2 + y - z \leq 2 \\ & x + z \leq 5 \\ & x + y^2 \leq 20 \\ & x,\ z \geq 0 \end{array}$$

   (a) Estudia si las soluciones $(0, 0, 1)$ y $(1, 1, 1)$ son factibles o infactibles, interiores o de frontera.
   (b) Razona que el problema tiene solución óptima.
   (c) Razona si $(0, 0, 1)$ puede ser la solución óptima del problema.

Convexidad, teorema local-global

11. Razona si alguno de los conjuntos siguientes es convexo:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 100x - 3x^2 - 2y^2 - z^2 \leq 10, \quad x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 2xy + 6yz \geq 40\}$$

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 100x - 3x^2 - 2y^2 - z^2 \geq 10, \quad x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 2xy + 6yz \leq 40\}$$

12. Razona si alguno de estos conjuntos es convexo:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+y \leq 5,\ x+y-x^2-2y^4 \leq 3,\ 3x^2+2y^2+3z^2+2xy+4xz+2yz \geq 100\}$$

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+y = 5,\ x+y-x^2-2y^4 \geq 3,\ 3x^2+2y^2+3z^2+2xy+4xz+2yz \leq 100\}$$

13. Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x^2+4y^2+z^2+4xy-2xz-4yz \\ \text{s.a} & z+x^2\leq 20 \\ & y-z^2\geq 10 \\ & x+y+z\leq 50 \\ & x,\ y,\ z\geq 0 \end{array}$$

   (a) Escribe el conjunto de oportunidades y razona si es convexo.
   (b) ¿Se puede aplicar el teorema local-global?

14. Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 4xy+3xz-3yz-2x^2-2y^2-z^2 \\ \text{s.a} & 100y-x^4-y^2-z^2\geq 10 \\ & 3x+5y+z\leq 50 \\ & x,\ y,\ z\geq 0 \end{array}$$

   (a) Escribe el conjunto de oportunidades y razona si es convexo.
   (b) ¿Se le puede aplicar el teorema local-global? Indica claramente qué tiene que cumplirse para que esto sea posible.
   (c) Razona si la solución $(x,y,z)=(0,1,1)$ es factible o infactible, interior o de frontera.

15. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & x^2+3y^2+2z^2 \\ \text{s.a} & 20z-2x^2-y^2+xy\geq 5 \\ & x+2y+z\leq 20 \\ & x,\ y,\ z\geq 0 \end{array}$$

   (a) Escribe el conjunto de oportunidades y razona si es convexo.
   (b) Razona si el teorema local-global es aplicable cuando el objetivo es maximizar y/o minimizar.

16. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x-y+z \\ \text{s.a} & y\geq -2 \\ & x^4+y^2+2z\leq 11 \\ & x\leq 0\,,\ z\geq 0 \end{array}$$

   (a) Escribe el conjunto de oportunidades.
   (b) Comprueba que el problema tiene solución óptima.
   (c) En general, ¿qué tiene que cumplir una solución factible para ser interior? ¿Y de frontera? Encuentra una de cada tipo de este problema.
   (d) El hecho de que $f(-1,0,1)=0$, ¿me da alguna información sobre el valor óptimo de la función objetivo? ¿Y el hecho de que $f(1,0,5)=6$?

17. Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x^2 + 4.5y^2 - z^2 + 6xy + 2xz + 3yz \\ \text{s.a} & 3x^2 + y^2 + z \,\square\, 10 \\ & 20z + 2xy - x^2 - 3y^2 - 2z^2 \,\square\, 3 \\ & x + y \,\square\, 2 \\ & x, y, z \geq 0 \end{array}$$

(a) Escribe en las casillas las desigualdades adecuadas ($\leq$ o $\geq$) para que podamos asegurar que el conjunto de oportunidades es convexo. Razona la respuesta.

(b) Con dichas desigualdades, ¿es aplicable el teorema local-global al problema?

18. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 3x + 5y + x^2 + 10z^2 \\ \text{s.a} & 6x + 5y + 2xy - 2x^2 - y^2 - z^2 - 2xz \geq 1 \\ & x + y + z \leq 3 \end{array}$$

(a) Se sabe que la solución $(0.34, -0.14, -0.026)$ es un mínimo local. Estudia si podemos asegurar que es un mínimo global.

(b) Razona si la solución $(1, 0, 0)$ es factible o infactible, interior o de frontera.

El teorema de Weierstrass y el teorema local-global

19. Considera el problema:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + xz + yz \\ \text{s.a} & 3x^2 + y + z^2 \leq 10 \\ & x - 2y + z \leq 1 \\ & y + z \geq 2 \\ & x \leq 0, \quad y,\, z \geq 0 \end{array}$$

(a) Di qué podemos afirmar de un problema si cumple las hipótesis del teorema local-global. Estudia si se cumplen en este caso.

(b) Di qué podemos afirmar de un problema si cumple las hipótesis del teorema de Weierstrass. Estudia si se cumplen en este caso.

(c) Define solución de frontera y pon un ejemplo para el problema de este ejercicio. Escribe los cálculos que hagas para comprobar que el ejemplo es válido.

20. Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 1.5x^2 - y^2 - z^2 + xy + xz + yz \\ \text{s.a} & x + 2y + z = 10 \\ & x + y + z \geq 2 \\ & x \leq 0,\, y \geq 0 \end{array}$$

(a) Escribe el conjunto de oportunidades y razona si es compacto o convexo.

(b) ¿Se puede aplicar al problema el teorema local-global?

(c) Encuentra, si es posible, una solución factible interior.

21. Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & xy + xz + yz - 2.5x^2 - y^2 - 0.5z^2 \\ \text{s.a} & 2x + y + z \leq 10 \\ & y + z \geq -1 \\ & y \geq 0,\ z \leq 0. \end{array}$$

   (a) Di qué podemos afirmar de un problema si cumple las hipótesis del teorema local-global. Estudia si se cumplen en este caso.
   (b) Di qué podemos afirmar de un problema si cumple las hipótesis del teorema de Weierstrass. Estudia si se cumplen en este caso.
   (c) Razona si la solución $(0, 1000, -1000)$ es factible y, en caso afirmativo, si es interior o de frontera. Escribe los cálculos que hagas para comprobarlo.

22. Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2xy + 2xz - 2x^2 - y^2 - z^2 \\ \text{s.a} & 3x^2 + z^2 \leq 10 \\ & x + y \geq 2 \\ & x \leq 0,\ y \geq 0 \end{array}$$

   (a) Escribe el conjunto de oportunidades y razona si es convexo.
   (b) ¿Se puede aplicar el teorema de Weierstrass?
   (c) ¿Se puede aplicar el teorema local-global?
   (d) Razona si la solución $(x, y, z) = (0, 80, 1)$ es factible o infactible, interior o de frontera (escribe los cálculos que hagas para comprobarlo).

23. Considera los problemas siguientes:

$$\begin{array}{rrl} \text{(A)} & \text{Min.} & 100x + 200y + 3xy - 3x^2 - y^2 - z^2 \\ & \text{s.a} & x + 3y + 5z \leq 65 \\ & & x + y \leq 2 \\ & & z \geq 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrl} \text{(B)} & \text{Max.} & 100x + 200y + 3xy - 3x^2 - y^2 - z^2 \\ & \text{s.a} & x^2 + 3y^2 + 5z \leq 65 \\ & & x + y \leq 2 \\ & & z \geq 3 \end{array}$$

   (a) Estudia si el problema (A) cumple las hipótesis del teorema local-global. ¿Y el problema (B)?
   (b) Explica por qué el apartado anterior no nos permite asegurar que el problema (B) tiene óptimo global.
   (c) Escribe el conjunto de oportunidades del problema (A) y estudia si es compacto.
   (d) Razona si la solución $(4, -3, 4)$ es factible o infactible, interior o de frontera en el problema (B).
   (e) Estudia si el problema (B) tiene óptimo global.

24. Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x^2 + 4.5y^2 - z^2 + 6xy + 2xz + 3yz \\ \text{s.a} & 3x^2 + y^2 + z \leq 10 \\ & x + y \leq 2 \\ & y \leq 0,\ z \geq 0 \end{array}$$

   (a) Escribe el conjunto de oportunidades y razona si es convexo.
   (b) ¿Se puede aplicar el teorema local-global?
   (c) Razona que el problema tiene un óptimo global.

Resolución gráfica

25. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x - y \\ \text{s.a.} & y + x^2 \leq 4 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array}$$

   (a) Resuélvelo gráficamente.
   (b) Calcula el valor óptimo de la función objetivo.
   (c) Escribe el conjunto de oportunidades. Estudia si es compacto.
   (d) Razona si los puntos siguientes son soluciones del problema. En caso afirmativo, indica si son factibles o infactibles, interiores o de frontera: $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -3)$.

26. Resuelve gráficamente los problemas siguientes:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x \\ \text{s.a} & y + x^2 \leq 2 \\ & x - y \leq 0 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Min.} & x - y \\ \text{s.a} & y + x^2 \leq 2 \\ & x - y \leq 0 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & x + 3y \\ \text{s.a} & y - x^2 \geq 5 \\ & x^2 + y^2 \leq 1 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Min.} & -x + 5y \\ \text{s.a} & xy \leq 2 \\ & x - y \leq 1 \\ & x - y \geq -1 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x - y \\ \text{s.a} & xy \leq 2 \\ & x - y \leq 1 \\ & x - y \geq -1 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Min.} & 3x - 2y \\ \text{s.a} & xy \geq 10 \\ & x + y \leq 1 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Min.} & 5x - y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \leq 4 \\ & x + y \geq 1 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & 5x - y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \leq 4 \\ & x + y \geq 1 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x - y \\ \text{s.a} & xy = 6 \\ & x + y \leq 5 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & x + y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \leq 3 \\ & y - x^2 \geq 0 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Min.} & x + y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \leq 3 \\ & y - x^2 \geq 0 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & x + 2y \\ \text{s.a} & xy \geq 12 \\ & y - x \geq 1 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & y - x \\ \text{s.a} & xy \geq 12 \\ & y - x \geq 1 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Min.} & y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \leq 3 \\ & y - x^2 \geq 0 \\ & y \leq 4 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & x + 2y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \leq 3 \\ & y - x^2 \geq 0 \\ & y \leq 4 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & x + 2y \\ \text{s.a} & x \leq 5 \\ & y \leq 4 \end{array}$$

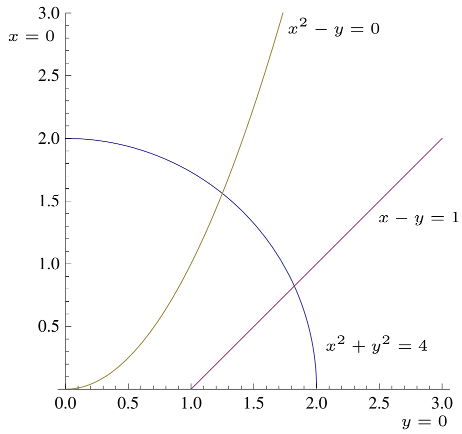
27. Resuelve gráficamente los problemas siguientes:

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & 3x+y \\ \text{s.a} & x^2+y^2 \geq 10 \\ & x-y \leq 2 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Opt.} & y \\ \text{s.a} & y-x^2 \geq 1 \\ & x+y \geq 3 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x+0.5y \\ \text{s.a} & x^2-2y \geq 0 \\ & x+2y \leq 2 \\ & y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Opt.} & x+y \\ \text{s.a} & x^2+y^2 \geq 4 \\ & y \leq x^2 \\ & y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Opt.} & -x-y \\ \text{s.a} & xy \leq 20 \\ & y \leq x^2+2 \\ & y-x \geq 0 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

28. Resuelve gráficamente el problema

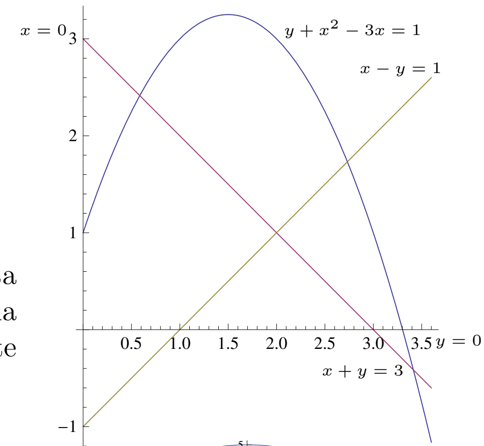
$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & 0.5x+2y \\ \text{s.a} & x^2+y^2 \geq 4 \\ & x^2-y \geq 0 \\ & x-y \leq 1 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$



Sombrea el conjunto de oportunidades, representa todo lo necesario para encontrar la solución, señala en la figura el máximo y el mínimo si los hay y, en caso afirmativo, calcula analíticamente la solución óptima.

29. Resuelve gráficamente el problema

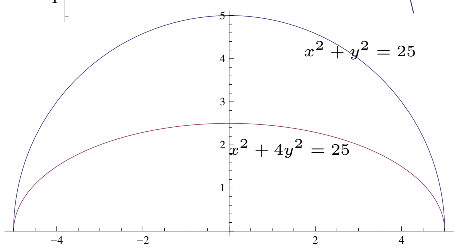
$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 0.5x-y \\ \text{s.a} & y+x^2-3x \leq 1 \\ & x-y \leq 1 \\ & x+y \leq 3 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$



Sombrea el conjunto de oportunidades, representa todo lo necesario para encontrar la solución, señala en la figura el mínimo global y calcula analíticamente la solución óptima.

30. Resuelve gráficamente el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x+2y \\ \text{s.a} & x^2+y^2 \leq 25 \\ & x^2+4y^2 \geq 25 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

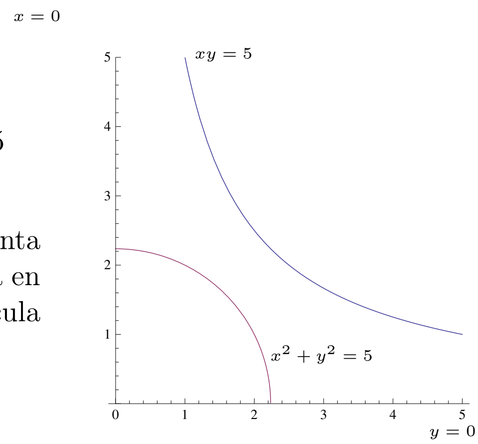


31. Resuelve gráficamente los problemas

A) Min. $2x + y$
s.a $xy \leq 5$
$x^2 + y^2 \geq 5$
$x, y \geq 0$

B) Min. $2x + y$
s.a $xy \geq 5$
$x^2 + y^2 \leq 5$
$x, y \geq 0$

Sombrea el conjunto de oportunidades, representa todo lo necesario para encontrar la solución, señala en la figura el óptimo global si existe y en tal caso calcula analíticamente la solución óptima.



Cuestiones

32. Determina mentalmente si los problemas siguientes son infactibles, no acotados o si tienen solución óptima, y en tal caso calcúlala (siempre mentalmente):

Max. $x^2 + y^2 + 8$	Max. $x^2 + y^2 + 8$	Max. $x + y + 8$	Max. $x^2 + y^2 + 8$
s.a $x + y \leq 10$	s.a $x + y \leq 0$	s.a $x \leq 5$	s.a $x \leq 5$
$x \geq 6$	$x, y \geq 0$	$y \leq 6$	$x, y \geq 0$
$y \geq 8$			

33. Supón que hemos resuelto un problema de programación con restricciones y hemos encontrado un óptimo global. Si eliminamos las restricciones, ¿el problema tendrá necesariamente óptimo? Y si lo tiene, ¿será mejor o peor que el problema con restricciones?, ¿puede ser el mismo?

34. Sea P un problema de programación matemática y sea P' otro problema que resulta de añadirle a P una restricción más. Supongamos que su objetivo es maximizar.

    (a) ¿Cuál será mayor, el conjunto de oportunidades de P o el de P'.
    (b) ¿Cuál será mayor, el valor óptimo de P o el de P'?
    (c) Si $\bar{x}$ es una solución factible de P', ¿lo será también de P?, ¿y al revés?
    (d) Si $\bar{x}^*$ es el óptimo de P, ¿lo será también de P'?

35. Razona si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas y, en caso de ser falsas, corrígelas:

    (a) Si un problema de programación matemática tiene infinitas soluciones, entonces es no acotado.
    (b) Un problema infactible tiene infinitas soluciones.
    (c) Un problema infactible no tiene soluciones.
    (d) Un problema es no acotado cuando toda solución óptima puede ser mejorada por otra.
    (e) Un problema es infactible cuando alguna solución no cumple las restricciones.

36. Clasifica una forma cuadrática cuyos menores principales sean los que se indican en los casos siguientes. Indica si es necesario considerarlos todos o si basta estudiar los menores principales conducentes.

    (a) $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = -2$, $A_{12} = 0$, $A_{13} = 0$, $A_{23} = 0$, $A_{123} = 0$.
    (b) $A_1 = 2$, $A_2 = 0$, $A_3 = 2$, $A_{12} = 0$, $A_{13} = 3$, $A_{23} = 0$, $A_{123} = 0$.
    (c) $A_1 = 0$, $A_2 = 1$, $A_3 = 0$, $A_{12} = 0$, $A_{13} = -1$, $A_{23} = 0$, $A_{123} = -1$.
    (d) $A_1 = 2$, $A_2 = 1$, $A_3 = 1$, $A_{12} = -2$, $A_{13} = -2$, $A_{23} = -3$, $A_{123} = 2$.
    (e) $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, $A_{12} = 0$, $A_{13} = 0$, $A_{23} = 0$, $A_{123} = 0$.
    (f) $A_1 = -2$, $A_2 = -1$, $A_3 = -2$, $A_{12} = 0$, $A_{13} = 2$, $A_{23} = 1$, $A_{123} = 8$.
    (g) $A_1 = -2$, $A_2 = -1$, $A_3 = -2$, $A_{12} = 1$, $A_{13} = 3$, $A_{23} = 1$, $A_{123} = -1$.

37. Si a un problema con solución óptima le quitamos una restricción, ¿el nuevo problema podría ser infactible? Y si tuviera óptimo, ¿éste será mejor o peor que el del problema inicial? Razona las respuestas.

38. Si un problema tiene solución óptima, ¿puede tener soluciones infactibles? ¿Puede ser infactible? ¿Y no acotado? Razona las respuestas.

39. Razona brevemente:

    (a) ¿Qué podemos concluir de un problema que satisfaga las hipótesis del teorema local-global.
    (b) ¿Un problema lineal cumple necesariamente dichas hipótesis?
    (c) ¿Un problema no acotado puede tener varias soluciones óptimas?
    (d) ¿Es lo mismo un problema no acotado que un problema cuyo conjunto de oportunidades es no acotado?
    (e) Si un problema de maximizar tiene solución óptima $(x, y) = (2, 3)$ con función objetivo $F(2, 3) = 10$, ¿qué podemos decir de $(1, 3)$ si $F(1, 3) = 15$?
    (f) Pon un ejemplo de problema cuyo conjunto de oportunidades no esté acotado pero que tenga óptimo global.

40. Supón que tenemos un problema que cumple las hipótesis del teorema de Weierstrass. Indica cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas:

    (a) Si le añadimos una nueva restricción, el problema puede pasar a ser infactible.
    (b) Si le añadimos una nueva restricción, el problema puede pasar a ser no acotado.
    (c) Si le añadimos una nueva restricción, el nuevo problema puede tener una solución óptima mejor que la del primero.

41. Indica cuál o cuáles de estas opciones sirve como definición de problema infactible:

    (a) Un problema que no cumple alguna de las restricciones.
    (b) Un problema con soluciones infactibles.
    (c) Un problema sin solución óptima.
    (d) Ninguna de las anteriores (escribe la que consideres correcta).

42. Indica cuál o cuáles de estas opciones sirve como definición de problema no acotado:
    (a) Un problema en el que alguna variable no tiene cota superior o inferior.
    (b) Un problema sin solución óptima, pero factible.
    (c) Un problema en el que toda solución factible puede ser mejorada por otra.
    (d) Un problema en el que ninguna solución óptima es la mejor de todas.
    (e) Ninguna de las anteriores (escribe la que consideres correcta).

43. Supón que, al resolver un problema en el que hay que determinar las cantidades que conviene producir de dos artículos para maximizar el beneficio, resulta que el beneficio máximo que puede obtenerse es de 2 000 €, y se consigue produciendo 50 unidades del primer artículo y 80 del segundo. Otra empresa se plantea el mismo problema con otros datos y la solución óptima resulta ser la misma. ¿Qué podemos afirmar entonces?
    (a) La segunda empresa también producirá 50 unidades del primer producto y 80 del segundo, pero tal vez obtenga otro beneficio.
    (b) La segunda empresa también producirá 50 unidades del primer producto y 80 del segundo, y también obtendrá 2 000 € de beneficio.
    (c) La segunda empresa también conseguirá un beneficio máximo de 2 000 €, pero tal vez produciendo otras cantidades de producto.

2 Programación entera

Presentamos aquí el método de *ramificación y acotación* para resolver problemas con variables enteras. Es importante entender que el método en sí no resuelve ningún problema, sino que lo que hace es determinar una serie de problemas sin variables enteras de modo que, a partir de la solución de éstos, obtenemos la solución del problema dado. En otras palabras, el método de ramificación y acotación nos dice cómo usar un método cualquiera que permita resolver problemas sin variables enteras para resolver también problemas con variables enteras (aplicándolo varias veces).

Por lo tanto, el método de ramificación y acotación no puede usarse solo, sino que tenemos que utilizarlo siempre en combinación con otro método que nos permita resolver problemas sin variables enteras. De momento sólo tenemos a nuestro alcance dos métodos así: la resolución gráfica y el uso del ordenador.

2.1 El método de ramificación y acotación

Explicaremos el método a la vez que resolvemos el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 3x + 11y + 5z \\ \text{s.a} & 5x + 11y + 7z \leq 103 \\ & 13x + 9y + 3z \leq 213 \\ & x + y \geq 3.5 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \text{ enteras} \end{array}$$

El primer paso para resolver un problema de programación entera (mediante el método de ramificación y acotación) es resolver el problema que resulta de eliminar las restricciones de integridad. Si el problema resultante tiene ya solución entera, entonces ésa misma es ya la solución del problema con variables enteras.

- En nuestro caso debemos empezar resolviendo el problema

$$\begin{array}{rl} \text{(P1) Max.} & 3x + 11y + 5z \\ \text{s.a} & 5x + 11y + 7z \leq 103 \\ & 13x + 9y + 3z \leq 213 \\ & x + y \geq 3.5 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

y es en este punto donde empezamos a necesitar un método de resolución de problemas sin variables enteras para usarlo en combinación con el método de ramificación y acotación. En este caso usaremos LINGO para resolver los problemas sin variables enteras que nos vayan surgiendo (pero cualquier método alternativo sería igualmente válido). Al resolver con LINGO este problema obtenemos la solución

$$(x, y, z) = (0, 9.3, 0) \qquad \text{con } F = 103.$$

Vemos que la variable y no es entera. Si todas las variables hubieran sido enteras (en general, si lo son todas las que el problema inicial pide que sean enteras, que en este caso son todas) ya tendríamos la solución del problema.

Naturalmente que, puestos a usar LINGO, podríamos pedirle que nos diera directamente la solución del problema con variables enteras. Si lo hacemos obtenemos

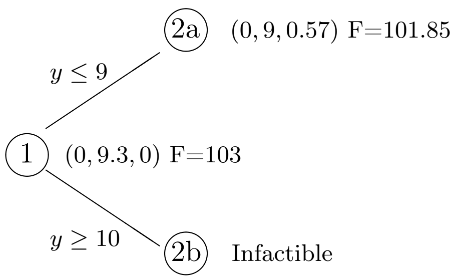
$$(x, y, z) = (0, 9, 0) \quad \text{con } F = 99,$$

y ya hemos terminado, pero de lo que se trata aquí es de conocer la técnica (que el propio LINGO usa) para llegar a esta solución. Lo que vamos a ver es cómo usando LINGO sólo para resolver problemas sin variables enteras podemos acabar conociendo la solución del problema con variables enteras.

• Ahora tenemos que *ramificar* la solución obtenida. Para ello elegimos una de las variables que no son enteras (en este caso sólo está la y, pero si hubiera varias elegimos una cualquiera), y se trata de imponer restricciones que eliminen todos los valores fraccionarios de y cercanos al actual sin eliminar ningún valor entero. Concretamente, como $y = 9.3$ está entre 9 y 10, vamos a exigir que, o bien $y \leq 9$, o bien $y \geq 10$. Así descartamos todos los valores fraccionarios indeseados entre 9 y 10. Esto nos lleva a plantear dos nuevos problemas:

$$\begin{array}{rl}
\text{(P2a) Max.} & 3x + 11y + 5z \\
\text{s.a} & 5x + 11y + 7z \leq 103 \\
 & 13x + 9y + 3z \leq 213 \\
 & x + y \geq 3.5 \\
 & y \leq 9 \\
 & x,\, y,\, z \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\text{(P2b) Max.} & 3x + 11y + 5z \\
\text{s.a} & 5x + 11y + 7z \leq 103 \\
 & 13x + 9y + 3z \leq 213 \\
 & x + y \geq 3.5 \\
 & y \geq 10 \\
 & x,\, y,\, z \geq 0
\end{array}$$

Conviene formarse un esquema del proceso en forma de árbol. El diagrama siguiente contiene las soluciones de estos dos problemas (obtenidas con LINGO) junto con la del problema inicial:



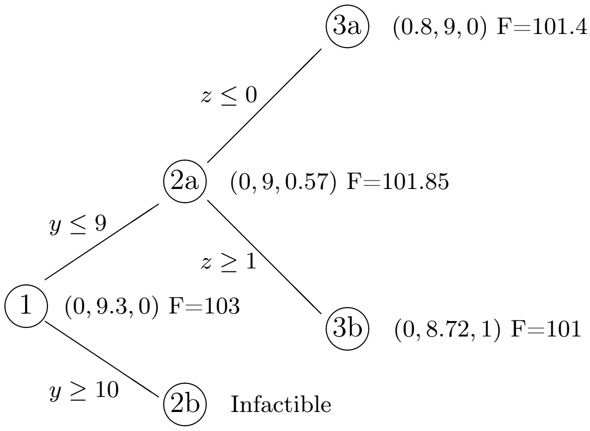
Como el problema P2b ha resultado infactible, continuamos ramificando por la rama superior. Elegimos una variable no entera (en este caso sólo tenemos la $z = 0.57$) e introducimos las restricciones $z \leq 0$ y $z \geq 1$ para descartar los valores fraccionarios indeseados entre 0 y 1. Esto supone resolver los dos problemas siguientes:

$$\begin{array}{rl}
\text{(P3a) Max.} & 3x + 11y + 5z \\
\text{s.a} & 5x + 11y + 7z \leq 103 \\
 & 13x + 9y + 3z \leq 213 \\
 & x + y \geq 3.5 \\
 & y \leq 9 \\
 & z \leq 0 \\
 & x,\, y,\, z \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\text{(P3b) Max.} & 3x + 11y + 5z \\
\text{s.a} & 5x + 11y + 7z \leq 103 \\
 & 13x + 9y + 3z \leq 213 \\
 & x + y \geq 3.5 \\
 & y \leq 9 \\
 & z \geq 1 \\
 & x,\, y,\, z \geq 0
\end{array}$$

En la página siguiente se muestra el árbol con los resultados obtenidos. Ahora tenemos dos ramas con solución (no entera) y hemos de elegir cuál continuamos ramificando. En general adoptaremos el criterio siguiente:

Cuando haya varias ramas posibles para ramificar, elegiremos la que tenga mejor valor de la función objetivo (mayor para maximizar, menor para minimizar). Si hay empate elegimos una cualquiera.

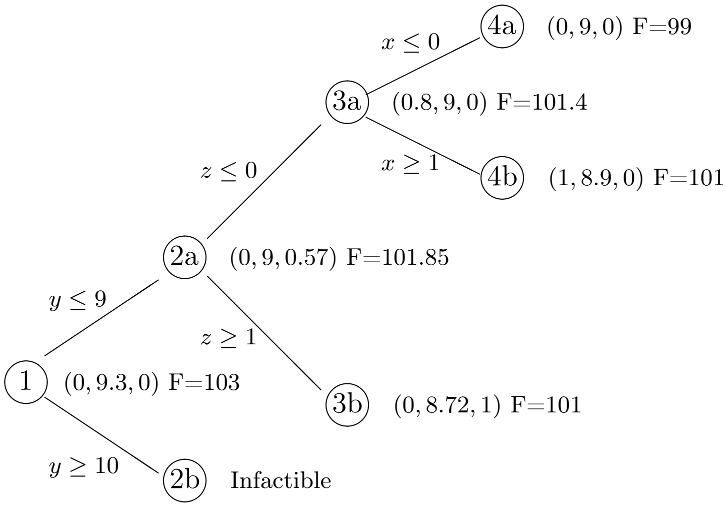
En nuestro caso la función objetivo es ligeramente mejor en la solución del problema P3a, luego pasamos a ramificarla y dejamos pendiente la del problema P3b. En este caso la única variable no entera es $x = 0.8$, por lo que las restricciones que tenemos que introducir son $x \leq 0$ y $x \geq 1$.



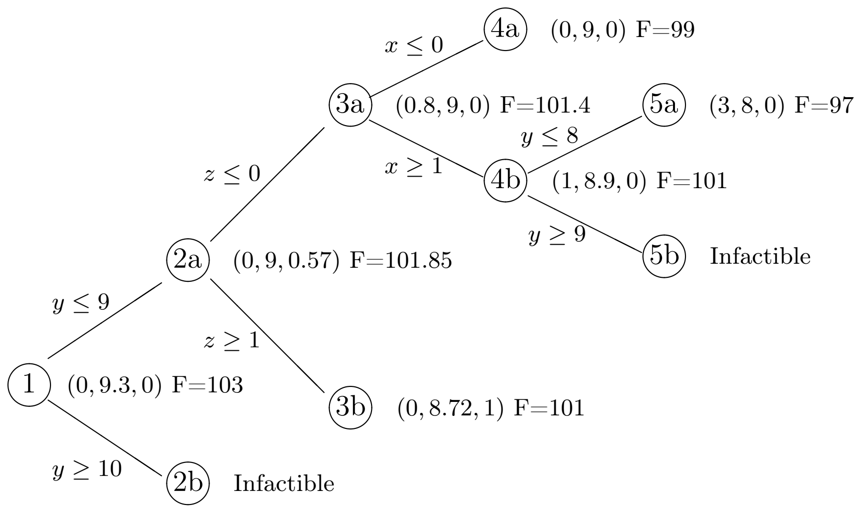
Esto supone resolver los problemas

$$
\begin{array}{rl}
\text{(P4a) Max.} & 3x + 11y + 5z \\
\text{s.a} & 5x + 11y + 7z \leq 103 \\
& 13x + 9y + 3z \leq 213 \\
& x + y \geq 3.5 \\
& y \leq 9 \\
& z \leq 0 \\
& x \leq 0 \\
& x,\, y,\, z \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\text{(P4b) Max.} & 3x + 11y + 5z \\
\text{s.a} & 5x + 11y + 7z \leq 103 \\
& 13x + 9y + 3z \leq 213 \\
& x + y \geq 3.5 \\
& y \leq 9 \\
& z \leq 0 \\
& x \geq 1 \\
& x,\, y,\, z \geq 0
\end{array}
$$

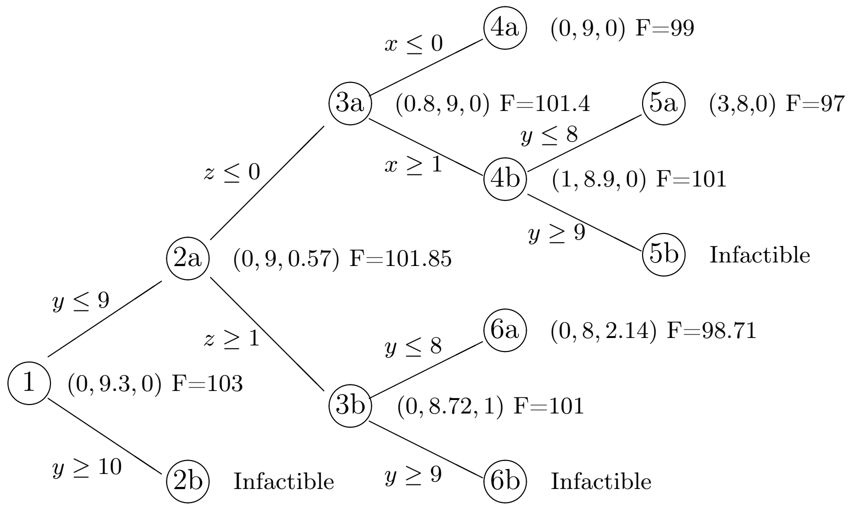
El árbol siguiente muestra el resultado. La solución de P4a es entera, luego no podemos seguir ramificándola, aunque no podemos asegurar que sea la solución óptima, porque todavía quedan ramas pendientes de ramificar que podrían conducirnos hasta una solución entera mejor. Por ello tenemos que continuar ramificando y, como hay empate en la función objetivo de P4b y P3b, elegimos cualquiera de los dos, por ejemplo P4b (si no hubiera empate elegiríamos la solución con mejor función objetivo).



Las restricciones que hay que añadir son $y \leq 8$ e $y \geq 9$ y el resultado se muestra en el árbol siguiente:



La rama 5a no hay que continuar ramificándola porque corresponde a una solución entera (que descartamos porque es peor que la obtenida en 4a), y la rama 5b también termina porque el problema ha resultado infactible. Sin embargo, todavía está pendiente de ramificar 3b. Las restricciones correspondientes son $y \leq 8$ e $y \geq 9$ y el árbol resultante es:



Ahora sólo queda pendiente la rama 6a, que en principio habría que ramificar con $z \leq 2$ y $z \geq 3$. Sin embargo, sucede que **no es necesario ramificar 6a**, y como no quedan más ramas, el proceso de ramificación ya ha terminado. La razón por la que no necesitamos seguir ramificando se basa en el siguiente hecho general:

Cada vez que se ramifica una solución, el valor de la función objetivo empeora (o, a lo sumo, se queda igual).

Por ejemplo, al pasar de 1 a 2a, la función objetivo ha pasado de 103 a 101.85 (lo que supone un empeoramiento, porque el problema es de maximizar), al pasar a su vez a 3b la función objetivo ha empeorado hasta 101, y al pasar a 6a ha empeorado hasta 98.71.

• Esto no es casual: al ramificar estamos añadiendo nuevas restricciones al problema, el conjunto de oportunidades es cada vez menor, y cuanto menor sea el conjunto de oportunidades la solución óptima será peor (o a lo sumo igual).

Por lo tanto, es inútil buscar más soluciones enteras ramificando 6a, porque aunque las halláramos, el valor de la función objetivo sería 98.71 o peor, luego ninguna solución que apareciera por ese camino podría ser mejor que la solución entera de 4a. En esto consiste la acotación:

> No es necesario ramificar ninguna solución cuya función objetivo sea peor que la de una solución entera hallada en otra rama, porque las soluciones enteras que podríamos encontrar serían peores, luego no serían óptimas.

Así pues, concluimos que la solución óptima del problema planteado es $(x, y, z) = (0, 9, 0)$ con función objetivo $F = 99$.

• En general, el proceso de ramificación y acotación consiste en ir ramificando las soluciones obtenidas hasta que no quede ninguna solución por ramificar. Es fundamental tener claro qué debe suceder para que no haya que seguir ramificando:

> Sólo hay tres situaciones en las que no hay que seguir ramificando un problema del árbol de ramificación:
>
> 1) La solución ya es entera (es decir, tiene enteras las variables que el problema pide que sean enteras, que no tienen por qué ser todas).
> 2) El problema es infactible.
> 3) La solución, aun sin ser entera, tiene una función objetivo peor que la de una solución entera hallada en otra rama (pero es fundamental que la solución con la que comparamos sea entera).

• Cuando ya no quedan soluciones que ramificar la solución óptima será la mejor solución entera que haya aparecido en el árbol (entendiendo que el problema es infactible si no aparece ninguna).

• Observamos que la solución entera resulta en este caso de redondear la solución del problema sin restricciones enteras, pero ya hemos visto que esto no tiene por qué ser así, como en el ejemplo de la página 23, que ya puedes entender completamente.

2.2 Problemas resueltos

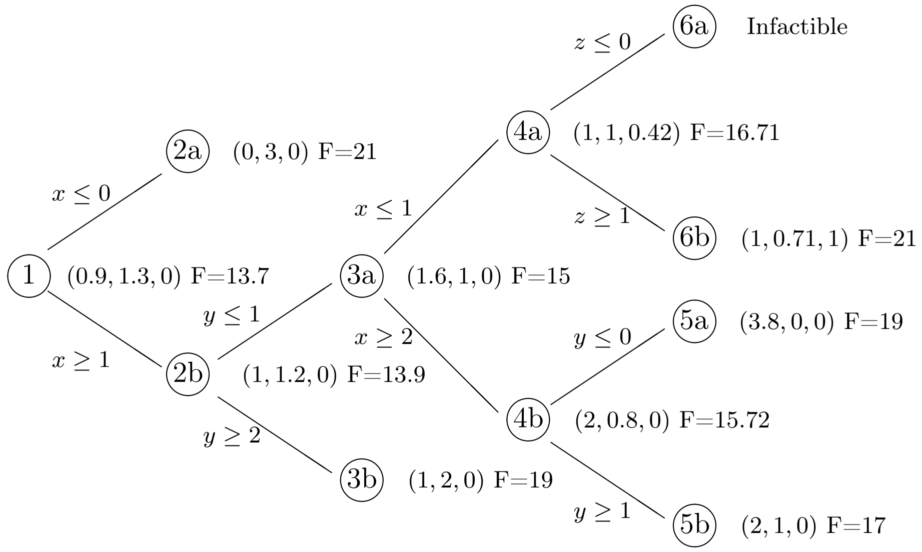
1. Considera los problemas siguientes:

$$\begin{array}{rl} \text{a) Min.} & 5x + 7y + 11z \\ \text{s.a} & 5x + 11y + 7z \geq 19 \\ & 13x + 7y + 3z \geq 21 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \text{ enteras} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{b) Max.} & 1000 - x^2 - 2y^2 - z^2 \\ \text{s.a} & 5x + 3y + 2z \leq 17 \\ & x + 3y + \ z \geq 10 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \text{ enteras} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{c) Min.} & 2x^2 + 2y^2 + z \\ \text{s.a} & 10x + 3y + 2z \leq 23 \\ & x + 2y + 3z \geq 13 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \text{ enteras} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{d) Min.} & 100 - 7x + 9y + 5z \\ \text{s.a} & 3x^2 + 2xy + 3y^2 + z^2 \leq 80 \\ & x + 4y + 5z \geq 7 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \text{ enteras} \end{array}$$

Resuélvelos por el método de ramificación y acotación usando LINGO para resolver los problemas intermedios. Escribe el árbol correspondiente y razona por qué termina cada rama. En caso de que puedas ramificar varias variables, elige la menor en orden alfabético, y en caso de que puedas ramificar varios nodos elige el de mejor valor de la función objetivo.

Solución: a) El proceso de ramificación y acotación da lugar al árbol siguiente:



El proceso de construcción ha sido el siguiente:

- Al resolver el problema sin restricciones enteras obtenemos la solución 1, que tiene dos variables no enteras (x, y). De acuerdo con el enunciado ramificamos la primera en orden alfabético (la x). Esto nos lleva a las soluciones 2a y 2b.
- La solución 2a no hay que seguir ramificándola porque es entera.
- La solución 2b es mejor que 2a (la única solución entera que conocemos), luego hay que ramificarla por su única variable no entera, que es la y. Esto nos lleva a las soluciones 3a y 3b.

> Sería un error grave razonar:
>
> *No es necesario ramificar 4a porque la solución es peor que la de 4b.*
>
> Sólo se puede acotar un nodo por nodos correspondientes a soluciones enteras, y la de 4b no lo es.
>
> No obstante, hay un argumento por el que no es necesario ramificar el nodo 4a: Como la función objetivo tiene coeficientes enteros, el valor óptimo de la función objetivo tiene que ser entero, luego el mejor valor que podemos obtener ramificando 4a es 17, que no va a mejorar a 5b, luego podemos asegurar que 5b es una solución óptima sin ramificar 4a.

- La solución 3b no hay que seguir ramificándola porque es entera (y es la mejor, de momento, luego es la candidata provisional a solución óptima).
- La solución 3a no es entera y todavía es mejor que la 3b, por lo que hay que seguir ramificando, en este caso por la variable x. Esto nos lleva a las soluciones 4a y 4b.
- Como ninguna de las soluciones 4a y 4b es entera y ambas son mejores que la candidata provisional a óptima, ramificamos la 4b, porque es la mejor de las dos. Esto nos lleva a las soluciones 5a y 5b.
- La solución 5b no hay que ramificarla porque es entera, y es mejor que las obtenidas previamente, por lo que pasa a ser la nueva candidata a óptima.
- La solución 5a no es entera, pero no hay que seguir ramificándola porque es peor que la 5b, que es entera.
- Volvemos a la solución 4a, que todavía no es entera y es mejor que la candidata provisional a óptima (5b), por lo que hay que seguir ramificando. Esto nos lleva a 6a y 6b.

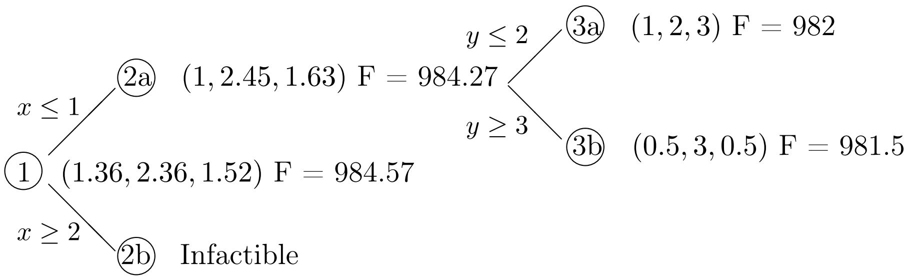
- El problema 6a es infactible, luego no podemos seguir por esa rama.
- La solución 6b no es entera, pero es peor que la 5b, que es entera, luego no hay que seguir ramificando.

Recapitulando:

- Los nodos 2a, 3b y 5b terminan porque corresponden a soluciones enteras.
- El nodo 6a termina porque corresponde a un problema infactible.
- Los nodos 5a y 6b terminan porque corresponden a soluciones peores que 5b, que es una solución entera.

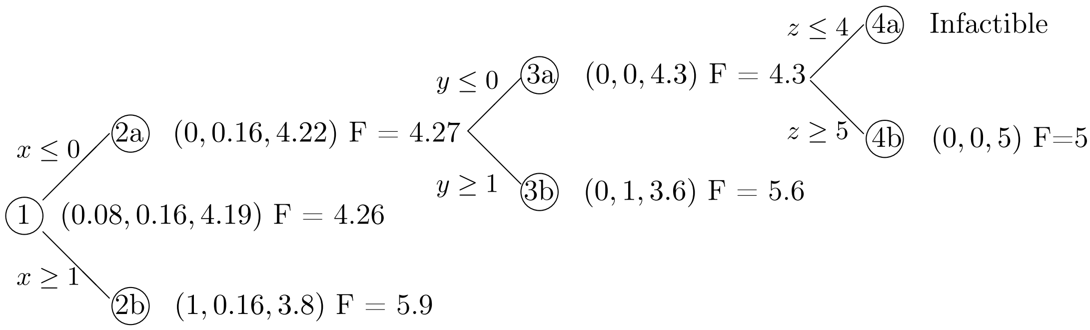
Como ya no queda ningún nodo pendiente de ramificar, podemos decir que la solución óptima del problema es $(2, 1, 0)$, con $F = 17$.

b) El árbol resultante es el siguiente:



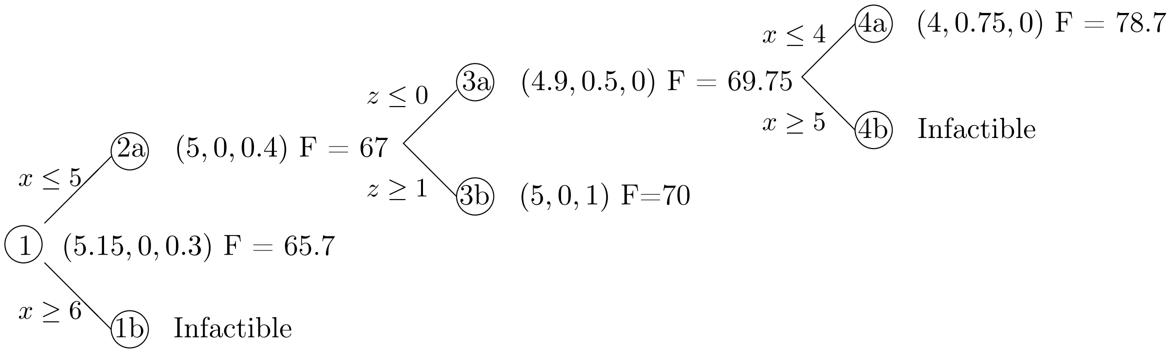
De los tres nodos finales, el 3a termina porque la solución ya es entera, el 3b termina porque la solución es peor que la de 3a, que ya es entera, y 2b termina porque corresponde a un problema infactible. Así pues, la solución óptima es $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ con $F = 982$.

c) El árbol resultante es el siguiente:



De los cuatro nodos finales, el 3a termina porque el problema es infactible, el 3b termina porque la solución es entera, y los otros dos terminan porque corresponden a soluciones peores que la solución entera que ya hemos encontrado. Por lo tanto, la solución óptima es $(x, y, z) = (0, 0, 5)$ con $F = 5$.

d) El árbol resultante es el siguiente:



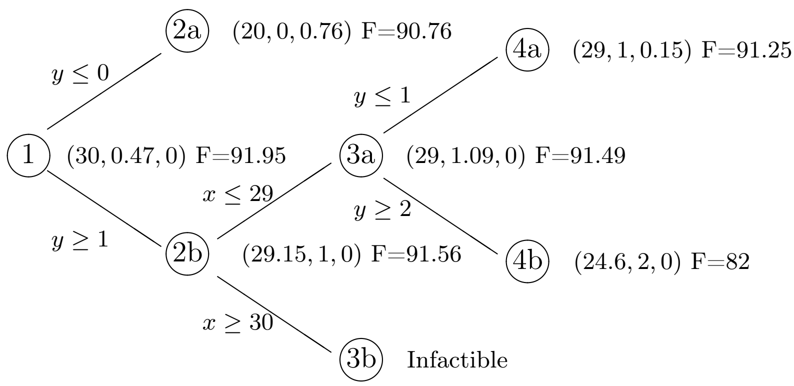
De los cuatro nodos finales, el 4a termina porque es peor que 3b, en el que la solución ya es entera, el 1b y el 4b terminan porque corresponden a problemas infactibles, y el 3b termina porque la solución es entera. Por lo tanto, la solución óptima es $(x, y, z) = (5, 0, 1)$ con $F = 70$.

2. Considera el problema siguiente:

$$
\begin{array}{rl}
\text{Max.} & 3x + 4.1y + z \\
\text{s.a} & 1.3x + 2.1y + 1.3z \le 40 \\
 & x + 5.2y + 5z \le 35 \\
 & x \le 30 \\
 & x,\ y,\ z \ge 0 \quad x,\ y \text{ enteras}
\end{array}
$$

Resuélvelo por el método de ramificación y acotación usando LINGO para resolver los problemas intermedios. Escribe el árbol correspondiente y razona por qué termina cada rama. En caso de que puedas ramificar varias variables, elige la menor en orden alfabético, y en caso de que puedas ramificar varios nodos elige el de mejor valor de la función objetivo.

Solución: El proceso de ramificación y acotación da lugar al árbol siguiente:



Observemos que, como sólo son enteras las variables x, y, una solución es entera (es decir, solución del problema entero) aunque tenga la z fraccionaria. El proceso de construcción del árbol es el siguiente:

- Al resolver el problema sin variables enteras obtenemos la solución 1, que no es entera, por lo que debemos ramificarla. Esto nos lleva a las soluciones 2a y 2b.

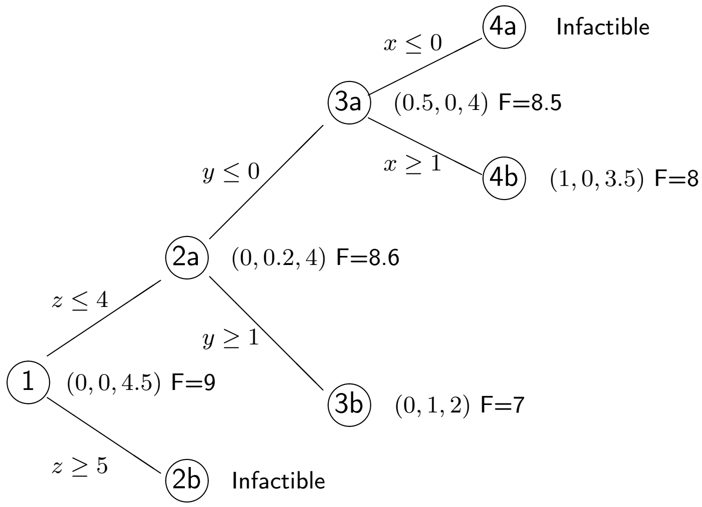
- La solución 2a no hay que ramificarla porque ya es entera.
- La solución 2b no es entera, y es mejor que la 2a, luego hay que seguir ramificándola. Eso nos lleva a los nodos 3a y 3b.
- El nodo 3b termina porque corresponde a un problema infactible.
- La solución 3a no es entera, pero es mejor que la solución entera 2a, que es la candidata provisional a solución óptima, así que hay que seguir ramificando. Esto nos lleva a las soluciones 4a y 4b.
- La 4a no hay que seguir ramificándola porque es entera, y es mejor que la 2a, luego pasa a ser la nueva candidata a óptima.
- La solución 4b no es entera, pero es peor que la 4a, que es entera, luego no hace falta seguir ramificando.

Recapitulando:

- Los nodos 2a y 4a terminan porque corresponden a soluciones enteras.
- El nodo 3b termina porque corresponde a un problema infactible.
- El nodo 4b termina porque está acotado por el 4a, que es entero.

Por lo tanto, podemos concluir que la solución óptima es $(x, y, z) = (29, 1, 0.15)$ con función objetivo $F = 91.25$.

3. Al aplicar el método de ramificación y acotación a un problema con tres variables enteras hemos obtenido el árbol siguiente:



(a) Razona si el problema es de maximizar o de minimizar.

(b) Razona si podemos asegurar que la solución 3b es la óptima o si hay que continuar ramificando. En el segundo caso indica qué nodo habría que ramificar y con qué restricciones.

Solución: a) Vemos que a medida que ramificamos la función objetivo disminuye. Como la función objetivo debe empeorar a medida que se añaden restricciones, el problema tiene que ser de maximizar.

El nodo 4b no está terminado, porque su solución es mejor que la solución entera de 3b, luego hay que seguir ramificando con las restricciones $z \leq 3$ y $z \geq 4$.

2.3 Problemas propuestos

1. Resuelve los problemas siguientes por el método de ramificación y acotación usando LINGO para resolver los problemas intermedios. Escribe el árbol correspondiente y razona por qué termina cada rama. En caso de que puedas ramificar varias variables, elige la menor en orden alfabético, y en caso de que puedas ramificar varios nodos elige el de mejor valor de la función objetivo.

a)
$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 3x + 4y + 7z \\ \text{s.a} & 5.5x + 6.6y + 2.2z \leq 50 \\ & x + y + z \geq 12 \\ & x,\, y,\, z \geq 0 \text{ enteras} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & 7x + 9y + 8z \\ \text{s.a} & 11x + 3.3y + 5z \leq 101 \\ & 7x + 3y + 11z \geq 127 \\ & y \leq 22 \\ & z \geq 6 \\ & x,\, y,\, z \geq 0 \text{ enteras} \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 12x - 5y + 7z \\ \text{s.a} & 1.1x + 0.5y + 2z \leq 50 \\ & 3.3x + 2.2y + 3.3z \geq 10 \\ & x,\, y,\, z \geq 0 \text{ enteras} \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 22x + 6y + 10z \\ \text{s.a} & 15x + 3y + 2z \leq 400 \\ & 2x + 2y - 2z \geq 1 \\ & x,\, y,\, z \geq 0 \text{ enteras} \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 10x + 6y + 22z \\ \text{s.a} & 2x + 3y + 15z \leq 400 \\ & -2x + 2y + 2z \geq 1 \\ & x,\, y,\, z \geq 0 \text{ enteras} \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 5x + 3y + 11z \\ \text{s.a} & 2x + 3y + 15z \geq 400 \\ & y \geq 23 \\ & x + y - z \geq 0 \\ & x,\, y,\, z \geq 0 \text{ enteras} \end{array}$$

g)
$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 3x + 11y + 5z \\ \text{s.a} & 5x + 11y + 7z \geq 103 \\ & 13x + 7y + 3z \geq 213 \\ & y + z \geq 2.7 \\ & x,\, y,\, z \geq 0 \text{ enteras} \end{array}$$

2. Resuelve el problema siguiente por el método de ramificación y acotación usando LINGO para resolver los problemas intermedios. Escribe el árbol correspondiente y razona por qué termina cada rama. En caso de que puedas ramificar varias variables, elige la menor en orden alfabético, y en caso de que puedas ramificar varios nodos elige el de mejor valor de la función objetivo. El valor óptimo de la función objetivo del primer problema debe darte 330.86.

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 5x + 7y + 3z \\ \text{s.a} & 3x + 11y + 3z \geq 501 \\ & 13x + 9y + 3z \geq 451 \\ & 3x + 5y + 7z \leq 250 \\ & x,\, y,\, z \geq 0 \text{ enteras} \end{array}$$

3. Resuelve el problema siguiente por el método de ramificación y acotación usando LINGO para resolver los problemas intermedios. Escribe el árbol correspondiente y razona por qué termina cada rama. En caso de que puedas ramificar varias variables, elige la menor en orden alfabético, y en caso de que puedas ramificar varios nodos elige el de mejor valor de la función objetivo. El valor óptimo de la función objetivo del primer problema debe darte 330.86.

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 7x + \ \ 5y + 3z \\ \text{s.a} & 11x + \ \ 3y + 3z \geq 501 \\ & 9x + 13y + 3z \geq 451 \\ & 5x + \ \ 3y + 7z \leq 250 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \text{ enteras} \end{array}$$

4. Resuelve el problema siguiente por el método de ramificación y acotación usando LINGO para resolver los problemas intermedios. Escribe el árbol correspondiente y razona por qué termina cada rama. En caso de que puedas ramificar varias variables, elige la menor en orden alfabético, y en caso de que puedas ramificar varios nodos elige el de mejor valor de la función objetivo. El valor óptimo de la función objetivo del primer problema debe darte 535.34.

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 5x + 7y + 17z \\ \text{s.a} & 3x + 9y + 3z \geq 200 \\ & y \leq 13 \\ & 3x + 5y + 7z \leq 250 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \text{ enteras} \end{array}$$

5. Resuelve el problema siguiente por el método de ramificación y acotación usando LINGO para resolver los problemas intermedios. Escribe el árbol correspondiente y razona por qué termina cada rama. En caso de que puedas ramificar varias variables, elige la menor en orden alfabético, y en caso de que puedas ramificar varios nodos elige el de mejor valor de la función objetivo. El valor óptimo de la función objetivo del primer problema debe darte 132.05.

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 7x + 10y + 5z \\ \text{s.a} & x \leq 17 \\ & 5x + 11y + 7z \leq 103 \\ & 13x + 19y + 3z \leq 230 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \text{ enteras} \end{array}$$

6. Resuelve el problema siguiente por el método de ramificación y acotación usando LINGO para resolver los problemas intermedios. Escribe el árbol correspondiente y razona por qué termina cada rama. En caso de que puedas ramificar varias variables, elige la menor en orden alfabético, y en caso de que puedas ramificar varios nodos elige el de mejor valor de la función objetivo. El valor óptimo de la función objetivo del primer problema debe darte 277.8.

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 3x + 4y + 7z \\ \text{s.a} & 2x + 11y + 13z \leq 499 \\ & 13x + 7y + 5z \leq 250 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \text{ enteras} \end{array}$$

7. Resuelve el problema siguiente por el método de ramificación y acotación usando LINGO para resolver los problemas intermedios. Escribe el árbol correspondiente y razona por qué termina cada rama. En caso de que puedas ramificar varias variables, elige la menor en orden alfabético, y en caso de que puedas ramificar varios nodos elige el de mejor valor de la función objetivo. El valor óptimo de la función objetivo del primer problema debe darte 63.96.

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 3x + 11y + 5z \\ \text{s.a} & 5x + 11y + 7z \geq 103 \\ & 13x + 7y + 3z \geq 213 \\ & y + z \geq 2.7 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \text{ enteras} \end{array}$$

8. Resuelve los problemas

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x^4 + y^2 + 3z^2 \\ \text{s.a} & x + y + z \geq 5 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \text{ enteras} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & 2000 - 3x^2 - 2y^2 + xy - z^2 \\ \text{s.a} & 5x + 2y + z \geq 30 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \text{ enteras} \end{array}$$

por el método de ramificación y acotación usando el ordenador para resolver los problemas intermedios. Aplica el teorema local global para asegurarte de que los óptimos que te proporciona el ordenador son globales. En caso de tener varias variables no enteras ramifica la menor en orden alfabético. Escribe el árbol que obtengas con las soluciones correspondientes y razona cuándo puedes dejar de ramificar cada nodo.

Resuelve los problemas directamente con el ordenador (como problemas de programación entera) y comprueba que llegas al mismo resultado.

9. Tenemos un problema de programación lineal entera de variables $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ en el que estamos maximizando la función objetivo y en el que se exige que las variables $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ sean enteras. Resolvemos el problema sin variables enteras y obtenemos:

   - $(4.222, 0, 1.111)$ con $f = 18.222$

   (a) Explica cuál es el siguiente paso si queremos resolver el problema entero mediante el método de ramificación y acotación.

   (b) Indica (razonando la respuesta) cuál es la solución óptima del problema entero sabiendo que es una de las siguientes:

   - $(0.1, 0.1, 2)$ con $f = 9.5$
   - $(4.25, 0, 1)$ con $f = 17.750$
   - $(2, 0, 4)$ con $f = 26$
   - $(0, 1, 4.2)$ con $f = 13$
   - $(3.2, 0, 5)$ con $f = 34.6$

10. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 2x + y + 7z \\ \text{s.a} & x + 4z \leq 5 \\ & 5y - 6z \leq 10 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \quad x,\ z \text{ enteras} \end{array}$$

La solución óptima del problema sin variables enteras es $(0, 3.5, 1.25)$. Escribe los dos subproblemas lineales que debemos resolver según el método de ramificación y acotación.

11. La solución óptima de un problema con objetivo de maximizar y variables $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ es $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (0.25, 4.25)$ con $f = 13.25$. Ahora resolvemos el problema que resulta de exigir además en el problema anterior que la variable $\mathbf{y}$ sea entera. Indica (razonando la respuesta) cuál es la solución óptima sabiendo que es una de las siguientes:

$$\begin{array}{cccc} (1.5, 5) & \text{con } f = 18 & (0.5, 4) & \text{con } f = 13 \\ (1, 5) & \text{con } f = 17 & (0, 3.5) & \text{con } f = 10.5 \end{array}$$

3 Introducción a la programación lineal

Presentamos aquí algunos conceptos y resultados sobre problemas de programación lineal que usaremos en el tema siguiente para explicar el método símplex.

3.1 Conceptos básicos sobre problemas lineales

Forma estándar de un problema lineal El primer paso que tendremos que dar para resolver un problema de programación lineal será ponerlo en forma estándar:

> Un problema está en forma estándar si todas sus restricciones son de igualdad y todas las variables son no negativas.

• Nota que en realidad en la definición precedente deberíamos haber dicho que "todas las restricciones salvo las de signo son de igualdad", pero en programación lineal consideraremos siempre aparte las condiciones de signo, de modo que siempre que hablemos de restricciones de un problema nos referiremos a las restricciones sin contar las de signo. Por ejemplo, el problema del ejemplo siguiente tiene tres restricciones (aunque son seis si contamos las de signo).

Ejemplo 1 Pon en forma estándar el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 3x+2y+z \\ \text{s.a} & 2x+y+3z \leq 8 \\ & x+y+z=10 \\ & 3x+y+5z \geq 2 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

Solución: Para ponerlo en forma estándar todas las restricciones deben ser de igualdad. Para convertir restricciones de desigualdad en restricciones de igualdad basta introducir las variables de holgura:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 3x+2y+z \\ \text{s.a} & 2x+y+3z+s=8 \\ & x+y+z=10 \\ & 3x+y+5z-t=2 \\ & x,\ y,\ z,\ s,\ t \geq 0 \end{array}$$

Como las variables son todas no negativas, el problema ya está en forma estándar.

> Observa que las variables de holgura se añaden sumando en las restricciones de $\leq$ y se añaden restando en las restricciones de $\geq$, y en ambos casos son variables no negativas (no olvides incluirlas en las condiciones de no negatividad).
> La idea es que si el miembro izquierdo de la restricción es ≤ 8, hay que sumarle una holgura (positiva) para que llegue a 8, mientras que si es ≥ 2 hay que restarle una holgura (siempre positiva) para que llegue a 2.

• Si las variables de un problema no son no negativas, para ponerlo en forma estándar hay que hacer cambios de variables oportunos, pero no consideraremos ese caso.

• Todo problema lineal en forma estándar puede expresarse en forma matricial como

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & \bar{c}\,\bar{x} \\ \text{s.a} & A\,\bar{x}=\bar{b} \\ & \bar{x} \geq 0 \end{array}$$

> Una variable no positiva $x \leq 0$ se transforma en otra no negativa x_0 sustituyendo por $x=-x_0$ en todo el problema, y una variable libre x se transforma en dos variables no negativas x_1, x_2 mediante la sustitución $x=x_1-x_2$ (porque todo número puede expresarse como resta de dos números no negativos).

La matriz A se llama *matriz técnica* del problema, el vector $\bar{c}$ es el *vector de coeficientes de la función objetivo* y el vector $\bar{b}$ es el *vector de términos independientes.* Al hablar de un problema lineal, siempre usaremos las letras A, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ con este significado.

Ejemplo 2 Para el problema del ejemplo anterior, la matriz técnica es

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & s & t \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array},$$

el vector de coeficientes de la función objetivo es $\bar{c} = (3, 2, 1, 0, 0)$ y el vector de términos independientes es $\bar{b} = (8, 10, 2)$. A menudo es conveniente incluir en la matriz técnica el vector de términos independientes, y entonces tenemos la *matriz ampliada:*

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

• Observemos que el conjunto de oportunidades de un problema lineal siempre es convexo, porque sabemos que los conjuntos definidos por restricciones lineales lo son, y la función objetivo siempre es cóncava y convexa. Por lo tanto, los problemas lineales siempre cumplen el teorema local-global y, en consecuencia:

Los óptimos de un problema lineal (en caso de existir) siempre son globales. No puede haber un óptimo local que no sea global.

3.2 Soluciones factibles básicas

Introducimos ahora un concepto fundamental para estudiar la resolución de problemas lineales. Se trata del concepto de "solución factible básica". Vamos a explicar en qué consiste a través de un ejemplo:

Ejemplo 3a Comprueba si la solución $(x, y) = (0, 0)$ es una solución factible básica del problema

$$\begin{array}{rr} \text{Max.} & 4x + 5y \\ \text{s.a} & 2x + y \leq 8 \\ & y \leq 5 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

Solución: El concepto de solución básica sólo tiene sentido para problemas en forma estándar, luego siempre que tengamos que considerar soluciones básicas de un problema lo primero que habrá que hacer es ponerlo en forma estándar. En nuestro caso el problema se convierte en

$$\begin{array}{rr} \text{Max.} & 4x + 5y \\ \text{s.a} & 2x + y + s = 8 \\ & y + t = 5 \\ & x,\, y,\, s,\, t \geq 0 \end{array}$$

Vemos que hemos tenido que introducir dos variables de holgura, s y t. Como la solución dada $(x, y) = (0, 0)$ no incluye las variables de holgura, necesitamos calcularlas sustituyendo en las restricciones:

$$2 \cdot 0 + 0 + s = 8, \qquad 0 + t = 5.$$

Vemos, pues, que la solución con variables de holgura es $(x, y, s, t) = (0, 0, 8, 5)$. Ahora estamos en condiciones de estudiar si es o no una solución básica.

Para que una solución sea básica debe cumplir tres propiedades, todas ellas sencillas de comprobar:

1) *La solución tiene que cumplir las restricciones de igualdad del problema.*

En nuestro caso esto es cierto:

$$0 + 0 + 8 = 8, \qquad 0 + 5 = 5.$$

2) *Tenemos que poder dividir las variables de la solución en dos grupos: básicas y no básicas, con la condición de que haya tantas variables básicas como restricciones y que todas las variables no básicas valgan* 0.

En nuestro caso tenemos cuatro variables en total, y el número de variables básicas debe ser 2 (porque el problema tiene dos restricciones), luego tiene que haber $4-2 = 2$ variables no básicas. Por lo tanto, la segunda condición es que la solución tenga al menos dos variables iguales a 0. Vemos que esto se cumple, y ahora podemos decir que la solución $(x, y, s, t) = (0, 0, 8, 5)$ tiene como variables básicas s, t y como variables no básicas x, y.

3) *La matriz formada por las columnas de la matriz técnica correspondientes a las variables básicas se llama matriz básica, la representaremos por B, y tiene que tener determinante diferente de* 0.

En nuestro caso la matriz técnica es

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x & y & s & t \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

y la matriz básica está formada por las columnas de las variables básicas s, t, luego es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $|B| = 1 \neq 0$, se cumple la tercera condición, luego podemos afirmar que la solución es básica.

4) *Una solución básica es factible básica si cumple las condiciones de no negatividad.*

En nuestro caso todas las variables son no negativas, luego la solución es factible básica.

En realidad que una solución sea factible básica significa simplemente que sea factible y básica, pero si ya hemos comprobado que es básica, en particular hemos visto que cumple las restricciones de igualdad, luego lo único que le falta para ser factible es cumplir las condiciones de no negatividad.

• La definición exige que las variables no básicas de una solución básica sean 0, pero las variables básicas pueden ser 0 o no serlo. Si una solución básica tiene variables básicas iguales a 0 se dice que es *degenerada*. La solución del ejemplo anterior no es degenerada, porque sus variables básicas valen $s = 8 \neq 0$ y $t = 5 \neq 0$.

Ejemplo 3b Estudia si el problema del ejemplo 3a tiene una solución factible básica con variables básicas y, t.

SOLUCIÓN: • Empezamos estudiando la propiedad 3): La matriz técnica del problema es

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & s & t \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

luego la matriz básica para variables básicas y, t tiene que ser

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Su determinante es $|B| = 1 \neq 0$. Si el determinante hubiera dado 0 responderíamos que no existe ninguna solución básica con variables básicas y, t.

• La propiedad 2 nos dice que la solución debe cumplir $x = s = 0$ (porque las variables no básicas deben ser 0).

• Teniendo en cuenta el punto anterior, la propiedad 1 equivale a que se cumpla

$$\begin{array}{r} 2x + y + s = 8 \\ y + t = 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 2 \cdot 0 + y + 0 = 8 \\ y + t = 5 \end{array}$$

Luego tiene que ser $y = 8$ y $t = -3$. Por lo tanto, existe una solución básica con variables básicas y, t, que es $(x, y, s, t) = (0, 8, 0, -3)$, pero no es factible, porque la variable t es negativa. Así pues, concluimos que el problema no tiene solución factible básica con variables básicas y, t.

• Observa que, en general, si en un sistema de ecuaciones $A\bar{x} = \bar{b}$ damos el valor 0 a las variables no básicas, nos queda el sistema de ecuaciones $B\bar{x}_B = \bar{b}$, donde $\bar{x}_B$ representa el vector de las variables básicas, y despejando queda $\bar{x}_B = B^{-1}\bar{b}$. En resumen:

> Si un problema lineal tiene una solución básica para unas variables básicas dadas, sólo puede tener una, determinada por que las variables no básicas valen 0 y las básicas vienen dadas por la fórmula $\bar{x}_B = B^{-1}\bar{b}$.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA DEL EJEMPLO 3B: Partimos de la matriz técnica del problema:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & s & t \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Si las variables básicas tienen que ser y, t, la matriz básica tiene que ser

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos su matriz inversa:

$$|B| = 1 \neq 0, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{B}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(El último paso es dividir entre el determinante, pero como es 1 no produce ningún cambio.)

Calculamos las variables básicas con la fórmula $\bar{x}_B = B^{-1}\bar{b}$:

$$\begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Como las variables no básicas tienen que ser 0, en total tenemos que $(x, y, s, t) = (0, 8, 0, -3)$. Se trata de una solución básica, pero no es factible porque la variable t es negativa.

Siempre que calculamos una solución de este modo podemos asegurar que es una solución básica, no es necesario que compruebes que cumple las tres propiedades de la definición. Si las compruebas y falla alguna, no es que la solución no sea básica, sino que has debido de cometer algún error de cálculo.

Ejemplo 3c Calcula todas las soluciones factibles básicas del problema del ejemplo 3.

El problema tiene cuatro variables, x, y, s, t, de las cuales dos tienen que ser básicas y dos no básicas. Eso nos deja seis posibilidades para las variables básicas:

$$(x, y), \quad (x, s), \quad (x, t), \quad (y, s), \quad (y, t), \quad (s, t).$$

Lo que tenemos que hacer es repetir seis veces lo que hemos hecho en el ejemplo 3b, con cada par de posibles variables básicas. En realidad, por el ejemplo 3a ya conocemos la solución básica de variables básicas (s, t), que es $(x, y, s, t) = (0, 0, 8, 5)$, y en el ejemplo 3b ya hemos calculado la de variables básicas (y, t), que es $(x, y, s, t) = (0, 8, 0, -3)$. Por lo tanto, nos quedan cuatro casos por estudiar:

Caso (x, y): La matriz básica tiene que ser $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, su determinante es $|B| = 2 \neq 0$, resolvemos:

$$\begin{aligned} 2x + y + s &= 8 \\ y + t &= 5 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2 \cdot x + y + 0 &= 8 \\ y + 0 &= 5 \end{aligned}$$

luego $(x, y, s, t) = (1.5, 5, 0, 0)$.

Caso (x, s): La matriz básica tiene que ser $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, su determinante es $|B| = 0$, luego no existe solución básica con estas variables básicas.

En los dos casos siguientes vamos a emplear la otra técnica que hemos visto, para ilustrar ambas. En cualquiera de los casos se puede emplear cualquiera de las dos.

Caso (x, t): La matriz básica tiene que ser $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculamos la matriz inversa:

$$|B| = 2 \neq 0, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{B}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

luego la solución básica es $(x, y, s, t) = (4, 0, 0, 5)$.

Caso (y, s): La matriz básica tiene que ser $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculamos la matriz inversa:

$$|B| = -1 \neq 0, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{B}^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} y \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

luego la solución básica es $(x, y, s, t) = (0, 5, 3, 0)$.

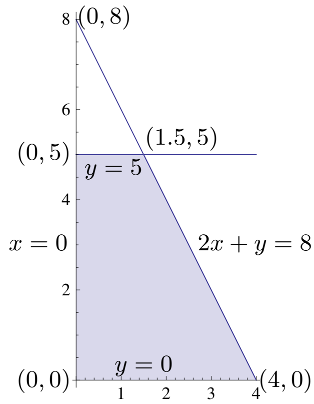
En total hemos encontrado las soluciones básicas:

$$(x, y, s, t) = (0, 0, 8, 5), \quad (0, 8, 0, -3), \quad (1.5, 5, 0, 0), \quad (4, 0, 0, 5), \quad (0, 5, 3, 0),$$

de entre las cuales son soluciones factibles básicas las que no tienen variables no negativas, cuatro en total:

$$(x, y, s, t) = (0, 0, 8, 5), \quad (1.5, 5, 0, 0), \quad (4, 0, 0, 5), \quad (0, 5, 3, 0).$$

Interpretación geométrica de las soluciones factibles básicas Para comprender el significado geométrico del concepto de solución factible básica dibujamos el conjunto de oportunidades del problema del ejemplo anterior.



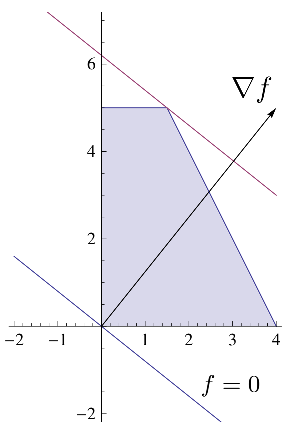
Las soluciones factibles básicas que hemos obtenido (sin las variables de holgura) son:

$$(x, y) = (0, 0), \quad (1.5, 5), \quad (4, 0), \quad (0, 5)$$

y vemos que son precisamente los vértices del conjunto de oportunidades, es decir, los puntos (factibles) en los que se cortan las aristas. La solución no factible que hemos obtenido $(x, y) = (0, 8)$ es también un cruce de aristas, pero que queda fuera del conjunto de oportunidades. Esto es cierto en general, incluso cuando hay más variables y el conjunto de oportunidades tiene tres o más dimensiones:

> Las soluciones factibles básicas de un problema de programación lineal son los vértices de su conjunto de oportunidades.

Soluciones de vértice y de arista Si resolvemos el problema gráficamente vemos que la solución óptima es $(x, y) = (1.5, 5)$, es decir, una de las soluciones factibles básicas del problema, uno de los vértices del conjunto de oportunidades. Esto es cierto en general:

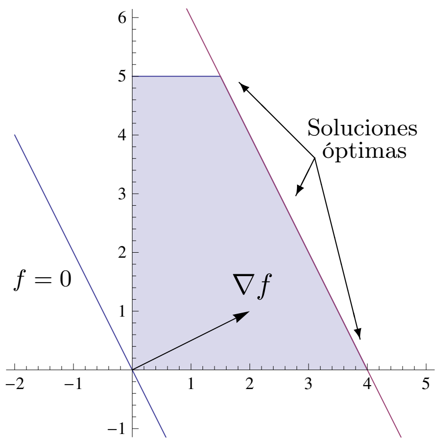


> Si un problema de programación lineal tiene soluciones óptimas, alguna de ellas es una solución factible básica (aunque pueda haber otras que no lo sean).

• De este modo, si un problema de programación lineal tiene una única solución óptima, ésta tiene que ser una solución factible básica, es decir, un vértice del conjunto de oportunidades, y entonces se dice que es una *solución de vértice.*

Un ejemplo de problema que tiene soluciones óptimas que no son factibles básicas es el que resulta de cambiar la función objetivo del problema que estábamos considerando:

$$\begin{aligned} \text{Max.} \quad & 2x + y \\ \text{s.a} \quad & 2x + y \leq 8 \\ & \qquad y \leq 5 \\ & x,\, y \geq 0 \end{aligned}$$



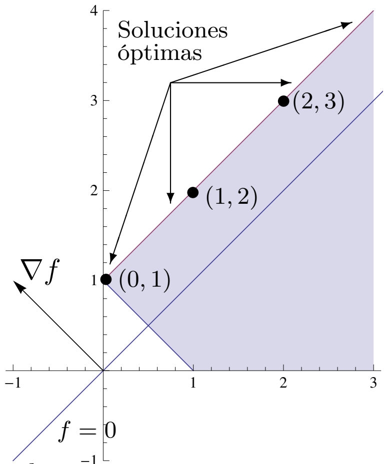
Al resolverlo gráficamente vemos que ahora toda la arista comprendida entre los vértices $(1.5, 5)$ y $(4, 0)$ son soluciones óptimas. Todas son igual de buenas:

$$F(1.5, 5) = 8, \quad F(2, 4) = 8, \quad F(4, 0) = 8.$$

En este caso decimos que el problema tiene una *solución de arista finita,* pero observemos que, aun así, aunque algunas de las soluciones óptimas (como $(2, 4)$) no sean soluciones factibles básicas, no deja de ser cierto que otras sí que lo son (los dos extremos de la arista). Siempre hay soluciones óptimas que son factibles básicas.

• Podemos encontrarnos un caso ligeramente distinto, como el del problema siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Max.} \quad & -x + y \\ \text{s.a} \quad & -x + y \leq 1 \\ & \quad x + y \geq 1 \\ & x,\, y \geq 0 \end{aligned}$$



Ahora también tenemos una solución de arista, pero es una *solución de arista infinita,* pues la arista sólo tiene un extremo. Sigue habiendo una solución óptima que es factible básica (no puede ser de otro modo), en este caso $(0, 1)$, y es la única (las demás soluciones óptimas no son básicas).

En general un problema de programación lineal tiene solución de vértice si tiene una única solución óptima, tiene solución de arista finita si tiene infinitas soluciones, pero éstas forman un conjunto acotado, y tiene solución de arista infinita si tiene infinitas soluciones óptimas, pero éstas forman un conjunto no acotado. En cualquier caso, las soluciones óptimas de un problema de programación lineal son siempre de frontera.

• No debes confundir un problema lineal con solución óptima de arista infinita con un problema no acotado. El problema anterior tiene una arista infinita de soluciones óptimas. Eso quiere decir que todas son igual de buenas. Por ejemplo:

$$F(0, 1) = 1, \quad F(1, 2) = 1, \quad F(2, 3) = 1, \quad F(3, 4) = 1 \quad \ldots$$

Vemos que a medida que vamos subiendo por la arista de óptimos la función objetivo no mejora ni empeora. Por eso todas las soluciones son óptimas. Si a medida que ascendiéramos la función objetivo fuera mejorando el problema sería no acotado. Pero sería un caso distinto.

• Las soluciones factibles básicas nos dan también un criterio para saber si un problema es infactible:

> Si un problema lineal tiene soluciones factibles, entonces tiene soluciones factibles básicas, luego si no existen soluciones factibles básicas el problema es infactible.

3.3 Resolución de problemas lineales mediante el cálculo de las soluciones factibles básicas

Los resultados que hemos visto en este tema son suficientes para diseñar un procedimiento que, en teoría, permite resolver casi cualquier problema de programación lineal, aunque en la práctica, para problemas no muy grandes, un ordenador podría necesitar días e incluso años en encontrar la solución por este método. No obstante, conviene conocerlo para entender el interés del método símplex que veremos en el tema siguiente.

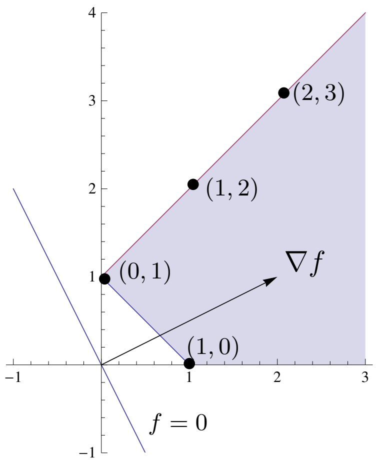
Si hablamos, por ejemplo, de un problema con 7 variables y 4 restricciones, hay 35 posibles conjuntos de variables básicas, lo que obliga a calcular 35 matrices inversas 4×4. Un ordenador puede resolver fácilmente un problema lineal con 30 variables y 15 restricciones, pero si tuviera que emplear este método y tardara 1 segundo en determinar si existe una solución factible básica en cada caso posible, necesitaría casi 5 años en calcular todas las posibilidades. Si pudiera resolver 1 000 casos por segundo, tardaría casi dos días en acabar.

El método consiste en calcular todas las soluciones factibles básicas del problema tal y como hemos explicado en el ejemplo 3c. Si no encontramos ninguna, por la última observación de la sección anterior podemos concluir que el problema es infactible. Si encontramos varias, sabemos que si el problema tiene solución óptima, tiene que ser una de ellas, y obviamente no podrá ser una cualquiera, sino la mejor (o las mejores, si hay empates) que hayamos encontrado. Ahora bien:

Aunque conozcamos todas las soluciones factibles básicas de un problema lineal, no podemos decir que la mejor de ellas es la solución óptima, porque el problema podría ser no acotado.

Ejemplo 4 Consideremos el problema:

$$
\begin{array}{rl}
\text{Max.} & 2x + y \\
\text{s.a} & -x + y \leq 1 \\
& x + y \geq 1 \\
& x,\ y \geq 0
\end{array}
$$



En la figura vemos que tiene únicamente dos soluciones factibles básicas, que son $(1,0)$ y $(0,1)$, en las que la función objetivo toma los valores $f(1,0) = 2$ y $f(0,1) = 1$, luego la mejor solución factible básica es $(1,0)$. Sin embargo, no es la solución óptima, porque el problema es no acotado, ya que hay soluciones factibles arbitrariamente buenas:

$$f(0,1) = 1, \quad f(1,2) = 4, \quad f(2,3) = 7, \quad \ldots$$

No obstante, si podemos asegurar que el problema tiene solución óptima (por ejemplo, mediante el teorema de Weierstrass), entonces sí que podemos afirmar que la mejor solución factible básica es la solución óptima.

En resumen, un método válido en teoría para resolver cualquier problema lineal del que podamos asegurar que no es no acotado es calcular todas sus soluciones factibles básicas y seleccionar la mejor (o las mejores si hay empate), y si no hay ninguna concluimos que el problema es infactible.

En el tema siguiente veremos que el método símplex nos permite pasar de una solución factible básica que no sea óptima a otra mejor, de modo que, en lugar de calcularlas todas, basta encontrar una e ir mejorándola sucesivamente hasta que lleguemos a la óptima tras haber recorrido unas pocas, que en general serán muchas menos que la totalidad de ellas.

Para terminar señalamos que toda la discusión precedente vale únicamente para problemas lineales. Así, el conjunto de oportunidades del problema del ejemplo 3d de la página 27 tiene cuatro vértices, pero ninguno de ellos es la solución óptima (como se muestra en la página siguiente), luego el procedimiento de calcular la función objetivo en los vértices y quedarse con el mejor no es válido en problemas como ése.

3.4 Problemas resueltos

1. Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x+5y \\ \text{s.a} & 2y \geq 3 \\ & 3x+5y \leq 17 \\ & 4x+7y = 14 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

   (a) Estudia si la solución $(x, y, s, t) = (0, 2, 1, 7)$ es factible básica.

   (b) Estudia si existe una solución factible básica con variables básicas (x, y, s).

En primer lugar hay que escribir el problema en forma estándar:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x+5y \\ \text{s.a} & 2y-s = 3 \\ & 3x+5y+t = 17 \\ & 4x+7y = 14 \\ & x,\, y,\, s,\, t \geq 0 \end{array}$$

La matriz ampliada es:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 0 & 1 & 17 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 14 \end{array}\right)$$

a) La solución cumple las restricciones de igualdad:

$$2 \cdot 2 - 1 = 3, \quad 3 \cdot 0 + 5 \cdot 2 + 7 = 17, \quad 4 \cdot 0 + 7 \cdot 2 = 14$$

Tiene que haber tres variables básicas (tantas como restricciones) y una no básica y, en efecto, la solución dada tiene un cero, luego podemos tomar como variables básicas y, s, t y como variable no básica x.

El determinante de la matriz básica es

$$\left|\begin{array}{rrr} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 0 \end{array}\right| = -7 \neq 0.$$

Estas tres condiciones garantizan que la solución es básica y, como además sus variables son no negativas, es una solución factible básica.

b) La solución buscada tendrá $t = 0$ (porque es la variable no básica) y las variables básicas vendrán dadas por $\bar{x}_B = B^{-1}\bar{b}$. La matriz básica es

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Se cumple que $|B| = -1$. La matriz adjunta es

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -7 & 4 & 8 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

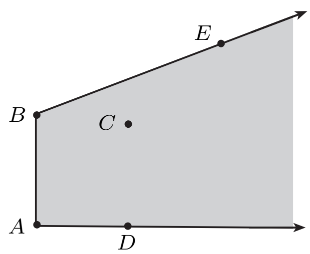
$$\tilde{B}^t = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 5 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & 8 & -6 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -5 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Las variables básicas son:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -5 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ -26 \\ -55 \end{pmatrix}$$

La solución básica es $(x, y, s, t) = (49, -26, -55, 0)$. Como no es factible, no hay solución factible básica con variables básicas (x, y, s).

2. La figura siguiente representa el conjunto de oportunidades de un problema de programación lineal (hay que entender que se extiende indefinidamente hacia la derecha):



   (a) ¿Tiene el problema soluciones factibles básicas?, ¿cuántas?
   (b) Razona si el problema podría ser infactible. ¿Y no acotado?
   (c) De los cinco puntos señalados, ¿Podría alguno ser una solución óptima? ¿Por qué?
   (d) Sea f la función objetivo del problema y supongamos que

$$f(A) = f(B) = 6, \qquad f(C) = f(D) = 7, \qquad f(E) = 8,$$

   (pero no sabemos si el objetivo es maximizar o minimizar). ¿Puede tener el problema solución óptima de vértice? ¿Y de arista finita? ¿Y de arista infinita?

Solución:

(a) Las soluciones factibles básicas son los vértices del conjunto de oportunidades. Este problema tiene dos: los puntos A y B.

(b) El problema no puede ser infactible porque todos los puntos sombreados son soluciones factibles. Si la función objetivo mejora hacia la derecha, el problema será no acotado, pero también podría mejorar hacia la izquierda, y entonces el problema tendrá solución óptima. No podemos, pues, asegurar que sea no acotado.

(c) En un problema de programación lineal, las soluciones óptimas son siempre de frontera, luego el punto C no pudese ser solución óptima, los demás sí.

(d) Como la función objetivo vale lo mismo en los dos vértices, no puede haber solución de vértice, porque si uno es óptimo el otro también lo es, luego la solución es de arista finita.

El problema sí que puede tener solución óptima de arista finita. Esto sucede si toda la arista AB está formada por soluciones óptimas. Por ejemplo, si la función objetivo es minimizar x.

El conjunto de oportunidades tiene dos aristas infinitas, pero ninguna de ellas puede ser una arista de soluciones óptimas, porque en ella la función objetivo toma valores distintos en puntos distintos. Para que fuera una arista de soluciones óptimas, la función objetivo tendría que tomar el mismo valor (óptimo) en todos los puntos de la arista. Así pues, no puede haber solución óptima de arista infinita.

3.5 Problemas propuestos

1. Dado el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 2x + 3y + z \\ \text{s.a} & x + 2y + z \leq 30 \\ & x + y \leq 20 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

Determina cuáles de las soluciones siguientes son soluciones factibles básicas:

$$(10, 10, 0, 0, 0), \quad (0, 0, 0, 30, 20), \quad (20, 0, 5, 5, 0),$$

$$(30, 0, 0, 0, -10) \quad (0, 0, 30, 0, 20), \quad (20, 0, 5, 0, 0).$$

2. Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 4x + 2y + 4z \\ \text{s.a} & x \leq 5 \\ & 2x + y + z = 4 \\ & y + 2z = 3 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

(a) Determina si existe una solución factible básica con variables básicas x, y, z.

(b) Comprueba si $(1/2, 3, 0, 9/2)$, $(1, 1, 1, 4)$, $(0, 5, -1, 5)$ son soluciones factibles básicas. En caso de no serlo, indica si no son factibles o no son básicas (o ambas cosas).

(c) Calcula todas las soluciones factibles básicas y el valor de la función objetivo en cada una de ellas.

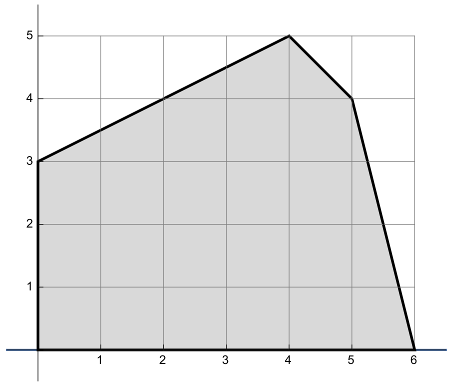
(d) Justifica que el problema tiene solución óptima y calcúlala.

3. Calcula todas las soluciones factibles básicas de los problemas

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 2x-3y \\ \text{s.a} & x+y\leq 1 \\ & x-y\leq 0 \\ & x,\, y\geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & x+2y \\ \text{s.a} & x+y\leq \ \ 3 \\ & x-y\leq \ \ 1 \\ & x-y\geq -1 \\ & x,\, y\geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & x+2y \\ \text{s.a} & x+2y\geq 2 \\ & -x+2y\leq 4 \\ & x,\, y\geq 0 \end{array}$$

e indica la base correspondiente a cada una de ellas. Calcula también la solución óptima.

4. Un problema lineal tiene el conjunto de oportunidades indicado en la figura:



(a) Calcula (las variables principales de) todas las soluciones factibles básicas.

(b) Si el objetivo es maximizar $4x-y$, calcula la solución óptima.

5. Consideremos el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x_1+2x_2+4x_3 \\ \text{s.a} & x_1+x_2\leq 10 \\ & x_1+2x_2+x_3=14 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3\geq 0 \end{array}$$

(a) Determina la solución factible básica correspondiente a las variables básicas x_1, x_2.

(b) Calcula otras dos soluciones factibles básicas más.

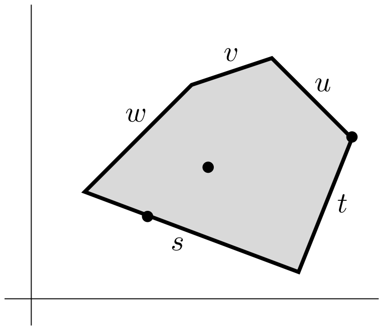
(c) Calcula una solución básica no factible.

(d) Calcula una solución factible no básica.

Cuestiones:

6. Un problema lineal de maximizar en forma estándar tiene cuatro soluciones factibles básicas $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$, $\bar{x}_4$, sobre las cuales la función objetivo toma los valores $z_1=3$, $z_2=-4$, $z_3=8$, $z_4=6$. Explica por qué no podemos asegurar que $\bar{x}_3$ es la solución óptima del problema.

7. La figura representa el conjunto de oportunidades de un problema de programación lineal en forma canónica (contenido en el cuadrante $x > 0$, $y > 0$). Las letras sobre las aristas indican la variable de holgura correspondiente a la restricción.



   (a) ¿Cuántas variables básicas tiene una solución básica?
   (b) De los tres puntos señalados en la figura, di cuáles son soluciones factibles básicas y cuáles no. De los que lo sean, indica cuáles son las variables básicas.
   (c) Di cuáles de los tres puntos pueden ser óptimos del problema y cuáles no.
   (d) Para cada uno de los tres puntos indica si cada una de las variables es positiva, negativa o nula.
   (e) ¿Puede ser x una variable no básica en alguna solución factible básica?
   (f) ¿El problema puede ser no acotado?, ¿puede ser infactible?, ¿puede tener soluciones de arista?, ¿y de arista infinita?

4 El método símplex

Presentamos ahora un método eficiente para resolver problemas de programación lineal. Esencialmente consiste en partir de una solución factible básica y construir a partir de ella una tabla que contiene toda la información necesaria para determinar si la solución es ya óptima y, en caso de que no lo sea, nos permita construir a partir de ella otra tabla correspondiente a otra solución factible básica mejor (o, en el peor de los casos, igual) que la precedente. Este proceso de pasar de una solución a otra se repite las veces que sea necesario hasta llegar a la solución óptima (o hasta descubrir que el problema es no acotado, porque las tablas del símplex también nos informan de esto si se da el caso).

4.1 La tabla del símplex

En esta primera sección explicamos cómo construir la tabla del símplex asociada a una solución factible básica dada, y en la siguiente veremos cómo interpretar la información que contiene.

Ejemplo 1 Construye la tabla del símplex del problema

$$\begin{aligned} \text{Max. } & 2x + y \\ \text{s.a } & x + y \geq 1 \\ & x - 2y \geq 0 \\ & x - y \leq 1 \\ & x,\, y \geq 0 \end{aligned}$$

correspondiente a la solución factible básica $(2, 1)$.

SOLUCIÓN: Las tablas del símplex están asociadas a problemas en forma estándar, luego si el problema no está en forma estándar lo primero que tenemos que hacer es transformarlo para que lo esté. En este caso tenemos que añadir variables de holgura:

$$\begin{aligned} \text{Max. } & 2x + y \\ \text{s.a } & x + y - s = 1 \\ & x - 2y - t = 0 \\ & x - y + u = 1 \\ & x,\, y,\, s,\, t,\, u \geq 0 \end{aligned}$$

Igualmente debemos completar la solución dada calculando sus variables de holgura:

$$(x, y, s, t, u) = (2, 1, 2, 0, 0).$$

> Recuerda que las variables de holgura de una solución se calculan sustituyendo en las restricciones:
>
> $$\begin{aligned} 2 + 1 - s &= 1 \\ 2 - 2 - t &= 0 \\ 2 - 1 + u &= 1 \end{aligned}$$
>
> de donde $(s, t, u) = (2, 0, 0)$.

El problema tiene tres restricciones, luego la solución tiene que tener tres variables básicas, por lo que éstas son x, y, s. Esto es todo lo que necesitamos para construir la tabla del símplex:

> Para construir la tabla del símplex de una solución factible básica basta conocer cuáles son sus variables básicas, pero no es necesario saber cuánto valen.

Así, hubiera sido lo mismo si nos hubieran pedido calcular la solución factible básica con variables básicas x, y, s, sin necesidad de que nos hubieran dado el punto $(2, 1)$.

• Una vez conocemos las variables básicas, escribimos la matriz técnica A del problema (ampliada con los términos independientes), extraemos la matriz básica B y calculamos $B^{-1}A$.

$$A = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}A = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right).$$

• Ahora ya es fácil construir la tabla del símplex:

$$\begin{aligned} \text{Max. } & 2x + y \\ \text{s.a } & x + y - s = 1 \\ & x - 2y - t = 0 \\ & x - y + u = 1 \\ & x,\, y,\, s,\, t,\, u \geq 0 \end{aligned}$$

coeficientes de la función objetivo

variables

$B^{-1}A$

variables básicas

$$\begin{array}{cc|ccccc|c}
 & & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & s & t & u & \\ \hline
2 & x & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\
1 & y & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & s & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ \hline
 & & 2 & 1 & 0 & 3 & 5 & \\
 & & 0 & 0 & 0 & -3 & -5 & 5 \\ \hline
\end{array}$$

• Cada número de la penúltima fila se construye multiplicando la columna de la izquierda por la columna que tiene encima. Por ejemplo, para calcular el 3 marcado con el círculo:

$$\begin{array}{cc|ccccc|c}
 & & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & s & t & u & \\ \hline
\mathbf{2} & x & 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 \\
\mathbf{1} & y & 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\
\mathbf{0} & s & 0 & 0 & 1 & \mathbf{2} & 3 & 2 \\ \hline
 & & 2 & 1 & 0 & 3 & 5 & \\
 & & 0 & 0 & 0 & -3 & -5 & 5 \\ \hline
\end{array}$$

operamos los números marcados en negrita: $2 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 2 = 3$. Esto incluye al último número de la tabla, en este caso el 5 marcado con el círculo, que sale de $2 \times 2 + 1 \times 1 + 0 \times 2 = 5$.

• Los números de la última fila se llaman *rendimientos marginales* y se calculan restando la fila superior menos la penúltima fila, es decir, los números marcados en negrita en la tabla siguiente:

$$\begin{array}{cc|ccccc|c}
 & & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \\
 & & x & y & s & t & u & \\ \hline
2 & x & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\
1 & y & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & s & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ \hline
 & & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \\
 & & 0 & 0 & 0 & -3 & -5 & 5 \\ \hline
\end{array}$$

Ejemplo 2 Construye una tabla del símplex cualquiera para el problema

$$\begin{aligned} \text{Max. } & 4x+5y \\ \text{s.a } & 2x+y \leq 8 \\ & y \leq 5 \\ & x,\, y \geq 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN: Como no nos piden la tabla de ninguna solución en particular (no nos dan ningún punto ni nos seleccionan unas variables básicas), tenemos que elegir unas variables básicas (dos en este caso) para formar una tabla, y tenemos varias posibilidades. Antes de decantarnos por alguna ponemos el problema en forma estándar y escribimos la matriz técnica:

$$\begin{aligned} \text{Max. } & 4x+5y \\ \text{s.a } & 2x+y+s = 8 \\ & y+t = 5 \\ & x,\, y,\, s,\, t \geq 0 \end{aligned} \qquad A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & s & t & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Y ahora conviene tener en cuenta lo siguiente:

Si podemos elegir las variables básicas para construir una tabla del símplex, los términos independientes son ≥ 0 y la matriz técnica contiene una matriz identidad, la opción más sencilla es tomar como variables básicas las que forman dicha identidad, pues en tal caso en el centro de la tabla del símplex tenemos que poner simplemente la matriz A, sin ningún otro cálculo.

En este caso conviene tomar como variables básicas s, t, porque así B es la matriz identidad, y esto hace que $B^{-1}A = A$, por lo que la tabla correspondiente a esas variables es

		4	5	0	0	
		x	y	s	t	
0	s	2	1	1	0	8
0	t	0	1	0	1	5
		0	0	0	0	0
		4	5	0	0	

Pero sería un error muy grave copiar la matriz A en la tabla del símplex si no contiene una matriz identidad o, incluso, aunque la contenga, si nos piden calcular la tabla correspondiente a otras variables básicas distintas de las que forman la matriz identidad.
Recuerda que lo que va en el centro de la tabla del símplex no es A, sino $B^{-1}A$, que sólo es lo mismo cuando la matriz B es la identidad.

Ejemplo 3 Calcula la tabla del símplex del problema

$$\begin{aligned} \text{Max. } & x-y \\ \text{s.a } & x+2y \leq 4 \\ & x+\ \ y \leq 3 \\ & x,\, y \geq 0, \end{aligned}$$

correspondiente a las variables básicas y, t.

SOLUCIÓN: Ponemos el problema en forma estándar y escribimos la matriz técnica:

$$\begin{aligned} \text{Max. } & x-y \\ \text{s.a } & x+2y+s = 4 \\ & x+\ \ y+t = 3 \\ & x,\, y,\, s,\, t \geq 0, \end{aligned} \qquad A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & s & t & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Vemos que las variables s y t determinan una matriz identidad, pero NO podemos aprovecharla porque no nos piden la tabla correspondiente a las variables básicas s, t, sino a las variables básicas y, t, por lo que tenemos que calcular

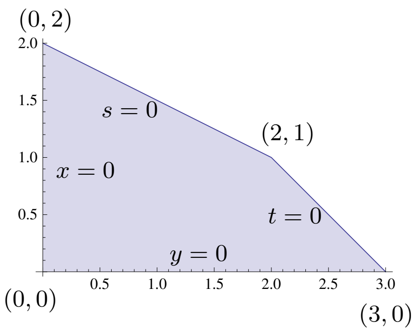
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1}A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

y así la tabla resulta ser

		1	-1	0	0	
		x	y	s	t	
-1	y	$1/2$	1	$1/2$	0	2
0	t	$1/2$	0	$-1/2$	1	1
		$-1/2$	-1	$-1/2$	0	-2
		$3/2$	0	$1/2$	0	

4.2 Interpretación de la tabla del símplex

Ahora que sabemos calcular tablas del símplex vamos a entender la información que contienen. Para ello consideraremos el problema del ejemplo 3 anterior, cuyo conjunto de oportunidades es el que indica la figura.



Vemos que hay cuatro soluciones factibles básicas (el conjunto de oportunidades tiene cuatro vértices). El lado que va de $(0, 2)$ a $(2, 1)$ está formado por las soluciones que saturan la primera restricción, es decir, por los que cumplen $s = 0$, mientras que el lado que va de $(2, 1)$ a $(3, 0)$ lo forman las soluciones que saturan la segunda restricción ($t = 0$).

Vamos a interpretar la tabla construida en el ejemplo 3, que corresponde a la solución con variables básicas y, t, luego variables no básicas $x = s = 0$. Vemos en la figura que el vértice que está sobre los lados $x = 0$ y $s = 0$ es el $(0, 2)$, luego la tabla del símplex que hemos construido nos proporciona información sobre ese punto en concreto. Empecemos por la última columna:

Esto se debe a que lo que ponemos en la parte superior de la última columna al construir la tabla es $B^{-1}\bar{b}$, y sabemos por el tema anterior que eso es el valor de las variables básicas.

A su vez, para calcular el número de la parte inferior de la última columna multiplicamos el valor de cada variable básica por su coeficiente en la función objetivo (que es la columna de la izquierda), luego el resultado es el valor de la función objetivo (las variables no básicas no hace falta considerarlas porque valen 0).

- La última columna (parte superior) contiene el valor de las variables básicas.

Así, vemos en la tabla que $y = 2$ y $t = 1$, luego la tabla corresponde a la solución factible básica $(x, y, s, t) = (0, 2, 0, 1)$, es decir, al punto $(x, y) = (0, 2)$ de la figura, como ya sabíamos.

- La última columna (parte inferior) contiene el valor de la función objetivo.

Así, la tabla del ejemplo muestra que la función objetivo en la solución $(0, 2)$ toma el valor $F(0, 2) = -2$.

El resto de la tabla nos proporciona información sobre el efecto que tiene desplazarnos desde la solución en la que estamos (en este caso $(0, 2)$ hasta otra solución factible básica a través de una arista del conjunto de oportunidades.

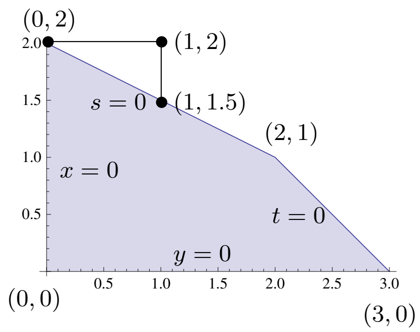
En este caso tenemos dos desplazamientos posibles: desde $(0,2)$ podemos movernos por la arista $s=0$ hasta $(2,1)$ o bien por la arista $x=0$ hasta $(0,0)$. Debemos interpretar estos movimientos en términos de las variables básicas y no básicas. Concretamente:

- Movernos por la arista $s=0$ significa modificar la variable x, que inicialmente era 0 (no básica) y hacer que pase a tomar valores positivos (pase a ser básica), manteniendo $s=0$.
- Movernos por la arista $x=0$ significa modificar la variable s, que inicialmente era 0 (no básica) y hacer que pase a tomar valores positivos (pase a ser básica), manteniendo $x=0$.

En general:

> Cada variable no básica en una solución factible básica representa un movimiento posible a lo largo de una arista del conjunto de oportunidades, a través de la cual podemos llegar a otra solución factible básica en la que dicha variable no básica habrá pasado a ser básica. Tenemos, pues, tantos movimientos posibles como variables no básicas.

La tabla del símplex nos proporciona la información relevante sobre el efecto de estos movimientos posibles, para que podamos elegir el más conveniente. Vamos a analizar, por ejemplo, qué sucede si dedicimos movernos por la arista $s=0$, de modo que es la variable x la que pasa a ser básica.



Lo primero que debemos observar es que no podemos modificar únicamente la variable x. Si a partir del punto $(0,2)$ nos limitamos a aumentar la x una unidad, pasamos al punto $(1,2)$ y nos salimos del conjunto de oportunidades. Para mantenernos sobre la arista $s=0$ debemos bajar hasta el punto $(x,y)=(1,1.5)$ o, más precisamente

$$(x,y,s,t)=(1,1.5,0,0.5).$$

Así pues, hemos tenido que disminuir la y media unidad (de 2 a 1.5) y la t también media unidad (de 1 a 0.5). Este hecho está reflejado en la tabla del símplex, concretamente en la columna de la x:

		1	-1	0	0	
		x	y	s	t	
-1	y	$\mathbf{1/2}$	1	$1/2$	0	2
0	t	$\mathbf{1/2}$	0	$-1/2$	1	1
		$-1/2$	-1	$-1/2$	0	-2
		$3/2$	0	$1/2$	0	

Los dos números señalados en negrita indican que por cada unidad que aumentemos la variable x, para permanecer sobre la arista $s=0$ deberemos disminuir la y media unidad y la t media unidad también. En general:

> La parte superior de la columna de una variable no básica en la tabla del símplex indica (con el signo cambiado) cuánto debe variar la variable básica de su fila por cada unidad que aumenta la variable no básica de su columna para permanecer en una arista del conjunto de oportunidades.

Es importante recordar que, por razones técnicas, **el signo está cambiado,** de modo que una cantidad positiva indica que la variable básica disminuye, mientras que una cantidad negativa indica que aumenta. Naturalmente, un 0 indica que la variable no se modifica.

Por ejemplo, si en lugar de movernos por la arista $s = 0$ decidimos movernos por $x = 0$, lo que significa hacer aumentar la variable s, la parte superior de la columna de la s nos informa de que, por cada unidad que aumentemos la variable s, la variable básica y deberá disminuir 0.5, mientras que la variable t deberá aumentar 0.5.

Esto nos permite interpretar la parte inferior de la columna. No es difícil concluir[4] que la penúltima fila indica, para cada variable no básica, la variación (cambiada de signo) que experimenta la función objetivo por cada unidad que aumenta la variable no básica de la columna correspondiente a causa de la variación de las variables básicas y, por último que:

La última fila de la tabla del símplex (la de los rendimientos marginales) indica la variación de la función objetivo por cada unidad que aumenta la variable no básica de la columna correspondiente.

En nuestro ejemplo podemos concluir que por cada unidad que aumentemos la variable x la función objetivo aumentará en $3/2$, mientras que por cada unidad que aumentemos la variable s la función objetivo aumentará en $1/2$. Esto ya nos permite decidir qué movimiento es preferible para obtener una nueva tabla del símplex correspondiente a una solución factible básica mejor que la que tenemos ahora:

Criterio de entrada: La variable que debe entrar en la base es la variable no básica con marginal más positivo si el problema es de maximizar o la de marginal más negativo si el problema es de minimizar (en caso de empate elegimos una arbitrariamente). Si no hay variables con marginal positivo en un problema de maximizar o no hay variables con marginal negativo en un problema de minimizar, no puede entrar ninguna variable y la solución correspondiente a la tabla es óptima.

En nuestro ejemplo la variable que debe entrar en la base es x, porque su marginal $3/2$ es mayor que el marginal de la otra variable no básica (la s, con marginal $1/2$). "Entrar en la base" significa que vamos a construir una nueva tabla del símplex en la que x pasará a ser una variable básica.

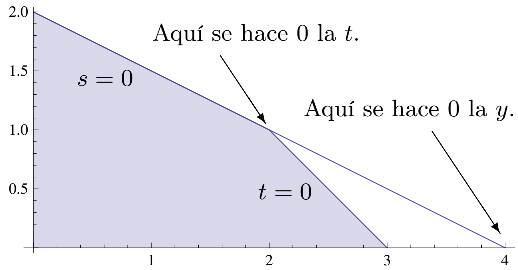
En cambio, si el problema fuera de minimizar, como no hay marginales negativos en la tabla, podemos concluir que $(0, 2)$ es el mínimo del problema.

Ahora que sabemos que la variable x debe figurar en la base de la nueva solución factible básica que vamos a calcular, tenemos que determinar cuál de las actuales variables básicas (y o t) debe salir de la base para que x ocupe su lugar.

[4] Por ejemplo, según la tabla, por cada unidad que aumenta la x la variable y disminuye 0.5, lo que se traduce en una variación de la función objetivo de $-1 \cdot 0.5$ (porque -1 es el coeficiente de y en la función objetivo) y la variable t disminuye 0.5, lo que se traduce en una variación de la función objetivo de $0 \cdot 0.5$ (porque t tiene coeficiente 0 en la función objetivo, luego la variación de t no afecta a ésta). Por lo tanto, $-1 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.5$ es la variación de la función objetivo debida a la variación de las variables básicas y, t (con el signo cambiado, porque los 0.5 tienen el signo cambiado). Y eso es precisamente el $-1/2$ que figura en la penúltima fila para la variable x. Por otra parte, al aumentar x una unidad la función objetivo aumenta en 1 (el coeficiente de x en la función objetivo que figura arriba de todo en la tabla), luego al restar $1 - (-1/2)$ estamos corrigiendo el signo cambiado de la penúltima fila y obtenemos la variación total que experimenta la función objetivo por cada unidad que aumenta la x, calculado como la suma del *rendimiento directo* debido a la variación de x (el 1) y el *rendimiento indirecto* debido a la variación de las demás variables (el $1/2$). Por eso los números de la penúltima fila se llaman rendimientos indirectos (aunque en realidad los rendimientos indirectos son esos números cambiados de signo).

En la figura vemos que al movernos por la arista $s = 0$ llegamos hasta $(2, 1, 0, 0)$, cuyas variables básicas son x, y, luego la respuesta es que la variable que debe salir de la base es la t. Pero debemos encontrar el modo de obtener esta información de la tabla del símplex, sin necesidad de mirar la figura.

Observemos, con más detalle, que si partimos del punto $(x, y, s, t) = (0, 2, 0, 1)$ y empezamos a movernos por la arista $s = 0$, llega un momento en que la variable t se hace 0, y si seguimos avanzando, llega un momento en que se hace 0 la y, pero para entonces ya nos hemos salido del conjunto de oportunidades. Para que esto no suceda, debemos detenernos en cuanto una de las variables básicas se hace 0, pues si seguimos se hará negativa y estaremos ya en soluciones infactibles. Por lo tanto:



La variable que debe salir de la base es la primera que llega a 0.

Para ver cómo identificar esta variable a partir de la tabla del símplex conviene imaginar que la variable que entra en la base (en nuestro caso la x) avanza a una velocidad de 1 unidad por segundo. Entonces la variable y disminuye a 0.5 unidades por segundo y la variable t se mueve también a 0.5 unidades por segundo. En general:

Los números de la parte superior de la columna de una variable no básica pueden pensarse como las velocidades a que se mueven las variables básicas a medida que aumenta la variable no básica de la columna, entendiendo que una velocidad positiva indica que la variable correspondiente se acerca a 0 (disminuye), mientras que una velocidad negativa indica que la variable se aleja de 0 (aumenta).

Ahora observamos que, como las variables básicas valen $y = 2$ y $t = 1$, para llegar a 0 la variable y debe recorrer un espacio de 2 unidades, mientras que la variable t sólo tiene que recorrer 1 unidad. Por último recordamos una conocida fórmula física: la velocidad es el espacio recorrido dividido entre el tiempo en que se recorre: $v = e/t$, o equivalentemente: $t = e/v$. Por lo tanto:

Para saber el tiempo que tarda una variable en llegar a 0 dividimos el espacio que tiene que recorrer (su valor, es decir, el número que figura en la última columna de la tabla del símplex) entre la velocidad a la que se mueve (el número que figura en la tabla del símplex en la columna de la variable que entra). Pero debemos descartar las variables con velocidades negativas (porque se alejan de 0, luego nunca llegarán a 0 o con velocidad 0 (porque no se mueven).

En nuestro ejemplo hemos determinado que debe entrar la variable x (por el criterio de entrada) y para ver cuál sale miramos la tabla:

Velocidades (v)

		1	-1	0	0	
		x	y	s	t	
-1	y	**1/2**	1	1/2	0	**2**
0	t	**1/2**	0	$-1/2$	1	**1**
		$-1/2$	-1	$-1/2$	0	-2
		3/2	0	1/2	0	

Espacio a recorrer (e)

$$t_y = \frac{2}{1/2} = 4$$

$$t_t = \frac{1}{1/2} = 2$$

Tiempos ($t = e/v$)

Observamos en la columna de la x (la variable que entra) que las dos variables básicas y, t tienen velocidad positiva, por lo que ambas llegarán a 0 en algún momento y debemos determinar cuál llega antes. Para ello calculamos el tiempo que cada una tarda en llegar a 0. El cálculo está hecho al lado de la tabla. Vemos que la variable que menos tarda en llegar a 0 es la t, luego t es la variable que debe salir de la base, y ahora sabemos que la nueva solución factible básica será la de variables básicas x, y. En general:

Criterio de salida: Una vez determinada la variable que entra en la base, consideramos las velocidades de las variables básicas que aparecen en su columna, descartamos las variables que tengan velocidad negativa o 0, y de entre las variables con velocidad positiva calculamos los tiempos que tardan en llegar a 0 (dividiendo espacio/velocidad, es decir, el número de la última columna entre el de la columna de la variable que entra). La variable con menor tiempo (tanto para problemas de maximizar como de minimizar) es la variable que sale.

Ejemplos Para la tabla del ejemplo 1 vemos que el problema es de maximizar y no hay ningún marginal positivo, luego no podemos aplicar el criterio de entrada y concluimos que la tabla es óptima: la solución $(x, y, s, t, u) = (2, 1, 2, 0, 0)$ es la solución óptima del problema.

Para la tabla del ejemplo 2 el problema es de maximizar y hay dos marginales positivos, y el criterio de entrada establece que entra la variable y porque tiene el mayor marginal (es la que hace aumentar más rápidamente a la función objetivo). Para ver qué variable sale nos fijamos en la parte superior de la columna de la y y vemos que las dos variables básicas tienen velocidad positiva, luego ambas llegan a 0. Los tiempos son $t_s = 8/1 = 8$ y $t_t = 5/1 = 5$, luego, según el criterio de salida, la variable que sale es t, porque es la que menos tiempo tarda.

4.3 Consideraciones adicionales sobre las tablas del símplex

En la discusión precedente sólo hemos tenido en cuenta las columnas de la tabla del símplex correspondientes a las variables no básicas. Las columnas de las variables básicas no tienen información relevante, y de hecho contienen siempre valores predecibles que podemos usar para comprobar que no hemos cometido errores de cálculo al construir una tabla. En general, en una tabla del símplex podemos observar los hechos siguientes:

Matriz identidad

		1	-1	0	0	
		x	y	s	t	
-1	y	$1/2$	$\mathbf{1}$	$1/2$	$\mathbf{0}$	2
0	t	$1/2$	$\mathbf{0}$	$-1/2$	$\mathbf{1}$	1
		$-1/2$	-1	$-1/2$	0	-2
		$3/2$	0	$1/2$	0	

Variables no negativas

Marginales nulos

- Las columnas de las variables básicas deben contener la matriz identidad, de modo que la variable básica correspondiente a una fila debe de estar a la altura del 1 en la columna correspondiente (por ejemplo, en la columna de la y el 1 está en la primera fila, y por eso a la izquierda la variable y está en la primera fila, mientras que en la columna de la t el 1 está en la segunda fila, por lo que a la izquierda la t está también en la segunda fila).

- Los marginales de las variables básicas deben ser 0.

- Los números de la última columna deben ser ≥ 0, porque son el valor de las variables básicas. Si una tabla tiene valores negativos en su última columna, o bien contiene algún error de cálculo, o bien corresponde a una solución infactible a la que no se le puede aplicar el método símplex.

4.4 Iteraciones del símplex

El algoritmo del símplex consiste en partir de una tabla del símplex e ir calculando nuevas tablas hasta llegar a la solución óptima. Cada nueva tabla se obtiene con una sencilla manipulación algebraica de la tabla precedente. Para explicar el método partimos de la tabla considerada en las secciones precedentes:

$$\begin{array}{rr|rrrr|c}
 & & 1 & -1 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & s & t & \\
\hline
-1 & y & 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 2 \\
0 & t & \mathbf{1/2} & 0 & -1/2 & 1 & 1 \\
\hline
 & & -1/2 & -1 & -1/2 & 0 & \\
\cline{3-6}
 & & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 & -2 \\
\hline
\end{array}$$

El algoritmo del símplex es el siguiente:

Paso 1 *Determinar la variable que entra en la base y la variable que sale de la base.*

En este ejemplo ya hemos visto que entra la variable x y sale la variable t. El número situado en la columna de la variable que entra y en la fila de la que sale se llama el *pivote* de la iteración. En nuestro caso es el 1/2 que está en negrita.

Paso 2 *Calcular la tabla correspondiente a las nuevas variables básicas.*

Esto se hace siguiendo los pasos que a su vez detallamos a continuación:

Paso 2a *Cambiamos la base en la tabla.*

En nuestro ejemplo, sustituimos la t por la x en la parte izquierda. La guía para construir la nueva tabla es que en la columna de la nueva variable básica (en nuestro ejemplo la x) ha de haber un 1 en su fila y ceros en las demás:

$$\begin{array}{rr|rrrr|c}
 & & 1 & -1 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & s & t & \\
\hline
-1 & y & \mathbf{0} & & & & \\
1 & x & \mathbf{1} & & & & \\
\hline
 & & & & & & \\
\cline{3-6}
 & & & & & & \\
\hline
\end{array}$$

Paso 2b *Dividimos la fila del pivote entre el pivote para obtener el* 1.

En nuestro ejemplo dividimos entre 1/2 (es decir, multiplicamos la fila por 2):

$$\begin{array}{rr|rrrr|r}
 & & 1 & -1 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & s & t & \\
\hline
-1 & y & \mathbf{0} & & & & \\
1 & x & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\
\hline
 & & & & & & \\
\cline{3-6}
 & & & & & & \\
\hline
\end{array}$$

Paso 2c *Hacemos ceros en el resto de la columna.*

Sólo hay una operación válida para hacer ceros en una tabla del símplex:

> Para hacer un cero en una posición hay que sumar a la fila correspondiente la fila del pivote multiplicada por el número adecuado.

En nuestro ejemplo, a la primera fila le sumamos la segunda multiplicada por -1, y así conseguimos el 0 que en la tabla precedente estaba en negrita:

$$\begin{array}{rr|rrrr|r}
 & & 1 & -1 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & s & t & \\
\hline
-1 & y & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & x & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\
\hline
 & & & & & & \\
\cline{3-6}
 & & & & & & \\
\hline
\end{array}$$

Paso 2d *Reconstruimos la parte inferior de la tabla.*

$$\begin{array}{rr|rrrr|r}
 & & 1 & -1 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & s & t & \\
\hline
-1 & y & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & x & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\
\hline
 & & 1 & -1 & -2 & 3 & \\
\cline{3-6}
 & & 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

Paso 3 *Volvemos al paso 1.*

Observemos que la nueva tabla del símplex que hemos encontrado corresponde a una solución mejor que la precedente, porque ahora la función objetivo vale 1 y en la anterior valía -2. En general:

> Al realizar una iteración del símplex, la nueva tabla debe corresponder a una solución factible básica con función objetivo mejor (o, en casos poco frecuentes, igual) a la de la solución precedente. Si la función objetivo empeora o la solución resulta infactible (aparecen números negativos en la última columna) es seguro que hemos cometido algún error.

Continuando con el ejemplo, vemos en los marginales que introducir la variable s en la base hace aumentar la función objetivo, mientras que introducir la t la hace disminuir. Por lo tanto entra la variable s (la única que tiene marginal positivo). Cuando la s aumenta, la variable y

disminuye, mientras que x aumenta, luego la única variable que llega a 0 es y, que es, pues, la variable que sale de la base (la única con "velocidad" positiva). La nueva tabla resulta ser:

$$
\begin{array}{cc|cccc|c}
 & & 1 & -1 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & s & t & \\
\hline
0 & s & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & x & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\
\hline
 & & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
\cline{3-6}
 & & 0 & -2 & 0 & -1 & 3 \\
\hline
\end{array}
$$

Cuando volvemos al paso 1, observamos que ninguna variable puede entrar en la base, pues todas hacen disminuir a la función objetivo, luego ya estamos en la tabla óptima, que corresponde a la solución $(x, y, s, t) = (3, 0, 1, 0)$, con valor de la función objetivo $z = 3$.

Ejemplo Ahora deberías entender completamente el ejemplo de la página 20.

4.5 Tablas finales del símplex

El algoritmo del símplex no sólo nos lleva hasta la solución óptima, sino que también nos informa de si ésta es de vértice, de arista finita o de arista infinita, así como si el problema es no acotado y, por lo tanto, no tiene solución óptima. Vamos a ver cómo obtener esta información a partir de las tablas. Los casos que pueden darse ante una tabla del símplex son los siguientes:

a) Una variable puede entrar y otra puede salir.

   Esto se interpreta como que existe una arista por la que podemos movernos mejorando la función objetivo y a través de la cual llegamos a otra solución factible básica mejor (o, en el peor de los casos, igual) que la anterior.

   En este caso lo que procede es realizar una iteración.

b) Una variable puede entrar, pero ninguna puede salir (porque todas las variables básicas tienen "velocidades" negativas o 0, por lo que quedan excluidas del criterio de salida).

   Esto se interpreta como que existe una arista por la que podemos movernos mejorando la función objetivo, pero a lo largo de ese movimiento ninguna variable básica se hace cero, por lo que podemos avanzar cuanto queramos sin salir del conjunto de oportunidades. Como al avanzar la función objetivo mejora, la conclusión es:

   El problema es no acotado.

> Observa que si una variable tiene marginal positivo (para maximizar) o negativo (para minimizar) y en caso de meter esa variable en la base ninguna variable puede salir, el problema es no acotado incluso si no es la variable que debe entrar según el criterio de entrada, es decir, en esa situación hay una arista por la que la función objetivo mejora indefinidamente, aunque el criterio de entrada recomiende otro camino.

c) Ninguna variable puede entrar (porque no hay marginales positivos, para problemas de maximizar, o no hay marginales negativos, para problemas de minimizar).

   Esto se interpreta como que no es posible mejorar la solución de la tabla, por lo tanto:

   La solución correspondiente a la tabla es óptima.

   Dentro de este caso podemos distinguir a su vez varios subcasos:

c1) Los marginales de las variables no básicas son todos distintos de 0 (todos negativos para problemas de maximizar o todos positivos para problemas de minimizar).

Esto se interpreta como que cualquier intento de movernos por una arista hace empeorar la función objetivo, luego no podemos movernos a ninguna solución óptima alternativa. Por lo tanto:

La solución óptima es de vértice.

> Si la tabla corresponde a una solución degenerada (es decir, si tiene algún cero en la última columna) puede ocurrir que esa arista de soluciones óptimas tenga por extremos a la misma solución con diferentes elecciones para las variables básicas, de modo que en realidad la solución sea de vértice. Algunos hechos sobre problemas lineales, como en este caso, dejan de ser válidos cuando la solución óptima es degenerada.

c2) Existe una variable no básica cuyo marginal es 0 (los de las variables básicas siempre son 0, y eso no indica nada).

Esto se interpreta como que podemos movernos por una arista sin que la función objetivo aumente ni disminuya. Por lo tanto, todos los puntos de dicha arista serán soluciones igual de buenas que la correspondiente a la tabla. Por lo tanto:

La solución es de arista.

Pero dentro de este caso podemos distinguir a su vez dos subcasos:

i. Si intentamos realizar una iteración metiendo en la base una de las variables no básicas con marginal 0, hay una variable básica que puede salir (cumple el criterio de salida). Esto se interpreta como que al movernos por la arista correspondiente a la variable no básica con marginal 0 llega un momento en que otra variable se hace 0, lo que nos obliga a detenernos, y hemos llegado a otra solución factible básica con la misma función objetivo. Por lo tanto:

La solución óptima es de arista finita, y realizando una iteración se obtiene el otro extremo de la arista.

ii. Si intentamos realizar una iteración metiendo en la base una de las variables no básicas con marginal 0, ninguna variable básica puede salir (pues todas las "velocidades" son negativas o 0).

En este caso podemos movernos por la arista correspondiente a la variable no básica con marginal 0 sin que en ningún momento tengamos necesidad de detenernos, por lo que se trata de una arista infinita. Por lo tanto:

La solución óptima es de arista infinita.

Ejemplo 4 Razona si las tablas siguientes son o no tablas finales del símplex y, en tal caso, a qué tipo de problema corresponden. Hazlo tanto en el supuesto de que el problema sea de maximizar como que sea de minimizar.

$$
\begin{array}{cc|cccc|c}
 & & -2 & 1 & 1 & 1 & \\
 & & x & y & z & w & \\
\hline
1 & y & -1 & 1 & -2 & 0 & 2 \\
1 & w & -1 & 0 & -1 & 1 & 3 \\
\hline
 & & -2 & 1 & -3 & 1 & \\
\cline{3-6}
 & & 0 & 0 & 4 & 0 & 5 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc|cccc|c}
 & & 2 & 1 & 2 & 1 & \\
 & & x & y & z & w & \\
\hline
1 & y & 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\
1 & w & 1 & 0 & 3 & 1 & 3 \\
\hline
 & & 3 & 1 & 2 & 1 & \\
\cline{3-6}
 & & -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
\hline
\end{array}
$$

SOLUCIÓN: En la tabla de la izquierda, si el problema es de maximizar, puede entrar la variable z, porque tiene marginal positivo, pero no puede salir ninguna variable, porque las dos velocidades son negativas. Por lo tanto el problema es no acotado.

Si el problema es de minimizar, entonces no puede entrar ninguna variable, pues ninguna tiene marginal negativo, luego la tabla es óptima. Como hay una variable no básica (la x) que tiene marginal 0, la tabla corresponde a una solución de arista, y como si entra x no puede salir ninguna variable (porque todas las velocidades son negativas) la solución es de arista infinita.

En la tabla de la derecha, si el problema es de maximizar, no hay ninguna variable con marginal positivo, luego es óptima. Como hay una variable no básica (la z) que tiene marginal 0, corresponde a una solución de arista, y como si entra la z puede salir la variable w, se trata de una solución de arista finita.

Si el problema es de minimizar entra la variable x, porque tiene marginal negativo, y sale la variable y, luego la tabla no es óptima y para resolver el problema habría que iterar.

4.6 Problemas resueltos

1. Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x+y+z \\ \text{s.a} & 3x-y+z \geq 3 \\ & x-2y+2z=8 \\ & x-3y+z \leq 6 \\ & x,y,z \geq 0 \end{array}$$

   (a) Sin realizar ninguna iteración, construye la tabla del símplex correspondiente a la solución $(4,0,2)$.

   (b) Resuelve el problema mediante el algoritmo del símplex partiendo de dicha tabla. Razona todos los pasos y la conclusión final (qué variable entra y por qué, qué variable sale y por qué, etc.)

   SOLUCIÓN:

   El problema en forma estándar es

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x+y+z \\ \text{s.a} & 3x-y+z-s=3 \\ & x-2y+2z=8 \\ & x-3y+z+t=6 \\ & x,y,z,s,t \geq 0 \end{array} \qquad A = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

   (a) Sustituyendo en las restricciones calculamos las variables de holgura: $(x,y,z,s,t) = (4,0,2,11,0)$, luego las variables básicas son x,z,s. La matriz básica es

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad |B| = 1, \qquad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{1}\tilde{B}^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -4 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -10 & 0 & 1 & 5 & 11 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, la tabla del símplex es:

$$\begin{array}{cc|rrrrr|r}
 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & z & s & t & \\
\hline
1 & x & 1 & -4 & 0 & 0 & 2 & 4 \\
1 & z & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\
0 & s & 0 & -10 & 0 & 1 & 5 & 11 \\
\hline
 & & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & \\
\cline{3-7}
 & & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & 6 \\
\hline
\end{array}$$

(b) Como el problema es de maximizar, entra la variable y, porque es la única con marginal positivo, y sale la variable z porque es la única con velocidad positiva.

$$\begin{array}{cc|rrrrr|r}
 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & z & s & t & \\
\hline
1 & x & 1 & 0 & 4 & 0 & -2 & 12 \\
1 & y & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\
0 & s & 0 & 0 & 10 & 1 & -5 & 31 \\
\hline
 & & 1 & 1 & 5 & 0 & -3 & \\
\cline{3-7}
 & & 0 & 0 & -4 & 0 & 3 & 14 \\
\hline
\end{array}$$

Ahora puede entrar la variable t, porque tiene marginal positivo, pero no sale ninguna variable, porque todas las velocidades son negativos. Por consiguiente, el problema es no acotado.

4.7 Problemas propuestos

1. Considera la siguiente tabla del símplex para un problema de maximizar:

$$\begin{array}{cc|rrrrrr|r}
 & & 1 & 6 & 2 & 1 & 2 & 1 & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\
\hline
1 & x_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \\
2 & x_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\
1 & x_4 & 0 & -2 & 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \\
\hline
 & & 1 & 1 & 2 & 1 & 13 & 5 & \\
\cline{3-8}
 & & 0 & 5 & 0 & 0 & -11 & -4 & 5 \\
\hline
\end{array}$$

(a) ¿Cuáles son las variables básicas?

(b) ¿Cuál es la solución correspondiente a esta tabla?

(c) ¿Cuánto vale la función objetivo?

(d) ¿Qué tres cosas podemos verificar para detectar posibles errores de cálculo?

(e) ¿Qué efecto tiene sobre la función objetivo introducir en la base cada una de las variables no básicas?

(f) Llamemos x a la variable no básica que ha de entrar en la base. ¿Cuál es?

(g) Al hacer básica la variable x, ésta deja de ser nula y pasa a ser > 0. Las demás variables no básicas siguen valiendo 0, pero las variables básicas varían. ¿Cuáles aumentan y cuáles disminuyen?

(h) De las variables básicas que disminuyen cuando x aumenta, ¿cuál llega antes a 0?

(i) Calcula la tabla siguiente. Verifica las tres condiciones que debe satisfacer y determina si se trata de la tabla óptima.

(j) Supón ahora que el objetivo es minimizar. Responde a las cuestiones e, f, g, h. Determina qué variable debe entrar en la base y cuál debe salir.

2. Considera la siguiente tabla del símplex para un problema de maximizar:

		1	3	2	1	5	6	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	x_1	1	-1	0	0	-2	1	2
2	x_3	0	-1	1	0	2	2	1
1	x_4	0	-2	0	1	1	0	1
		1	-5	2	1	3	5	5
		0	8	0	0	2	1	

(a) Responde en este caso a las cuestiones a, b, c, d, e, f, g del problema anterior.

(b) Llamemos de nuevo x a la variable que entra en la base. A medida que x aumenta, ¿hay alguna variable básica que disminuya y termine por hacerse 0? ¿Cómo se interpreta esto?

(c) Supón ahora que el problema es de minimizar. ¿Qué efecto tiene sobre la función objetivo introducir en la base cada una de las variables no básicas? ¿Cómo se interpreta esto?

3. Considera la siguiente tabla del símplex para un problema de maximizar:

		1	-2	-3	1	1	6	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	x_1	1	5	0	0	5	1	5
-3	x_3	0	2	1	0	2	-2	1
1	x_4	0	-1	0	1	4	0	1
		1	-2	-3	1	3	7	3
		0	0	0	0	-2	-1	

(a) Determina la solución correspondiente a esta tabla.

(b) ¿Qué efecto tiene sobre la función objetivo introducir en la base cada una de las variables no básicas? ¿Qué se concluye de ello?

(c) ¿Qué efecto tiene sobre la función objetivo introducir en la base la variable x_2?

(d) Si introducimos en la base x_2, ¿que variables básicas aumentarán y cuáles disminuirán? ¿Cuál llegará antes a 0? ¿Cómo se interpreta esto?

(e) Calcula dos soluciones óptimas del problema.

4. Considera la siguiente tabla del símplex para un problema de maximizar:

$$
\begin{array}{rr|rrrrrr|r|}
 & & 1 & 3 & -3 & 1 & 1 & 6 & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\
\cline{3-9}
1 & x_1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 5 & 1 & 5 \\
-3 & x_3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\
1 & x_4 & 0 & -2 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\
\cline{3-9}
 & & 1 & 3 & -3 & 1 & 3 & 7 & \\
\cline{3-8}
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 3 \\
\cline{3-9}
\end{array}
$$

(a) Determina la solución correspondiente a esta tabla.

(b) ¿Qué efecto tiene sobre la función objetivo introducir en la base cada una de las variables no básicas? ¿Qué se concluye de ello?

(c) ¿Qué efecto tiene sobre la función objetivo introducir en la base la variable x_2?

(d) Si introducimos en la base x_2, ¿que variables básicas aumentarán y cuáles disminuirán? ¿Cómo se interpreta esto?

5. Aplica el algoritmo del símplex a la tabla siguiente para un problema de minimizar hasta llegar a la tabla óptima.

$$
\begin{array}{rr|rrrrr|r|}
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\
 & & x & y & z & u & v & \\
\cline{3-8}
1 & x & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \\
2 & y & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 4 \\
3 & z & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 12 \\
\cline{3-8}
 & & 1 & 2 & 3 & 14 & -8 & \\
\cline{3-7}
 & & 0 & 0 & 0 & -10 & 13 & 46 \\
\cline{3-8}
\end{array}
$$

6. Repite la pregunta anterior suponiendo que el problema es de maximizar.

7. Resuelve el problema siguiente por el método símplex:

$$
\begin{array}{rl}
\text{Min.} & 3x + y + 6z \\
\text{s.a} & 10y + 12z \leq 158 \\
 & y + 2z \leq 18 \\
 & x + 2y + 4z = 8 \\
 & x, y, z \geq 0
\end{array}
$$

8. Una empresa recibe diariamente 50 kg de su principal materia prima M, con la cual elabora su producto A. Cada unidad producida requiere 1 kg de materia prima para su elaboración, y el coste unitario de producción es de 8 u.m. De este modo, la producción diaria es de 50 unidades de producto. Sin embargo, la empresa se plantea empezar a comercializar otros dos productos B y C, cada uno de los cuales requiere 2 y 1 kg, respectivamente, de la materia prima M, además de una segunda materia prima N, de la que la empresa puede recibir hasta 100 kg diarios. Cada unidad de B requiere 5 kg de N y cada unidad de C requiere 7. Los costes de producción son de 1 y 3 u.m., respectivamente. Las posibilidades de producción de la empresa hacen que como máximo pueda producir 18 unidades entre los artículos B y C. En estas circunstancias, la empresa se plantea qué cantidades le conviene producir diariamente de cada uno de los tres artículos para que el coste de producción sea mínimo, y teniendo en cuenta que los 50 kg de la materia prima M deben gastarse completamente, porque son perecederos.

   (a) Calcula la tabla del símplex correspondiente a la producción actual de la empresa, es decir, la que consiste en producir únicamente 50 unidades de A.

   (b) Razona a partir de ella si pasando a producir B y C se podría mejorar el coste.

   (c) En caso afirmativo, determina las cantidades que conviene producir de los tres productos.

   (d) ¿Qué cantidad de la materia prima N convendrá adquirir diariamente?

9. Una empresa quiere fabricar un máximo de 150 unidades diarias de dos productos (entre ambos). La producción requiere dos fases, y dispone de 250 horas de trabajo diarias para cada una de ellas. Cada unidad del primer producto requiere una hora en la primera fase de producción y dos horas en la segunda, mientras que cada unidad del segundo producto requiere dos horas en la primera fase y una en la segunda.

   (a) Determina la producción que maximiza el beneficio, teniendo en cuenta que la empresa obtiene 2 u.m. por cada unidad producida del primer artículo y 1 u.m. por cada unidad producida del segundo. Emplea el método símplex, pero sin calcular ninguna matriz inversa.

   (b) Determina, si es posible, una solución óptima en la que se fabriquen ambos productos.

10. Razona a qué tipo de solución corresponde la tabla siguiente según si el problema es de maximizar o de minimizar.

		2	3	2	-3	0	
		x	y	z	w	s	
2	x	1	0	-1	0	-1	3
3	y	0	1	-2	-1	0	8
		2	3	-8	-3	-2	30
		0	0	10	0	2	

11. Dado el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x - y + z \\ \text{s.a.} & x + y + 3z \geq 1 \\ & \quad - y + 2z = 4 \\ & x,\, y,\, z \geq 0 \end{array}$$

(a) Razona que $(x, y, z) = (0, 0, 2)$ es una solución factible básica.

(b) Construye la tabla del símplex asociada a dicha solución (directamente, sin realizar ninguna iteración).

(c) Razona si la solución dada es la óptima. Si es óptima indica de qué tipo es, y si no es óptima aplica el método símplex para resolver el problema.

12. La tabla siguiente corresponde a un problema de maximizar. Razona si es óptima y en caso contrario itera hasta llegar a la solución óptima. Indica si es de vértice de arista finita o de arista infinita.

		2	1	0	0	0	
		x	y	z	v	w	
1	y	0.5	1	0	0.5	0	125
0	z	0.5	0	1	-0.5	0	25
0	w	1.5	0	0	-0.5	1	125
		0.5	1	0	0.5	0	125
		1.5	0	0	-0.5	0	

13. Resuelve el problema siguiente. Indica las soluciones óptimas y el valor de la función objetivo en cada una de ellas.

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & x - 2y + 3z \\ \text{s.a} & x + 2y + z \leq 4 \\ & 2x + y - z \leq 2 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

14. Se sabe que la solución óptima del problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 2x + y \\ \text{s.a} & -x + y \leq 2 \\ & x + 2y \leq 6 \\ & 2x + y \leq 6 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array}$$

es $(x, y) = (2, 2)$. Calcula la tabla óptima del símplex sin realizar ninguna iteración. ¿Qué tipo de solución es?

15. Dado el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x + y \\ \text{s.a} & -x + y \leq 2 \\ & y \leq 4 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array}$$

obtén sin iterar la tabla del símplex correspondiente a las variables básicas y y t (la variable de holgura de la segunda restricción) y aplica a partir de ella el algoritmo hasta encontrar la solución óptima.

16. Calcula la tabla del símplex del problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x+2y \\ \text{s.a} & x+y \leq 4 \\ & 2x+y \leq 6 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array}$$

correspondiente a las variables básicas y, t. ¿Es óptima?

17. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x+y+4z \\ \text{s.a} & x+2y+z \geq 4 \\ & x+3y+2z \geq 4 \\ & x+7y+4z = 15 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

(a) Calcula sin iterar la tabla del símplex correspondiente a la solución $(x, y, z) = (15, 0, 0)$.

(b) Razona si la tabla del apartado anterior es óptima. Si no lo es, itera hasta llegar a la tabla óptima y, si lo es, razona si la solución es de vértice, de arista finita o de arista infinita.

(c) Estudia si las soluciones $(\frac{1}{3}, 0, \frac{11}{3})$ y $(1, 2, 0)$ son o no factibles básicas.

(d) Razona si alguna de las dos soluciones del apartado anterior es óptima.

18. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 8x+y+3z \\ \text{s.a} & 5y+7z \leq 19 \\ & y+z \leq 18 \\ & x+2y+3z = 8 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

(a) Calcula sin iterar la tabla del símplex correspondiente a la solución $(x, y, z) = (0, 1, 2)$.

(b) Razona si la tabla anterior es óptima. En caso contrario aplica el algoritmo del símplex. En cualquier caso razona si el problema es infactible, no acotado o si tiene solución óptima de vértice, de arista finita o de arista infinita.

(c) Razona si la solución $(8, 0, 0)$ es factible básica.

19. Considera el problema:

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & 2x+6y+5z \\ \text{s.a.} & 2x+7y-2z \leq 30 \\ & x+3y-z = 13 \\ & x+2y+3z \geq 1 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

(a) Calcula directamente, sin hacer iteraciones (ni tanteos), la tabla del símplex correspondiente a la solución $(x, y, z) = (1, 4, 0)$.

(b) Razona (tanto en el caso en el que el objetivo sea maximizar como en el caso en que sea minimizar) si la tabla es óptima. En caso afirmativo razona si la solución es de vértice, de arista finita o de arista infinita. En caso negativo itera hasta llegar a la tabla óptima.

(c) Estudia si la solución $(x, y, z) = (13, 0, 0)$ es factible básica.

(d) Razona sin calcular ninguna tabla del símplex si la solución del apartado anterior es óptima para el problema de maximizar o el de minimizar.

20. Considera el problema:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x + 5y + 9z \\ \text{s.a} & x + 2y + 2z \geq 10 \\ & 2x + 3y - z = 18 \\ & 2x + y - z \leq 21 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

(a) Calcula la tabla del símplex correspondiente a la solución $(x, y, z) = (6, 2, 0)$.

(b) Calcula la solución óptima del problema e indica si es de vértice, de arista finita o de arista infinita.

(c) Estudia si existe una solución básica con variables básicas (x, z, t). ¿Es factible? ¿Es óptima?

21. Considera el problema:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & -3x + 2y + 3z \\ \text{s.a} & -x + y \leq 3 \\ & -x - 2y + z = 1 \\ & y \leq 13 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

(a) Estudia si $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ es una solución factible básica del problema.

(b) Calcula sin realizar ninguna iteración (ni tanteos) la tabla del símplex correspondiente a la solución $(x, y, z) = (0, 3, 7)$.

(c) Razona si es óptima y, en caso de que no lo sea, itera hasta llegar a una tabla óptima.

(d) Razona si el problema tiene solución de vértice, de arista finita o de arista infinita.

Cuestiones

22. La tabla siguiente corresponde a un problema de maximizar. Complétala y calcula una solución óptima del problema que no sea $(x, y, z) = (3, 5, 0)$.

	2	1	3	0	
	x	y	z	s	
x			1	2	3
y			1	3	5

23. La tablas siguientes corresponden a problemas de maximizar. Complétalas para que correspondan a un problema 1) con solución de vértice, 2) solución de arista finita, 3) solución de arista infinita, 4) no acotado.

	2	-3			0	
	x	y	z	w	s	
x			-2	2	4	8
y			-5	1	2	2

	2	-3			0	
	x	y	z	w	s	
x			-2	2	4	8
y			-5	1	2	2

	2	-3			0	
	x	y	z	w	s	
x			-2	2	4	8
y			-5	1	2	2

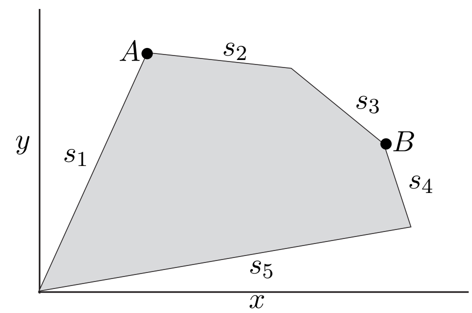
	2	-3			0	
	x	y	z	w	s	
x			-2	2	4	8
y			-5	1	2	2

24. La tablas siguientes corresponden a problemas de maximizar. Complétalas para que correspondan a un problema no acotado en un caso y a una solución óptima de arista infinita en el otro.

	-2	5		0	
	x	y	z	s	
x		-3			4
s		1			2

	-2	5		0	
	x	y	z	s	
x		-3			4
s		1			2

25. La figura siguiente representa el conjunto de oportunidades de un problema de maximizar, cuyo objetivo es maximizar x. Hay cinco restricciones y junto a cada una de ellas se indica su variable de holgura. Imagina que hemos calculado la tabla del símplex correspondiente a la solución señalada como A.



(a) ¿Qué variable entra en la base y cuál sale?

(b) ¿Cuántas iteraciones habrá que hacer para llegar a la tabla óptima?

(c) Indica cuáles son las variables básicas de la solución actual y las de las de las tablas sucesivas por las que pasará el método símplex hasta llegar a la solución óptima.

(d) ¿Hay alguna solución factible básica degenerada?

(e) Supón ahora que el objetivo es maximizar y y que la solución actual es B. Razona el signo de los marginales de las variables no básicas.

26. Explica por qué las tablas siguientes son imposibles:

		1	2	1	0	0	0	
		x	y	z	s	t	u	
1	x	1	0	1	0	2	1	1
0	s	0	0	-1	1	1	0	3
2	y	0	1	0	0	0	2	-1
		1	2	1	0	2	5	-1
		0	0	0	0	-2	-5	

		1	2	1	0	0	0	
		x	y	z	s	t	u	
1	x	1	0	1	-2	0	1	1
0	s	0	0	-1	1	1	0	3
2	y	0	1	3	1	0	-2	2
		1	2	7	0	0	-3	5
		0	0	-6	0	0	3	

5 Análisis de sensibilidad y postoptimización

En este tema veremos cómo extraer información adicional sobre las soluciones óptimas de los problemas lineales a partir de la tabla óptima del símplex. Usaremos como ilustración el ejemplo siguiente:

Ejemplo 1a Una empresa fabrica tres tipos de zumo: de melocotón, de uva y una mezcla de ambos. El problema siguiente determina los decalitros a producir de cada uno de ellos para aprovechar todo el stock disponible de ambas frutas con coste mínimo de elaboración:

$$\begin{array}{rll} \text{Min.} & 3x + 3y + 7z & \text{coste} \\ \text{s.a} & x \qquad + \ z \geq 200 & \text{stock de melocotón (en kg)} \\ & \qquad y + 2z \geq 500 & \text{stock de uva (en kg)} \\ & x,\ y,\ z \geq 0 & \end{array}$$

Mostramos a continuación la matriz técnica del problema y la tabla óptima:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & y & z & s & t & \end{array} \\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 500 \end{pmatrix} \end{array}$$

		3	3	7	0	0	
		x	y	z	s	t	
3	y	-2	1	0	2	-1	100
7	z	1	0	1	-1	0	200
		1	3	7	-1	-3	1 700
		2	0	0	1	3	

Vemos que la solución óptima es $(x, y, z) = (0, 100, 200)$, es decir, conviene producir 100 dal de zumo de uva y 200 dal de zumo mixto. El coste mínimo es de 1 700 u.m.

5.1 Postoptimización respecto a los coeficientes de la función objetivo

En general, la postoptimización consiste en determinar, en caso de que se modifique un dato del problema, cuál es la nueva tabla óptima a partir de la anterior.

Ejemplo 1b ¿Cuál sería la nueva solución óptima si el coste de producción del zumo de melocotón fuera de 2 u.m. por dal?

Solución: El coste actual del primer zumo es de 3 u.m., y este valor aparece en la parte superior de la tabla óptima. Para obtener la nueva solución lo cambiamos por un 2 y observamos que esto influye únicamente en el rendimiento marginal de la variable x, por lo que la tabla modificada (con los cambios marcados en negrita) es:

		2	3	7	0	0	
		x	y	z	s	t	
3	y	-2	1	0	2	-1	100
7	z	1	0	1	-1	0	200
		1	3	7	-1	-3	1 700
		1	0	0	1	3	

Como la tabla sigue siendo óptima, concluimos que la solución óptima sigue siendo la misma, $(x, y, z) = (0, 100, 200)$.

Ejemplo 1c ¿Cuál sería la nueva solución óptima si el coste de producción del zumo de melocotón pasara a ser de 0.5 u.m. por dal?

Solución: Ahora, la tabla modificada es:

		0.5	3	7	0	0	
		x	y	z	s	t	
3	y	−2	1	0	2	−1	100
7	z	1	0	1	−1	0	200
		1	3	7	−1	−3	1 700
		−0.5	0	0	1	3	

Observamos que ahora la tabla ya no es óptima. Para encontrar la nueva solución óptima iteramos:

		0.5	3	7	0	0	
		x	y	z	s	t	
3	y	0	1	2	0	−1	500
0.5	x	1	0	1	−1	0	200
		0.5	3	6.5	−0.5	−3	1 600
		0	0	0.5	0.5	3	

Concluimos que la nueva solución óptima es producir 200 dal de zumo de melocotón y 500 dal de zumo de uva, y el coste mínimo ha disminuido a 1 600 u.m.

Ejemplo 1d ¿Cuál sería la nueva solución óptima si el coste de producción del zumo mixto fuera de 10 u.m.?

Solución: El coste actual es de 7 u.m., pero ahora hay una diferencia con los casos anteriores, y es que la variable z es básica, por lo que debemos cambiar el 7 por 10 tanto en la fila superior de la tabla como en la columna izquierda, lo cual a su vez obliga a modificar toda la parte inferior de la tabla:

		3	3	**10**	0	0	
		x	y	z	s	t	
3	y	−2	1	0	2	−1	100
10	z	1	0	1	−1	0	200
		4	3	**10**	**−4**	−3	**2 300**
		−1	0	0	**4**	3	

Vemos que la tabla no es óptima, luego tenemos que iterar:

		3	3	10	0	0	
		x	y	z	s	t	
3	y	0	1	2	0	−1	500
3	x	1	0	1	−1	0	200
		3	3	9	−3	−3	2 100
		0	0	1	3	3	

Concluimos que la nueva solución óptima es producir 200 dal de zumo de melocotón y 500 dal de zumo de uva, y el coste mínimo ha subido a 2 100 u.m.

5.2 Intervalos de sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo

Acabamos de ver que cuando se modifica un coeficiente de la función objetivo la tabla óptima puede continuar siendo óptima (y en tal caso la solución óptima es la misma), o bien puede dejar de ser óptima y entonces hay que iterar para encontrar la nueva solución óptima. Podemos preguntarnos cuánto puede variar un coeficiente para que la modificación en la tabla sea lo suficientemente pequeña como para que no haga falta iterar. La respuesta es un intervalo llamado *intervalo de sensibilidad* del coeficiente. En resumen:

> El intervalo de sensibilidad de un coeficiente de la función objetivo indica que mientras dicho coeficiente permanezca en él la solución óptima del problema seguirá siendo la misma, aunque el valor óptimo de la función objetivo puede variar (si el coeficiente es de una variable básica).

Ejemplo 1e Calcula e interpreta el intervalo de sensibilidad del coste de producción del zumo de melocotón.

SOLUCIÓN: Para calcular un intervalo de sensibilidad, sustituimos el dato en cuestión (en este caso el coeficiente de la variable x) por una variable:

$$
\begin{array}{cc|ccccc|c}
 & & c_1 & 3 & 7 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & z & s & t & \\
\hline
3 & y & -2 & 1 & 0 & 2 & -1 & 100 \\
7 & z & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 200 \\
\hline
 & & 1 & 3 & 7 & -1 & -3 & \\
\cline{3-7}
 & & c_1-1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1\,700 \\
\hline
\end{array}
$$

Para que la tabla sea óptima, como el problema es de minimizar, todos los marginales deben ser ≥ 0, lo que se traduce en la condición $c_1 - 1 \geq 0$ (si el problema hubiera sido de maximizar hubiéramos tenido que exigir $c_1 - 1 \leq 0$). Despejamos c_1 y queda $c_1 \geq 1$. Esto corresponde al intervalo $[1, +\infty[$.

La interpretación de este intervalo es que mientras el coste de producción del zumo de melocotón no sea inferior a 1 u.m. por dal, la solución óptima seguirá siendo la misma, es decir, seguirá conviniendo producir 100 dal de zumo de uva y 200 dal de zumo mixto con un coste de 1 700 u.m.

Ejemplo 1f Calcula e interpreta el intervalo de sensibilidad del coste de producción del zumo mixto.

SOLUCIÓN: Sustituimos el 7 por c_3 en la tabla. Como la variable z es básica, hay que hacerlo tanto en la fila superior como en la columna izquierda:

$$
\begin{array}{cc|ccccc|c}
 & & 3 & 3 & c_3 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & z & s & t & \\
\hline
3 & y & -2 & 1 & 0 & 2 & -1 & 100 \\
c_3 & z & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 200 \\
\hline
 & & c_3-6 & 3 & c_3 & -c_3+6 & -3 & \\
\cline{3-7}
 & & -c_3+9 & 0 & 0 & c_3-6 & 3 & 200c_3+300 \\
\hline
\end{array}
$$

Como el problema es de minimizar, para que la tabla sea óptima los marginales deben ser ≥ 0, luego tenemos que exigir que $-c_3 + 9 \geq 0$ y $c_3 - 6 \geq 0$. Al despejar c_3 obtenemos

$$-c_3 + 9 \geq 0 \Rightarrow -c_3 \geq -9 \Rightarrow c_3 \leq 9, \qquad c_3 - 6 \geq 0 \Rightarrow c_3 \geq 6.$$

Esto se traduce en que c_3 puede variar en el intervalo $[6, 9]$. Así pues:

Mientras el coste de producción del zumo mixto esté entre 6 y 9 u.m. por dal, la solución óptima del problema será la misma, es decir, convendrá producir 100 dal de zumo de uva y 200 dal de zumo mixto, pero el coste mínimo puede variar.

5.3 Postoptimización respecto a un coeficiente técnico

Si en un problema lineal se modifica el valor de un coeficiente técnico de una variable no básica, su efecto sobre la tabla óptima se refleja en la columna correspondiente, que es $B^{-1}\bar{a}$, donde $\bar{a}$ es la columna de la matriz técnica en la que está el coeficiente. En particular se modifica el marginal de la variable correspondiente. Mientras el nuevo valor siga cumpliendo la condición de optimalidad (sea ≥ 0 para problemas de minimizar o bien ≤ 0 para problemas de maximizar) la solución óptima seguirá siendo la misma, y en caso contrario podremos iterar a partir de la tabla óptima modificada para obtener la nueva solución óptima:

Ejemplo 1g Calcula la nueva solución óptima si el zumo de melocotón requiriera 4 kg de melocoton por decalitro.

Solución: La cantidad de melocotón por decalitro del zumo de melocotón es el coeficiente a_{11} de la matriz técnica, que actualmente es $a_{11} = 1$. Para determinar los cambios en $B^{-1}A$ si pasa a valer 4 necesitamos la matriz básica y su inversa:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos recalcular $B^{-1}A$ o simplemente hacer los cálculos con la columna modificada de A, pues el resto no va a cambiar:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix},$$

luego la tabla del símplex pasa a ser

		3	3	7	0	0	
		x	y	z	s	t	
3	y	$\mathbf{-8}$	1	0	2	-1	100
7	z	$\mathbf{4}$	0	1	-1	0	200
		$\mathbf{4}$	3	7	-1	-3	1 700
		$\mathbf{-1}$	0	0	1	3	

Vemos que la tabla ya no es óptima (si lo hubiera sido, concluiríamos que la solución óptima seguiría siendo la misma). Para obtener la nueva solución óptima iteramos:

		3	3	7	0	0	
		x	y	z	s	t	
3	y	0	1	2	0	−1	500
3	x	1	0	0.25	−0.25	0	50
		3	3	6.75	−0.75	−3	1 650
		0	0	0.25	0.75	3	

Por lo tanto, la nueva solución óptima consiste en producir 50 dal de zumo de melocotón, y 500 dal de zumo de uva.

5.4 Intervalo de sensibilidad de un coeficiente técnico

El intervalo de sensibilidad de un coeficiente técnico indica en qué rango puede éste variar para que la tabla óptima siga siendo óptima y, por consiguiente, la solución óptima siga siendo la misma, es decir:

> El intervalo de sensibilidad de un coeficiente técnico de una variable no básica indica que mientras dicho coeficiente permanezca en él la solución óptima del problema seguirá siendo la misma, al igual que el valor óptimo de la función objetivo.

Ejemplo 1h Calcula e interpreta el intervalo de sensibilidad de los kg de melocotón requieridos para cada decalitro de zumo de melocotón.

Solución: Planteamos la modificación de la tabla óptima para un valor arbitrario a_{11} del coeficiente técnico. La columna de la variable x pasa a ser

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a_{11} \\ a_{11} \end{pmatrix},$$

de modo que la tabla óptima pasa a ser

		3	3	7	0	0	
		x	y	z	s	t	
3	y	$\mathbf{-2a_{11}}$	1	0	2	−1	100
7	z	$\mathbf{a_{11}}$	0	1	−1	0	200
		$\mathbf{a_{11}}$	3	7	−1	−3	1 700
		$\mathbf{3-a_{11}}$	0	0	1	3	

Para que la tabla siga siendo óptima tiene que cumplirse que $3-a_{11} \geq 0$, que equivale a $a_{11} \leq 3$. Por lo tanto el intervalo de sensibilidad es $]-\infty, 3]$.

La interpretación es que mientras la producción de cada decalitro de zumo de melocotón no requiera más de 3 kg de melocotón la solución óptima seguirá siendo la misma.

5.5 Intervalos de sensibilidad de términos independientes

Los términos independientes de un problema lineal intervienen en la última columna de la tabla del símplex. Al modificar uno de ellos variará esta columna. Si alguno de los nuevos valores pasa a ser negativo, la tabla ya no proporciona información sobre la solución óptima, pero mientras todos sigan siendo positivos, la tabla continuará siendo óptima, la solución óptima será distinta, pero las variables básicas seguirán siendo las mismas. El intervalo de sensibilidad de un término independiente indica el rango en que éste puede variar para que esto suceda, es decir:

> El intervalo de sensibilidad de un término independiente indica que mientras dicho coeficiente permanezca en él la solución óptima tendrá las mismas variables básicas (y en particular el problema seguirá teniendo solución óptima).

Ejemplo 1i Calcula e interpreta el intervalo de sensibilidad del stock de melocotón.

SOLUCIÓN: El stock de melocotón es el término independiente b_1. Al variar se altera la última columna de la tabla óptima, que es $B^{-1}\bar{b}$. Consideramos la matriz básica B y su inversa:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que la última columa de la tabla para un b_1 arbitrario es:

$$B^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b_1 + 500 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

La tabla seguirá siendo la tabla óptima mientras

$$-2b_1 + 500 \geq 0, \qquad b_1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 \leq 250, \quad b_1 \geq 0,$$

luego el intervalo es $[0, 250]$.

La interpretación es que mientras el stock de melocotón no exceda los 250 kg, las variables básicas (y no básicas) de la solución óptima seguirán siendo las mismas, más precisamente:

- Seguirá siendo $x = 0$, es decir, seguirá sin ser conveniente producir zumo de melocotón.
- Seguirán siendo $s = t = 0$, es decir, la producción no requerirá más kg de melocotón y uva que los disponibles en stock.

Es importante recordar que en la situación del ejemplo anterior, cuando decimos que las variables básicas seguirán siendo las mismas, nos referimos a que seguirán siendo las mismas variables, no que seguirán tomando el mismo valor. Esto no sería cierto, como muestra el ejemplo siguiente:

Ejemplo 1j (postoptimización respecto a un término independiente) Determina cuál sería la solución óptima si se estropean 100 kg de melocotón.

SOLUCIÓN: La última columna de la tabla del símplex pasará a ser

$$B^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, éstos serán los nuevos valores de las variables básicas (y, z), de modo que la nueva solución óptima es $(x, y, z) = (0, 300, 100)$, es decir, que conviene producir 300 dal de zumo de uva y 100 dal de zumo mixto.

5.6 Cálculo de precios duales y costes reducidos

El precio dual, o la variable dual, de una restricción indica la variación que experimentará la función objetivo por cada unidad que aumente el término independiente de la restricción.

Ésta es la definición usual de variable dual, que no coincide exactamente con la que usa LINGO. Recordemos que para LINGO el precio dual es lo que **mejora** la función objetivo por cada unidad que aumenta el término independiente, mientras que con la definición usual no es lo que mejora, sino lo que **aumenta,** es decir, un signo positivo indica siempre un aumento y un signo negativo una disminución.

Para calcular los precios duales del problema que estamos tomando como ejemplo sustituimos todos los términos independientes por variables y recalculamos la tabla óptima. La última columna será:

$$B^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b_1 + b_2 \\ b_1 \end{pmatrix},$$

luego la tabla óptima pasará a ser

$$\begin{array}{cc|rrrrr|c}
 & & 3 & 3 & 7 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & z & s & t & \\
\hline
3 & y & -2 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2b_1 + b_2 \\
7 & z & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & b_1 \\
\hline
 & & 1 & 3 & 7 & -1 & -3 & \\
\cline{3-7}
 & & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & b_1 + 3b_2 \\
\hline
\end{array}$$

Vemos entonces que, por cada unidad que aumente b_1 la función objetivo aumentará 1 unidad, mientras que por cada unidad que aumente b_2 la función objetivo aumentará 3 unidades. Observemos que para calcular la casilla de la función objetivo, lo que hemos hecho ha sido multiplicar la primera columna, que es el vector $\bar{c}_B$ de los coeficientes de las variables básicas en la función objetivo, por la útima, que es $B^{-1}\bar{b}$, luego podemos resumir el cálculo en que

$$\bar{c}_B^t B^{-1}\bar{b} = b_1 + 3b_2 = (1, 3)\bar{b}.$$

En la práctica no es necesario introducir las variables b_1 y b_2. Podemos calcular directamente

$$\bar{c}_B^t B^{-1} = (1, 3),$$

y éstas son las variables duales del problema. Así pues, el cálculo de las variables duales se reduce a aplicar la fórmula siguiente:

$$\bar{\lambda}^t = \bar{c}_B^t B^{-1},$$

donde $\bar{c}_B$ es el vector de coeficientes de las variables básicas en la función objetivo (la primera columna de la tabla del símplex óptima) y B es la matriz básica de dicha tabla.

Ejemplo 1k Calcula e interpreta las variables duales del problema del ejemplo 1.

SOLUCIÓN: Ya hemos calculado la matriz básica inversa, y con ella podemos calcular

$$(\lambda_1, \lambda_2) = \bar{c}_B B^{-1} = (3,7) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1,3).$$

Así pues, $\lambda_1 = 1$ significa que por cada kg que aumente el stock de melocotón el coste de producción aumentará en 1 u.m., y $\lambda_2 = 3$ significa que por cada kg que aumente el stock de uva el coste de producción aumentará en 3 u.m.

• Conviene tener presente que la variable dual λ de una restricción con término independiente b puede usarse para calcular la variación de la función objetivo F si b experimenta un incremento arbitrario Δb mediante la relación

$$\Delta F = \lambda\, \Delta b,$$

que es válida siempre y cuando la variación de b no haga que la tabla óptima deje de ser óptima, es decir, siempre que la variación de b quede dentro de su intervalo de sensibilidad:

> El intervalo de sensibilidad de un término independiente indica también el rango en el que puede variar dicho término independiente para que el precio dual pueda usarse para calcular la variación que experimentará la función objetivo.

Los costes reducidos que calcula LINGO pueden obtenerse directamente de la tabla del símplex, puesto que no son sino los marginales de las variables principales del problema:

> El coste reducido de una variable de un problema lineal indica la variación del valor óptimo de la función objetivo por cada unidad que aumenta el término independiente de la condición de signo. Claramente, en la tabla del símplex aparece como el marginal de la variable correspondiente.

> Como en el caso de los precios duales, el coste reducido de una variable x así definido tiene signo positivo cuando al exigir $x \geq 1$ la función objetivo aumenta, y tiene signo negativo cuando disminuye. Recordemos que en LINGO el signo siempre es positivo y siempre indica que la función objetivo empeora.

Ejemplo 1l Calcula e interpreta los costes reducidos del problema del ejemplo 1.

SOLUCIÓN: A la vista de la tabla óptima, el coste reducido de la variable x es 2 lo cual significa que no conviene producir zumo de melocotón, y por cada decalitro que quisiéramos producir el coste mínimo aumentaría en 2 unidades. El coste reducido de la variable y es 0, lo cual indica que, como ya se producen 100 dal de zumo de uva, exigir que se produzca al menos un decalitro no alteraría la solución óptima. Lo mismo vale para el coste reducido de la variable z, que también es 0.

5.7 Problemas resueltos

1. Considera el problema

$$\begin{aligned} \text{Max.}\quad & x + 2y \\ \text{s.a}\quad & x + y \leq 4 \\ & 2x + y \leq 6 \\ & x,\, y \geq 0 \end{aligned}$$

cuya tabla óptima es

$$
\begin{array}{cc|cccc|c}
 & & 1 & 2 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & s & t & \\
\hline
2 & y & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\
0 & t & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\
\hline
 & & 2 & 2 & 2 & 0 & \\
\cline{3-6}
 & & -1 & 0 & -2 & 0 & 8 \\
\hline
\end{array}
$$

(a) Estudia qué sucede si c_1 pasa a valer $3/2$.

(b) Estudia qué sucede si c_1 pasa a valer 3.

(c) Estudia qué sucede si c_2 pasa a valer 4.

(d) Calcula el intervalo de sensibilidad de c_1.

(e) Calcula el intervalo de sensibilidad de c_2.

(f) Estudia qué sucede si b_1 pasa a valer 5.

(g) Calcula el intervalo de sensibilidad de b_1.

(h) Estudia qué sucede si a_{11} pasa a valer 2.

(i) Calcula el intervalo de sensibilidad de a_{11}.

SOLUCIÓN: a) Como la variable x es no básica, sólo se modifica la primera columna de la tabla, de modo que el marginal pasa a ser $w_1 = -1/2$. Como se sigue cumpliendo la condición de optimalidad, la solución sigue siendo óptima, con el mismo valor de la función objetivo.

b) Ahora la tabla pasa a ser

$$
\begin{array}{cc|cccc|c}
 & & 3 & 2 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & s & t & \\
\hline
2 & y & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\
0 & t & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\
\hline
 & & 2 & 2 & 2 & 0 & \\
\cline{3-6}
 & & 1 & 0 & -2 & 0 & 8 \\
\hline
\end{array}
$$

Vemos que la solución ya no es óptima, por lo que aplicamos el símplex: entra x y sale t:

$$
\begin{array}{cc|cccc|c}
 & & 3 & 2 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & s & t & \\
\hline
2 & y & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\
3 & x & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\
\hline
 & & 3 & 2 & 1 & 1 & \\
\cline{3-6}
 & & 0 & 0 & -1 & -1 & 10 \\
\hline
\end{array}
$$

La nueva solución óptima es $(x, y) = (2, 2)$ con $F = 10$.

c) Como la variable y es básica, se modifican todos los rendimientos marginales. La nueva tabla es

$$
\begin{array}{cc|cccc|c}
 & & 1 & 4 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & s & t & \\
\hline
4 & y & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\
0 & t & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\
\hline
 & & 4 & 4 & 4 & 0 & \\
\cline{3-6}
 & & -3 & 0 & -4 & 0 & 16 \\
\hline
\end{array}
$$

Vemos que la solución sigue siendo óptima, sólo que ahora la función objetivo vale $F = 16$.

d) Para calcularlo ponemos un coeficiente indeterminado en la tabla:

$$
\begin{array}{cc|cccc|c}
 & & c_1 & 2 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & s & t & \\
\hline
2 & y & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\
0 & t & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\
\hline
 & & 2 & 2 & 2 & 0 & \\
\cline{3-6}
 & & c_1-2 & 0 & -2 & 0 & 8 \\
\hline
\end{array}
$$

La tabla seguirá siendo óptima mientras $c_1 - 2 \leq 0$, es decir, $c_1 \leq 2$, luego el intervalo de sensibilidad es $]-\infty, 2]$.

e) Como y es una variable básica, c_2 afecta a todos los rendimientos marginales:

$$
\begin{array}{cc|cccc|c}
 & & 1 & c_2 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & s & t & \\
\hline
c_2 & y & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\
0 & t & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\
\hline
 & & c_2 & c_2 & c_2 & 0 & \\
\cline{3-6}
 & & 1-c_2 & 0 & -c_2 & 0 & 4c_2 \\
\hline
\end{array}
$$

La tabla seguirá siendo óptima mientras $1 - c_2 \leq 0$ y $-c_2 \leq 0$, es decir, $c_2 \geq 1$ y $c_2 \geq 0$. El intervalo es $[1, +\infty[$.

> En general, si en la matriz técnica hay una matriz identidad (en este caso la hay en las columnas de s y t), en la tabla óptima encontramos la matriz B^{-1} en esas mismas columnas. Observa que, en efecto, en las columnas de s y t en la tabla óptima está la matriz
>
> $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

f) Tenemos que

$$
A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & s & t \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

(Notemos que B^{-1} puede extraerse también de la tabla óptima). Si $\bar{b}$ pasa a ser $(5, 6)$, tenemos que

$$
B^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Como se sigue cumpliendo la condición de factibilidad, la solución sigue siendo óptima. Ahora bien, la solución original era $(x, y) = (0, 4)$ con variables de holgura $(s, t) = (0, 2)$ y función objetivo $z = 8$, mientras que la nueva solución es $(x, y) = (0, 5)$ con variables de holgura $(s, t) = (0, 1)$ y función objetivo $F = 10$.

g) Calculamos como antes la matriz B^{-1}, de modo que

$$\bar{x}_B = B^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ -b_1 + 6 \end{pmatrix}.$$

La solución seguirá siendo factible si $b_1 \geq 0$ y $-b_1 + 6 \geq 0$, es decir, si $b_1 \geq 0$ y $b_1 \leq 6$. El intervalo de sensibilidad es, pues, $[0, 6]$.

h) Calculamos

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(El cálculo está hecho antes.) Ahora obtenemos la nueva parte central de la tabla:

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Notamos que sólo se modifica la primera columna respecto de los valores anteriores, por lo que hubiera bastado recalcular sólo ésta.) La nueva tabla será

		1	2	0	0	
		x	y	s	t	
2	y	2	1	1	0	4
0	t	0	0	−1	1	2
		4	2	2	0	8
		−3	0	−2	0	

Vemos que la solución sigue siendo óptima. (Si no lo hubiera sido, simplemente habríamos calculado las iteraciones necesarias para llegar de nuevo a un óptimo.)

i) Repetimos los cálculos anteriores pero con un coeficiente a_{11} arbitrario:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 1 & 1 & 0 \\ 2 - a_{11} & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora será $z_1 = 2a_{11}$ y $w_1 = 1 - 2a_{11}$, luego la tabla será óptima mientras $1 - 2a_{11} \leq 0$. El intervalo es $[1/2, +\infty[$.

2. El problema siguiente maximiza el beneficio de una empresa sujeto a una restricción presupuestaria teniendo en cuenta que la capacidad de producción total está limitada a 40 unidades.

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & 2x + 3y + 2z & \text{beneficio} \\ \text{s.a} & 3x + 2y + 4z \leq 100 & \text{coste} \leq \text{presupuesto} \\ & x + \ y + \ z \leq 40 & \text{producción} \leq \text{capacidad} \\ & x,\, y,\, z \geq 0 & \end{array}$$

		2	3	2	0	0	
		x	y	z	s	t	
0	s	1	0	2	1	−2	20
3	y	1	1	1	0	1	40
		3	3	3	0	3	120
		−1	0	−1	0	−3	

La tabla corresponde a la solución óptima del problema.

(a) Deduce de la tabla cuál es la solución óptima del problema dado y el beneficio máximo.

(b) Calcula e interpreta las variables duales de las restricciones y los costes reducidos de las variables.

(c) ¿Cómo afectaría a los beneficios de la empresa que una avería en una máquina redujera la capacidad de producción a 35 unidades? Razona la respuesta sin calcular la nueva solución óptima.

(d) Calcula e interpreta el intervalo de sensibilidad del beneficio unitario del segundo producto.

(e) Calcula e interpreta el intervalo de sensibilidad de la capacidad de producción.

(f) Si el beneficio unitario del primer artículo aumentara hasta 4 u.m., ¿seguiría sin ser conveniente producir dicho artículo?

(g) Calcula e interpreta el intervalo de sensibilidad del coste unitario del tercer artículo.

SOLUCIÓN: a) La solución óptima consiste en producir únicamente 40 unidades del segundo producto. El beneficio máximo que puede obtener es de 120 u.m.

b) Como la matriz técnica del problema tiene la matriz identidad en las columnas de s y t, en dichas columnas de la tabla óptima está la matriz B^{-1}. Por lo tanto, las variables duales son

$$(\lambda, \mu) = (0, 3) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 3).$$

Se cumple que $\lambda = 0$ porque la restricción presupuestaria no está saturada, y hay $s = 20$ u.m. de presupuesto que no se utilizan. Por lo tanto, una pequeña variación en el presupuesto no cambia la solución óptima.

En cambio, $\mu = 3$ significa que por cada unidad que aumente la capacidad de producción, el beneficio aumentará en 3 u.m.

Los costes reducidos son $c_x = -1$, $c_y = 0$, $c_z = -1$.

$c_x = -1$ significa que no conviene producir el primer artículo, y cada unidad que produjéramos haría disminuir el beneficio en una unidad. Lo mismo vale para $c_z = -1$. En cambio, $c_y = 0$ indica únicamente que, como ya estamos produciendo 40 unidades del segundo artículo, la exigencia de producir al menos una no altera la solución óptima.

c) Si la capacidad de producción se redujera en 5 unidades, el efecto sobre el beneficio sería

$$\mu \cdot (-5) = 3 \cdot (-5) = -15,$$

es decir, el beneficio disminuiría 15 unidades.

d) El beneficio unitario del segundo producto es el coeficiente c_2:

		2	c_2	2	0	0	
		x	y	z	s	t	
0	s	1	0	2	1	-2	20
c_2	y	1	1	1	0	1	40
		c_2	c_2	c_2	0	c_2	$40c_2$
		$2-c_2$	0	$2-c_2$	0	$-c_2$	

Para que la tabla siga siendo óptima se tiene que cumplir que

$$2 - c_2 \leq 0, \quad 2 - c_2 \leq 0, \quad -c_2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 \geq 2,\ c_2 \geq 0,$$

luego el intervalo de sensibilidad es $[2, +\infty[$. Su interpretación es que mientras el beneficio unitario del segundo producto no sea inferior a 2 u.m., la solución óptima seguirá siendo la misma (es decir, producir 40 unidades del segundo producto), aunque el beneficio óptimo variará (será $40c_2$).

e) La capacidad de producción es el término independiente b_2. Tenemos que recalcular la última columna de la tabla:

$$B^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 - 2b_2 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Para que la tabla siga siendo factible se tiene que cumplir que

$$100 - 2b_2 \geq 0, \quad b_2 \geq 0 \quad \Rightarrow b_2 \leq 50, \quad b_2 \geq 0,$$

luego el intervalo de sensibilidad es $[0, 50]$. Su interpretación es que mientras la capacidad de producción no supere las 50 unidades de producto, las variables básicas y no básicas de la solución óptima serán las mismas, lo que se traduce en que seguirá sin producir el primer y el tercer producto y se seguirá agotando el presupuesto.

f) Modificamos en la tabla óptima el coeficiente c_1:

$$\begin{array}{cc|rrrrr|c}
 & & \mathbf{4} & 3 & 2 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & z & s & t & \\
\hline
0 & s & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 20 \\
3 & y & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 40 \\
\hline
 & & 3 & 3 & 3 & 0 & 3 & \\
\cline{3-7}
 & & \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 & -3 & 120 \\
\hline
\end{array}$$

Vemos que la tabla ya no es óptima, así que iteramos para obtener la nueva solución óptima:

$$\begin{array}{cc|rrrrr|c}
 & & 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & \\
 & & x & y & z & s & t & \\
\hline
4 & x & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 20 \\
3 & y & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 & 20 \\
\hline
 & & 4 & 3 & 5 & 1 & 1 & \\
\cline{3-7}
 & & 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & 140 \\
\hline
\end{array}$$

La nueva solución óptima consiste en producir 20 unidades del primer artículo y 20 del segundo. Por lo tanto, en estas condiciones ya conviene producir el primer artículo.

g) El coste unitario del tercer artículo es el coeficiente técnico a_{13}. La columna de z en la tabla óptima se modifica así:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} - 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, queda

		2	3	2	0	0	
		x	y	z	s	t	
0	s	1	0	$a_{13}-2$	1	-2	20
3	y	1	1	1	0	1	40
		3	3	3	0	3	120
		-1	0	-1	0	-3	

Vemos que a_{13} no influye en los marginales de la tabla, por lo que el intervalo es $]-\infty, +\infty[$, es decir, la solución óptima es la misma cualquiera que sea el coste de producción del tercer artículo.

3. El problema siguiente minimiza el coste de producción de una empresa que fabrica dos productos A y B de los que se requiere una producción mínima conjunta de 3 unidades de las cuales al menos 1 unidad debe ser del artículo A. Además la empresa desea emplear al menos todas las horas de mano de obra que ya tiene contratadas para la producción:

Min.	$3x+y$	coste
s.a	$x+y \geq 3$	producción $\geq$ mínimo exigido
	$x \geq 1$	producción A $\geq$ mínimo exigido
	$x+2y \geq 4$	horas empleadas $\geq$ horas contratadas
	$x,\, y \geq 0$	

La tabla óptima es:

		3	1	0	0	0	
		x	y	s	t	u	
3	x	1	0	0	-1	0	1
1	y	0	1	-1	1	0	2
0	u	0	0	-2	1	1	1
		3	1	-1	-2	0	5
		0	0	1	2	0	

(a) Calcula e interpreta las variables duales de las restricciones y los costes reducidos de las variables principales.

(b) Razona el efecto que tendría sobre el coste que la empresa necesitara producir al menos un total de 1.5 unidades de A.

(c) Calcula el intervalo de sensibilidad del coste unitario del producto B. Interprétalo.

(d) Calcula el intervalo de sensibilidad de las unidades requeridas de A.

(e) Razona por postoptimización cuál sería la nueva solución óptima y el nuevo coste óptimo si la empresa necesitara producir al menos 1.5 unidades de A.

Solución: Observemos que la matriz técnica del problema es

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{array} \right).$$

De aquí obtenemos la matriz básica y su inversa:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Las variables duales son:

$$(\lambda, \mu, \nu) = \bar{c}_B^t B^{-1} = (3, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = (1, 2, 0).$$

Los costes reducidos son $(c_x, c_y) = (0, 0)$.

$\lambda = 1$ significa que por cada unidad adicional de producción que se requiera el coste aumentaría en 1 u.m.

$\mu = 2$ significa que por cada unidad adicional que se exija producir del artículo A el coste aumentará en 2 u.m.

$\nu = 0$ indica que, como se está usando $u = 1$ hora más de las contratadas, una pequeña variación en dicho número de horas contratadas no afecta a la solución óptima (ni, por tanto, al coste).

Los costes $c_x = c_y = 0$ indican que, como ya se están produciendo los artículos A y B, exigir que se produzca al menos una unidad de uno de ellos no afecta a la solución óptima (ni al coste).

b) Para garantizar que se produzcan 1.5 unidades de A tenemos que aumentar en 0.5 el término independiente b_2, y el efecto sobre el coste es

$$\mu \cdot 0.5 = 2 \cdot 0.5 = 1,$$

así pues, el coste aumentaría 1 u.m.

c) El coste unitario de B es el coeficiente c_2 de la función objetivo. Modificamos la tabla óptima:

		3	c_2	0	0	0	
		x	y	s	t	u	
3	x	1	0	0	-1	0	1
c_2	y	0	1	-1	1	0	2
0	u	0	0	-2	1	1	1
		3	c_2	$-c_2$	$c_2 - 3$	0	$2c_2 + 3$
		0	0	c_2	$-c_2 + 3$	0	

Para que la tabla siga siendo óptima se tiene que cumplir que

$$c_2 \geq 0, \quad -c_2 + 3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 \geq 0, \quad c_2 \leq 3,$$

luego el intervalo de sensibilidad es $[0, 3]$. Esto significa que mientras el coste unitario de B no supere las 3 u.m. la solución óptima seguirá siendo la misma, aunque el coste mínimo variará (será $2c_2 + 3$).

d) Las unidades requeridas de A son el término independiente b_2. Tenemos que calcular de nuevo la última columna de la tabla:

$$B^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ b_2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ 3 - b_2 \\ 2 - b_2 \end{pmatrix}$$

Para que la tabla siga siendo factible, tiene que cumplirse que

$$b_2 \geq 0, \quad 3 - b_2 \geq 0, \quad 2 - b_2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad b_2 \geq 0, \quad b_2 \leq 3, \quad b_2 \leq 2.$$

Por lo tanto, el intervalo de sensibilidad es $[0, 2]$. Esto significa que mientras la cantidad requerida de A no sea superior a 2 unidades las variables básicas y no básicas de la solución óptima serán las mismas, lo que a su vez se traduce en que se seguirá produciendo el mínimo total exigido ($s = 0$) y también el mínimo exigido de A ($t = 0$).

e) En el resultado del apartado anterior concretamos $b_2 = 1.5$ y obtenemos que

$$B^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Así pues, la nueva solución óptima es producir $x = 1.5$ unidades de A, e $y = 1.5$ unidades de B..

5.8 Problemas propuestos

1. Un botellero embotella y comercializa tres tipos de vino A, B y C. Por cada cuba obtiene un beneficio de 50, 25 y 20 u.m. respectivamente. Cada cuba ha de pasar por dos fases: llenado y precintado. La primera trabaja hasta un total de 640 horas semanales y la segunda 900 horas semanales. El número de horas que una cuba necesita en cada fase viene dado por la tabla siguiente:

	Llenado	Precintado
A	16	30
B	4	5
C	6	10

La solución óptima del problema que determina la producción que maximiza los beneficios es $(0, 160, 0)$.

(a) ¿Cómo afectaría al beneficio que fuera necesario producir al menos dos cubas de tipo A?

(b) ¿Cuántas cubas de tipo C llenaría si las horas totales de la sección de llenado fueran 700?

(c) Si el beneficio por cuba de tipo A fuera de 55 u.m., ¿cuántas cubas de tipo B se llenarían?

(d) ¿Cuánto puede disminuir el beneficio unitario de las cubas de tipo A sin que la solución varíe?

(e) Calcula e interpreta el intervalo de sensibilidad del beneficio por cuba de tipo B.

2. Una empresa produce dos artículos en cantidades x e y, y los distribuye en un mercado cuya demanda máxima (conjunta para los dos productos) se estima en 200 unidades. El coste de producción unitario es de 2 u.m. para el primer producto y 3 u.m. para el segundo. El presupuesto de la empresa es de 500 u.m. Por otra parte, el beneficio que se obtiene por cada unidad del primer artículo es de 3 u.m., mientras que para el segundo es de 1 u.m.

   (a) Calcula la producción que maximiza los beneficios y el beneficio máximo.

   (b) Estudia las variaciones que se producirían si el beneficio unitario obtenido por el segundo artículo fuera de 2 unidades monetarias en lugar de 1.

   (c) Repite el apartado anterior para un beneficio unitario de 4 u.m.

   (d) Calcula el intervalo de sensibilidad del beneficio unitario de cada uno de los dos artículos.

   (e) Calcula el intervalo de sensibilidad del coste unitario del segundo artículo.

   (f) Calcula el intervalo de sensibilidad de la demanda del mercado.

   (g) Estudia las modificaciones en la solución que se producirían para una demanda de 250 unidades de producto.

3. Una empresa fabrica diariamente 100 unidades de un producto A, pero se está planteando destinar parte de sus recursos a la elaboración un segundo producto B. El problema siguiente determina las cantidades x e y que le conviene producir de cada uno para maximizar su beneficio, teniendo en cuenta que su capacidad de producción está limitada a 100 unidades entre ambos productos, que el presupuesto disponible para la producción es de 920 u.m. y que la cantidad de la principal materia prima disponible cada día está limitada a 140 unidades:

$$\begin{array}{rll}
\text{Max.} & 18x + 19y & \text{Beneficio} \\
\text{s.a} & x + \ \ y \leq 100 & \text{Producción} \\
 & 9x + 10y \leq 920 & \text{Presupuesto} \\
 & x + 2y \leq 140 & \text{Materia prima} \\
 & x,\, y \geq 0 &
\end{array}$$

   (a) Comprueba que la producción actual de la empresa, $(x, y) = (100, 0)$, es una solución factible básica del problema.

   (b) Calcula la tabla del símplex correspondiente a la solución anterior.

   (c) Determina si a la empresa le conviene fabricar o no el producto B. En caso afirmativo, ¿en qué cantidad?

   (d) Calcula las variables duales del problema. Interpreta la de la primera restricción.

   (e) Calcula e interpreta el intervalo de sensibilidad del beneficio unitario del primer producto.

   (f) Calcula e interpreta el intervalo de sensibilidad del presupuesto.

4. El problema siguiente determina la producción diaria más conveniente (x, y) de dos artículos para conseguir el máximo beneficio teniendo en cuenta que no pueden distribuirse más de 100 al día, que el presupuesto para la producción está limitado a 910 € y que debe emplear al menos 90 horas de mano de obra que tiene contratadas.

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & 19x + 18y & \text{Beneficio} \\ \text{s.a} & x + \ \ y \leq 100 & \text{Producción} \\ & 10x + 9y \leq 910 & \text{Presupuesto} \\ & 2x + \ \ y \geq 90 & \text{Horas de mano de obra} \\ & x,\, y \geq 0 & \end{array}$$

   (a) Comprueba que $(10, 90)$ es una solución factible básica del problema.

   (b) Calcula la tabla del símplex asociada a la solución del aparatado anterior. Razona si es óptima y, en caso de que no lo sea, itera hasta obtener la solución óptima.

   (c) Razona si convendría cambiar la producción en caso de que el beneficio proporcionado por cada unidad producida del segundo artículo fuera de 20 u.m.

   (d) Calcula las variables duales e interpreta la de la primera restricción.

   (e) Calcula e interpreta el intervalo de sensibilidad del beneficio unitario del primer artículo.

   (f) Calcula e interpreta el intervalo de sensibilidad de la producción máxima.

5. El problema siguiente determina la producción diaria más conveniente (x, y) de dos artículos para conseguir el máximo beneficio teniendo en cuenta que se dispone de 200 horas de trabajo diarias, que el presupuesto para la producción está limitado a 720 € y que la cantidad empleada de una materia prima M no puede exceder las 140 unidades diarias.

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & 10x + 4y & \text{Beneficio} \\ \text{s.a} & 2x + 3y \leq 200 & \text{Horas} \\ & 10x + 9y \leq 720 & \text{Presupuesto} \\ & 2x + \ \ y \leq 140 & \text{Materia prima} \\ & x,\, y \geq 0 & \end{array}$$

   (a) Resuelve el problema mediante el método símplex.

   (b) Calcula las variables duales e interpreta la de la restricción sobre la materia prima.

   (c) Calcula e interpreta el intervalo de sensibilidad de la cantidad de materia prima requerida por el segundo artículo.

   (d) Calcula e interpreta el intervalo de sensibilidad de la cantidad disponible de materia prima.

   (e) Determina si existe una solución factible básica con variables básicas y, s, t.

6. Una empresa fabrica dos productos en cantidades x_1 y x_2 a partir de dos procesos productivos que vienen representados por las restricciones

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 8, \end{aligned}$$

donde 9 y 8 son las cantidades disponibles de dos factores de producción. Suponiendo que los beneficios unitarios son de 1 y 2 unidades monetarias respectivamente y sabiendo que el beneficio máximo se obtiene cuando se agotan las disponibilidades de ambos factores productivos,

   (a) Calcula la tabla óptima del problema.

   (b) Realiza el análisis de sensibilidad de b_1 e interpreta el resultado.

7. Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ & 2x_1 + 4x_2 \leq 10 \\ & x_1,\, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Se sabe que las variables básicas en el óptimo son x_1 y s_1. Realiza el análisis de sensibilidad de b_1.

8. La solución óptima del problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ & x_1,\, x_2 \geq 0 \end{array}$$

es $(x_1, x_2) = (5, 2)$.

   (a) Calcula la tabla óptima sin realizar ninguna iteración.

   (b) Haz el análisis de sensibilidad de b_1.

9. Una empresa se plantea el siguiente problema lineal:

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & 3x + y + 2z & \text{(beneficios)} \\ \text{s.a} & 2x + y + z \leq 18 & \text{(capital)} \\ & 3x + 2y + 3z \leq 15 & \text{(horas de trabajo)} \\ & x,\, y,\, z \geq 0 & \end{array}$$

   (a) Calcula la tabla óptima del símplex sabiendo que la solución óptima es $(5, 0, 0)$.

   (b) Haz el análisis de sensibilidad de a_{12} y a_{22}.

   (c) Razona el efecto de reducir el trabajo de 15 a 12 horas.

   (d) Calcula el valor de las variables duales. Razona si a la empresa le interesa disponer de más capital o de más horas de trabajo para aumentar sus beneficios.

10. La tabla óptima del problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 10x_1 + 20x_2 \\ \text{s.a} & 3x_1 + 4x_2 \leq 60 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 62 \\ & x_2 \leq \ 9 \\ & x_1,\, x_2 \geq 0 \end{array}$$

viene dada por

		10	20	0	0	0	
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
0	s_1	0	0	1	$-3/5$	$-11/5$	3
10	x_1	1	0	0	$1/5$	$-\ 3/5$	7
20	x_2	0	1	0	0	1	9
		10	20	0	2	14	250
		0	0	0	-2	-14	

(a) Calcula las variables duales.

(b) ¿Para qué valores de c_1 la solución óptima sigue siendo la misma?

11. Una empresa fabrica dos productos en cantidades x_1 y x_2, a partir de dos procesos productivos representados por las restricciones

$$\begin{array}{r} x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + \ \ x_2 \leq 6, \end{array}$$

donde 8 y 6 son las cantidades disponibles de dos factores de producción. Los beneficios unitarios son de 6 y 2 unidades monetarias respectivamente.

(a) Determina la solución óptima del problema dual sabiendo que en la solución óptima del primal se fabrican 3 unidades del primer producto.

(b) Si el empresario desea aumentar su producción, ¿qué factor productivo le convendrá más aumentar?

12. Una empresa fabrica dos productos en cantidades diarias x e y. Dispone de 200 horas diarias de mano de obra y el segundo artículo requiere una materia prima de la que se dispone a razón de 30 unidades diarias. Los beneficios unitarios son de 2 y 5 u.m. respectivamente. El problema es

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 2x + 5y \\ \text{s.a.} & 3x + 5y \leq 200 \\ & \qquad 3y \leq 30 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

y su tabla óptima es

		2	5	0	0	
		x	y	s	t	
2	x	1	0	$1/3$	$-5/9$	50
5	y	0	1	0	$3/9$	10
		2	5	$2/3$	$5/9$	150
		0	0	$-2/3$	$-5/9$	

(a) La empresa está estudiando modificar el precio de venta del primer artículo. Determina entre qué valores puede variar el beneficio unitario de dicho artículo para que la solución siga siendo óptima.

(b) Calcula las variables duales e interprétalas. ¿Le interesaría a la empresa pagar 10 horas extras diarias a 1 u.m. cada una?

13. Una empresa planea producir dos artículos en cantidades x e y. El coste de producción unitario es de 3 u.m. para el primero y 5 para el segundo, y la empresa dispone de un presupuesto de 30 u.m. diarias. Por otra parte, la empresa dispone de un máximo de 20 horas diarias de mano de obra, con lo que el problema de maximizar beneficios resulta ser:

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & 2x+5y & \text{Función de beneficios} \\ \text{s.a.} & 3x+5y \leq 30 & \text{Coste de la producción diaria} \\ & x+2y \leq 20 & \text{Horas diarias de producción} \\ & x,\, y \geq 0 & \end{array}$$

La tabla óptima resulta ser

		2	5	0	0	
		x	y	s	t	
5	y	3/5	1	1/5	0	6
0	t	−1/5	0	−2/5	1	8
		3	5	1	0	30
		−1	0	−1	0	

(a) Calcula las variables duales e interprétalas.

(b) La solución muestra que no resulta rentable producir el primer artículo. Ante esta situación, la empresa se plantea la posibilidad de reducir de algún modo el coste de producción. Determina cuánto tendría que reducirse al menos dicho coste para que la producción del primer artículo pasara a ser rentable.

6 Programación no lineal

En este tema veremos cómo resolver problemas de programación no lineal. El método que vamos a emplear consiste esencialmente en encontrar una serie de condiciones que, bajo hipótesis muy generales, tienen que cumplir las soluciones óptimas de un problema. Esas condiciones reciben el nombre de *condiciones de Kuhn y Tucker.* Los puntos que las satisfacen se llaman *puntos de Kuhn y Tucker,* que no son necesariamente las soluciones óptimas. Empezaremos viendo cómo se plantean las condiciones de Kuhn y Tucker y luego veremos la relación entre soluciones óptimas y puntos de Kuhn y Tucker.

6.1 Las condiciones de Kuhn y Tucker

Ejemplo 1a Una empresa quiere producir un máximo de 1 000 unidades entre tres artículos maximizando su beneficio. Además requiere una producción mínima de 80 unidades del primer artículo. El problema correspondiente es:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 100x + 90y + 150z - x^2 - y^2 - 3z^2 - 2xy \\ \text{s.a} & x + y + z \leq 1000 \\ & x \geq 80 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker del problema.

SOLUCIÓN: Para formular las condiciones de Kuhn y Tucker necesitamos escribir la *función lagrangiana* del problema, que es una función que depende de las variables del problema y de unas nuevas variables que reciben el nombre de *multiplicadores de Kuhn y Tucker* del problema. Hay uno para cada restricción, incluyendo las condiciones de no negatividad. En este caso consideramos los multiplicadores siguientes:

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & 100x + 90y + 150z - x^2 - y^2 - 3z^2 - 2xy & \\ \text{s.a} & x + y + z \leq 1\,000 & \lambda \\ & x \geq 80 & \mu \\ & x,\ y,\ z \geq 0 & \nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3 \end{array}$$

La función lagrangiana consiste en la función objetivo más un sumando para cada restricción, que consta de su multiplicador multiplicado por los dos miembros de la restricción *despejados hacia la derecha:*

$$L(x, y, z, \lambda, \mu, \nu_1, \nu_2, \nu_3) = 100x+90y+150z-x^2-y^2-3z^2-2xy$$

$$+\lambda(1\,000 - x - y - z) + \mu(80 - x) - \nu_1 x - \nu_2 y - \nu_3 z.$$

Las condiciones de Kuhn y Tucker se dividen en cuatro bloques:

Factibilidad Las condiciones de factibilidad son las restricciones del problema:

$$x + y + z \leq 1\,000, \quad x \geq 80, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$$

Los multiplicadores λ y μ son (salvo el signo) los que LINGO proporciona como precios duales de las restricciones, mientras que los de las condiciones de no negatividad, ν_1, ν_2, ν_3 se corresponden con los costes reducidos.

Es importante despejar hacia la derecha, pues si pusiéramos $+\lambda(x+y+z-1000)$ el valor de λ que obtendríamos tendría el signo cambiado y lo interpretaríamos erróneamente.

Todos los multiplicadores van sumando. Si hemos puesto $-\nu_1 x$ es porque hemos operado $+\nu_1(-x)$, donde el signo negativo sale de despejar en $x \geq 0$ hacia la derecha.

Punto crítico Las derivadas de la función lagrangiana respecto de las variables principales del problema deben ser 0:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 100 - 2x - 2y - \lambda - \mu - \nu_1 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 90 - 2y - 2x - \lambda - \nu_2 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial z} &= 150 - 6z - \lambda - \nu_3 = 0
\end{aligned}$$

Signo Los multiplicadores asociados a restricciones canónicas son ≥ 0, los asociados a restricciones no canónicas son ≤ 0, donde se llama *restricciones canónicas* a las de $\leq$ en problemas de maximizar y a las de $\geq$ en problemas de minimizar (y las restricciones de igualdad no tienen condición de signo).

En nuestro caso tenemos:

$$\begin{array}{rlll}
\text{Max.} & 100x + 90y + 150z - x^2 - y^2 - 3z^2 - 2xy & & \\
\text{s.a} & x + y + z \leq 1\,000 & \lambda & \text{restricción canónica} \\
 & x \geq 80 & \mu & \text{restricción no canónica} \\
 & x,\, y,\, z \geq 0 & \nu_1,\, \nu_2,\, \nu_3 & \text{restricciones no canónicas}
\end{array}$$

Por lo tanto, las condiciones de signo son:

$$\lambda \geq 0, \quad \mu \leq 0, \quad \nu_1 \leq 0, \quad \nu_2 \leq 0, \quad \nu_3 \leq 0.$$

Si una restricción es de igualdad, no es necesario considerar su condición de holgura complementaria. Por ejemplo, si la primera restricción hubiera sido

$$x + y + z = 1\,000,$$

la condición de factibilidad ya hace que se cumpla

$$\lambda(1\,000 - x - y - z) = 0$$

sin necesidad de exigirlo, por lo que esta condición de holgura sería redundante. Además, veremos que omitirla simplifica bastante el proceso de resolución de las condiciones de Kuhn y Tucker.

Holgura complementaria El producto de cada multiplicador por su restricción tiene que ser 0:

$$\lambda(1\,000 - x - y - z) = 0, \quad \mu(80 - x) = 0,$$

$$\nu_1 x = 0, \quad \nu_2 y = 0, \quad \nu_3 z = 0.$$

En resumen, las condiciones de Kuhn y Tucker del problema son:

$$x + y + z \leq 1\,000, \quad x \geq 80, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$$

$$100 - 2x - 2y - \lambda - \mu - \nu_1 = 0$$

$$90 - 2y - 2x - \lambda - \nu_2 = 0$$

$$150 - 6z - \lambda - \nu_3 = 0$$

$$\lambda \geq 0, \quad \mu \leq 0, \quad \nu_1 \leq 0, \quad \nu_2 \leq 0, \quad \nu_3 \leq 0.$$

$$\lambda(1\,000 - x - y - z) = 0, \quad \mu(80 - x) = 0, \quad \nu_1 x = 0, \quad \nu_2 y = 0, \quad \nu_3 z = 0.$$

Comprobación de si un punto cumple las condiciones de Kuhn y Tucker Veremos cómo resolver las condiciones de Kuhn y Tucker de un problema, pero antes abordaremos un problema más simple, a saber, comprobar si un punto dado las cumple o no.

Ejemplo 1b Estudia si los puntos $(500, 500, 0)$ y $(80, 0, 25)$ son puntos de Kuhn y Tucker del problema anterior.

SOLUCIÓN: El orden más recomendable para comprobar si un punto dado cumple las condiciones de Kuhn y Tucker es

$$\text{Factibilidad} \quad \Rightarrow \quad \text{Holgura complementaria} \quad \Rightarrow \quad \text{Punto crítico} \quad \Rightarrow \quad \text{Signo.}$$

Consideramos en primer lugar el punto $(500, 500, 0)$.

Factibilidad El punto cumple las restricciones de factibilidad

$$\begin{aligned}
&500 + 500 + 0 = 1\,000 \leq 1000\\
&500 \geq 80\\
&500,\ 500,\ 0 \geq 0
\end{aligned}$$

Holgura complementaria Al comprobar las condiciones de holgura nos podemos encontrar dos situaciones distintas: o bien (multiplicador)$\times 0 = 0$, que se cumple para cualquier valor del multiplicador, o bien (multiplicador)$\times$(número no nulo) $= 0$, que se cumple haciendo que el multiplicador valga 0.

$$\begin{aligned}
&\lambda(1\,000 - 500 - 500 - 0) = 0 \Rightarrow \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \text{se cumple}\\
&\mu(80 - 500) = 0 \Rightarrow \mu \cdot (-420) = 0 \Rightarrow \text{se cumple tomando } \mu = 0\\
&\nu_1\ 500 = 0 \qquad \Rightarrow \text{se cumple tomando } \nu_1 = 0\\
&\nu_2\ 500 = 0 \qquad \Rightarrow \text{se cumple tomando } \nu_2 = 0\\
&\nu_3 \cdot 0 = 0 \qquad \Rightarrow \text{se cumple}
\end{aligned}$$

Así pues, ahora sabemos que $\mu = \nu_1 = \nu_2 = 0$.

> Sería un error concluir que tiene que ser $\lambda = 0$ o $\nu_3 = 0$, pues la igualdad $\lambda{\cdot}0 = 0$ se cumple cualquiera que sea el valor de λ. Sólo podemos concluir que el multiplicador es nulo cuando el número que lo multiplica es distinto de 0.

Punto crítico Al sustituir el punto en las condiciones de punto crítico podemos sustituir también los multiplicadores que ya sabemos que son 0, con lo que la comprobación se simplifica.

$$\left.\begin{aligned}
&100 - 2 \cdot 500 - 2 \cdot 500 - \lambda - 0 - 0 = 0\\
&90 - 2 \cdot 500 - 2 \cdot 500 - \lambda - 0 = 0\\
&150 - 6 \cdot 0 - \lambda - \nu_3 = 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}
&-1\,900 - \lambda = 0\\
&-1\,910 - \lambda = 0\\
&150 - \lambda - \nu_3 = 0
\end{aligned}\right\}$$

De la primera ecuación obtenemos $\lambda = -1\,900$, pero si sustituimos este valor en la segunda ecuación, vemos que no se cumple, luego el punto no es de Kuhn y Tucker. Alternativamente, una vez hemos obtenido $\lambda = -1\,900$ también podríamos haber terminado porque el valor de λ que hemos obtenido no cumple la condición de signo $\lambda \geq 0$.

Así pues, en conclusión: $(500, 500, 0)$ no es un punto de Kuhn y Tucker.

Pasamos a estudiar el punto $(80, 0, 25)$.

> Sería un error obtener el valor $\lambda = -1\,900$ de la primera ecuación, pasar a la tercera para obtener $\nu_3 = 2\,050$ y concluir que se cumplen las condiciones de punto crítico sin tener en cuenta para nada la segunda ecuación. En general, aunque no necesitemos una ecuación para calcular multiplicadores, igualmente tenemos que comprobar si se cumple o no.

Factibilidad El punto cumple las restricciones de factibilidad

$$\begin{aligned}&80 + 0 + 25 = 105 \leq 1000\\&80 \geq 80\\&80,\ 0,\ 25 \geq 0\end{aligned}$$

Holgura complementaria

$$\begin{array}{rll}\lambda(1\,000 - 80 - 0 - 25) = 0 & \Rightarrow \lambda \cdot 895 = 0 & \Rightarrow \text{se cumple tomando } \lambda = 0\\ \mu(80 - 80) = 0 & \Rightarrow \mu \cdot 0 = 0 & \Rightarrow \text{se cumple}\\ \nu_1\ 80 = 0 & & \Rightarrow \text{se cumple tomando } \nu_1 = 0\\ \nu_2 \cdot 0 = 0 & & \Rightarrow \text{se cumple}\\ \nu_3 \cdot 25 = 0 & & \Rightarrow \text{se cumple tomando } \nu_3 = 0\end{array}$$

Así pues, ahora sabemos que $\lambda = \nu_1 = \nu_3 = 0$.

Punto crítico Sustituimos los valores de x, y, z más los multiplicadores que ya sabemos que valen 0:

$$\left.\begin{array}{l}100 - 2 \cdot 80 - 2 \cdot 0 - 0 - \mu - 0 = 0\\ 90 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 80 - 0 - \nu_2 = 0\\ 150 - 6 \cdot 25 - 0 - 0 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}-60 - \mu = 0\\ -70 - \nu_2 = 0\\ 0 = 0\end{array}\right\}$$

Por lo tanto, $\mu = -60$, $\nu_2 = -70$.

Signo Se cumplen las condiciones de signo:

$$\lambda = 0 \geq 0, \quad \mu = -60 \leq 0, \quad \nu_1 = 0 \leq 0, \quad \nu_2 = -70 \leq 0, \quad \nu_3 = 0 \leq 0.$$

Por lo tanto, el punto $(80, 0, 25)$ es de Kuhn y Tucker con multiplicadores

$$(\lambda, \mu, \nu_1, \nu_2, \nu_3) = (0, -60, 0, -70, 0).$$

Condiciones necesarias y suficientes de optimalidad Más adelante veremos cómo calcular los puntos de Kuhn y Tucker de un problema, sin necesidad de que nos den un punto para comprobar si lo es. Esto será parte del proceso para resolver un problema de programación no lineal, pero debemos tener presente que, en general, los puntos de Kuhn y Tucker no son lo mismo que las soluciones óptimas que buscamos. No obstante, hay resultados que los relacionan:

Cualificaciones de restricciones Las cualificaciones de restricciones son condiciones que pueden cumplir las restricciones de un problema y que garantizan que toda solución óptima (si es que la hay) es necesariamente un punto de Kuhn y Tucker, de modo que, cuando se cumple una cualificación, si encontramos todos los puntos de Kuhn y Tucker sabemos que, en caso de haber óptimo, será uno o varios de los puntos que hemos encontrado. Así pues:

> Si un problema de programación no lineal cumple una cualificación de restricciones, podemos asegurar que si tiene solución óptima, ésta será un punto de Kuhn y Tucker, aunque las cualificaciones no aseguran que haya solución óptima.

Existen muchas cualificaciones de restricciones. Las más simples son:

1 Que el problema no tenga restricciones.

2 Que las restricciones del problema sean todas lineales (aunque la función objetivo no es necesario que lo sea).

Una tercera cualificación de restricciones es la cualificación de regularidad:

3 *Que todas las soluciones factibles sean regulares.*

Donde una solución factible se dice regular si es interior o, en caso de ser de frontera, los gradientes de las restricciones que satura son linealmente independientes en el punto.

Si el punto satura r restricciones, que sus gradientes sean linealmente independientes se reduce en la práctica a que la matriz formada por todos ellos contenga una submatriz $r \times r$ con determinante no nulo.

Ejemplo 1c ¿Podemos asegurar que la solución óptima del problema del ejemplo 1a (en caso de existir) será un punto de Kuhn y Tucker?

Sí que podemos asegurarlo, porque el problema cumple la cualificación de restricciones de linealidad: todas sus restricciones son lineales.

Condiciones suficientes de optimalidad En la práctica nos encontraremos con que tenemos uno o varios puntos de Kuhn y Tucker y queremos saber si son soluciones óptimas. Para ello veremos dos formas de comprobarlo. En algunos problemas podrá usarse una, en otros otra y en algunos valdrá cualquiera de las dos, pero también puede ocurrir que ninguna de las dos sirva (si bien todos los problemas con solución óptima que consideraremos podrán resolverse mediante uno de los dos métodos).

Una posibilidad es aplicar el teorema siguiente:

Teorema (condición suficiente de Kuhn y Tucker) *Consideremos un problema de programación no lineal (definidos mediante funciones de clase C^2) y supongamos que:*

- *El conjunto de oportunidades es convexo,*
- *La función objetivo es (estrictamente) convexa si el problema es de minimizar y (estrictamente) cóncava si el problema es de maximizar.*

entonces, todo punto de Kuhn y Tucker del problema es un óptimo global (estricto).

Ejemplo 1d Estudia si el punto $(80, 0, 25)$ es la solución óptima del problema del ejemplo 1a.

Como sabemos que se trata de un punto de Kuhn y Tucker, veremos si se puede aplicar la condición suficiente de Kuhn y Tucker.

- Podemos decir que el conjunto de oportunidades es convexo porque está definido por restricciones lineales.
- Como el problema es de maximizar, necesitamos que la función objetivo sea cóncava.

Para comprobar si lo es, calculamos su matriz hessiana:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 100 - 2x - 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 90 - 2y - 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 150 - 6z.$$

$$HF = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Para aplicar la regla de Jacobi calculamos su determinante $|HF| = 0$. Como es nulo, tenemos que calcular todos los menores principales:

Orden 1	**Orden 2**	**Orden 3**
$H_1 = \|-2\| = -2$	$H_{12} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$	
$H_2 = \|-2\| = -2$	$H_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 12$	$H_{123} = 0$
$H_3 = \|-6\| = -6$	$H_{23} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 12$	

> Si se cumple la condición suficiente de Kuhn y Tucker podemos asegurar que los puntos de Kuhn y Tucker son óptimos globales, pero es importante recordar que en caso de que no se cumpla **no** podemos asegurar que los puntos de Kuhn y Tucker no sean óptimos globales, sino que nos quedamos sin saber si lo son o no. Una posibilidad entonces es estudiarlos con el segundo método que vamos a explicar a continuación.

Como los de orden 1 son ≤ 0, los de orden 2 son ≥ 0 y el de orden 3 es ≤ 0, la regla de Jacobi nos dice que la función objetivo es cóncava.

Por lo tanto, se puede aplicar la condición suficiente de Kuhn y Tucker y concluimos que el punto $(80, 0, 25)$ es un máximo global.

Otra forma de estudiar si los puntos de Kuhn y Tucker de un problema dado son óptimos consiste en comprobar si el problema cumple dos cosas:

1 Una cualificación de restricciones.

2 El teorema de Weierstrass.

En tal caso, el teorema de Weierstrass nos asegura que el problema tiene óptimo global, y la cualificación nos asegura que éste será uno de los puntos de Kuhn y Tucker. Pero no tienen por qué ser todos óptimos. Concretamente, serán óptimos los mejores puntos de Kuhn y Tucker.

> Si un problema de programación no lineal cumple una cualificación de restricciones y el teorema de Weierstrass, podemos asegurar que el mejor punto de Kuhn y Tucker (el que tenga mejor valor de la función objetivo) es el óptimo global. (Si hay varios con el mismo valor, serán todos óptimos.)

Resolución de las condiciones de Kuhn y Tucker Veamos ahora cómo calcular los puntos de Kuhn y Tucker de un problema dado. Lo explicaremos con un ejemplo:

Ejemplo 2a El problema siguiente maximiza la función de utilidad de un consumidor que desea adquirir un total de 50 unidades entre dos artículos, de las cuales al menos 10 deben ser del segundo:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x^2 + y^2 + xy \\ \text{s.a} & x + y = 50 \\ & y \geq 10 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

a) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker del problema anterior.

b) Estudia si $(40, 10)$ es un punto de Kuhn y Tucker.

c) Determina las cantidades que el consumidor debe comprar de cada artículo y la utilidad que consigue con esta adquisición.

SOLUCIÓN: a) Para escribir las condiciones de Kuhn y Tucker escribimos la función lagrangiana:

$$L = x^2 + y^2 + xy + \lambda(50 - x - y) + \mu(10 - y) - \nu x.$$

Factibilidad $x + y = 50$, $y \geq 10$, $x \geq 0$.

Punto crítico

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x + y - \lambda - \nu = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y + x - \lambda - \mu = 0 \end{aligned}$$

Signo $\mu \leq 0$, $\nu \leq 0$.

Holgura complementaria $\mu(10 - y) = 0$, $\nu x = 0$.

> Recordemos que no es necesario poner la condición de holgura complementaria cuando la restricción es de igualdad. Si la ponemos, la resolución de las condiciones de Kuhn y Tucker se complicará sustancialmente.
> También sería un error poner como condición de signo $\lambda = 0$. Las restricciones de igualdad no tienen condición de signo.

b) Comprobamos las condiciones de factibilidad: $40 + 10 = 50 \leq 50$, $10 \geq 10$, $40 \geq 0$.

Ahora comprobamos las de holgura complementaria:

$$\begin{aligned} \mu(10 - 10) = 0 \quad &\Rightarrow \mu \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \text{se cumple} \\ \nu\ 40 = 0 \quad & \qquad\qquad\quad\ \Rightarrow \text{se cumple tomando } \nu = 0 \end{aligned}$$

Ahora comprobamos las de punto crítico:

$$\left.\begin{aligned} 2 \cdot 40 + 10 - \lambda - 0 = 0 \\ 2 \cdot 10 + 40 - \lambda - \mu = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 90 - \lambda = 0 \\ 60 - \lambda - \mu = 0 \end{aligned}\right\}$$

De la primera ecuación obtenemos $\lambda = 90$ y de la segunda $\mu = -30$.

Finalmente comprobamos las de signo:

$$\mu = -30 \leq 0, \qquad \nu = 0 \leq 0.$$

Por lo tanto, $(40, 10)$ es un punto de Kuhn y Tucker con multiplicadores $(\lambda, \mu, \nu) = (90, -30, 0)$.

c) Las cantidades que debe comprar el consumidor son la solución óptima del problema. Como conocemos un punto de Kuhn y Tucker, lo más razonable es estudiar si el problema cumple la condición suficiente de Kuhn y Tucker, pues en tal caso el punto $(40, 10)$ será la solución óptima que buscamos.

- El conjunto de oportunidades es convexo, porque está definido por restricciones lineales.

- Como el problema es de maximizar, necesitamos que la función objetivo sea cóncava.

Para comprobar si lo es calculamos su matriz hessiana y su determinante:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + y, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + x, \qquad H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad |H| = 3 \neq 0.$$

Como el determinante es no nulo, basta calcular los menores principales conducentes:

$$H_1 = 2 > 0, \qquad H_{12} = 3 > 0.$$

> Recordemos de nuevo que el hecho de que no se cumpla la condición suficiente de Kuhn y Tucker no podemos concluir que el problema no tiene solución óptima o que el punto $(40, 10)$ no sea la solución óptima.

Como todos son positivos, la función objetivo es estrictamente convexa. Como necesitábamos que fuera cóncava, concluimos que no se puede aplicar la condición suficiente de Kuhn y Tucker.

Probamos entonces a aplicar el teorema de Weierstrass junto con una cualificación de restricciones. Para ello observamos que, en efecto, se cumple la cualificación de linealidad (porque las restricciones son lineales), lo que nos asegura que, si el problema tiene solución óptima, ésta será un punto de Kuhn y Tucker. Veamos ahora que se cumplen las hipótesis del teorema de Weierstrass:

1) La función objetivo es continua porque es un polinomio.

2) El conjunto de oportunidades es compacto. En efecto, es cerrado, ya que está definido por restricciones de $\geq$ y de $=$ a partir de funciones continuas, porque son polinomios; y es acotado pues si (x, y, z) es una solución factible, necesariamente

$$0 \leq x \leq 50, \qquad 10 \leq y \leq 50.$$

3) El conjunto de oportunidades no es vacío, ya que $(40, 10)$ es una solución factible.

> Aquí es fundamental recordar que cuando aplicamos el teorema de Weierstrass y una cualificación de restricciones sólo sabemos que la solución óptima es un punto de Kuhn y Tucker, pero no tiene por qué ser necesariamente el que ya conocemos, es decir $(40, 10)$, sino que podría haber otro mejor, y por eso, en este caso **necesitamos conocer todos los puntos de Kuhn y Tucker**, para quedarnos con el mejor.

> Notemos que si no hubiera condiciones de holgura, no habría que distinguir casos, si sólo estuviera la condición $\mu(10 - y) = 0$, tendríamos dos casos:
> 1: $\mu = 0$ y 2: $10 - y = 0$,
> y sería un error juntar ambas posibilidades en un único caso.

Por lo tanto, el problema tiene máximo global y, según hemos dicho, será un punto de Kuhn y Tucker. Ahora necesitamos calcular todos los puntos de Kuhn y Tucker, es decir, tenemos que resolver las condiciones de Kuhn y Tucker. El proceso más práctico es el siguiente:

1) Consideramos las condiciones de holgura complementaria y desdoblamos cada una de ellas en dos posibilidades:

$$\mu(10 - y) = 0 \begin{cases} \mu = 0 \\ 10 - y = 0 \end{cases} \qquad \nu x = 0 \begin{cases} \nu = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

2) Formamos todos los casos posibles con una condición de cada par de posibilidades:

Caso 1:	$\mu = 0, \ \nu = 0,$	Caso 3:	$10 - y = 0, \ \nu = 0,$
Caso 2:	$\mu = 0, \ x = 0,$	Caso 4:	$10 - y = 0, \ x = 0,$

3) Resolvemos cada caso junto con las demás condiciones de Kuhn y Tucker que sean igualdades (tanto si provienen de las condiciones factibilidad como de las de punto crítico).

Caso 1:

$$\left.\begin{array}{l}\mu=0,\quad \nu=0\\ x+y=50\\ 2x+y-\lambda-\nu=0\\ 2y+x-\lambda-\mu=0\end{array}\right\}\overset{\mu=0,\ \nu=0}{\Longrightarrow}\left.\begin{array}{l}x+y=50\\ 2x+y-\lambda=0\\ 2y+x-\lambda=0\end{array}\right\}\overset{\lambda=2y+x}{\Longrightarrow}\left.\begin{array}{l}x+y=50\\ 2x+y-2y-x=0\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\quad\left.\begin{array}{l}x+y=50\\ x-y=0\end{array}\right\}\overset{y=x}{\Longrightarrow}x+x=50\quad\Rightarrow\quad 2x=50\quad\Rightarrow\quad x=25.$$

En el primer paso hemos sustituido los valores $\mu=0$ y $\nu=0$, con lo que nos hemos quedado con tres ecuaciones. En el segundo paso hemos despejado $\lambda=2y+x$ en la última ecuación y, al sustituir en las demás, nos quedan dos. Luego hemos despejado $y=x$ y, al sustituir en la primera ecuación sólo ha quedado una. Por lo tanto, la solución de este sistema es

$$(x,y,\lambda,\mu,\nu)=(25,25,75,0,0).$$

Caso 2:

$$\left.\begin{array}{l}\mu=0,\quad x=0\\ x+y=50\\ 2x+y-\lambda-\nu=0\\ 2y+x-\lambda-\mu=0\end{array}\right\}\overset{\mu=0,\ x=0}{\Longrightarrow}\left.\begin{array}{l}y=50\\ y-\lambda-\nu=0\\ 2y-\lambda=0\end{array}\right\}\overset{y=50}{\Longrightarrow}\left.\begin{array}{l}50-\lambda-\nu=0\\ 100-\lambda=0\end{array}\right\}\overset{\lambda=100}{\Longrightarrow}\nu=-50.$$

Por lo tanto:

$$(x,y,\lambda,\mu,\nu)=(0,50,100,0,-50).$$

Caso 3:

$$\left.\begin{array}{l}y=10,\quad \nu=0\\ x+y=50\\ 2x+y-\lambda-\nu=0\\ 2y+x-\lambda-\mu=0\end{array}\right\}\overset{y=10,\ \nu=0}{\Longrightarrow}\left.\begin{array}{l}x+10=50\\ 2x+10-\lambda=0\\ 20+x-\lambda-\mu=0\end{array}\right\}\overset{x=40}{\Longrightarrow}\left.\begin{array}{l}90-\lambda=0\\ 60-\lambda-\mu=0\end{array}\right\}\overset{\lambda=90}{\Longrightarrow}\mu=-30.$$

Por lo tanto:

$$(x,y,\lambda,\mu,\nu)=(40,10,90,-30,0).$$

Caso 4:

$$\left.\begin{array}{l}y=10,\quad x=0\\ x+y=50\\ 2x+y-\lambda-\nu=0\\ 2y+x-\lambda-\mu=0\end{array}\right\}\overset{y=10,\ x=0}{\Longrightarrow}\left.\begin{array}{l}10=50\\ 10-\lambda-\nu=0\\ 20-\lambda-\mu=0\end{array}\right\}$$

Como la primera ecuación $10=50$ es imposible, este caso no tiene solución.

En total hemos obtenido los puntos

$$(x,y,\lambda,\mu,\nu)=(25,25,75,0,0),(0,50,100,0,-50),(40,10,90,-30,0).$$

4) Comprobamos si los puntos obtenidos cumplen las condiciones de Kuhn y Tucker que tienen desigualdades, que en nuestro caso son:

$$y\geq 10,\qquad x\geq 0,\qquad \mu\leq 0,\qquad \nu\leq 0.$$

En la práctica no es necesario resolver primero todos los casos generados con las condiciones de holgura (paso 3) y luego comprobar si cumplen las desigualdades (paso 4), sino que suele ser más práctico comprobar en cada caso si los puntos que vamos obteniendo cumplen todas las desigualdades y, en cuanto falle alguna, podemos pasar ya a otro caso.

En este caso vemos que los tres puntos las cumplen, por lo que los tres son puntos de Kuhn y Tucker. La solución óptima será el mejor de ellos. Para determinar cuál es calculamos la utilidad que proporciona cada solución $U(x, y) = x^2 + y^2 + xy$:

$$U(25, 25) = 1\,875, \qquad U(0, 50) = 2\,500, \qquad U(40, 10) = 2\,100.$$

Por lo tanto, la solución óptima es

$$(x, y, \lambda, \mu, \nu) = (0, 50, 100, 0, -50),$$

y la respuesta a la pregunta c) es que conviene comprar 50 unidades del segundo artículo (y ninguna del primero), lo que proporciona una utilidad de 2 500 unidades.

Interpretación económica de los multiplicadores de Kuhn y Tucker Los multiplicadores de Kuhn y Tucker se interpretan igual que los precios duales y los costes reducidos de LINGO (salvo que cuando son positivos indican un aumento de la función objetivo y cuando son negativos una disminución):

El multiplicador de Kuhn y Tucker asociado a una restricción indica (aproximadamente) el incremento que experimentará el valor óptimo de la función objetivo por cada unidad que aumente el término independiente de la restricción. En particular el multiplicador de una condición de signo $x \geq 0$ indica el incremento aproximado que experimentará la función objetivo si pasamos a exigir $x \geq 1$.

Ejemplo 1d Interpreta los multiplicadores de Kuhn y Tucker de la solución óptima del ejemplo 1.

Solución: La solución es $(x, y, z) = (80, 0, 25)$ con multiplicadores

$$(\lambda, \mu, \nu_1, \nu_2, \nu_3) = (0, -60, 0, -70, 0).$$

- $\lambda = 0$ es el multiplicador de la restricción $x + y + z \leq 1\,000$, y nos indica que una pequeña variación de la producción máxima permitida no afectará al beneficio.
- $\mu = -60$ es el multiplicador de la restricción $x \leq 80$, y nos indica que por cada unidad adicional que exijamos producir del primer artículo el beneficio disminuirá aproximadamente en 60 unidades monetarias.
- $\nu_1 = \nu_3 = 0$ son los multiplicadores de las condiciones de signo $x \geq 0$ y $z \geq 0$, e indican que aunque exijamos producir al menos una unidad del primer (o del tercer) artículo, esto no afectará a los beneficios (como es lógico puesto que la solución óptima ya exige producir al menos una unidad de ambos artículos, luego esta exigencia no cambiará la solución).
- $\nu_2 = -70$ es el multiplicador de la condición $y \geq 0$ y, viendo que no nos conviene producir el segundo artículo, nos indica que si exigimos producir al menos una unidad el beneficio disminuirá aproximadamente en 70 unidades monetarias.

Ejemplo 2b Interpreta los multiplicadores de Kuhn y Tucker de la solución óptima del ejemplo 2.

SOLUCIÓN: La solución óptima es

$$(x, y, \lambda, \mu, \nu) = (0, 50, 100, 0, -50).$$

- $\lambda = 100$ es el multiplicador de la restricción $x + y = 50$, e indica que por cada unidad adicional que el consumidor exija adquirir la utilidad aumentará aproximadamente en 100 unidades.
- $\mu = 0$ es el multiplicador de la restricción $y \geq 10$, e indica que aunque el consumidor exija adquirir alguna unidad adicional del segundo artículo (más allá de las 10 que ya exige adquirir) ello no afectará a la utilidad (porque la solución óptima ya contempla adquirir mucho más que 10 unidades).
- $\nu = -50$ es el multiplicador de la restricción $x \geq 0$ e indica que si el consumidor exige adquirir al menos una unidad del primer bien, su utilidad disminuirá aproximadamente en 50 unidades monetarias.

6.2 Problemas propuestos

1) El problema siguiente determina el consumo óptimo de dos bienes A y B para minimizar el coste manteniendo un nivel de utilidad dado:

$$\begin{array}{rll} \text{Min.} & 2x + y & \text{Coste} \\ \text{s.a} & x^2 + y \geq 9 & \text{Utilidad} \geq 9 \\ & x,\, y \geq 0 & \end{array}$$

   (a) Resuélvelo gráficamente.
   (b) Calcula el coste mínimo.
   (c) Razona si la solución óptima es interior o de frontera.
   (d) Comprueba que cumple las condiciones de Kuhn y Tucker.
   (e) Determina qué efecto sobre el coste tendría exigir un nivel de utilidad de 10 unidades.
   (f) ¿Qué sucedería con el coste si necesitáramos comprar una unidad del segundo bien?

2) Una empresa puede producir dos artículos en cantidades x, y. Sus posibilidades de producción están limitadas por la restricción $x^2 + 5y^2 \leq 105$ y, por otra parte, se ha comprometido a producir almenos 4 unidades del segundo artículo. El modelo siguiente determina la producción que maximiza el beneficio:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x^2 + 5y^2 \leq 105 \\ & y \geq 4 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

   (a) Estudia si la solución $(x, y) = (5, 4)$ es factible o infactible, interior o de frontera.
   (b) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker del problema.

(c) Comprueba que $(x, y) = (5, 4)$ es un punto de Kuhn y Tucker y calcula sus multiplicadores.

(d) Razona que $(x, y) = (5, 4)$ es la solución óptima.

(e) Razona el efecto que tendría sobre el beneficio que las posibilidades de producción de la empresa fueran $x^2 + 5y^2 \leq 107$.

(f) ¿Cómo afectaría al beneficio la producción de una unidad más del segundo artículo?

3) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x + 2y \leq 6 \\ & 5x + 2y \geq 10 \\ & y \geq 0. \end{array}$$

(a) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker del problema (sin resolverlas).

(b) Estudia si los puntos $(6, 0)$ y $(1, 2.5)$ son o no puntos de Kuhn y Tucker del problema. En caso afirmativo calcula sus multiplicadores asociados.

(c) Razona si alguno de los puntos anteriores es óptimo.

4) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x^2 - y^2 \\ \text{s.a} & x + 2y = 5 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array}$$

(a) Resuélvelo.

(b) Razona cómo variaría el valor mínimo de la función objetivo si el término independiente de la primera restricción pasara a valer 6.

(c) ¿Y si pidiéramos que x fuera al menos 0.1?

5) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x + y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 = 4 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

(a) Indica una solución factible interior, una solución factible de frontera y una solución infactible.

(b) Resuelve el problema.

6) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x + y \\ \text{s.a.} & x \geq 1 \\ & x + y \geq 0 \\ & x \geq 0,\ y \leq 0 \end{array}$$

(a) Estudia si el conjunto de oportunidades es compacto y si es convexo.

(b) Razona, sin comprobarlo explícitamente, que la solución óptima ha de cumplir las condiciones de Kuhn y Tucker.

(c) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker del problema y comprueba si el punto $(1, 0)$ las satisface.

7) Considera el problema siguiente, en el que las variables representan las cantidades empleadas de dos factores para la producción de un artículo:

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & x^2 + y^2 + 4xy & \text{producción} \\ \text{s.a} & x + y = 4 & \text{coste} = \text{presupuesto} \\ & x,\, y \geq 0. & \end{array}$$

(a) ¿Podemos asegurar que la solución óptima (si existe) es un punto de Kuhn y Tucker?

(b) Estudia si $(x, y) = (2, 2)$ es un punto de Kuhn y Tucker.

(c) Razona si podemos concluir que es óptimo en virtud de la condición suficiente de Kuhn y Tucker. ¿Y por el teorema de Weierstrass?

(d) Calcula la solución óptima.

(e) ¿Qué incremento de producción podríamos conseguir si el presupuesto pasara a ser de 4.5 u.m.?

(f) Repite los apartados (c) y (d) cambiando el objetivo por Min. $x^2 + y^2 + 4xy$.

8) Sabemos que la solución óptima del problema siguiente es $(x, y) = (3, 0)$:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x + y \\ \text{s.a.} & x^2 + y \geq 9 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

(a) Razona si la solución óptima es interior o de frontera.

(b) Comprueba que cumple las condiciones de Kuhn y Tucker.

(c) Razona qué efecto tendría sobre la función objetivo que el término independiente de la primera restricción pasara a ser 10.

9) Una empresa quiere producir 100 unidades entre tres artículos minimizando el coste. En la producción hay que emplear una materia prima de la que sólo posee 1 600 unidades. El problema correspondiente es:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 10x + 30y + 30z + 2x^2 + 2xy - z^2 \\ \text{s.a} & x + y + z = 100 \\ & 10x + 40y + 80z \leq 1600 \\ & x, y, z \geq 0 \end{array}$$

(a) Razona que la solución óptima es un punto de Kuhn y Tucker.

(b) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker (sin resolverlas).

(c) Al calcular los puntos de Kuhn y Tucker, el mejor resulta ser $(x, y, z) = (80, 20, 0)$. Razona que es la solución óptima.

(d) Comprueba si se puede aplicar la condición suficiente de Kuhn y Tucker.

(e) Determina qué aumento de coste requeriría la producción de 102 unidades de producto.

(f) A la empresa le ofrecen comprarle una unidad del tercer artículo por 100 u.m. Razona si le conviene aceptar la oferta.

10) Resuelve el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x^2+xy+y^2 \\ \text{s.a} & x+y\geq 6. \end{array}$$

11) Resuelve el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x^2+3y^2+2xy+z^2 \\ \text{s.a} & x+y=3 \\ & z\geq 0 \end{array}$$

12) Resuelve el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 10y+9z-x^2-y^2-z^2+xz \\ \text{s.a} & y^2\leq 1 \end{array}$$

13) Resuelve el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x+y \\ \text{s.a} & x^2+y=9 \\ & y\geq 0 \end{array}$$

14) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 2-x^2-4y \\ \text{s.a} & x+2y\leq 2 \\ & y\geq 0 \end{array}$$

(a) Resuélvelo.

(b) La solución óptima que has encontrado ¿es interior o de frontera?, ¿y la solución $(1/2,1/2)$? Pon un ejemplo de solución infactible.

15) Resuelve el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x^2-y^2+4 \\ \text{s.a} & 2x+y=6 \\ & x,\, y\geq 0 \end{array}$$

¿Cuál será aproximadamente el nuevo valor óptimo de la función objetivo si el término independiente de la primera restricción pasa a ser 6.5?

16) Encuentra los puntos de Kuhn y Tucker del problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & -x^2 - y^2 + 8x \\ \text{s.a} & x + y = 6 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Demuestra que el problema tiene solución óptima e indica cuál es.

17) Resuelve el problema siguiente haciendo uso de la teoría general de programación no lineal:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x^2 - y^2 \\ \text{s.a} & x + y = 5 \\ & x \geq 1 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

¿Cuál será aproximadamente el nuevo valor óptimo de la función objetivo si el término independiente de la primera restricción pasa a ser $5'5$?

18) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & -12x + 3y \\ \text{s.a} & y - x^2 \geq 1. \end{array}$$

(a) Justifica que si hay solución óptima, ésta tiene que ser un punto de Kuhn y Tucker.
(b) Justifica que todo punto de Kuhn y Tucker ha de ser un óptimo global del problema.
(c) Calcula los puntos de Kuhn y Tucker del problema.
(d) Calcula el valor óptimo de la función objetivo (justificando tu respuesta) y razona cuál sería el nuevo valor óptimo si la restricción pasara a ser $y - x^2 \geq 0.8$.
(e) Justifica gráficamente que tiene solución óptima.
(f) Razona si también la tendría si la función objetivo fuera Max. $x + y$.
(g) Razona que, con este objetivo alternativo, el problema no puede tener puntos de Kuhn y Tucker.

19) (a) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker para el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 8x - 2y \\ \text{s.a} & y - x^2 \geq 2 \end{array}$$

y comprueba que el punto $(2, 6)$ las cumple.
(b) Demuestra que es un óptimo global.
(c) ¿Se puede aplicar la condición necesaria en el problema?
(d) Sabiendo que $(2, 6)$ es el único punto de Kuhn y Tucker, razona que es el único máximo global.
(e) Ahora vamos a minimizar la función objetivo, es decir,

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 8x - 2y \\ \text{s.a} & y - x^2 \geq 2 \ . \end{array}$$

Resuelve este nuevo problema sabiendo que no tiene ningún punto de Kuhn y Tucker.

20) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 4x - y \\ \text{s.a} & y - x^2 \geq 1 \end{array}$$

(a) Indica una solución factible interior, una solución factible de frontera y una solución infactible.

(b) Resuelve el problema.

21) Una empresa quiere producir dos variantes de un artículo en cantidades x e y. Desea una producción conjunta de 90 unidades y tiene una materia prima limitada a 100 unidades. Para minimizar el coste plantea el problema siguiente:

$$\begin{array}{rll} \text{Min.} & 2x^2 + 3y^2 - xy & \text{Función de coste} \\ \text{s.a.} & x + \ \ y = 90 & \text{Producción exigida} \\ & x + 2y \leq 100 & \text{Materia prima disponible.} \\ & x,\, y \geq 0 & \end{array}$$

(a) Aplica el teorema de Weierstrass. ¿Cuál es la conclusión?

(b) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker del problema (sin resolverlas).

(c) La solución óptima es $(x, y) = (80, 10)$. Comprueba que cumple las condiciones de Kuhn y Tucker y calcula sus multiplicadores.

(d) ¿Cómo afectaría al coste que la empresa dispusiera de una unidad más de materia prima?

22) El problema siguiente calcula la producción máxima que puede conseguir una empresa en función de las cantidades x, y, z de materias primas que utiliza, teniendo en cuenta que no puede usar más de 60 kg en total y que dispone de un presupuesto de 70 unidades monetarias.

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & 2x^2 + 4y^2 + 3z^2 & \text{Función de producción} \\ \text{s.a.} & x + y + z \leq 60 & \text{Cantidad total de materias primas} \\ & 2x + 2y + 3z \leq 70 & \text{Coste} \leq \text{presupuesto} \\ & x,\, y,\, z \geq 0 & \end{array}$$

(a) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker del problema.

(b) Sabiendo que $(0, 35, 0)$ es el único punto de Kuhn y Tucker, razona que es la solución óptima.

(c) Calcula los multiplicadores de Kuhn y Tucker correspondientes.

(d) Si la empresa no pudiera usar únicamente la segunda materia prima, ¿qué le convendría más, comprar un poco de la primera o de la tercera?

(e) ¿Cómo afectaría a la producción disponer de dos unidades más de presupuesto?

(f) Pon un ejemplo de solución de frontera y otro de solución interior del problema, razonando por qué es cada una del tipo correspondiente.

23) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & B = 300x + 200y - x^2 \\ \text{s.a.} & 2x + y \leq 20 \\ & x + 2y \leq 5 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

donde B es la función de beneficios de una empresa y las variables x, y representan las cantidades producidas de dos artículos A_1 y A_2.

(a) ¿Podemos asegurar que la solución óptima cumple las condiciones de Kuhn y Tucker?

(b) Estudia si la solución $(x, y) = (5, 0)$ cumple dichas condiciones.

(c) Estudia si el punto anterior es un óptimo global del problema.

(d) Supón que la empresa recibe una oferta de 200 u.m. por fabricar una unidad del artículo A_2. ¿Le convendría?

24) Un consumidor desea maximizar su utilidad al comprar dos bienes sujeto a una restricción presupuestaria. Además necesita comprar al menos 5 unidades del segundo producto:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & U = xy \\ \text{s.a} & x + 3y = 24 \\ & x \geq 0,\ \ y \geq 5. \end{array}$$

(a) Resuelve el problema. Indica las cantidades que debe comprar de cada producto y la utilidad máxima que consigue con dicha solución.

(b) Interpreta el multiplicador de la restricción presupuestaria.

(c) Razona qué sucedería con la utilidad si el consumidor necesitara comprar 6 unidades del segundo producto.

25) El problema siguiente maximiza la función de beneficios de una empresa que quiere producir un total de 20 unidades de dos artículos en cantidades x e y.

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 100x + 200y - x^2 - 4xy \\ \text{s.a} & x + y = 20 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

(a) Resuelve el problema. Indica qué cantidad de cada artículo debe producir la empresa y qué beneficio obtiene con ello.

(b) Interpreta el multiplicador de Kuhn y Tucker de la primera restricción.

(c) Si a la empresa le ofrecieran 100 u.m. por producir una unidad del primer artículo, ¿le interesaría aceptar la oferta?

26) El problema siguiente determina las cantidades que ha de adquirir un consumidor de dos productos para maximizar su utilidad con un presupuesto de 6 u.m.

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x^2 + xy + 2y^2 \\ \text{s.a} & 3x + 2y = 6 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

(a) Resuelve el problema.

(b) Razona cómo cambiaría la utilidad óptima si el presupuesto fuera de 6.5 u.m.

(c) Interpreta el multiplicador de Kuhn y Tucker de la restricción $x \geq 0$.

(d) Razona cuál sería la solución óptima si las variables tuvieran que ser enteras.

27) Una empresa produce tres artículos en cantidades x, y, z. El problema siguiente determina las cantidades que conviene producir de cada uno para maximizar los beneficios, teniendo en cuenta una restricción que determina la frontera de posibilidades de producción de la empresa.

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 14x + 18y + 7z - x^2 - y^2 - z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \\ \text{s.a} & 2x + 4y + z^2 \leq 14 \\ & x,\ y,\ z,\ \geq 0 \end{array}$$

(a) Comprueba que la producción óptima es $(x, y, z) = (3, 2, 0)$. (Primeramente tendrás que comprobar que el punto es de Kuhn y Tucker.)

(b) Razona el efecto que tendría sobre los beneficios de la empresa que ésta tuviera que producir al menos una unidad del tercer artículo.

(c) Con una inversión en maquinaria de 4.5 u.m., la empresa podría aumentar sus posibilidades de producción hasta $2x + 4y + z^2 \leq 16$. ¿Le convendría?

28) Una empresa fabrica dos productos en cantidades x e y. El problema siguiente determina la producción que maximiza el beneficio sujeto a que el coste no exceda del presupuesto y que la cantidad empleada de un input I sea al menos la cantidad que la empresa ha adquirido ya del mismo.

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & x + 3y & \text{Beneficio} \\ \text{s.a} & x + 2y \leq 6 & \text{coste} \leq \text{presupuesto} \\ & 5x + 2y \geq 10 & \text{cantidad empleada de } I \geq \text{cantidad adquirida} \\ & x,\ y \geq 0 & \end{array}$$

(a) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker del problema (sin resolverlas).

(b) Estudia si los puntos $(6, 0)$ y $(1, 2.5)$ son o no puntos de Kuhn y Tucker del problema. En caso afirmativo calcula sus multiplicadores asociados.

(c) Razona si alguno de los puntos anteriores es óptimo.

(d) Interpreta el multiplicador de la restricción presupuestaria.

(e) ¿Qué efecto tendría sobre los beneficios que la empresa adquiriera (y pretendiera utilizar) 2 unidades más del input I?

(f) Razona si el conjunto de oportunidades es compacto.

(g) Transforma el problema para que tenga restricciones de igualdad (sin contar las de signo) y objetivo de minimizar.

29) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & -x + 2y \\ \text{s.a} & x + 3y \leq 6 \\ & x - y \geq 0 \\ & x,\ y \geq 0 \text{ enteras} \end{array}$$

Para las primeras preguntas, considera el problema relajado (es decir, no consideres las variables enteras).

(a) Razona que, si tiene solución óptima, ésta cumplirá las condiciones de Kuhn y Tucker.

(b) Aplica el teorema de Weierstrass al problema. ¿Cuál es la conclusión?

(c) Plantea las condiciones del Kuhn y Tucker del problema.

(d) Pon el problema en forma estándar y calcula la solución básica correspondiente a las variables básicas x e y. ¿Es factible?

(e) Comprueba si la solución (x, y) (sin las variables de holgura) que has encontrado en el apartado anterior es un punto de Kuhn y Tucker. Indica el valor de los multiplicadores.

(f) Estudia (con la teoría de programación no lineal) si la solución que has encontrado en la pregunta (d) es óptima.

(g) Calcula sin iterar la tabla del símplex asociada a la solución de la pregunta (d). Razona si es óptima y, si lo es, razona si corresponde a una solución de vértice o de arista.

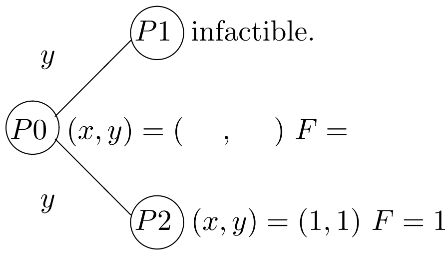
(h) Sin hacer uso de los apartados anteriores, escribe una primera tabla del símplex sin calcular ninguna matriz inversa. A partir de ella, haz una iteración. En la tabla que obtengas, razona qué variable entraría y cuál saldría, pero no hagas más iteraciones.

(i) Calcula el problema dual.

(j) Razona el efecto que tiene sobre la función objetivo de cambiar la primera restricción a $x + 3y \leq 8$.

(k) Calcula el intervalo de sensibilidad del coeficiente de la x en la función objectivo.

(l) Para resolver el problema original (con variables enteras) aplicamos el método de ramificación y acotación. Completa el árbol siguiente con los datos obtenidos en los apartados anteriores. (No olvides indicar las restricciones añadidas.)



¿A qué conclusión llegamos?

30) El problema siguiente determina el beneficio máximo que puede obtener una empresa con una producción (x, y) de dos artículos y con una restricción sobre las horas de producción disponibles:

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & xy + 4000x & \text{beneficio} \\ \text{s.a} & x + 2y = 5000 & \text{horas empleadas} = \text{horas disponibles} \\ & x,\ y \geq 0 & \end{array}$$

(a) Pon un ejemplo de solución infactible y otro de solución factible. Razona si la solución factible es interior o de frontera.

(b) Resuelve el problema.

(c) Razona el efecto que tendría sobre los beneficios la producción de una unidad del segundo artículo.

(d) La empresa desea determinar la producción que minimiza el coste exigiendo una producción mínima de 1 000 unidades del segundo artículo. Resuelve el problema correspondiente mediante el método símplex (sin partir de ninguna solución factible conocida):

$$\begin{array}{rrl} \text{Min.} & 3x + 7y & \text{coste} \\ \text{s.a} & x + 2y = 5000 & \text{horas empleadas} = \text{horas disponibles} \\ & y \geq 1000 & \text{producción de } y \geq \text{producción mínima} \\ & x,\, y \geq 0 & \end{array}$$

(e) Resuelve gráficamente el problema de la pregunta (d).

(f) En el problema de la pregunta (d), determina el intervalo de sensibilidad del coste de producción del primer artículo y el de la producción mínima del segundo artículo.

31) Resuelve:

$$\text{Min. } x^2 + xy + y^2 - 6x + 2, \qquad \text{Max. } x^2 + xy + y^2 + x + 5y,$$

$$\text{Max. } 3x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 2yz + 6zx - 2xy, \qquad \text{Max. } 4x - 6y - x^2 - 2y^2.$$

32) Encuentra los extremos globales de los problemas siguientes:

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & 3x^2 + xy + 4y^2 \\ \text{s.a.} & 3x + y = 72 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Opt.} & x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \\ \text{s.a.} & x + y + z + t = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Opt.} & x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y \\ \text{s.a.} & x + y - 2z = 0 \\ & y - x = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & -x^2 + xy + yz - y^2 - z^2 \\ \text{s.a.} & x + z = 2 \\ & x + y = 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Opt.} & 4x - y \\ \text{s.a.} & y = x^2 \end{array}$$

33) Resuelve

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & xy \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 = 8. \end{array}$$

34) Resuelve

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x + y + z \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 + z^2 = 2. \end{array}$$

35) La función de utilidad de un consumidor es

$$U(x, y) = 2x^3 - 9x^2 - 6y + 40,$$

donde x e y son las cantidades adquiridas de dos bienes A y B. El precio unitario de A es de 2 €, el de B de 1 € y el consumidor dispone de un presupuesto de 6 €.

(a) Calcula la utilidad máxima que puede obtener el consumidor si gasta todo su presupuesto.

(b) Estudia qué aumento de utilidad puede conseguirse con un aumento de una unidad de presupuesto.

(c) ¿Que ocurriría si el consumidor decidiera comprar una unidad del segundo bien?

36) Una empresa exporta cantidades x, y (en miles de toneladas) de su producto a dos países. Su función de beneficios es

$$B(x, y) = -x^2 + 4xy - 2y^2 + 10.$$

La legislación del país impone a la empresa una cuota de exportación de 10.5 miles de toneladas.

(a) Calcula la cantidad que conviene exportar a cada país de modo que la cantidad total exportada sea la que marca la cuota.

(b) Razona el efecto que tendría sobre la empresa que la cuota pasara a ser de 10 miles de toneladas.

(c) Calcula el beneficio de la empresa que consigue exportando la misma cantidad a ambos países.

(d) Calcula las cantidades a exportar si desaparece la cuota de exportación.

(e) Razona si a la empresa le conviene la existencia de la cuota.

37) La función de producción de una empresa es

$$P(x, y) = x^2 + 2y^2 + 10xy,$$

donde x e y son las cantidades empleadas de dos factores de producción. El precio unitario de los factores es de 1 y 2 u.m. respectivamente, y la empresa dispone de un presupuesto de 70 u.m. que debe gastar en su totalidad.

(a) Calcula la producción máxima que puede conseguir la empresa y las cantidades requeridas de los factores de producción.

(b) Estudia la conveniencia de aumentar el presupuesto disponible.

38) Resuelve los problemas siguientes:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & -x^2 - y^2 \\ \text{s.a.} & x + y \leq 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Min.} & x^2 + y^2 \\ \text{s.a.} & x + y \geq -1 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & x + y \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 \leq 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Min.} & x + y \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 \leq 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x \\ \text{s.a.} & -x + y \leq 0 \\ & y \geq 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & x \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 \leq 1 \\ & x, y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max.} & x^2 + y^2 \\ \text{s.a.} & xy \geq 25 \\ & x, y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Min.} & x^2 + y^2 \\ \text{s.a.} & xy \geq 25 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

39) Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & y \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 \leq 6 \\ & x^2 - y \geq 0 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

(a) Resuélvelo gráficamente.

(b) Comprueba que el óptimo cumple las condiciones de Kuhn y Tucker.

40) Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 6x + 3y - x^2 + 4xy - 4y^2 \\ \text{s.a.} & x + y \leq 3 \\ & 4x + y \leq 9 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

Sabiendo que $(2,1)$ es su único punto de Kuhn y Tucker, razona que es el único máximo global.

41) Dado el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x + y \\ \text{s.a.} & xy \leq 4 \\ & x - y \geq -2 \\ & y \geq 0, \end{array}$$

(a) Comprueba gráficamente que $(-2,0)$ es un óptimo global del problema.

(b) Razona que es un punto de Kuhn y Tucker (sin comprobar explícitamente que cumple las condiciones).

(c) Comprueba explícitamente que cumple las condiciones de Kuhn y Tucker.

42) Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & (x-2)^2 + (y-2)^2 \\ \text{s.a.} & x - y \leq 8 \\ & x + y \geq -4 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

(a) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker.

(b) Comprueba si los puntos $(2,-6)$ y $(8,0)$ verifican dichas condiciones.

(c) A partir de los resultados del apartado anterior, ¿qué se puede decir sobre su optimalidad?

43) Dado el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & -4x^2 - 2xy - y^2 \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 \leq 4 \\ & x + y \geq 1 \end{array}$$

(a) Comprueba si los puntos $(0,1)$, $(1,0)$ y $(2,2)$ cumplen las condiciones de Kuhn y Tucker.

(b) ¿Son óptimos del problema?

44) Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x^2 + y^2 \\ \text{s.a.} & x + y \leq 1 \\ & x - y \leq 0 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

(a) Comprueba que el punto $(0,0)$ cumple las condiciones de Kuhn y Tucker.

(b) ¿Podemos aplicar las condiciones de suficiencia para concluir que es un máximo global?

(c) ¿Es un máximo global?

7 Problemas adicionales

7.1 Programación lineal

1) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 2x - 3y + z \\ \text{s.a} & 3x + y + 2z \leq 12 \\ & 4x + 2y + 3z = 17 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

(a) Calcula sin hacer ninguna iteración la tabla del símplex correspondiente a las variables básicas x, z.

(b) Razona si la tabla es óptima y, en tal caso, si corresponde a una solución de vértice, de arista finita o de arista infinita. Indica también el valor óptimo de la función objetivo.

(c) Escribe la solución óptima y razona que es una solución factible básica del problema.

(d) Calcula el intervalo de sensibilidad del coeficiente de la variable y en la primera restricción. Indica su interpretación.

(e) Calcula el intervalo de sensibilidad del coeficiente de x en la función objetivo.

(f) Razona por postoptimización cuál sería la nueva solución óptima si $c_1 = 10$.

2) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 6x + 7y + z \\ \text{s.a} & 5x + 6y + 2z \leq 65 \\ & 6x + 7y + \ \ z \geq 77 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

(a) Determina si existe una solución factible básica con variables básicas x, y.

(b) Calcula la tabla del símplex correspondiente a la solución del apartado anterior.

(c) Razona si es óptima y, si no lo es, itera hasta llegar al óptimo.

(d) Escribe la solución óptima (x, y, z) del problema y razona si es de vértice, de arista o de arista infinita.

(e) Calcula las variables duales.

(f) Interpreta la segunda variable dual.

(g) Calcula el intervalo de sensibilidad de $b_1 = 65$. Interpreta el resultado.

(h) ¿Cuál sería la nueva solución óptima si $b_1 = 66$?

(i) Calcula por postoptimización la nueva solución óptima si la segunda restricción pasa a ser $6x + 7y + 2z \geq 77$.

3) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 3x + 2y + 5z \\ \text{s.a} & 2x + 9y + z = 2 \\ & x + 5y \geq 1 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

(a) Calcula directamente, sin hacer iteraciones, la tabla del símplex correspondiente a las variables básicas x e y.

(b) Razona si la tabla es óptima. Si lo es, escribe la solución óptima y, si no lo es, itera hasta llegar a la tabla óptima.

(c) Calcula las variables duales.

(d) Calcula el intervalo de sensibilidad del término independiente de la primera restricción.

(e) Calcula la nueva solución óptima y el nuevo valor óptimo de la función objetivo si dicho término independiente pasa a valer $b_1 = 1.9$.

(f) ¿Y si el coeficiente de x en la función objetivo pasa a valer $c_1 = 2$?

4) Considera el problema siguiente (P_0):

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & -2x + 3y \\ \text{s.a} & x + 4y \leq 18 \\ & x + y \leq 6 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array}$$

(a) Estudia si el problema tiene una solución factible básica con variables básicas x e y.

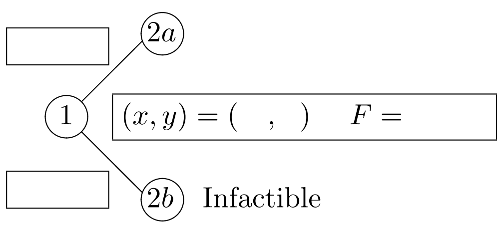
(b) Sabiendo que $(x, y) = (0, 4.5)$ es solución óptima del problema, obtén la tabla óptima del símplex sin realizar ninguna iteración. ¿Es una solución de vértice, de arista finita o de arista infinita?

(c) Calcula el intervalo de sensibilidad de a_{11} (es decir, del coeficiente técnico de la variable x en la primera restricción).

(d) Calcula las variables duales.

(e) Utiliza el apartado anterior para calcular el nuevo valor óptimo de la función objetivo si el término independiente de la primera restricción pasara a ser 18.5.

(f) Considera ahora la version del problema P_0 que consiste exigir, además, que las variables x e y sean enteras. Para resolverlo vamos a aplicar el método de ramificación y acotación. Completa en el árbol siguiente los datos referentes a la solución óptima del problema lineal asociado (P_0) e indica las restricciones que deben añadirse para pasar a los problemas P_1 y P_2 (rellena los 3 recuadros).



(g) Completa el árbol según el método de ramificación y acotación hasta encontrar la solución óptima, resolviendo los problemas intermedios mediante el método símplex.

5) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl}
\text{Max.} & 3x + 2y + 5z \\
\text{s.a} & x - 2z \leq 3 \\
 & -3x + y + z = 3 \\
 & x - z \geq 2 \\
 & x,\ y,\ z \geq 0
\end{array}$$

(a) Estudia si $(x, y, z) = (2, 9, 0)$ es una solución factible básica del problema primal.

(b) Resuelve el problema por el método símplex. Razona si el problema es infactible, no acotado o si tiene solución óptima y, en tal caso, indica cuál es.

6) Considera el problema:

$$\begin{array}{rl}
\text{Max.} & 2x + 5y + 3z \\
\text{s.a} & x + 2y + z \leq 8 \\
 & x + 4y + 2z \leq 10 \\
 & x + y + z \leq 2 \\
 & x,\ y,\ z \geq 0
\end{array}$$

(a) A partir de la tabla

		2	5	3	0	0	0	
		x	y	z	s	t	u	
5	y	1	1	1	0	0	1	2
0	s	−1	0	−1	1	0	−2	4
0	t	3	0	−2	0	1	−4	2
		5	5	5	0	0	5	10
		−3	0	−2	0	0	−5	

razona si es óptima y, si lo es, si corresponde a una solución de vértice o de arista.

(b) Escribe la solución óptima y el valor óptimo de la función objetivo.

(c) Calcula las variables duales.

(d) Determina, sin calcular ninguna otra tabla del símplex, el nuevo valor de la función objetivo si la tercera restricción pasa a ser $x + y + z \leq 5$.

(e) Determina si la solución seguirá siendo óptima si la función objectivo pasa a ser $2x + 3y + 3z$. La nueva solución ¿será de vértice, de arista finita o de arista infinita?

7) Una empresa quiere comprar dos materias primas en cantidades x e y, con las que quiere fabricar dos artículos A y B, y se plantea el problema siguiente para minimizar el coste de la producción:

$$\begin{array}{rll}
\text{Min.} & 3x + y & \text{Coste} \\
\text{s.a} & 5x + 2y \geq 100 & \text{Producción del artículo } A \geq \text{producción mínima} \\
 & 3x + y \geq 55 & \text{Producción del artículo } B \geq \text{producción mínima} \\
 & x,\ y \geq 0 &
\end{array}$$

Considera la tabla siguiente:

		3	1	0	0	
		x	y	s	t	
3	x	1	0	1	-2	10
1	y	0	1	-3	5	25
		3	1	0	-1	55
		0	0	0	1	

(a) Razona si es óptima. Si no lo es, itera hasta que llegues a la tabla óptima; si lo es, razona si la solución es de vértice, de arista finita o de arista infinita.

(b) ¿Qué cantidades le conviene comprar a la empresa de cada materia prima? ¿Cuál es el coste mínimo?

(c) Calcula e interpeta las variables duales.

(d) Calcula el intervalo de sensibilidad del precio de la segunda materia prima. Explica su interpretación económica.

8) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x + 2y + 6z \\ \text{s.a} & -2x + y + 3z \geq 1 \\ & x + y - 2z = 2 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

(a) Sabiendo que $(x, y, z) = (0, 2, 0)$ es solución óptima del problema, obtén la tabla óptima del símplex sin realizar ninguna iteración. ¿Es una solución de vértice, de arista finita o de arista infinita?

(b) Calcula las variables duales.

(c) Calcula el intervalo de sensibilidad de c_2 (es decir, el coeficiente de la variable y en la función objetivo).

(d) Calcula el intervalo de sensibilidad de b_2 (es decir, el término independiente de la segunda restricción).

9) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 6x + 3y + z \\ \text{s.a} & 2x + 2y + z \leq 7 \\ & 5x + \ \ y + z \geq 5 \\ & x \leq 3 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

(a) Comprueba que $(x, y, z) = (0, 2, 3)$ cumple la definición de solución factible básica.

(b) Calcula sin hacer ninguna iteración la tabla del símplex asociada a la solución anterior.

(c) Razona si la tabla de la pregunta anterior es óptima y, si no lo es, realiza las iteraciones necesarias hasta llegar a la tabla óptima.

(d) Escribe la solución óptima y el valor óptimo de la función objetivo. Razona si la solución es de vértice, de arista finita o de arista infinita.

(e) Calcula las variables duales.

(f) Razona cómo variaría el valor óptimo de la función objetivo si la segunda restricción pasara a ser $5x + y + z \geq 4.8$.

(g) Calcula el intervalo de sensibilidad del coeficiente de z en la función objetivo.

(h) Calcula por postoptimización cuál sería la nueva solución óptima si la segunda restricción pasara a ser $5x + y + z \geq 0.8$.

(i) Supón ahora que, además de cambiar la restricción como indica el apartado anterior, exigimos que las variables sean enteras. Escribe los dos problemas que habría que resolver por el método de ramificación y acotación a partir de la solución que has obtenido.

10) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 3x + 5y + z \\ \text{s.a} & 2x + 3y + z \leq 6 \\ & x \qquad\quad - z \leq 2 \\ & x,\, y,\, z \geq 0 \end{array}$$

cuya solución óptima viene dada por la tabla:

		3	5	1	0	0	
		x	y	z	s	t	
5	y	$2/3$	1	$1/3$	$1/3$	0	2
0	t	1	0	-1	0	1	2
		$10/3$	5	$5/3$	$5/3$	0	10
		$-1/3$	0	$-2/3$	$-5/3$	0	

(a) Escribe la solución del problema: el valor de todas las variables y el de la función objetivo. Indica si la solución es única y si es degenerada.

(b) Calcula e interpreta las variables duales.

(c) Calcula el intervalo de sensibilidad de b_2.

(d) Calcula mediante postoptimización la nueva solución óptima si el coeficiente de y en la función objetivo (primal) pasa a ser $c_2 = 4$. (Indica el valor óptimo de las variables y el de la función objetivo.)

11) Considera el problema siguiente, en el que las variables representan las cantidades que una empresa ha de producir de dos artículos para usar las 30 horas de mano de obra que tiene contratadas sin exceder las 19 unidades disponibles de una materia prima M:

$$\begin{array}{rll} \text{Min.} & x + y & \text{coste} \\ \text{s.a} & 3x + 5y = 30 & \text{horas de mano de obra usadas} = \text{horas disponibles} \\ & 2x + 3y \leq 19 & \text{cantidad empleada de } M \leq \text{cantidad disponible} \\ & x,\, y \geq 0. & \end{array}$$

(a) Comprueba que $(x, y) = (10, 0)$ y $(0, 6)$ son soluciones básicas del problema. ¿Son factibles?

(b) Calcula todas las soluciones factibles básicas del problema.

(c) Justifica que el problema tiene solución óptima y calcúlala a partir del apartado anterior.

(d) A partir de la solución óptima, calcula la tabla del símplex óptima.

(e) Calcula las variables duales.

(f) ¿Cómo afectaría al coste utilizar media hora más de mano de obra?

(g) La avería de una máquina hace que cada unidad del primer artículo no requiera 3, sino 10 horas de mano de obra. Calcula la nueva solución óptima.

(h) Calcula el intervalo de sensibilidad de la cantidad de M disponible.

(i) Determina cuál será la nueva producción óptima si la cantidad disponible de M se reduce a 18 unidades.

12) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & -2x + y \\ \text{s.a} & -x + y \leq 2 \\ & x + y \geq 0 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

(a) Estudia si hay una solución factible básica con variables básicas s y t.

(b) Calcula sin hacer iteraciones la tabla del símplex correspondiente a las variables $(x, y) = (0, 2)$.

(c) Razona que la tabla del apartado anterior es óptima. Razona si es de vértice, de arista finita o de arista infinita.

(d) Calcula las variables duales.

(e) Razona cómo variará el máximo de la función objetivo si la primera restricción cambiara a $x + y \leq 2.5$.

(f) Calcula el intervalo de sensibilidad del coeficiente de la variable y en la función objetivo. Indica su interpretación.

(g) Razona por postoptimización qué pasaría si dicho coeficiente pasara a valer 3.

(h) Calcula el intervalo de sensibilidad del término independiente de la segunda restricción. Indica su interpretación.

13) Una empresa quiere comprar dos inputs en cantidades x e y y se plantea el problema siguiente para minimizar su coste:

$$\begin{array}{rll} \text{Min.} & 6x + 2y & \text{Coste} \\ \text{s.a} & x \geq 50 & \text{Cantidad del 1er input} \geq \text{necesidad mínima} \\ & 3x + y \geq 250 & \text{Producción} \geq \text{producción mínima} \\ & x,\, y \geq 0 & \end{array}$$

(a) Calcula la tabla del símplex correspondiente a las variables básicas x e y. Razona si el problema es infactible, no acotado o si tiene solución óptima y, en este último caso, indica si es de vértice, de arista finita o de arista infinita.

(b) ¿Qué cantidades le conviene comprar a la empresa de cada input? ¿Cuál es el coste mínimo?

(c) Calcula las variables duales.

(d) ¿Qué aumento de coste requeriría una producción mínima de 255 unidades?

(e) Determina entre qué valores puede variar el precio del primer input sin que la solución óptima cambie.

(f) Calcula, por postoptimización, la nueva solución óptima si la necesidad mínima del primer input pasa a ser de 70 unidades.

14) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x + 4y + 3z \\ \text{s.a} & -x - 2y + z = 2 \\ & -2x + 4y \leq 12 \\ & x + 2y \geq 4 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

(a) Calcula la tabla del símplex correspondiente a la solución $(4, 0, 6)$.

(b) Calcula la solución óptima (x, y, z) y el valor óptimo de la función objetivo.

(c) Razona si la solución óptima es de vértice, de arista finita o de arista infinita.

(d) Razona cómo afectaría al valor óptimo de la función objetivo que la primera restricción cambiara a $x - 2y + z = 2.5$

15) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 2x + 3y + 2z \\ \text{s.a} & 2x + y + 2z \leq 5 \\ & -3x + y + z \geq 2 \\ & x,\ y, z \geq 0 \end{array}$$

(a) Calcula la tabla correspondiente a la solución $(x, y, z) = (0, 5, 0)$.

(b) Razona si la tabla del problema anterior es óptima. Si lo es, razona si es de vértice o de arista.

(c) Calcula la solución óptima del problema dual.

(d) Razona por postoptimización cuál sería la nueva solución óptima si la primera restricción pasara a ser $-2x + y \leq 5$.

(e) Calcula el intervalo de sensibilidad del término independiente de la primera restricción.

16) Considera el problema:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 2x + 3y \\ \text{s.a} & 2x + y \leq 4 \\ & 3x + y \leq 4 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array}$$

Su tabla óptima es:

		x	y	s	t	
		2	3	0	0	
3	y	2	1	1	0	4
0	t	1	0	-1	1	0
		6	3	3	0	12
		-4	0	-3	0	

(a) Estudia si existe una solución factible básica con variables básicas x, y.

(b) Escribe la solución óptima y el valor óptimo de la función objetivo.

(c) Calcula las variables duales.

(d) Calcula el intervalo de sensibilidad del término independiente de la primera restricción. Indica su interpretación.

(e) Determina por postoptimización la nueva solución óptima (y el valor óptimo de la función objetivo) si dicho término independiente pasa a valer 2.

7.2 Programación no lineal

1) El problema siguiente determina el consumo óptimo de dos bienes A y B para minimizar el coste manteniendo un nivel de utilidad dado:

$$\begin{array}{rll} \text{Min.} & 2x + y & \text{Coste} \\ \text{s.a} & x^2 + y \geq 9 & \text{Utilidad} \geq 9 \\ & x,\, y \geq 0 & \end{array}$$

(a) Resuélvelo gráficamente.

(b) Calcula el coste mínimo.

(c) Razona si la solución óptima es interior o de frontera.

(d) Comprueba que cumple las condiciones de Kuhn y Tucker.

(e) Determina qué efecto sobre el coste tendría exigir un nivel de utilidad de 10 unidades.

(f) ¿Qué sucedería con el coste si necesitáramos comprar una unidad del segundo bien?

2) Una empresa puede producir dos artículos en cantidades x, y. Sus posibilidades de producción están limitadas por la restricción $x^2+5y^2 \leq 105$ y, por otra parte, se ha comprometido a producir almenos 4 unidades del segundo artículo. El modelo siguiente determina la producción que maximiza el beneficio:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x^2 + 5y^2 \leq 105 \\ & y \geq 4 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

(a) Estudia si la solución $(x, y) = (5, 4)$ es factible o infactible, interior o de frontera.

(b) Comprueba que $(x, y) = (5, 4)$ es regular. ¿Qué podemos concluir de ello?

(c) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker del problema.

(d) Comprueba que $(x, y) = (5, 4)$ es un punto de Kuhn y Tucker y calcula sus multiplicadores.

(e) Razona que $(x, y) = (5, 4)$ es la solución óptima.

(f) Razona el efecto que tendría sobre el beneficio que las posibilidades de producción de la empresa fueran $x^2 + 5y^2 \leq 107$.

(g) ¿Cómo afectaría al beneficio la producción de una unidad más del segundo artículo?

3) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x + 3y \\ \text{s.a} & x + 2y \leq 6 \\ & 5x + 2y \geq 10 \\ & y \geq 0. \end{array}$$

(a) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker del problema (sin resolverlas).

(b) Estudia si los puntos $(6, 0)$ y $(1, 2.5)$ son o no puntos de Kuhn y Tucker del problema. En caso afirmativo calcula sus multiplicadores asociados.

(c) Razona si alguno de los puntos anteriores es óptimo.

(d) Transforma el problema para que tenga restricciones de igualdad, variables no negativas y objetivo de minimizar.

4) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x^2 - y^2 \\ \text{s.a} & x + 2y = 5 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

(a) Resuélvelo.

(b) Razona cómo variaría el valor mínimo de la función objetivo si el término independiente de la primera restricción pasara a valer 6.

(c) ¿Y si pidiéramos que x fuera al menos 0.1?

5) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x + y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 = 4 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

(a) Indica una solución factible interior, una solución factible de frontera y una solución infactible.

(b) Resuelve el problema.

(c) Transforma el problema de manera que tenga objetivo de maximizar y variables no negativas.

6) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x+y \\ \text{s.a.} & x \geq 1 \\ & x+y \geq 0 \\ & x \geq 0,\ y \leq 0 \end{array}$$

(a) Estudia si el conjunto de oportunidades es compacto y si es convexo.

(b) Razona, sin comprobarlo explícitamente, que la solución óptima ha de cumplir las condiciones de Kuhn y Tucker.

(c) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker del problema y comprueba si el punto $(1, 0)$ las satisface.

7) Considera el problema siguiente, en el que las variables representan las cantidades empleadas de dos factores para la producción de un artículo:

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & x^2+y^2+4xy & \text{producción} \\ \text{s.a} & x+y=4 & \text{coste} = \text{presupuesto} \\ & x,\ y \geq 0. & \end{array}$$

(a) ¿Podemos asegurar que la solución óptima (si existe) es un punto de Kuhn y Tucker?

(b) Estudia si $(x, y) = (2, 2)$ es un punto de Kuhn y Tucker.

(c) Razona si podemos concluir que es óptimo en virtud de la condición suficiente de Kuhn y Tucker. ¿Y por el teorema de Weierstrass?

(d) Calcula la solución óptima.

(e) ¿Qué incremento de producción podríamos conseguir si el presupuesto pasara a ser de 4.5 u.m.?

(f) Repite los apartados (c) y (d) cambiando el objetivo por Min. $x^2 + y^2 + 4xy$.

8) Sabemos que la solución óptima del problema siguiente es $(x, y) = (3, 0)$:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x+y \\ \text{s.a.} & x^2+y \geq 9 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array}$$

(a) Razona si la solución óptima es interior o de frontera.

(b) Comprueba que cumple las condiciones de Kuhn y Tucker.

(c) Razona qué efecto tendría sobre la función objetivo que el término independiente de la primera restricción pasara a ser 10.

9) Una empresa quiere producir 100 unidades entre tres artículos minimizando el coste. En la producción hay que emplear una materia prima de la que sólo posee 1 600 unidades. El problema correspondiente es:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 10x+30y+30z+2x^2+2xy-z^2 \\ \text{s.a} & x+y+z=100 \\ & 10x+40y+80z \leq 1600 \\ & x,y,z \geq 0 \end{array}$$

(a) Razona que la solución óptima es un punto de Kuhn y Tucker.

(b) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker (sin resolverlas).

(c) Al calcular los puntos de Kuhn y Tucker, el mejor resulta ser $(x, y, z) = (80, 20, 0)$. Razona que es la solución óptima.

(d) Comprueba si se puede aplicar la condición suficiente de Kuhn y Tucker.

(e) Determina qué aumento de coste requeriría la producción de 102 unidades de producto.

(f) A la empresa le ofrecen comprarle una unidad del tercer artículo por 100 u.m. Razona si le conviene aceptar la oferta.

10) Resuelve el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x^2 + xy + y^2 \\ \text{s.a} & x + y \geq 6. \end{array}$$

11) Resuelve el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x^2 + 3y^2 + 2xy + z^2 \\ \text{s.a} & x + y = 3 \\ & z \geq 0 \end{array}$$

12) Resuelve el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 10y + 9z - x^2 - y^2 - z^2 + xz \\ \text{s.a} & y^2 \leq 1 \end{array}$$

13) Resuelve el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x + y \\ \text{s.a} & x^2 + y = 9 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

14) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 2 - x^2 - 4y \\ \text{s.a} & x + 2y \leq 2 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

(a) Resuélvelo.

(b) La solución óptima que has encontrado ¿es interior o de frontera?, ¿y la solución $(1/2, 1/2)$? Pon un ejemplo de solución infactible.

15) Resuelve el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x^2 - y^2 + 4 \\ \text{s.a} & 2x + y = 6 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

¿Cuál será aproximadamente el nuevo valor óptimo de la función objetivo si el término independiente de la primera restricción pasa a ser 6.5?

16) Encuentra los puntos de Kuhn y Tucker del problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & -x^2 - y^2 + 8x \\ \text{s.a} & x + y = 6 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Demuestra que el problema tiene solución óptima e indica cuál es.

17) Resuelve el problema siguiente haciendo uso de la teoría general de programación no lineal:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x^2 - y^2 \\ \text{s.a} & x + y = 5 \\ & x \geq 1 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

¿Cuál será aproximadamente el nuevo valor óptimo de la función objetivo si el término independiente de la primera restricción pasa a ser $5'5$?

18) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & -12x + 3y \\ \text{s.a} & y - x^2 \geq 1. \end{array}$$

(a) Justifica que si hay solución óptima, ésta tiene que ser un punto de Kuhn y Tucker.
(b) Justifica que todo punto de Kuhn y Tucker ha de ser un óptimo global del problema.
(c) Calcula los puntos de Kuhn y Tucker del problema.
(d) Calcula el valor óptimo de la función objetivo (justificando tu respuesta) y razona cuál sería el nuevo valor óptimo si la restricción pasara a ser $y - x^2 \geq 0.8$.
(e) Justifica gráficamente que tiene solución óptima.
(f) Razona si también la tendría si la función objetivo fuera Max. $x + y$.
(g) Razona que, con este objetivo alternativo, el problema no puede tener puntos de Kuhn y Tucker.

19) (a) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker para el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 8x - 2y \\ \text{s.a} & y - x^2 \geq 2 \end{array}$$

y comprueba que el punto $(2, 6)$ las cumple.
(b) Demuestra que es un óptimo global.
(c) ¿Se puede aplicar la condición necesaria en el problema?
(d) Sabiendo que $(2, 6)$ es el único punto de Kuhn y Tucker, razona que es el único máximo global.
(e) Ahora vamos a minimizar la función objetivo, es decir,

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 8x - 2y \\ \text{s.a} & y - x^2 \geq 2\ . \end{array}$$

Resuelve este nuevo problema sabiendo que no tiene ningún punto de Kuhn y Tucker.

20) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 4x - y \\ \text{s.a} & y - x^2 \geq 1 \end{array}$$

(a) Indica una solución factible interior, una solución factible de frontera y una solución infactible.

(b) Resuelve el problema.

(c) Transforma el problema de modo que tenga objetivo de minimizar y que la restricción sea de igualdad.

21) Una empresa quiere producir dos variantes de un artículo en cantidades x e y. Desea una producción conjunta de 90 unidades y tiene una materia prima limitada a 100 unidades. Para minimizar el coste plantea el problema siguiente:

$$\begin{array}{rll} \text{Min.} & 2x^2 + 3y^2 - xy & \text{Función de coste} \\ \text{s.a.} & x + \ \ y = 90 & \text{Producción exigida} \\ & x + 2y \leq 100 & \text{Materia prima disponible.} \\ & x,\, y \geq 0 & \end{array}$$

(a) Aplica el teorema de Weierstrass. ¿Cuál es la conclusión?

(b) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker del problema (sin resolverlas).

(c) La solución óptima es $(x, y) = (80, 10)$. Comprueba que cumple las condiciones de Kuhn y Tucker y calcula sus multiplicadores.

(d) ¿Cómo afectaría al coste que la empresa dispusiera de una unidad más de materia prima?

22) El problema siguiente calcula la producción máxima que puede conseguir una empresa en función de las cantidades x, y, z de materias primas que utiliza, teniendo en cuenta que no puede usar más de 60 kg en total y que dispone de un presupuesto de 70 unidades monetarias.

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & 2x^2 + 4y^2 + 3z^2 & \text{Función de producción} \\ \text{s.a.} & x + y + z \leq 60 & \text{Cantidad total de materias primas} \\ & 2x + 2y + 3z \leq 70 & \text{Coste} \leq \text{presupuesto} \\ & x,\, y,\, z \geq 0 & \end{array}$$

(a) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker del problema.

(b) Sabiendo que $(0, 35, 0)$ es el único punto de Kuhn y Tucker, razona que es la solución óptima.

(c) Calcula los multiplicadores de Kuhn y Tucker correspondientes.

(d) Si la empresa no pudiera usar únicamente la segunda materia prima, ¿qué le convendría más, comprar un poco de la primera o de la tercera?

(e) ¿Cómo afectaría a la producción disponer de dos unidades más de presupuesto?

(f) Pon un ejemplo de solución de frontera y otro de solución interior del problema, razonando por qué es cada una del tipo correspondiente.

23) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & B = 300x + 200y - x^2 \\ \text{s.a.} & 2x + y \leq 20 \\ & x + 2y \leq 5 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array}$$

donde B es la función de beneficios de una empresa y las variables x, y representan las cantidades producidas de dos artículos A_1 y A_2.

(a) ¿Podemos asegurar que la solución óptima cumple las condiciones de Kuhn y Tucker?

(b) Estudia si la solución $(x, y) = (5, 0)$ cumple dichas condiciones.

(c) Estudia si el punto anterior es un óptimo global del problema.

(d) Supón que la empresa recibe una oferta de 200 u.m. por fabricar una unidad del artículo A_2. ¿Le convendría?

24) Considera el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & 2x^2 + 4xy + y^2 \\ \text{s.a} & 2x^2 + 2y \leq 5 \\ & y \geq 0. \end{array}$$

(a) Razona que tiene solución óptima.

(b) Razona que la solución óptima ha de ser un punto de Kuhn y Tucker.

(c) Sabiendo que $(x, y) = (-1, 1.5)$ es el mejor punto de Kuhn y Tucker, razona que es la solución óptima. Determina si es interior o de frontera.

(d) Comprueba que el punto del apartado anterior es ciertamente un punto de Kuhn y Tucker del problema. Indica el valor de los multiplicadores de Kuhn y Tucker.

(e) Transforma el problema para que tenga objetivo de maximizar, restricciones de igualdad y variables no negativas.

Supón a partir de aquí que las variables x e y han de ser enteras.

(f) Escribe los problemas que habría que resolver según el método de ramificación y acotación.

(g) Las soluciones de estos problemas son $(x, y) = (-1, 1)$ y $(x, y) = (-0.7, 2)$. Escribe los tres primeros nodos del árbol correspondiente a la ramificación y acotación y razona si conocemos ya la solución óptima o si hemos de seguir ramificando.

25) Una empresa quiere producir un máximo de 1 000 unidades entre tres artículos maximizando su beneficio. Además, requiere una producción mínima de 80 unidades del primer artículo. El problema correspondiente es:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 100x + 90y + 150z - x^2 - y^2 - 3z^2 - 2xy \\ \text{s.a} & x + y + z \leq 1000 \\ & x \geq 80 \\ & x, y, z \geq 0 \end{array}$$

(a) Razona que la solución óptima ha de ser un punto de Kuhn y Tucker.

(b) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker (sin resolverlas).

(c) Estudia si los puntos $(500, 500, 0)$ y $(80, 0, 25)$ son de Kuhn y Tucker.

(d) Calcula la solución óptima del problema.

(e) ¿Cómo afectaría a la empresa que la máxima producción admisible fuera de 500 unidades?

(f) ¿Y si tuviera que producir 85 unidades del primer artículo?

26) Un consumidor desea maximizar su utilidad al comprar dos bienes sujeto a una restricción presupuestaria. Además necesita comprar al menos 5 unidades del segundo producto:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & U = xy \\ \text{s.a} & x + 3y = 24 \\ & x \geq 0,\ y \geq 5. \end{array}$$

(a) Resuelve el problema. Indica las cantidades que debe comprar de cada producto y la utilidad máxima que consigue con dicha solución.

(b) Interpreta el multiplicador de la restricción presupuestaria.

(c) Razona qué sucedería con la utilidad si el consumidor necesitara comprar 6 unidades del segundo producto.

27) El problema siguiente maximiza la función de beneficios de una empresa que quiere producir un total de 20 unidades de dos artículos en cantidades x e y.

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 100x + 200y - x^2 - 4xy \\ \text{s.a} & x + y = 20 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array}$$

(a) Resuelve el problema. Indica qué cantidad de cada artículo debe producir la empresa y qué beneficio obtiene con ello.

(b) Interpreta el multiplicador de Kuhn y Tucker de la primera restricción.

(c) Si a la empresa le ofrecieran 100 u.m. por producir una unidad del primer artículo, ¿le interesaría aceptar la oferta?

28) El problema siguiente determina las cantidades que ha de adquirir un consumidor de dos productos para maximizar su utilidad con un presupuesto de 6 u.m.

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x^2 + xy + 2y^2 \\ \text{s.a} & 3x + 2y = 6 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array}$$

(a) Resuelve el problema.

(b) Razona cómo cambiaría la utilidad óptima si el presupuesto fuera de 6.5 u.m.

(c) Interpreta el multiplicador de Kuhn y Tucker de la restricción $x \geq 0$.

(d) Razona cuál sería la solución óptima si las variables tuvieran que ser enteras.

29) Una empresa produce tres artículos en cantidades x, y, z. El problema siguiente determina las cantidades que conviene producir de cada uno para maximizar los beneficios, teniendo en cuenta una restricción que determina la frontera de posibilidades de producción de la empresa.

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 14x + 18y + 7z - x^2 - y^2 - z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \\ \text{s.a} & 2x + 4y + z^2 \leq 14 \\ & x,\, y,\, z, \geq 0 \end{array}$$

(a) Comprueba que la producción óptima es $(x, y, z) = (3, 2, 0)$. (Primeramente tendrás que comprobar que el punto es de Kuhn y Tucker.)

(b) Razona el efecto que tendría sobre los beneficios de la empresa que ésta tuviea que producir al menos una unidad del tercer artículo.

(c) Con una inversión en maquinaria de 4.5 u.m., la empresa podría aumentar sus posibilidades de producción hasta $2x + 4y + z^2 \leq 16$. ¿Le convendría?

30) Una empresa fabrica dos productos en cantidades x e y. El problema siguiente determina la producción que maximiza el beneficio sujeto a que el coste no exceda del presupuesto y que la cantidad empleada de un input I sea al menos la cantidad que la empresa ha adquirido ya del mismo.

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & x + 3y & \text{Beneficio} \\ \text{s.a} & x + 2y \leq 6 & \text{coste} \leq \text{presupuesto} \\ & 5x + 2y \geq 10 & \text{cantidad empleada de } I \geq \text{cantidad adquirida} \\ & x,\, y \geq 0 & \end{array}$$

(a) Escribe las condiciones de Kuhn y Tucker del problema (sin resolverlas).

(b) Estudia si los puntos $(6, 0)$ y $(1, 2.5)$ son o no puntos de Kuhn y Tucker del problema. En caso afirmativo calcula sus multiplicadores asociados.

(c) Razona si alguno de los puntos anteriores es óptimo.

(d) Interpreta el multiplicador de la restricción presupuestaria.

(e) ¿Qué efecto tendría sobre los beneficios que la empresa adquiriera (y pretendiera utilizar) 2 unidades más del input I?

(f) Razona si el conjunto de oportunidades es compacto.

(g) Transforma el problema para que tenga restricciones de igualdad (sin contar las de signo) y objetivo de minimizar.

31) Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & -x + 2y \\ \text{s.a} & x + 3y \leq 6 \\ & x - y \geq 0 \\ & x,\, y \geq 0 \text{ enteras} \end{array}$$

Para las primeras preguntas, considera el problema relajado (es decir, no consideres las variables enteras).

(a) Razona que, si tiene solución óptima, ésta cumplirá las condiciones de Kuhn y Tucker.

(b) Aplica el teorema de Weierstrass al problema. ¿Cuál es la conclusión?

(c) Plantea las condiciones del Kuhn y Tucker del problema.

(d) Pon el problema en forma estándar y calcula la solución básica correspondiente a las variables básicas x e y. ¿Es factible?

(e) Comprueba si la solución (x, y) (sin las variables de holgura) que has encontrado en el apartado anterior es un punto de Kuhn y Tucker. Indica el valor de los multiplicadores.

(f) Estudia (con la teoría de programación no lineal) si la solución que has encontrado en la pregunta (d) es óptima.

(g) Calcula sin iterar la tabla del símplex asociada a la solución de la pregunta (d). Razona si es óptima y, si lo es, razona si corresponde a una solución de vértice o de arista.

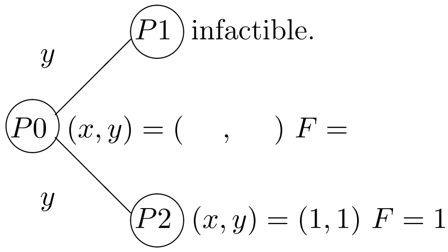
(h) Sin hacer uso de los apartados anteriores, escribe una primera tabla del símplex sin calcular ninguna matriz inversa. A partir de ella, haz una iteración. En la tabla que obtengas, razona qué variable entraría y cuál saldría, pero no hagas más iteraciones.

(i) Calcula el problema dual.

(j) Razona el efecto que tiene sobre la función objetivo de cambiar la primera restricción a $x + 3y \leq 8$.

(k) Calcula el intervalo de sensibilidad del coeficiente de la x en la función objectivo.

(l) Para resolver el problema original (con variables enteras) aplicamos el método de ramificación y acotación. Completa el árbol siguiente con los datos obtenidos en los apartados anteriores. (No olvides indicar las restricciones añadidas.)



¿A qué conclusión llegamos?

32) El problema siguiente determina el beneficio máximo que puede obtener una empresa con una producción (x, y) de dos artículos y con una restricción sobre las horas de producción disponibles:

Max.	$xy + 4000x$	beneficio
s.a	$x + 2y = 5000$	horas empleadas = horas disponibles
	$x,\ y \geq 0$	

(a) Pon un ejemplo de solución infactible y otro de solución factible. Razona si la solución factible es interior o de frontera.

(b) Resuelve el problema.

(c) Razona el efecto que tendría sobre los beneficios la producción de una unidad del segundo artículo.

(d) La empresa desea determinar la producción que minimiza el coste exigiendo una producción mínima de 1 000 unidades del segundo artículo. Resuelve el problema correspondiente mediante el método símplex (sin partir de ninguna solución factible conocida):

$$\begin{array}{rll} \text{Min.} & 3x + 7y & \text{coste} \\ \text{s.a} & x + 2y = 5000 & \text{horas empleadas} = \text{horas disponibles} \\ & y \geq 1000 & \text{producción de } y \geq \text{producción mínima} \\ & x,\, y \geq 0 & \end{array}$$

(e) Resuelve gráficamente el problema de la pregunta (d).

(f) En el problema de la pregunta (d), determina el intervalo de sensibilidad del coste de producción del primer artículo y el de la producción mínima del segundo artículo.

Parte II
Modelización y optimización con LINGO

8 Introducción a LINGO

En esta sección veremos cómo usar LINGO para resolver problemas de programación matemática. El primer paso para resolver un problema es modelizarlo, así que empezamos por plantear y modelizar el problema que usaremos como ejemplo.

8.1 Un ejemplo de modelización

Ejemplo 1a Una empresa necesita incrementar urgentemente el rendimiento de dos líneas de producción de una de sus fábricas. En la primera línea de producción necesita que se produzcan al menos 3 000 unidades más al día, mientras que en la segunda línea necesita al menos 5 000 unidades más. Para ello se dispone a contratar trabajadores temporales, que debe distribuir en turnos de mañana, tarde y noche. La fábrica puede albergar hasta 100 horas adicionales en el turno de mañana, hasta 200 en el turno de tarde y hasta 300 en el turno de noche. Por razones de organización, al menos 190 horas de la primera línea de producción deben realizarse antes de la noche.

La tabla siguiente recoge el número de artículos que pueden producirse en cada hora de trabajo en cada línea según el turno en que se realice:

	Mañana	Tarde	Noche
Línea 1	15	17	20
Línea 2	10	12	15

mientras que la tabla siguiente recoge el precio (en euros) que la empresa deberá pagar por cada hora de trabajo en cada línea y turno:

	Mañana	Tarde	Noche
Línea 1	40	55	100
Línea 2	50	50	90

Determina cuántas horas conviene contratar en cada turno para cada línea de producción de modo que se consiga la producción adicional requerida con coste mínimo.

Para modelizar el problema debemos identificar las variables de decisión, la función objetivo y las restricciones.

• **Determinación de las variables** Las variables representan lo que tenemos que decidir. Imaginemos que ya hemos resuelto el problema y que tenemos que darle la solución al gerente de la empresa. ¿Qué tendríamos que decirle? Nuestra respuesta sería algo así como:

> Para la primera línea de producción conviene contratar 40 horas en el turno de mañana, 30 en el de tarde y 20 en el de noche, mientras que para la segunda línea de producción conviene contratar 30 horas en el turno de mañana, 25 en el de tarde y 47 en el de noche.

Esos números están tomados al azar, precisamente porque lo que nos falta hacer es encontrar la respuesta correcta, la solución óptima, pero, sea la que sea, debe constar de seis números que ahora desconocemos. Dichos números desconocidos son:

M_1	horas que conviene contratar para la línea 1 en el turno de mañana
T_1	horas que conviene contratar para la línea 1 en el turno de tarde
N_1	horas que conviene contratar para la línea 1 en el turno de noche
M_2	horas que conviene contratar para la línea 2 en el turno de mañana
T_2	horas que conviene contratar para la línea 2 en el turno de tarde
N_2	horas que conviene contratar para la línea 2 en el turno de noche

Éstas son, pues, las variables del problema.

• **Determinación de la función objetivo** El problema establece que nuestro objetivo es contratar las horas necesarias con el coste mínimo, luego la función objetivo es la función de coste. Si contratamos M_1 horas para el turno de mañana en la línea 1, su coste será de $40M_1$ €, e igualmente con los demás casos, luego el objetivo es

$$\text{min. } 40M_1 + 50M_2 + 55T_1 + 50T_2 + 100N_1 + 90N_2$$

• **Determinación de las restricciones** Ahora debemos leer atentamente el enunciado y detenernos en cada afirmación que suponga una limitación por la que una solución pudiera ser infactible e introducir la restricción adecuada para que ello no suceda:

En la primera línea de producción necesita que se produzcan al menos 3 000 unidades más al día

Para garantizar esto introducimos la restricción:

$$15M_1 + 17T_1 + 20N_1 \geq 3000 \qquad \text{prod. línea } 1 \geq \text{prod. requerida.}$$

mientras que en la segunda línea necesita al menos 5 000 unidades más.

$$10M_2 + 12T_2 + 15N_2 \geq 5000 \qquad \text{prod. línea } 2 \geq \text{prod. requerida.}$$

La fábrica puede albergar hasta 100 horas adicionales en el turno de mañana

Exigimos que no se rebase dicha capacidad:

$$M_1 + M_2 \leq 100 \qquad \text{horas turno de mañana} \leq \text{capacidad}$$

200 en el turno de tarde y hasta 300 en el turno de noche

$$T_1 + T_2 \leq 200 \qquad \text{horas turno de tarde} \leq \text{capacidad}$$

$$N_1 + N_2 \leq 300 \qquad \text{horas turno de noche} \leq \text{capacidad}$$

> Cuando escribas una restricción puedes comprobar que es coherente comparando las unidades de ambos miembros. Por ejemplo, no tendría sentido escribir
>
> $$M_1 + T_1 + N_1 \geq 3\,000,$$
>
> porque a la izquierda estaríamos sumando horas y a la derecha tenemos unidades de producto. En cambio, como 10 son las unidades de producto/hora de trabajo en la línea 1, tenemos que $10M_1$ representa unidades de producto y no horas.
>
> En cambio, $M_1 + M_2 \leq 100$ es correcto porque el miembro izquierdo representa las horas empleadas (en el turno de mañana) y el miembro derecho las horas disponibles en dicho turno.

Por razones de organización, al menos 190 horas de la primera línea de producción deben realizarse antes de la noche.

Esto significa que deben realizarse o bien en el turno de mañana o bien en el de la tarde:

$$M_1 + T_1 \geq 190 \qquad \text{horas en la línea 1 anteriores al turno de noche} \geq \text{cantidad exigida.}$$

Añadiendo las condiciones de no negatividad, el modelo queda como sigue:

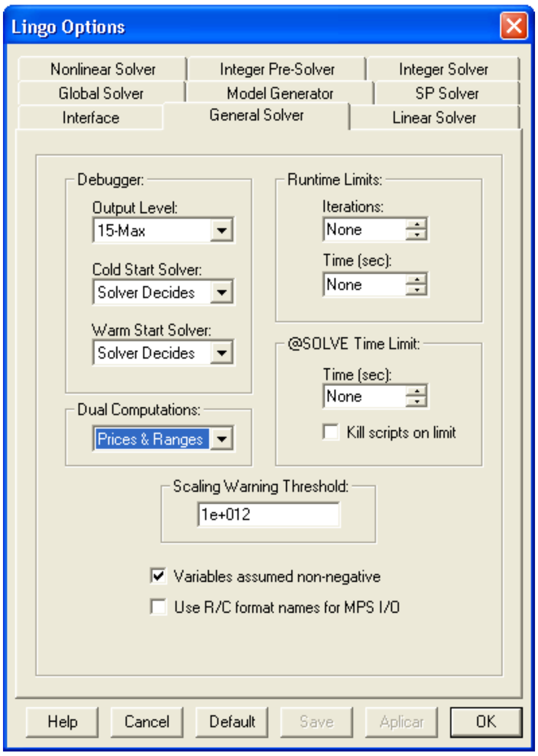
$$
\begin{array}{lll}
\text{Min.} & 40M_1 + 50M_2 + 55T_1 + 50T_2 + 100N_1 + 90N_2 & \text{coste} \\
\text{s.a} & 15M_1 + 17T_1 + 20N_1 \geq 3000 & \text{producción línea 1} \geq \text{producción requerida.} \\
 & 10M_2 + 12T_2 + 15N_2 \geq 5000 & \text{producción línea 2} \geq \text{producción requerida.} \\
 & M_1 + M_2 \leq 100 & \text{horas turno mañana} \leq \text{capacidad} \\
 & T_1 + T_2 \leq 200 & \text{horas turno tarde} \leq \text{capacidad} \\
 & N_1 + N_2 \leq 300 & \text{horas turno noche} \leq \text{capacidad} \\
 & M_1 + T_1 \geq 190 & \text{horas anteriores a la noche en línea 1} \geq \text{horas} \\
 & M_1, M_2, T_1, T_2, N_1, N_2 \geq 0 & \text{exigidas.}
\end{array}
$$

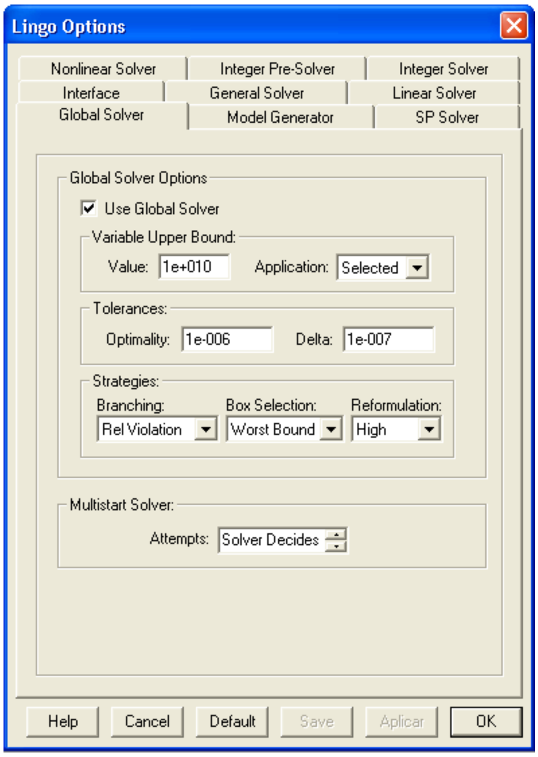
En los apartados siguientes veremos cómo introducir este problema en LINGO y cómo interpretar la solución y toda la información adicional que éste proporciona.

8.2 Introducción de un problema en LINGO

Para empezar a usar LINGO hemos de abrir la aplicación y crear un documento en blanco sobre el que escribir (aunque ya se crea uno por defecto al abrir LINGO, si lo hemos cerrado o queremos otro nuevo, basta acudir al menú File → New). LINGO maneja distintos tipos de documentos. Asegúrate de abrir uno de tipo Lingo Model, con extensión .lg4. Puedes comprobar el tipo de documento en la barra superior de la ventana. Como en cualquier otra aplicación, podemos guardar en cualquier momento nuestro trabajo mediante el menú File → Save o bien File → Save as...

La única configuración que requiere el programa (al menos, para el uso que nosotros le daremos) se introduce mediante el menú Solver → Options... Aparece entonces un panel de opciones con varias pestañas.





La opción a) hace que LINGO calcule los precios duales y los intervalos de sensibilidad (véase más adelante). Cuando el problema no es de programación lineal esta opción puede dar lugar a un mensaje de error, y en tal caso hay que desactivarla.

La opción b) hace que no sea necesario escribir en cada problema las condiciones de no negatividad, sino que LINGO supone a priori que todas las variables son no negativas.

La opción c) hace que LINGO se asegure de que las soluciones que encuentra sean óptimos globales y no meramente locales. Para problemas muy grandes podría hacer que tarde un tiempo excesivo o incluso que no encuentre la solución.

La opción d) evita que LINGO interprete expresiones como $-x^2$ en el sentido inusual de $(-x)^2$.

Sólo hemos de comprobar cuatro cosas:

a) Que, en la pestaña titulada "General Solver", en la casilla "Dual Computations:" esté seleccionada la opción "Prices & Ranges".

b) Que en esa misma pestaña esté marcada la opción "Variables assumed non-negative".

c) Que en la pestaña titulada "Global Solver" esté marcada la opción "Use Global Solver".

d) Que en la pestaña titulada "Model Generator" esté marcada la opción "Unary Minus Priority": Low.

Si pulsamos el botón "Save" de la parte inferior del cuadro, el ordenador recordará estas opciones las próximas veces que usemos LINGO, y no será necesario volver a especificarlas, pero si usamos el programa en otro ordenador (por ejemplo, un ordenador del aula de informática que no sabemos cómo ha sido configurado), deberemos abrir este cuadro de opciones para comprobar que la configuración es correcta.

Ahora ya podemos escribir el problema, para lo cual tecleamos lo siguiente:

```
[Coste] Min= 40*M1+50*M2+55*T1+50*T2+100*N1+90*N2;
[Produccion_L1] 15*M1+17*T1+20*N1>3000;
[Produccion_L2] 10*M2+12*T2+15*N2>5000;
[Horas_M] M1+M2<100;
[Horas_T] T1+T2<200;
[Horas_N] N1+N2<300;
[Distribucion_L1] M1+T1>190;
```

En general, a la hora de introducir un problema en LINGO hemos de tener en cuenta lo siguiente:

a) Cada ecuación termina siempre con un punto y coma. Si una ecuación fuera muy larga y no cupiera en una línea, podemos cambiar de línea cuando queramos. LINGO entenderá que la ecuación termina cuando encuentre el punto y coma.

b) La función objetivo empieza con `Max =` si el objetivo es maximizar y con `Min =` si el objetivo es minimizar.

c) En lugar de escribir $\leq$ o $\geq$ hemos de escribir $<$ o $>$. Las restricciones de igualdad se introducen con $=$.

d) Es necesario escribir los productos con el signo $*$, de modo que obtendríamos un error si escribiéramos `40M1` en lugar de `40*M1`.

e) La coma decimal se representa con un punto.

f) Las potencias se introducen con el circunflejo `^` . Por ejemplo, x^4 se escribiría `x^4`.

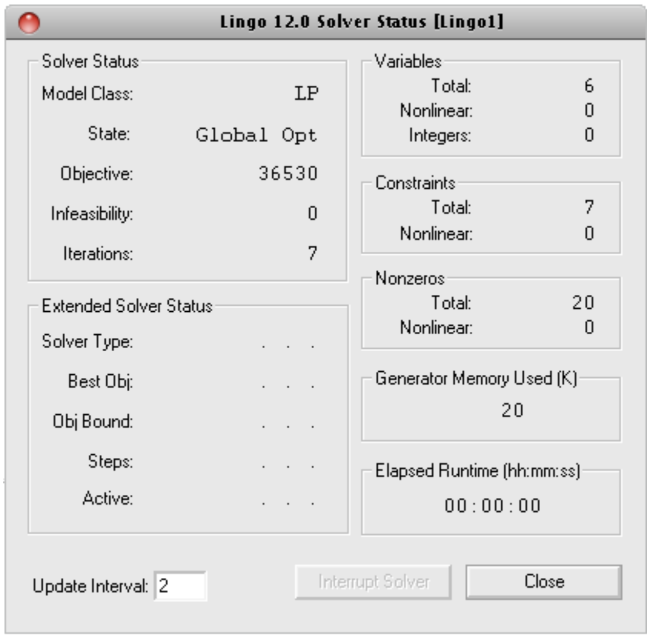
g) No es necesario introducir las condiciones de no negatividad, $M_1, M_2, T_1, T_2, N_1, N_2 \geq 0$, sino que LINGO las da por supuestas. Si quisiéramos especificar que una variable, por ejemplo M_1, es libre, añadiríamos una nueva línea `@Free(M1);`

> Otras funciones disponibles son `@SQRT(x)` para $\sqrt{x}$, `@LOG(x)` para $\ln x$, `@EXP(x)` para e^x, `@SIN(x)` para $\operatorname{sen} x$, `@COS(x)` para $\cos x$. Puedes encontrar más funciones en el menú Edit → Paste Function.

h) Los nombres de las variables pueden constar de una o más letras (pero no espacios en blanco, acentos, ni eñes, etc.). No podemos escribir literalmente M_1 con subíndice, pero sí `M1`, como hemos hecho. En cualquier caso, el primer signo de una variable tiene que ser una letra y no un número. Por ejemplo, `1M` no sería un nombre válido para una variable.

i) Las palabras entre corchetes antes de las restricciones no son necesarias, pero ayudan a leer después la solución. Han de cumplir las mismas condiciones que los nombres de las variables. En particular no pueden tener espacios en blanco. Si queremos poner varias palabras podemos usar guiones bajos, como en `Produccion_L1`.

Una vez introducido el modelo, lo resolvemos con el menú Solver → Solve, o bien con el icono en forma de diana ( ) que hay en la parte superior de la ventana. Si no se produce ningún error, obtendremos una ventana con este aspecto:



La única información que nos interesa es "State: Global Opt", que nos indica que LINGO ha obtenido un óptimo global. Las posibilidades son:

Global Opt: óptimo global.

Local Opt: óptimo local. En tal caso deberemos estudiar si el óptimo es global mediante convexidad.

Infeasible/Unbounded: infactible/no acotado. En este caso aparecerá antes un cuadro de error advirtiéndonos de que el problema no tiene solución.

Unknown: Desconocido. Se da este caso cuando LINGO encuentra un error y no resuelve el problema.

Si LINGO ha encontrado una solución óptima (global o local), cerramos la ventana anterior y veremos otra ventana titulada "Solution Report", que contiene (entre otras líneas que no nos interesan) dos tablas con la solución del problema. Para nuestro ejemplo son:

```
     Variable           Value        Reduced Cost
           M1        100.0000            0.000000
           M2        0.000000            27.00000
           T1        90.00000            0.000000
           T2        110.0000            0.000000
           N1        0.000000            100.0000
           N2        245.3333            0.000000

          Row   Slack or Surplus       Dual Price
        COSTE        36530.00           -1.000000
PRODUCCION_L1        30.00000            0.000000
PRODUCCION_L2        0.000000           -6.000000
      HORAS_M        0.000000            37.00000
      HORAS_T        0.000000            22.00000
      HORAS_N        54.66667            0.000000
DISTRIBUCION_L1      0.000000           -77.00000
```

En el apartado siguiente explicamos la información que proporcionan estas tablas.

Si queremos guardar la solución deberemos ir al menú FILE → Save o FILE → Save as…, y obtendremos un documento de extensión .lgr.

8.3 Interpretación de la salida de LINGO

Según hemos visto, LINGO proporciona dos tablas con cuatro columnas de datos que vamos a interpretar una por una.

Columna Value Contiene el valor óptimo de cada variable. En nuestro ejemplo, podemos concluir que la solución óptima es

$$(M_1, M_2, T_1, T_2, N_1, N_2) = (100, 0, 90, 110, 0, 245.33)$$

o, dicho de forma más natural, que en la línea 1 a la empresa le conviene contratar 100 horas en el turno de mañana y 90 en el de tarde, mientras que en la línea 2 le conviene contratar 110 horas en el turno de tarde y 245.33 en el de noche.

Columna Slack or Surplus Una de las líneas (habitualmente la primera) contiene el valor óptimo de la función objetivo. En nuestro ejemplo vemos que el coste de contratación mínimo para la empresa es de 36 530 €.

El resto de la columna contiene la *holgura* de cada restricción, es decir, la diferencia entre el valor de su miembro izquierdo y de su miembro derecho. Para interpretar adecuadamente estas holguras tenemos que fijarnos en la interpretación de ambos miembros en el contexto de nuestro problema, así como la relación entre ellos, es decir, si es $\leq$, si es $\geq$ o si es $=$ (en cuyo caso la holgura será necesariamente igual a 0).

- La primera restricción exige que las unidades producidas en la línea 1 deben ser $\geq$ que las 3 000 unidades requeridas, luego la holgura 30 indica que se producen 30 unidades más de las requeridas, es decir un total de 3 030 unidades de producto.
- La segunda restricción exige que las unidades producidas en la línea 2 deben ser $\geq$ que las 5 000 unidades requeridas, luego la holgura 0 indica que se producen exactamente esas 5 000 unidades y ninguna más.
- La tercera restricción exige que que las horas contratadas en el turno de mañana sean $\leq$ que las 100 horas disponibles, luego la holgura 0 indica que se contratan las 100 horas disponibles, sin que sobre ninguna.
- Igualmente, la holgura de la cuarta restricción indica que en el turno de tarde se contratan las 200 horas disponibles, sin que sobre ninguna.
- La quinta restricción exige que las horas contratadas en el turno de noche sean $\leq$ que las 300 horas disponibles, luego la holgura 54.66 indica que se contratan esas horas de menos, es decir, que sólo se contratan $300 - 54.66 = 245.33$ horas.
- La sexta restricción exige que las horas de la línea 1 contratadas antes del turno de noche sean $\geq$ que 190, luego la holgura 0 indica que en los turnos anteriores al turno de noche se contratan exactamente esas 190 horas y ninguna más.

En general ten presente que si una restricción es de $\geq$, como la primera, que dice que las unidades producidas tienen que ser 3 000 **o más**, la holgura indica las que se producen **de más,** mientras que si una restricción es de $\leq$, como la quinta, es de $\leq$, que indica que las horas contratadas en el turno de noche tienen que ser 300 **o menos**, la holgura indica las horas que se contratan **de menos.**

Así, sería un error interpretar la holgura de la primera restricción como que:

De las 3 000 *unidades requeridas sólo se producen* 2 970*,*

pues si eso pasara la solución sería infactible, o, más sin sentido aún, decir que "sobran" (?) 30 unidades de producto. En este contexto, ni sobran ni faltan unidades de producto. Se producen 3 030 y se entiende que la empresa las puede comercializar todas, ya que si no fuera así habría que poner una restricción de $=$ para excluir un exceso de producción no aprovechable.

En otros términos, la holgura de una restricción de $\geq$ debe sumarse al miembro derecho para obtener el izquierdo, mientras que la de una restricción de $\leq$ debe restarse: en la línea 1 se producen

$$3\,000 + 30 = 3\,030 \text{ unidades}$$

y en el turno de noche se emplean

$$300 - 54.66 = 245.33 \text{ horas.}$$

Columna Dual Price Para problemas de programación no lineal, el precio dual de una restricción indica aproximadamente lo que mejoraría la función objetivo por cada unidad que aumente el término independiente de la restricción (de modo que un valor negativo indica que la función objetivo empeoraría).

Aquí es fundamental tener presente que el precio dual informa de lo que sucede si aumenta una unidad **el miembro derecho** de la restricción, no el izquierdo. En este caso las unidades **requeridas** en la línea 1, no las unidades **producidas.** En concreto, sería un error interpretar así el precio dual:

Si se aumenta una unidad la producción de la línea 1 *el coste de la contratación no variará.*

No es si producimos una unidad más (3 031 en total), sino si exigimos producir una más (3 001 en total). Y el coste no variará porque, aunque exijamos producir una más, produciremos las mismas (3 030).

Observemos que un precio dual positivo indica una **mejora** de la función objetivo, y eso es un **aumento** si el objetivo es maximizar y una **disminución** si el objetivo es minimizar.

Disponer de una hora más en el turno de noche no afecta al coste porque de las horas disponibles no estamos empleando 54.66 de ellas, luego, si ya no conviene aprovechar todas las horas disponibles, aunque tuviéramos una más la solución óptima sería la misma y la nueva hora no se aprovecharía tampoco.

En nuestro ejemplo:

- El término independiente de la primera restricción es la producción adicional requerida en la línea 1, luego el precio dual 0 indica que aunque se exigiera producir una unidad más en la línea 1, esto no provocaría ninguna variación en el coste.

  Esto se explica porque, según la solución óptima, ya se están produciendo 30 unidades más de las requeridas en la línea 1, luego exigir que se produzca una más (es decir, exigir que se produzcan al menos 3 001 en lugar de al menos 3 000) daría lugar a la misma solución óptima, en la que producimos 3 030, y el coste, por consiguiente, sería el mismo.

- En cambio, por cada unidad de producto adicional que exigiéramos producir en la línea 2 (sobre las 5 000 que estamos exigiendo ahora), el precio dual -6 indica que el coste de contratación empeorará (es decir, aumentará) en 6 €.

- El término independiente de la tercera restricción son las horas disponibles para el turno de mañana, luego el precio dual 37 indica que por cada hora adicional de que pudiéramos disponer para el turno de mañana (sobre las 100 de que disponemos ahora) el coste de contratación mejoraría (es decir, disminuiría) en 37 €.

- Similarmente, por cada hora adicional de que pudiéramos disponer para el turno de tarde (sobre las 200 que tenemos ahora), el coste de contratación disminuiría en 22 €.

- En cambio, aunque dispusiéramos de una hora más para el turno de noche, esto no afectaría al coste de contratación.

- El término independiente de la última restricción son las horas de la línea 1 que deben contratarse como mínimo antes del turno de noche, luego el precio dual -77 indica que por cada hora adicional que exigiéramos realizar antes del turno de noche en la línea 1 (sobre las 190 que estamos exigiendo ahora), el coste de contratación empeoraría (es decir, aumentaría) en 77 €.

Existe una relación básica entre la holgura y el precio dual de una restricción:

Condición de holgura complementaria: Si la holgura de una restricción es distinta de 0, entonces su precio dual es 0.

Por ejemplo, que la holgura de la primera restricción sea distinta de 0 significa que producimos más de lo requerido, luego, aunque requiramos un poco más de producción, la solución óptima será la misma y la función objetivo no variará, luego el precio dual es 0. Que la holgura de la última restricción no sea 0 significa que sobran horas en el turno de noche, luego disponer de una hora más no ayuda en nada, la solución óptima no varía y la función objetivo tampoco.

Para estimar el efecto sobre la función objetivo de una variación de un término independiente de una restricción que no sea del orden de una unidad, podemos usar que

> Variación de la función objetivo $\approx$ precio dual $\times$ variación del término independiente.

Por ejemplo: ¿Cómo afectaría al coste disponer de 3 horas más en el turno de mañana?

Solución: $37 \cdot 3 = 111$, luego el coste mejoraría (disminuiría) en 111 €.

En realidad para que un cálculo así sea fiable es necesario que el incremento del término independiente no sea muy grande. Más adelante precisaremos este hecho. Conviene observar que en muchos casos el signo del precio dual es previsible:[5]

> **Condición de signo:** El precio dual de una restricción de $\leq$ es siempre ≥ 0, el de una restricción de $\geq$ es siempre ≤ 0, mientras que el de una restricción de $=$ puede tener cualquier signo.

Columna Reduced Cost El coste reducido de una variable x indica lo que empeora aproximadamente la función objetivo cuando cambiamos la condición de no negatividad $x \geq 0$ por $x \geq 1$, es decir, si forzamos a que la variable tome al menos el valor 1. En nuestro ejemplo:

- El coste reducido de M_1 es 0, lo que significa que si forzamos a que se contrate al menos una hora en el turno de mañana para la línea 1 el coste de contratación no se verá afectado.

  Esto se explica porque ya estamos contratando 100 horas en el turno de mañana para la línea 1, por lo que exigir que se contrate al menos una no nos obliga a nada. Con tal exigencia, seguiríamos contratando las 100 horas que ya contratamos y el coste sería el mismo.

- El coste reducido de M_2 es 27, lo que significa que por cada hora que exigiéramos contratar en el turno de mañana para la línea 2 el coste de contratación empeoraría (es decir, aumentaría) en 27 €.

- Los costes reducidos de T_1 y T_2 son 0, lo que significa que si exigiéramos contratar al menos una hora en el turno de tarde para la línea 1 o la línea 2 el coste no se vería afectado (y de nuevo la causa es que ya estamos contratando muchas horas en dichos turnos, luego exigir que se contrate al menos una hora no nos afecta en nada y podemos mantener la misma solución óptima, con el mismo coste).

> Como en el caso del precio dual, es fundamental comprender que el coste reducido de M_1 no dice nada sobre lo que sucedería si **contratáramos una hora más** en el turno de mañana para la línea 1, es decir, si contratáramos 101 horas en lugar de 100, sino lo que sucedería si **exigiéramos contratar al menos una hora** en el turno de mañana para la línea 1, es decir, si cambiamos la condición $M_1 \geq 0$ por $M_1 \geq 1$.
>
> Notemos que un coste reducido no nulo siempre indica un empeoramiento de la función objetivo, pues si lo óptimo es no contratar ninguna hora en el turno de tarde para la línea 2 y, pese a ello, forzamos a que se contrate al menos una hora, tendremos que descartar la solución actual, que es la óptima, luego tendremos que pasar a otra peor, luego la función objetivo empeorará.

- El coste reducido de N_1 es 100, lo que significa que por cada hora que exigiéramos contratar en el turno de noche para la línea 1 el coste de contratación aumentaría en 100 €.

[5] La razón es que al aumentar una unidad el término independiente de una restricción de $\leq$ estamos haciendo mayor el conjunto de oportunidades, luego la solución óptima en un conjunto mayor tiene que mejor o igual que la inicial. En cambio, al aumentar una unidad el término independiente de una restricción de $\geq$ estamos reduciendo el conjunto de oportunidades, luego la nueva solución óptima tiene que ser peor o igual que la inicial.

- El coste reducido de N_2 es 0, lo que significa que si forzamos a que se contrate al menos una hora en el turno de noche para la línea 2 el coste de contratación no se verá afectado.

También se da una relación de holgura complementaria para los costes reducidos similar a la correspondiente a los precios duales:

Condición de holgura complementaria: Si una variable es distinta de 0, entonces su coste reducido es 0.

Por ejemplo, si ya estamos contratando 100 horas en el turno de mañana para la línea 1, es obvio que exigir $M_1 \geq 1$ no va a alterar la solución óptima, pues ésta ya cumple tal exigencia. Los costes reducidos sólo tienen interés para variables nulas, pues entonces nos informan del coste que tendría forzar a que no fueran nulas.

Como en el caso de los precios duales, podemos usar los costes reducidos para predecir el efecto de incrementos de magnitud distinta de una unidad:

Variación de la función objetivo $\approx$ coste reducido $\times$ valor exigido a la variable.

Por ejemplo: ¿Cómo afectaría al coste contratar 3 horas en el turno de noche para la línea 1?

Solución: $100 \cdot 3 = 300$, luego el coste empeoraría (aumentaría) en 300 €.

8.4 Intervalos de sensibilidad

Para problemas de programación lineal, LINGO nos proporciona información adicional a la que podemos acceder, teniendo activa la ventana en la que está tecleado el problema (no la de la solución) desde el menú LINGO → Range. Así nos aparecen dos nuevas tablas:

```
                         Objective Coefficient Ranges:

                     Current          Allowable          Allowable
      Variable     Coefficient         Increase           Decrease
            M1        40.00000         27.00000           INFINITY
            M2        50.00000         INFINITY           27.00000
            T1        55.00000         INFINITY           27.00000
            T2        50.00000         22.00000           INFINITY
            N1        100.0000         INFINITY           100.0000
            N2        90.00000         INFINITY           27.50000

                             Righthand Side Ranges:

                     Current          Allowable          Allowable
           Row           RHS           Increase           Decrease
 PRODUCCION_L1        3000.000         30.00000           INFINITY
 PRODUCCION_L2        5000.000         820.0000           3680.000
       HORAS_M        100.0000         15.00000           68.33333
       HORAS_T        200.0000         306.6667           68.33333
       HORAS_N        300.0000         INFINITY           54.66667
DISTRIBUCION_L1       190.0000         68.33333           1.764706
```

Veamos ahora la interpretación de estas tablas. La primera indica los llamados *intervalos de sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo* y la segunda los *intervalos de sensibilidad de los términos independientes de las restricciones.*

Intervalos de sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo En la primera tabla, la primera columna contiene los coeficientes de cada variable en la función objetivo, por ejemplo, el 40 en la fila de M_1 indica que la función objetivo contiene el término $40M_1$, e igualmente con las demás variables. En nuestro ejemplo dichos coeficientes son los precios de cada hora de trabajo en los distintos turnos y líneas de producción.

Las otras dos columnas indican lo máximo que puede aumentar cada coeficiente y lo máximo que puede disminuir para que la solución óptima del problema siga siendo la misma (aunque el valor óptimo de la función objetivo puede cambiar).

En nuestro ejemplo:

- El precio por hora en el turno de mañana para la línea 1 es de 40 €, y mientras dicho precio no aumente más de 27 €, es decir, mientras no exceda de los 67 €, las horas contratadas en cada turno seguirán siendo las mismas.

- El precio por hora en el turno de mañana para la línea 2 es de 50 €, y mientras dicho precio no disminuya más de 27 €, es decir, mientras no sea inferior a los 23 €, las horas contratadas en cada turno seguirán siendo las mismas.

- El precio por hora en el turno de tarde para la línea 1 es de 55 €, y mientras dicho precio no disminuya más de 27 €, es decir, mientras no sea inferior a los 28 €, las horas contratadas en cada turno seguirán siendo las mismas.

- El precio por hora en el turno de tarde para la línea 2 es de 50 €, y mientras dicho precio no aumente más de 22 €, es decir, mientras no exceda de los 72 €, las horas contratadas en cada turno seguirán siendo las mismas.

- El precio por hora en el turno de noche para la línea 1 es de 100 €, y mientras dicho precio no disminuya más de 100 €, es decir, tome el valor que tome, las horas contratadas en cada turno seguirán siendo las mismas.

- El precio por hora en el turno de noche para la línea 2 es de 90 €, y mientras dicho precio no disminuya más de 27.50 €, es decir, mientras no sea inferior a los 62.50 €, las horas contratadas en cada turno seguirán siendo las mismas.

Intervalos de sensibilidad de los términos independientes En la segunda tabla, la primera columna contiene los términos independientes de las restricciones. Por ejemplo, el primer 3 000 es la producción exigida en la línea 1, que aparece en el miembro derecho de la primera restricción del problema.

Las otras dos columnas indican lo máximo que puede aumentar y lo máximo que puede disminuir cada coeficiente para que las variables básicas y no básicas de la solución óptima sigan siendo las mismas.

El concepto de variables básicas y no básicas de un problema de programación lineal lo estudiaremos más adelante en teoría, pero de momento podemos dar la siguiente interpretación aproximada del párrafo anterior:

Las otras dos columnas indican lo máximo que puede aumentar y lo máximo que puede disminuir cada término independiente para que las variables y las holguras que son 0 en la solución óptima sigan siendo 0.

Como en estos términos la conclusión resulta muy abstracta, conviene particularizarla con la interpretación de cada variable y cada holgura en cada problema concreto. En nuestro caso tenemos seis ceros entre variables y holguras:

`M2, N1, PRODUCCION_L2, HORAS_M, HORAS_T, DISTRIBUCION_L1`

Por ejemplo, que la holgura de la producción en la línea 2 sea cero significa que en la línea 2 se produce estrictamente la cantidad exigida y ninguna unidad más. En total, la interpretación del primer intervalo de sensibilidad (el de la producción de la línea 1) sería la siguiente:

• La producción adicional exigida para la línea 1 es de 3 000 unidades de producto. Mientras esta cantidad exigida no aumente más de 30 unidades (hasta 3 030) la solución óptima cumplirá las seis características siguientes:

1) ($M_2 = 0$) no se contratarán horas en el turno de mañana para la línea 2.
2) ($N_1 = 0$) no se contratarán horas en el turno de noche para la línea 1.
3) (`PRODUCCION_L2` $= 0$) en la línea 2 se producirá únicamente la cantidad de producto exigida, y ninguna unidad más.
4) (`HORAS_M` $= 0$) En el turno de mañana se emplearán todas las horas disponibles.
5) (`HORAS_T` $= 0$) En el turno de tarde se emplearán todas las horas disponibles.
6) (`DISTRIBUCION_L1` $= 0$) Las horas contratadas antes del turno de noche en la línea 1 serán las exigidas y ninguna más.

Esto vale igualmente para los demás intervalos:

- La producción adicional exigida para la línea 2 es de 5 000 unidades de producto. Mientras esta cantidad exigida no aumente más de 820 unidades (hasta 5 820) ni disminuya más de 3 680 unidades (hasta 1 320) la solución óptima cumplirá las seis condiciones anteriores.
- Las horas disponibles en el turno de mañana son 100. Mientras esta cantidad no aumente más de 15 unidades (hasta 115) ni disminuya más de 68.33 unidades (hasta 31.66) la solución óptima cumplirá las seis condiciones anteriores.

> Al interpretar el intervalo de la producción de la línea 1 podemos decir más concretamente en el punto 3) que se seguirán produciendo las 5 000 unidades exigidas en la línea 2 y ninguna más, pero esto sería incorrecto al interpretar el intervalo de la producción de la línea 2, pues en ese caso estamos analizando precisamente lo que ocurre al modificar ese dato (el 5 000).
>
> Por ejemplo, si sólo exigimos producir 4 000 unidades en la línea 2, este nivel de exigencia está dentro del intervalo de sensibilidad (no es inferior a 1 320), y la conclusión no es que la solución óptima en estas condiciones seguirá produciendo 5 000 unidades en la línea 2, sino que **seguirá produciendo el mínimo exigido,** que ahora ya no es de 5 000, sino de 4 000.
>
> Lo mismo ocurre en los demás casos: al interpretar el intervalo de las horas del turno de mañana no podemos decir que se seguirán contratando las 100 horas disponibles, sino que se seguirán contratando **todas las horas disponibles,** que ya no tienen por qué ser 100.

- Las horas disponibles en el turno de tarde son 200. Mientras esta cantidad no aumente más de 306.66 unidades (hasta 506.66) ni disminuya más de 68.33 unidades (hasta 131.66) la solución óptima cumplirá las seis condiciones anteriores.

- Las horas disponibles en el turno de noche son 300. Mientras esta cantidad no disminuya más de 54.66 unidades (hasta 245.33) la solución óptima cumplirá las seis condiciones anteriores.

- Las horas que hay que contratar como mínimo antes del turno de noche en la línea 1 son 190. Mientras esta cantidad de horas exigidas no aumente más de 68.33 unidades (hasta 258.33) ni disminuya más de 1.76 unidades (hasta 188.24) la solución óptima cumplirá las seis condiciones anteriores.

Aunque LINGO expresa los intervalos de sensibilidad en términos de aumentos y disminuciones admisibles, es decir, en términos relativos respecto del valor actual de cada dato, es frecuente expresarlos en términos absolutos, indicando el menor y el mayor valor que puede tomar el dato en cuestión para permanecer dentro del intervalo. En estos términos, los intervalos de sensibilidad del ejemplo que estamos considerando serían:

- **Coeficientes de la función objetivo:**

M1 Desde 40, puede aumentar 27, luego el intervalo es $]-\infty, 67]$.

M2 Desde 50, puede disminuir 27, luego el intervalo es $[23, +\infty[$.

T1 Desde 55, puede disminuir 27, luego el intervalo es $[28, +\infty[$.

T2 Desde 50, puede aumentar 22, luego el intervalo es $]-\infty, 72]$.

N1 Desde 100, puede disminuir 100, luego el intervalo es $[0, +\infty[$.

N2 Desde 90, puede disminuir 27.50, luego el intervalo es $[62.50, +\infty[$.

(En este ejemplo, casualmente, todos los intervalos tienen un extremo infinito, pero en otros no tiene por qué ser así.)

- **Términos independientes de las restricciones:**

PRODUCCION_L1 Desde 3 000, puede aumentar 30, luego el intervalo es $]-\infty, 3\,030]$.

PRODUCCION_L2 Desde 5 000, puede aumentar 820 o disminuir 3 680, luego el intervalo es $[1\,320, 5\,820]$.

HORAS_M Desde 100, puede aumentar 15 o disminuir 68.33, luego el intervalo es $[31.66, 115]$.

HORAS_T Desde 200, puede aumentar 306.66 o disminuir 68.33, luego el intervalo es $[131.66, 506.66]$.

HORAS_N Desde 300, puede disminuir 54.66, luego el intervalo es $[245.33, +\infty[$.

DISTRIBUCION_L1 Desde 190, puede aumentar 68.33 o disminuir 1.76, luego el intervalo es $[188.24, 258.33]$.

8.5 Consideraciones adicionales sobre la salida de LINGO

• Tanto los precios duales, como los costes reducidos, como los intervalos de sensibilidad, proporcionan información de qué sucede si se modifica uno de los datos del problema. Por ejemplo, si nos preguntan:

¿Cómo afectaría al coste de contratación que la producción adicional requerida en la sección 2 fuera únicamente de 4 000 unidades de producto?

se trata de comparar los problemas

$$
\begin{array}{rl}
\text{Min.} & 40M_1 + 50M_2 + 55T_1 + 50T_2 \\
 & +100N_1 + 90N_2 \\
\text{s.a} & 15M_1 + 17T_1 + 20N_1 \geq 3000 \\
 & 10M_2 + 12T_2 + 15N_2 \geq \mathbf{5000} \\
 & M_1 + M_2 \leq 100 \\
 & T_1 + T_2 \leq 200 \\
 & N_1 + N_2 \leq 300 \\
 & M_1 + T_1 \geq 190 \\
 & M_1, M_2, T_1, T_2, N_1, N_2 \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\text{Min.} & 40M_1 + 50M_2 + 55T_1 + 50T_2 \\
 & +100N_1 + 90N_2 \\
\text{s.a} & 15M_1 + 17T_1 + 20N_1 \geq 3000 \\
 & 10M_2 + 12T_2 + 15N_2 \geq \mathbf{4000} \\
 & M_1 + M_2 \leq 100 \\
 & T_1 + T_2 \leq 200 \\
 & N_1 + N_2 \leq 300 \\
 & M_1 + T_1 \geq 190 \\
 & M_1, M_2, T_1, T_2, N_1, N_2 \geq 0
\end{array}
$$

> Sería un error responder que las unidades producidas en la línea 2 no pueden ser 4 000 porque entonces la solución sería infactible. Ciertamente, una solución del primer problema en la que se produjeran 4 000 unidades en le línea 2 sería infactible, pero eso no tiene nada que ver con la pregunta. La pregunta no es qué sucede si sólo producimos 4 000 unidades en la línea 2, sino si cambiamos la exigencia de producir 5 000 unidades por la de producir sólo 4 000 unidades, es decir, no se trata de **cambiar la solución** del (primer) problema (por otra infactible) sino de **cambiar el problema** por otro en el cual una solución que sólo produzca 4 000 unidades en la línea 2 pasa a ser factible.

Son dos problemas distintos con soluciones distintas, y la información que proporciona LINGO a través de los precios duales, costes reducidos e intervalos de sensibilidad permite obtener conclusiones sobre la solución del segundo sin resolverlo.
En general, ante una pregunta de este tipo (qué ocurre si cambia algún dato del problema), lo primero que debes hacer es identificar dónde se encuentra en el modelo el dato que se está modificando. En este caso es el término independiente de la segunda restricción.

En segundo lugar debes tener claro sobre qué informa cada uno de los datos que proporciona LINGO, para determinar cuál es el adecuado para responder a la pregunta. El esquema siguiente resume la situación.
En nuestro caso la pregunta consiste en una variación de un término independiente de una restricción, y debemos plantearnos si nos preguntan cómo afecta dicho cambio a la función objetivo o a las características de la solución. Nos preguntan por la variación del coste, que es la función objetivo, luego la

$$
\text{Variación}
\begin{cases}
\text{de un término independiente} \begin{cases} \text{¿cómo afecta a la f.o.?} \rightarrow & \text{precio dual} \\ \text{¿cómo afecta a la solución?} \rightarrow & \text{intervalo} \end{cases} \\
\text{de un coeficiente de la función objetivo} \rightarrow \text{intervalo} \\
x \geq 0 \text{ pasa a } x \geq 1 \rightarrow \quad \text{coste reducido}
\end{cases}
$$

respuesta nos la dará el precio dual de la restricción correspondiente. Concretamente:

$$-6 \times (-1000) = 6000,$$

luego el coste de contratación mejorará (es decir, disminuirá) en 6 000 €.

• Hay que tener presente que los precios duales no pueden usarse para predecir el efecto de una variación excesivamente grande del término independiente de la restricción, por lo que debemos plantearnos si es fiable el cálculo anterior, en el que hemos considerado una variación de 1 000 unidades de producto. La respuesta es afirmativa, y ello se debe al hecho siguiente:

> En un problema de programación lineal, el precio dual puede usarse para predecir la variación de la función objetivo para variaciones del término independiente que estén dentro del intervalo de sensibilidad de la restricción correspondiente.

En nuestro ejemplo, el intervalo de sensibilidad de la segunda restricción es $[1\,320, 5\,820]$. Como 4 000 está dentro del intervalo, el cálculo que hemos hecho es correcto.

> El cálculo anterior nos proporciona la variación exacta de la función objetivo porque el problema es de programación lineal. Si hay restricciones no lineales un cálculo como el anterior sólo proporciona una aproximación a la variación de la función objetivo, una aproximación que será menos fiable cuanto mayor sea la variación del término independiente, y no tenemos ninguna referencia de la magnitud que puede tener dicha variación para que el resultado sea fiable.

En cambio, ante la pregunta: Si sólo se requirieran 4 000 unidades de producto en la línea 2, se necesitaría contratar menos horas en el turno de mañana?

Ahora se plantea igualmente una variación del término independiente de la segunda restricción, pero no se pregunta por el efecto sobre la función objetivo, sino sobre otra característica de la solución óptima, concretamente sobre si empleará o no las 100 horas disponibles en el turno de mañana. En este caso la respuesta no la encontraremos en el precio dual, sino en el intervalo de sensibilidad de la restricción. Concretamente, vemos que el cambio a 4 000 unidades queda dentro del intervalo de sensibilidad y, por consiguiente, sabemos que la holgura de la restricción `HORAS_M` (que ahora es 0) seguirá siendo 0, lo que se traduce en que se seguirán empleando las 100 horas disponibles.

• Observemos que una variación del término independiente de una restricción puede volver un problema infactible. Sin embargo, si ésta queda dentro del intervalo de sensibilidad correspondiente, tenemos la garantía de que esto no sucederá:

> En un problema de programación lineal, si modificamos un término independiente de una de las restricciones sin salirnos del intervalo de sensibilidad, podemos asegurar que el problema seguirá siendo factible.

• Hay que tener presente que si un cambio de un coeficiente o de un término independiente se sale del intervalo de sensibilidad correspondiente entonces **no podemos afirmar nada** de lo que sucederá con la nueva solución óptima (si es que existe), y lo único que cabría hacer para conocer el resultado es resolver de nuevo el problema con el coeficiente o término independiente modificado.

• Por último, hay que recalcar un error muy frecuente en las interpretaciones de los intervalos de sensibilidad:

Es incorrecto afirmar que si un cambio en un término independiente de una restricción queda dentro de su intervalo de sensibilidad entonces la solución óptima sigue siendo la misma. Sólo podemos afirmar que las variables y holguras que eran 0 seguirán siendo 0.

Por ejemplo, si resolvemos el problema que estamos considerando suponiendo que sólo hay 50 horas disponibles en el turno de mañana (se trata de un cambio en el término independiente de la tercera restricción que está dentro del intervalo $[31.66, 115]$) la solución óptima no es la misma. De hecho, no podría serlo, porque la anterior empleaba las 100 horas disponibles y ahora sería infactible.

	Solución nueva		Solución inicial
Variable	Value	Reduced Cost	Value
M1	50.00000	0.000000	100.0000
M2	0.000000	27.00000	0.000000
T1	140.0000	0.000000	90.00000
T2	60.00000	0.000000	110.0000
N1	0.000000	100.0000	0.000000
N2	285.3333	0.000000	245.3333
Row	Slack or Surplus	Dual Price	Slack or Surplus
COSTE	38380.00	-1.000000	36530.00
PRODUCCION_L1	130.0000	0.000000	30.00000
PRODUCCION_L2	0.000000	-6.000000	0.000000
HORAS_M	0.000000	37.00000	0.000000
HORAS_T	0.000000	22.00000	0.000000
HORAS_N	14.66667	0.000000	54.66667
DISTRIBUCION_L1	0.000000	-77.00000	0.000000

Vemos que las variables y holguras que eran 0 siguen siendo 0, pero las que no lo eran han cambiado de valor.

Ejemplo 1b Responde las preguntas siguientes sobre el problema del ejemplo 1 basándote exclusivamente en las tablas de las páginas 184 y 188, sin usar LINGO para resolver ningún otro problema:

a) ¿Cuántas horas conviene contratar para la primera línea de producción en cada turno?

b) ¿En total, cuánto tendrá que gastar la empresa en horas extra?

c) Interpreta los dos valores que aparecen en la línea `PRODUCCION_L1` de la página 184.

d) Si la empresa pudiera aumentar la capacidad de alguno de los turnos, ¿en cuál sería preferible?

e) Si, debido a un cambio en la plantilla fija, la capacidad del turno de mañana para horas extra se redujera a 90 horas, ¿perjudicaría ello a la empresa o le beneficiaría? ¿En qué medida?

f) Interpreta el coste reducido de la variable `M2`.

g) Si la empresa quisiera contratar un mínimo de dos horas extra en el turno de mañana para la línea 2, ¿cómo afectaría ello a los costes?

h) Explica si la afirmación siguiente es verdadera o falsa *"Si la empresa quisiera aumentar las horas contratadas para la línea* 2 *en el turno de noche hasta un total de* 247*, ello no afectaría al coste, ya que el coste reducido de la variable* `N2` *es cero."*

i) Supongamos que el precio de las horas extra del turno de mañana de la línea 1 tuviera que ser más elevado de lo previsto. ¿A partir de qué valor debería la empresa replantearse la distribución de horas para tratar de emplear menos en dicho turno?

j) Escribe el intervalo de sensibilidad de la capacidad del turno de mañana. Interprétalo.

k) Si se duplicara la capacidad del turno de tarde, ¿aumentaría con ello la producción de la línea 2? ¿A qué variación de coste daría lugar?

l) Razona cuánto produce diariamente la empresa en la línea 2 con las horas extra contratadas. Si la producción mínima de la línea 2 se redujera a 2 000 unidades, ¿convendría reducir la producción de esta línea hasta esa cifra, convendría mantener la producción actual o tal vez pasar a una producción intermedia?

SOLUCIÓN: a) Conviene contratar 100 horas en el turno de mañana, 90 en el de tarde y ninguna en el de noche.

b) Tendrá que gastar 36 530 €.

c) En la línea 1 conviene producir 30 unidades de producto más que las 3 000 requeridas, y el precio dual 0 indica que si se exigiera producir una más (3 001 en vez de 3 000) el coste de contratación no cambiaría (porque la solución sería la misma).

d) Las capacidades de los turnos son los términos independientes de las restricciones tercera, cuarta y quinta. Lo que determina las preferencias de la empresa es la función objetivo, que en este caso es el coste, luego nos preguntan qué aumento de capacidad reduciría más el coste. Consideramos los precios duales, que son 37, 22 y 0 (para los turnos de mañana, tarde y noche, respectivamente). Esto significa que por cada hora adicional de que podamos disponer el coste mejorará en 37 €, 22 € y 0 €. Por lo tanto, convendría más aumentar la capacidad del turno de mañana, y si no pudiera ser, mejor en el de tarde, mientras que en el de noche es inútil aumentar la capacidad, pues ya tenemos 54 horas que no aprovechamos.

> En c), las interpretaciones siguientes serían incorrectas:
>
> *De las* 3 000 *unidades que hay que producir sólo se producen* 2 970.
>
> *Si produjéramos una unidad más, el coste no variaría*
>
> No es "si produjéramos" sino "si nos exigieran producir".
>
> En d) nos preguntan por el efecto sobre la función objetivo de variaciones en tres posibles términos independientes, luego, según el esquema de la página 192, debemos mirar los precios duales correspondientes.
> La situación de e) es similar.

e) La capacidad del turno de mañana es el término independiente de la tercera restricción, como su precio dual es 37, el efecto sobre el coste de que dicha capacidad se reduzca a 90 horas (es decir, se incrementa en -10) es $37 \cdot (-10) = -370$, es decir, el coste empeorará (aumentará) 370 €. El cálculo es correcto porque el intervalo de sensibilidad permite reducir la capacidad hasta 68.33 unidades, luego 10 queda dentro de dicho margen.

f) No conviene contratar ninguna hora en el turno de mañana para la línea 2, y por cada hora que quisiéramos contratar en ese turno, el coste de contratación empeoraría (es decir, aumentaría) en 27 €.

La pregunta g) es qué sucedería si cambiamos la condición de signo $M_2 \geq 0$ por $M_2 \geq 2$, luego, según el esquema de la página 192, miramos el coste reducido.

g) El coste reducido de la variable M es 27. El coste de la empresa empeoraría (aumentaría) en $27 \cdot 2 = 54$ €.

h) La afirmación es falsa. El coste reducido sólo indica que si exigimos contratar al menos una hora en el turno de noche para la línea 2 el coste no variará, porque ya estamos contratando 245.33 horas. Pero eso no tiene ninguna relación con lo que sucederá si lo que aumentamos no son las horas exigidas (que ahora no exigimos ninguna y es de lo que habla el coste reducido) sino las horas contratadas. Si aumentamos las horas contratadas estamos pasando a una solución distinta de la óptima, luego[6] será peor, es decir, el coste no se quedará igual, sino que empeorará.

El precio de las horas extra del turno de mañana de la línea 1 es el coeficiente de M_1 en la función objetivo, luego, según el esquema de la página 192, miramos su intervalo de sensibilidad.

i) El intervalo de sensibilidad del coeficiente de M_1 en la función objetivo dice que mientras el precio no aumente más de 27 € (es decir, desde el valor actual de 40 hasta 67 €) la solución óptima (es decir, la distribución de horas más conveniente) seguirá siendo la misma y la empresa no necesitará replanteársela. Sólo si el precio excede los 67 € la empresa debería replantearse las horas que contrata en cada turno.

Sería un error muy grave decir que mientras la capacidad esté en el intervalo la solución óptima será la misma. Por ejemplo, actualmente se emplean toda la capacidad. Si ésta disminuyera, la solución óptima ya no podría ser la misma.

j) El intervalo de sensibilidad es $[31.55, 115]$. Mientras la capacidad del turno de mañana no sea inferior a 31.55

1) ($M_2 = 0$) no se contratarán horas en el turno de mañana para la línea 2.
2) ($N_1 = 0$) no se contratarán horas en el turno de noche para la línea 1.
3) (`PRODUCCION_L2` $= 0$) en la línea 2 se producirá únicamente la cantidad de producto exigida, y ninguna unidad más.
4) (`HORAS_M` $= 0$) En el turno de mañana se emplearán todas las horas disponibles.
5) (`HORAS_T` $= 0$) En el turno de tarde se emplearán todas las horas disponibles.
6) (`DISTRIBUCION_L1` $= 0$) Las horas contratadas antes del turno de noche en la línea 1 serán las exigidas y ninguna más.

La capacidad del turno de tarde es el término independiente de la cuarta restricción, y la primera pregunta no hace referencia a si la función objetivo mejora o empeora, sino sobre otra característica de la solución.

k) Duplicar la capacidad del turno de tarde significa aumentar de 200 a 400, que queda dentro del intervalo de sensibilidad. Según el esquema de la página 192 consideramos el intervalo de sensibilidad. Por lo tanto, la variable de holgura de la segunda restricción seguirá siendo 0, lo que se traduce en que la producción de la línea 2 seguirá siendo de 5 000 unidades. Por lo tanto, no aumentará.

[6] Aquí usamos que la solución óptima es única, cosa que se puede razonar a partir de la salida de LINGO, pero de momento no sabemos cómo.

Para determinar el efecto sobre el coste (sabiendo ya que estamos dentro del intervalo de sensibilidad) miramos el precio dual: $22 \cdot 200 = 4\,400$, luego el coste mejorará (disminuirá) en 4 400 €.

La segunda pregunta de k) es sobre el efecto del cambio en la función objetivo, luego miramos el precio dual.

l) La cantidad producida en la línea 2 es el miembro izquierdo de la segunda restricción, luego miramos la variable de holgura. Como es 0, la cantidad producida coincide con la exigida, luego es de 5 000 unidades.
Si la cantidad exigida se reduce a 2 000, el incremento queda dentro del intervalo de sensibilidad, que es $[1\,320, 5\,820]$. Por lo tanto, la variable de holgura de la segunda restricción continuará siendo 0. Esto significa que la cantidad producida seguirá siendo la mínima exigida, luego pasará a ser de 2 000 unidades de producto. Así pues, la respuesta es que convendría reducir la producción hasta el nuevo mínimo exigido.

La segunda pregunta de l) es sobre un cambio en el término independiente de la segunda restricción, y no sobre su efecto en el coste, sino sobre otra característica de la solución, luego, según el esquema de la página 192, miramos el intervalo de sensibilidad.

Observa que el hecho de que la holgura siga siendo 0 no se interpreta como que la producción sigue siendo la misma, sino que sigue siendo la mínima exigida. Como estamos cambiando dicho mínimo, la producción cambia.

8.6 Variables enteras y binarias

• Para exigir en LINGO que una variable `x` sea entera sólo tenemos que escribir `@gin(x);`, mientras que si queremos que sea binaria la instrucción es `@bin(x);`

Por ejemplo, en el problema que estamos considerando nos ha salido que conviene contratar 245.33 horas en el turno de noche. Si no es posible hacer contratos por fracciones de hora, necesitaremos exigir que las variables sean enteras, para lo cual escribimos:

```
[Coste] Min= 40*M1+50*M2+55*T1+50*T2+100*N1+90*N2;
[Produccion_L1] 15*M1+17*T1+20*N1>3000;
[Produccion_L2] 10*M2+12*T2+15*N2>5000;
[Horas_M] M1+M2<100;
[Horas_T] T1+T2<200;
[Horas_N] N1+N2<300;
[Distribucion_L1] M1+T1>190;
@gin(M1); @gin(M2); @gin(T1); @gin(T2); @gin(N1); @gin(N2);
```

El resultado es:

Variable	Value	Reduced Cost
M1	100.0000	40.00000
M2	0.000000	50.00000
T1	90.00000	55.00000
T2	108.0000	50.00000
N1	0.000000	100.0000
N2	247.0000	90.00000

Observemos que la solución entera no resulta de redondear la solución que habíamos obtenido sin exigir variables enteras. Por ejemplo, en la solución anterior las horas contratadas en el turno de noche para la línea 2 eran 245.33, y ahora son 247, mientras que las de tarde de la línea 2, que ya eran un número entero (110 horas) ahora son 108.

Row	Slack or Surplus	Dual Price
COSTE	36580.00	-1.000000
PRODUCCION_L1	30.00000	0.000000
PRODUCCION_L2	1.000000	0.000000
HORAS_M	0.000000	0.000000
HORAS_T	2.000000	0.000000
HORAS_N	53.00000	0.000000
DISTRIBUCION_L1	0.000000	0.000000

Las interpretaciones que hemos dado para los costes reducidos, precios duales e intervalos de sensibilidad no son aplicables a los problemas de programación entera.

Por lo tanto, la mejor solución entera consiste en contratar 100 horas en el turno de mañana y 90 en el de tarde para la línea 1, y 90 horas en el turno de tarde y 247 en el turno de noche para la línea 2.

8.7 Corrección de errores

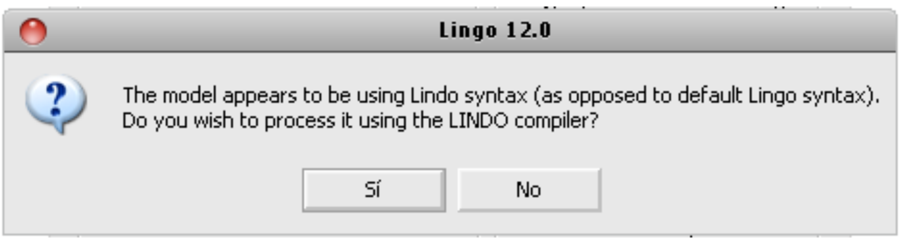
La figura siguiente muestra el mensaje que presenta LINGO cuando cometemos un error. En este caso el error ha sido dejarnos un $*$ en la segunda restricción:

Observemos que LINGO señala mediante un $\wedge$ el punto exacto donde él cree que está el error. En este caso ha acertado, pues señala la variable T2, que debería ir precedida por el $*$ que falta. No obstante, en otras ocasiones el punto que señala puede no ser el punto exacto del error. Eso sucede especialmente cuando nos dejamos un punto y coma al final de una línea. En tal caso LINGO apunta a la línea siguiente.

Un mensaje de error con el que debes tener especial cuidado se da en ciertas circunstancias, por ejemplo, si escribes como primera línea del problema

```
Min 40*M1+50*M2+55*T1+50*T2+100*N1+90*N2;
```

(sin la etiqueta [Coste] y sin el $=$). En tal caso LINGO muestra el cuadro de diálogo siguiente:



Si te encuentras este cuadro asegúrate de responder No, pues en caso contrario LINGO tratará de interpretar tu modelo con una sintaxis completamente distinta a la que hemos estudiado, y no funcionará nada.

8.8 Sintaxis avanzada de LINGO

A la hora de introducir un problema en LINGO es posible usar una sintaxis avanzada que resulta mucho más práctica y versátil cuando el problema tiene un número elevado de variables o restricciones. En esta sección explicaremos cómo aprovechar algunas de las características del lenguaje de LINGO, para lo cual empezamos planteando un nuevo ejemplo para modelizar:

Ejemplo 3 Un inversor dispone de un capital de 20 000 € que se plantea repartir entre 6 productos financieros. Para cada uno de ellos ha establecido (véase la tabla) dos rentabilidades posibles: una optimista y otra pesimista. Determina qué capital le conviene invertir en cada producto para maximizar el rendimiento en el caso optimista garantizando que en el caso pesimista no pueda perderse más del 1% del capital invertido.

Producto	1	2	3	4	5	6
Rentabilidad optimista	0.1	0.05	0.07	0.15	0.09	0.12
Rentabilidad pesimista	−0.1	0	−0.01	−0.25	0.01	−0.2

Solución: Las variables del problema son el capital que conviene invertir en cada producto financiero. Pongamos que x_1 es el capital invertido en el primer producto, etc. La función objetivo es maximizar el rendimiento en el escenario optimista y hay dos restricciones, una que representa que el rendimiento en el escenario pesimista tiene que ser como mínimo −200 (el 1% del capital invertido) y otra que exige que el capital total invertido no exceda del capital disponible:

$$
\begin{array}{rll}
\text{Max.} & 0.1x_1 + 0.05x_2 + 0.07x_3 + 0.15x_4 + 0.09x_5 + 0.12x_6 & \text{Rendimiento optimista} \\
\text{s.a} & -0.1x_1 - 0.01x_3 - 0.25x_4 + 0.01x_5 - 0.2x_6 \geq -200 & \text{Rend. pesimista} \geq 1\% \text{ capital} \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 20000 & \text{cap. invert.} \leq \text{cap. disp.} \\
& x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5,\, x_6 \geq 0 &
\end{array}
$$

Tecleamos en LINGO:

```
[Rend_optim]Max=0.1*x1+0.05*x2+0.07*x3+0.15*x4+0.09*x5+0.12*x6;
[Rend_pesim]-0.1*x1-0.01*x3-0.25*x4+0.01*x5-0.2*x6>-200;
[Capital]x1+x2+x3+x4+x5+x6<20000;
```

Y la solución óptima resulta ser invertir 1 538.46 € en el producto 4 y 18 461.54 € en el 5, y el rendimiento en el caso optimista será así de 1 892.31 €.

Veamos ahora cómo introducir este mismo problema en LINGO con una sintaxis alternativa cuya ventaja principal es que podríamos usarla igualmente aunque el número de variables fuera mucho mayor.

Para ello expresaremos la función objetivo y las restricciones del problema en términos de *conjuntos*. Concretamente, debemos analizar el problema para darnos cuenta de que en él interviene un conjunto de seis productos financieros, y que cada producto tiene asociados tres números: su rentabilidad optimista, su rentabilidad pesimista y el capital que invertimos en él (los dos primeros son datos y el tercero lo que queremos calcular).

El documento LINGO que vamos a escribir se dividirá en tres secciones: la primera definirá el conjunto de los productos financieros, la segunda introducirá los datos del problema y la tercera contendrá el modelo. La primera sección es la siguiente:

```
SETS:
Producto/1..6/:RO,RP,x;
ENDSETS
```

La sección para definir conjuntos debe empezar por `SETS:` y terminar por `ENDSETS` (sin punto y coma, porque ya queda claro que se trata de un final de sección). Entre ambas palabras podemos definir todos los conjuntos que queramos, en este caso sólo uno, el conjunto `Producto`. A continuación se ponen sus elementos entre barras. Podríamos haber puesto `/1,2,3,4,5,6/`, pero LINGO admite que esto se abrevie a `/1..6/`.

A partir de aquí, cuando escribamos `Producto(i)`, LINGO entenderá que hablamos del i-ésimo producto financiero, donde i puede tomar los valores de 1 a 6.

Tras la definición de un conjunto podemos escribir dos puntos (:) y a continuación los nombres de todos los datos asociados a ese conjunto. En nuestro caso estamos diciendo que cada producto tiene asociada una rentabilidad optimista `RO`, una rentabilidad pesimista `RP` y un capital invertido `x` (notemos que todo esto se pone separado por comas y al final un punto y coma para acabar la instrucción).

Una vez definido el conjunto que necesitábamos, creamos una sección de datos para introducir los datos del problema:

```
DATA:
RO= 0.1 0.05  0.07  0.15 0.09 0.12;
RP=-0.1 0    -0.01 -0.25 0.01 -0.2;
Cap=20000;
ENDDATA
```

La sección de datos debe empezar por `DATA:` y terminar por `ENDDATA`. Para introducir las rentabilidades optimistas escribimos `RO=` y a continuación las rentabilidades optimistas de cada uno de los productos (se pueden separar por comas o por espacios en blanco), con un punto y coma al final. Lo mismo vale para las rentabilidades pesimistas. Introducimos también aquí el capital disponible. Se podría poner en su sitio en el modelo, más abajo, pero si lo ponemos aquí está más a la vista por si queremos modificarlo sin tener que tocar el modelo.

Finalmente escribimos el modelo. Podríamos definir una sección para ello, pero si no ponemos nada LINGO entiende que lo que queda es ya el modelo que queremos resolver. Recordemos que la función objetivo es

$$\text{Max. } 0.1x_1 + 0.05x_2 + 0.07x_3 + 0.15x_4 + 0.09x_5 + 0.12x_6$$

```
Max= RO(1)*x(1)+RO(2)*x(2)+RO(3)*x(3)+RO(4)*x(4)+RO(5)*x(5)+RO(6)*x(6);
```

Abajo la hemos escrito con el lenguaje que hemos definido en LINGO. Ahora, LINGO nos permite no escribir uno a uno los sumandos, sino que podemos decirle que sume `RO(i)*x(i)` para todos los productos `i`. La forma de hacerlo es la siguiente:

```
[Rend_optim] Max=@Sum(Producto(i):RO(i)*x(i));
[Rend_pesim] @Sum(Producto(i):RP(i)*x(i))>-0.01*Cap;
[Capital] @Sum(Producto(i):x(i))<Cap;
```

Para decir a LINGO que sume escribimos `@Sum()`, dentro indicamos el conjunto sobre el que hay que sumar, que en este caso es para cada `Producto(i)`, es decir, de modo que la `i` tiene que recorrer todo el conjunto de productos. Luego ponemos dos puntos y luego la expresión que hay que sumar para cada producto i, que en este caso es el producto de la rentabilidad optimista del producto por el capital invertido en él, que en este caso es `RO(i)*x(i)`. Las sumas de las dos restricciones se interpretan igual.

Observa que la forma de escribir en LINGO una suma se corresponde con la notación usual en matemáticas: $\sum_i \mathrm{RO}_i \cdot x_i$, donde la i recorre los seis productos financieros.

Cuando no hay ambigüedad, (como en este caso) LINGO permite suprimir los índices i y escribir `@Sum(Producto: RO*x)` (suma, para cada producto, de su rentabilidad optimista por el capital invertido en él).

El problema completo es:

```
SETS:
Producto/1..6/:RO,RP,x;
ENDSETS

DATA:
RO=0.1 0.05 0.07 0.15 0.09 0.12;
RP=-0.1 0 -0.01 -0.25 0.01 -0.2;
Cap=20000;
ENDDATA

[Rend_optim]Max=@Sum(Producto(i):RO(i)*x(i));
[Rend_pesim]@Sum(Producto(i):RP(i)*x(i))>-0.01*Cap;
[Capital]@Sum(Producto(i):x(i))<Cap;
```

La solución puede verse en la página siguiente. Vemos que LINGO no sólo muestra el valor óptimo de las variables, sino también el de cada dato que hemos definido. La solución es, por supuesto, la misma que habíamos obtenido antes.

Yendo al menú LINGO → Generate → Display Model (teniendo activa la ventana que contiene el modelo que hemos tecleado, no la solución), LINGO nos muestra explícitamente el modelo:

```
MODEL:
 [REND_OPTIM] MAX= 0.1 * X_1 + 0.05 * X_2 + 0.07 * X_3 + 0.15 * X_4 +
  0.09 * X_5 + 0.12 * X_6;
 [REND_PESIM] - 0.1 * X_1 - 0.01 * X_3 - 0.25 * X_4 + 0.01 * X_5 - 0.2 * X_6 >=
  -200;
 [CAPITAL] X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 <= 20000;
 END
```

```
       Variable           Value         Reduced Cost
            CAP        20000.00             0.000000
        RO( 1)        0.1000000             0.000000
        RO( 2)        0.5000000E-01         0.000000
        RO( 3)        0.7000000E-01         0.000000
        RO( 4)        0.1500000             0.000000
        RO( 5)        0.9000000E-01         0.000000
        RO( 6)        0.1200000             0.000000
        RP( 1)       -0.1000000             0.000000
        RP( 2)        0.000000              0.000000
        RP( 3)       -0.1000000E-01         0.000000
        RP( 4)       -0.2500000             0.000000
        RP( 5)        0.1000000E-01         0.000000
        RP( 6)       -0.2000000             0.000000
        X( 1)         0.000000            0.1538462E-01
        X( 2)         0.000000            0.4230769E-01
        X( 3)         0.000000            0.2461538E-01
        X( 4)         1538.462             0.000000
        X( 5)         18461.54             0.000000
        X( 6)         0.000000            0.1846154E-01

            Row    Slack or Surplus      Dual Price
 REND_OPTIMISTA        1892.308           1.000000
 REND_PESIMISTA        0.000000          -0.2307692
        CAPITAL        0.000000           0.9230769E-01
```

Uno de los primeros problemas a los que se aplicaron técnicas de programación matemática fue el problema de la dieta. El problema original consistía en encontrar la forma más económica de alimentar al ejército estadounidense manteniendo unos requisitos nutricionales aceptables.

Ejemplo 4a La tabla siguiente contiene algunas características nutricionales de varios alimentos junto con su coste (por cada 100 gramos). Determina la dieta más económica que garantiza un mínimo de 80 gramos de proteínas, 100 de hidratos, 30 de grasas y 2 000 calorías.

	Verdura	Carne	Aceite	Arroz	Fruta	Leche	Pescado	Huevos
Proteínas (g)	0.7	21	0	6.5	1	4	20	13
Hidratos (g)	1.6	0	0	81	10	5	0	1
Grasas (g)	0.8	10	100	0.9	1	1.5	3	12
Calorías	20	200	900	364	50	47	98	162
Coste	0.2	0.9	0.4	0.1	0.3	0.1	1.1	0.2

Solución: Tenemos que decidir qué cantidad incluimos de cada alimento en la dieta, luego tenemos seis variables: Verdura, Carne, etc. La variable Verdura representa las unidades de verdura (la unidad es aquí 100 gramos) que conviene incluir en la dieta, y lo mismo con los demás alimentos.

A la hora de modelizar el problema debemos pensar que tenemos dos conjuntos: un conjunto de ocho alimentos y un conjunto de cuatro componentes nutricionales. Por lo tanto, empezamos definiendo estos conjuntos:

```
SETS:
Alimento/Verdura, Carne, Aceite, Arroz, Fruta, Leche, Pescado, Huevos/:Coste,x;
Componente/Proteinas, Hidratos, Grasas, Calorias/:Vmin;
ENDSETS
```

Observemos que a cada alimento le hemos asignado dos datos: su coste y la cantidad x que debemos incluir en la dieta (de modo que ahora tenemos las variables `x(Verdura)`, `x(Carne)`, etc.). Por otra parte, a cada componente le podemos asignar el valor mínimo requerido `Vmin`.

Ahora nos encontramos un una situación nueva, y es que los demás datos del problema no pueden asignarse ni a un alimento ni a un componente, sino que cada uno está asociado a un par (componente, alimento). Por ejemplo, el dato 0.7 que aparece al principio de la tabla es la cantidad de proteínas que tiene la verdura, luego depende tanto del componente "proteínas" como del alimento "verdura".

Para introducir estos datos en LINGO tenemos que definir primero el conjunto que llamamos `Par` formado por todos los pares (componente, alimento), y esto se hace así:

```
SETS:
Alimento/Verdura, Carne, Aceite, Arroz, Fruta, Leche, Pescado, Huevos/:Coste,x;
Componente/Proteinas, Hidratos, Grasas, Calorias/:Vmin;
Par(Componente, Alimento):Cant;
ENDSETS
```

Con esto hemos definido unas cantidades `Cant(i,j)` para todos los pares posibles (componente i, alimento j). Ahora ya podemos introducir todos los datos en una sección DATA, como se muestra en la página siguiente. Disponer la definición de `Cant` en forma de tabla es sólo por comodidad a la hora de leer el problema, pero a LINGO le daría igual si pusiéramos todos los datos uno detrás de otro, sin cambiar de línea cada vez que terminamos una fila. Mucho menos se necesita que las columnas estén bien alineadas. Lo que sí es importante es terminar con un punto y coma.

```
DATA:
Coste= 0.2 0.9 0.4 0.1 0.3 0.1 1.1 0.2;
Vmin= 80 100 30 2000;
Cant = 0.7  21   0  6.5   1    4  20   13
       1.6   0   0   81  10    5   0    1
       0.8  10 100  0.9   1  1.5   3   12
        20 200 900  364  50   47  98  162;
ENDDATA
```

Las tablas hay que introducirlas por filas, de modo que si hubiéramos definido el conjunto `Par(Alimento, Componente)` y no `Par(Componente, Alimento)` no podríamos haber escrito la tabla como lo hemos hecho, sino que en cada fila debería ir un alimento y no un componente.

Ahora que ya tenemos introducidos los datos podemos escribir el problema. El objetivo es minimizar el coste, que se calcula como:

$$\text{Coste(Verdura)}*\text{X(Verdura)}+\ \text{Coste(Carne)}*\text{X(Carne)}+\ \cdots$$

sumando para todos los alimentos. Por lo tanto, ponemos:

```
[CosteDieta] Min = @Sum(Alimento(i):Coste(i)*x(i));
```

Tendríamos un error si hubiéramos llamado `[Coste]` a esta ecuación, porque ya hemos definido un `[Coste]` en la sección `DATA`.

Ahora tenemos que introducir la restricción que expresa que las proteínas de la dieta sean al menos el mínimo requerido, es decir:

`[Requisitos(Proteinas)] Cant(Proteinas,Verdura)*X(Verdura)+` $\cdots$ `> 80`,

donde hay que sumar para todos los alimentos. Esto podemos escribirlo así:

```
[Requisitos(1)]@Sum(Alimento(j):Cant(1,j)*x(j))>Vmin(1);
```

Y a continuación tendríamos que escribir tres restricciones más del mismo tipo, `Requisitos(2)`, `Requisitos(3)`, `Requisitos(4)`, que expresaran lo mismo para los hidratos, las grasas y las calorías.

Ahora bien, una de las ventajas de usar conjuntos es que si tenemos que introducir varias restricciones con la misma estructura (para todos los elementos de un conjunto, como en este caso: una para proteínas, otra para hidratos, etc.), podemos definirlas todas de una vez mediante la instrucción

```
@For(conjunto(i):  restricción);
```

En nuestro caso, tenemos una restricción para cada componente i, luego podemos escribir:

```
@For(Componente(i):[Requisitos]@Sum(Alimento(j):Cant(i,j)*x(j))>Vmin(i));
```

Es importante recordar que habríamos provocado un error si hubiéramos escrito:
`Cant(Proteinas,j)`, o
`Vmin(Proteinas)`,
porque debemos saber que, aunque hemos definido un conjunto `Componentes` cuyos elementos son `Proteinas, Hidratos,` etc., en realidad esto son meros nombres para facilitar la lectura, pero para LINGO los elementos de todos los conjuntos son números 1, 2, 3, etc. Por ello, si queremos referirnos a la cantidad de hidratos en el arroz tendremos que escribir `Cant(2,4)` y no `Cant(Hidratos,Arroz)`, porque así LINGO no lo entenderá.

Esto significa que para cada componente i, el problema tiene la restricción `Requisitos(i)` que se indica a continuación.

```
SETS:
Alimento/Verdura,Carne,Aceite,Arroz,Fruta,Leche,Pescado,Huevos/:Coste,x;
Componente/Proteinas,Hidratos,Grasas,Calorias/:Vmin;
Par(Componente,Alimento):Cant;
ENDSETS

DATA:
Coste= 0.2 0.9 0.4 0.1 0.3 0.1 1.1 0.2;
Vmin= 80 100 30 2000;
Cant = 0.7  21   0  6.5   1    4  20   13
       1.6   0   0   81  10    5   0    1
       0.8  10 100  0.9   1  1.5   3   12
        20 200 900  364  50   47  98  162;
ENDDATA

[CosteDieta]Min=@Sum(Alimento(i):Coste(i)*x(i));
@For(Componente(i):[Requisitos]@Sum(Alimento(j):Cant(i,j)*x(j))>Vmin(i));
```

Con esto ya tenemos el problema completo, tal como se muestra en la página anterior. Aquí tenemos la solución óptima (en la que hemos separado las variables x mediante el menú LINGO → Solution…

```
     Variable          Value        Reduced Cost
  X( VERDURA)       0.000000           0.1892308
    X( CARNE)       0.000000           0.5769231
   X( ACEITE)       0.000000           0.4000000
    X( ARROZ)       3.544441            0.000000
    X( FRUTA)       0.000000           0.2846154
    X( LECHE)       0.000000           0.3846154E-01
  X( PESCADO)       0.000000           0.7923077
   X( HUEVOS)       4.381625            0.000000
```

Vemos, pues, que la dieta más económica consiste en tomar 354 gramos de arroz y 438 gramos de huevos. Obviamente es una dieta bastante pobre, porque no hemos impuesto suficientes requisitos dietéticos.

Ejemplo 4b Continuando con el ejemplo anterior, vamos a considerar también el colesterol de cada alimento:

	Verdura	Carne	Aceite	Arroz	Fruta	Leche	Pescado	Huevos
Colesterol (g)	0	0.07	0	0	0	0.003	0.08	0.41

y ahora exigimos que la dieta contenga entre 80 y 120 g de proteínas, entre 100 y 230 g de hidratos, entre 30 y 60 g de grasas, entre 2 000 y 3 000 calorías y que el colesterol no exceda de 1 g. Determina la dieta óptima en estas condiciones.

```
SETS:
Alimento/Verdura,Carne,Aceite,Arroz,Fruta,Leche,Pescado,Huevos/:Coste,x;
Componente/Proteinas,Hidratos,Grasas,Calorias,Colesterol/:Vmin,Vmax;
Par(Componente,Alimento):Cant;
ENDSETS

DATA:
Coste= 0.2 0.9 0.4 0.1 0.3 0.1 1.1 0.2;
Vmin=  80 100 30 2000 0;
Vmax= 120 230 60 3000 1;
Cant = 0.7     21     0  6.5   1      4    20     13
       1.6      0     0   81  10      5     0      1
       0.8     10   100  0.9   1    1.5     3     12
        20    200   900  364  50     47    98    162
         0   0.07     0    0   0  0.003  0.08   0.41;
ENDDATA

[CosteDieta]Min=@Sum(Alimento(i):Coste(i)*x(i));
@For(Componente(i):[Reqmin]@Sum(Alimento(j):Cant(i,j)*x(j))>Vmin(i));
@For(Componente(i):[Reqmax]@Sum(Alimento(j):Cant(i,j)*x(j))<Vmax(i));
```

Solución: Sólo tenemos que modificar ligeramente el ejemplo precedente: hay que añadir el componente Colesterol, y asociar a cada componente un valor máximo, así como incluir las restricciones sobre los valores máximos. El resultado se muestra en la página anterior, y la nueva solución es:

```
     Variable           Value        Reduced Cost
  X( VERDURA)        0.000000           0.1507878
    X( CARNE)        2.669484            0.000000
   X( ACEITE)        0.000000           0.9997351
    X( ARROZ)        2.498248            0.000000
    X( FRUTA)        0.000000           0.3194293
    X( LECHE)        5.139258            0.000000
  X( PESCADO)        0.000000           0.5133006
   X( HUEVOS)        1.945655            0.000000
```

Ahora nos ha salido una dieta más variada: 266 gramos de carne, 249.8 gramos de arroz, 513.9 gramos de leche y 194.5 gramos de huevos.

Ejemplo 5 El modelo de selección de cartera de Markowitz consiste en determinar las cantidades x_i que conviene invertir en un conjunto de activos financieros de modo que la rentabilidad de la inversión no sea inferior a un nivel prefijado y de modo que se minimice el riesgo de la inversión. Dicho riesgo se determina mediante la matriz de varianzas covarianzas $V = (a_{ij})$, donde los índices i, j recorren el número de activos considerados. Con el convenio de tomar como unidad monetaria la cantidad total que se desea invertir, el modelo queda así:

$$
\begin{array}{rll}
\text{Min.} & \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j & \text{Riesgo de la inversión} \\
\text{s.a} & \sum\limits_{i=1}^{n} r_ix_i \geq r_0 & \text{rentabilidad esperada} \geq \text{mínimo exigido} \\
 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1 & \text{Capital invertido} = \text{capital disponible} \\
 & x_i \geq 0 &
\end{array}
$$

Encuentra la cartera de riesgo mínimo que proporciona una rentabilidad de al menos 0.11 a partir de un conjunto de 5 activos cuyas rentabilidades esperadas y cuya matriz de varianzas-covarianzas son las siguientes:

Activo	1	2	3	4	5
Rentabilidad	0.12	0.09	0.08	0.14	0.132

$$
\text{Matriz de varianzas-covarianzas} = \begin{pmatrix} 0.07 & 0.03 & 0.05 & 0.07 & 0.05 \\ 0.03 & 0.02 & 0.02 & 0.03 & 0.02 \\ 0.05 & 0.02 & 0.05 & 0.05 & 0.05 \\ 0.07 & 0.03 & 0.05 & 0.12 & 0.09 \\ 0.05 & 0.02 & 0.05 & 0.09 & 0.19 \end{pmatrix}
$$

Solución: Tenemos un conjunto de cinco activos, y a cada uno de ellos le asociamos una rentabilidad y la cantidad x que conviene invertir en él (estas cantidades son las variables del problema). Los datos de la matriz de varianzas-covarianzas no se asocian a activos, sino a pares de activos, por lo que necesitamos definir el conjunto de dichos pares. El resultado es:

```
SETS:
Activo/1..5/:r,x;
Par(Activo,Activo):a;
ENDSETS

DATA:
r= 0.12 0.09 0.08 0.14 0.132;
a= 0.07 0.03 0.05 0.07 0.05
   0.03 0.02 0.02 0.03 0.02
   0.05 0.02 0.05 0.05 0.05
   0.07 0.03 0.05 0.12 0.09
   0.05 0.02 0.05 0.09 0.19;
rmin=0.11;
ENDDATA

[Riesgo] Min=@Sum(par(i,j):a(i,j)*x(i)*x(j));
[Rentabilidad] @Sum(Activo(i): r(i)*x(i))>rmin;
[Capital] @Sum(Activo(i):x(i))=1;
```

Podríamos haber introducido la función objetivo con dos sumas:

```
Min = @Sum(Activo(i):
@Sum(Activo(j):
a(i,j)*x(i)*x(j)
));
```

pero es más sencillo definir la suma sobre el conjunto de pares de activos, que es lo que hemos hecho.

La cartera con riesgo mínimo resulta ser $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0.14, 0.53, 0, 0.23, 0.09)$.

8.9 Algunos hechos adicionales de interés

- Cuando escribas un modelo en LINGO puede ser útil que añadas comentarios que expliquen qué es cada variable o cada restricción, o que presenten el problema, etc.

  Una línea de comentarios debe empezar con ! y terminar con punto y coma. LINGO no tendrá en cuenta para nada estas líneas. En particular no se quejará si usamos acentos o eñes. Por ejemplo:

```
!Problema del ejemplo 1;
!M1 = Horas contratadas en el turno de mañana en la línea 1;
!M2 = Horas contratadas en el turno de mañana en la línea 2;
!T1 = Horas contratadas en el turno de tarde en la línea 1;
!T2 = Horas contratadas en el turno de tarde en la línea 2;
!N1 = Horas contratadas en el turno de noche en la línea 1;
!N2 = Horas contratadas en el turno de noche en la línea 2;

[Coste] Min= 40*M1+50*M2+55*T1+50*T2+100*N1+90*N2;
[Produccion_L1] 15*M1+17*T1+20*N1>3000;
[Produccion_L2] 10*M2+12*T2+15*N2>5000;
[Horas_M] M1+M2 !Puedes insertar un comentario donde quieras; <100;
[Horas_T] T1+T2<200;
[Horas_N] N1+N2<300;
[Distribucion_L1] M1+T1>190;
```

- LINGO tratará más eficientemente las restricciones de tipo cota, como $3 \leq x \leq 10$, si en lugar de introducirlas junto con las demás restricciones se usa la instrucción:

  ```
  @BND(3,x,10);
  ```

- Para problemas de programación no lineal puedes facilitar que LINGO encuentre una solución óptima (o que encuentre otros óptimos locales si no ha encontrado un óptimo global) indicándole a partir de qué valores de las variables debe empezar a buscar la solución. Esto se hace mediante una sección `INIT`, de este modo:

  ```
  INIT:
  x=5; y=6; z=9;
  ENDINIT
  ```

  o, en caso de que `x` sea una variable asociada a un conjunto de, digamos, cinco elementos:

  ```
  INIT:
  x= 5 6 4 0 1;
  ENDINIT
  ```

  La diferencia con una sección `DATA` es que las igualdades escritas en `DATA` fijan el valor de las variables, que pasan a ser constantes (datos del problema) desde ese momento, mientras que las igualdades de una sección `INIT` sólo marcan puntos de partida que LINGO puede modificar hasta encontrar su valor óptimo.

9 Problemas de modelización

9.1 Ejemplos resueltos

Ejemplo 1 Una empresa ha encargado a Luis que organice dos plantas de producción de hamburguesas. Ya cuenta con las instalaciones y maquinara necesarias, pero falta contratar a los trabajadores oportunos. Los destinados a la planta 1 cobrarán 40€ diarios y los destinados a la planta 2 cobrarán 35€ diarios. Se pretende elaborar dos clases de hamburguesas: de ternera y mixtas. Las de ternera llevan 200 gramos de ternera, mientras que las mixtas llevan 150 gramos de ternera y 100 gramos de cerdo. Las plantas pueden recibir diariamente (entre las dos) $3\,000$ kg de carne de ternera (que compra a 4€/kg) y $3\,100$ kg de cerdo (que compra a 2€/kg). Por otra parte, teniendo en cuenta la maquinaria disponible, el número máximo de hamburguesas que puede procesar diariamente cada trabajador en cada planta viene dado por la tabla siguiente:

	Ternera	Mixtas
Planta 1	140	270
Planta 2	160	750

Por razones de demanda, Luis decide que se produzcan al menos tres veces más hamburguesas mixtas que de ternera. Por otra parte, la planta 2 no tiene capacidad para más de 15 trabajadores. Además, Luis piensa fijar el precio de sus hamburguesas en función de la producción total P, de modo que venderá las de ternera a $p_T = 2+10\,000/(P+1)$€ y las mixtas a $p_M = 1+10\,000/(P+1)$€. Calcula el número de trabajadores que conviene contratar en cada planta y el número de hamburguesas que conviene elaborar de cada tipo (conjuntamente entre las dos plantas) para maximizar los beneficios.

MODELIZACIÓN: En primer lugar determinamos las variables del problema:

T hamburguesas de ternera que hay que producir.

M hamburguesas mixtas que hay que producir.

P1 trabajadores que conviene contratar para la planta 1

P2 trabajadores que conviene contratar para la planta 2

Recuerda que las variables tienen que corresponderse con lo que tenemos que decidir. En este caso lo que nos piden decidir es cuántas hamburguesas de ternera fabricamos y cuántas mixtas, así como cuántos trabajadores contratamos para la planta 1 y cuántos para la planta 2.

Cuanto más descriptivos sean los nombres de las variables más fácil te resultará modelizar el problema. Por ejemplo T, M, P1, P2 es mejor que x, y, z, w.

La función objetivo es lo que nos piden maximizar o minimizar, que en este caso el beneficio.

Sería un error dejar en la función objetivo la P que aparece en el enunciado, pues no es ninguna de las variables del problema. Cualquier dato haya que incluir en el modelo debe expresarse exclusivamente en términos de las variables.

En segundo lugar determinamos la función objetivo, que en este caso es el beneficio. Lo calcularemos restando ingresos menos costes. Los únicos datos referentes a los ingresos que contiene el enunciado son los precios de venta de las hamburguesas, luego los ingresos que proporciona cada tipo de hamburguesa se obtienen multiplicando el precio por la cantidad producida. Vemos que los precios dependen de la producción total P, que en nuestro caso es $P = T + M$. Por lo tanto:

$$\text{Ingresos} = \left(2 + \frac{10\,000}{T+M+1}\right)T + \left(1 + \frac{10\,000}{T+M+1}\right)M.$$

En enunciado nos habla de dos clases de coste: el coste de la carne y los salarios de los trabajadores. El coste total de los trabajadores se calcula fácilmente:

$$\text{coste trabajadores} = 40P1 + 35P2.$$

Para calcular el coste de la carne tenemos que calcular la carne que necesitamos de cada tipo. De ternera, necesitamos 0.2 kg por cada hamburguesa de ternera y 0.15 kg por cada hamburguesa mixta, luego $0.2T + 0.15M$ kg en total. Como el precio del kg es de 4 €, el coste de la ternera es $4(0.2T + 0.15M)$. El coste de la carne de cerdo se calcula análogamente, y el resultado es:

$$\text{coste carne} = 4 \cdot 0.2T + 4 \cdot 0.15M + 2 \cdot 0.1M.$$

Por consiguiente, la función objetivo es

$$\text{Beneficio} = \left(2 + \frac{10\,000}{T+M+1}\right)T + \left(1 + \frac{10\,000}{T+M+1}\right)M$$
$$-40P1 - 35P2 - 4 \cdot 0.2T - 4 \cdot 0.15M - 2 \cdot 0.1M.$$

> Sería un error tratar de poner como variables los kg de ternera y cerdo necesarios, pues no son nada que tengamos que decidir. Todos los datos sobre los que no podamos decidir tienen que calcularse en términos de las variables de decisión, como hemos hecho.
> También sería un error tratar de distinguir entre el número de hamburguesas que hay que fabricar en la planta 1 y en la planta 2, porque el enunciado habla de la producción conjunta de las dos plantas. Hacer la distinción sólo complicaría el planteamiento del problema.

La primera restricción que impone el enunciado es que sólo disponemos de 3 000 kg diarios de ternera y 3 100 kg de cerdo. Como ya hemos calculado las cantidades que necesitamos, estas restricciones son simplemente:

$0.2T + 0.15M \leq 3\,000$	kg necesarios de ternera $\leq$ kg disponibles,
$0.1M \leq 3\,100$	kg necesarios de cerdo $\leq$ kg disponibles.

A continuación tenemos que exigir que el número de trabajadores contratados basta para producir todas las hamburguesas requeridas. Si no pusiéramos ninguna restricción al respecto, la solución óptima sería producir muchas hamburguesas contratando 0 trabajadores, porque así el coste de los trabajadores se reduce a 0, pero, claro, eso no es viable. Según la tabla del enunciado, con los trabajadores contratados podemos producir $140P1 + 160P2$ hamburguesas de ternera y $270P1 + 750P2$ hamburguesas mixtas. Por lo tanto, las restricciones son

$140P1 + 160P2 \geq T$	hamburguesas de ternera que podemos producir $\geq$ hamburguesas de ternera producidas,
$270P1 + 750P2 \geq M$	hamburguesas mixtas que podemos producir $\geq$ hamburguesas mixtas producidas.

El enunciado exige además que se produzcan al menos tres veces más hamburguesas mixtas que de ternera. Esto se traduce en

$M \geq 3T$ Hamburguesas mixtas producidas $\geq$ tres veces las hamburguesas de ternera producidas.

Otra condición es que en la planta 2 no podemos contratar a más de 15 trabajadores, luego:

$P2 \leq 15$ Trabajadores contratados en la planta 2 $\leq$ capacidad.

> Si dudas entre $M \geq 3T$ o $T \geq 3M$, una forma de decidir cuál es la forma correcta es ponerse un ejemplo. Una producción factible sería $(T, M) = (10, 30)$, pues así se producen tres veces más hamburguesas mixtas que de ternera. Esta solución cumple $M \geq 3T$, pero no la otra alternativa, que queda así descartada.

Así pues, el problema modelizado es

$$
\begin{array}{rl}
\text{Max.} & \left(2+\frac{10\,000}{T+M+1}\right)T+\left(1+\frac{10\,000}{T+M+1}\right)M \\
 & -40P1-35P2-4\cdot 0.2T-4\cdot 0.15M-2\cdot 0.1M \\
\text{s.a} & 0.2T+0.15M\leq 3\,000 \\
 & 0.1M\leq 3\,100 \\
 & 140P1+160P2\geq T \\
 & 270P1+750P2\geq M \\
 & M\geq 3T \\
 & P2\leq 15 \\
 & T,M,P1,P2 \text{ enteras,}
\end{array}
$$

donde hemos añadido que las cuatro variables tienen que ser enteras, ya que no se puede producir una cantidad fraccionaria de hamburguesas ni contratar a una cantidad fraccionaria de trabajadores.

La solución que proporciona LINGO es $(T,M,P1,P2)=(4\,615,13\,846,16,15)$, lo que se interpreta como que conviene producir 4 615 hamburguesas de ternera y 13 846 mixtas, y para ello conviene contratar 16 trabajadores para la planta 1 y 15 para la planta 2.

Ejemplo 2 Un bufete de abogados se dispone a ocuparse de un caso de gran envergadura, para el cual quiere destinar a cinco de sus empleados. Dos de ellos deberán ocuparse de las tareas previas de documentación del caso y otros tres lo presentarán ante el juez. En una preselección realizada entre los abogados que han solicitado intervenir en el caso se han fijado seis posibles candidatos, cuya capacidad profesional para cada una de las dos fases ha sido valorada con un indicador entre 0 y 10 reflejado en la tabla siguiente:

Candidato	1	2	3	4	5	6
Capacidad fase 1	5	9	6	4	7	10
Capacidad fase 2	8	3	8	9	6	7

Como la fase 2 es mucho más delicada, el bufete quiere exigir al equipo que se encargará de ella el doble de capacidad total que al destinado a la fase 1. Además, la capacidad total del equipo dedicado a la fase 1 no podrá ser inferior a 10 unidades. Por último, hay que tener en cuenta que el candidato número 6 está acostumbrado a contar con el número 4 entre sus colaboradores, por lo que se ha presentado voluntario con la condición de que sólo se incorporará a uno de los equipos si el número 4 también forma parte de él.

Determina qué abogados deben encargarse de cada una de las dos fases maximizando la capacidad total de los seleccionados.

Modelización: En este problema tenemos que decidir si a cada candidato lo destinamos a la fase 1 o a la fase 2 (o a ninguna de ellas). Esto se expresa mediante doce variables binarias $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32}$ etc., de modo que

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si destinamos el candidato } i \text{ a la fase } j,\\ 0 & \text{si no destinamos el candidato } i \text{ a la fase } j.\end{cases}$$

El objetivo es maximizar la capacidad total. Por lo tanto:

$$\text{Capacidad}=5x_{11}+8x_{12}+9x_{21}+3x_{22}+6x_{31}+8x_{32}+4x_{41}+9x_{42}+7x_{51}+6x_{52}+10x_{61}+7x_{62}.$$

Aparentemente, ahora habría que exigir que hay que destinar a cinco empleados, pero no es necesario exigir esto, ya que a continuación tenemos que especificar que dos se destinan a la fase 1 y tres a la fase 2, y esto ya incluye que el total son cinco. Así pues, exigimos que haya dos destinados a la fase 1 y tres a la fase 2:

$$\begin{array}{ll} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}+x_{61}=2 & \text{Abogados asignados a la fase 1 = total requerido.} \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52}+x_{62}=3 & \text{Abogados asignados a la fase 2 = total requerido.} \end{array}$$

A continuación, el enunciado exige que la capacidad de los abogados destinados a la fase 2 sea al menos el doble que la de los destinados a la fase 1:

$$8x_{12}+3x_{22}+8x_{32}+9x_{42}+6x_{52}+7x_{62}\geq 2(5x_{11}+9x_{21}+6x_{31}+4x_{41}+7x_{51}+10x_{61})$$

Capacidad total en la fase 2 $\geq$ doble de la capacidad total en la fase 1.

Ahora exigimos que la capacidad en la fase 1 sea al menos de 10 unidades:

$$5x_{11}+9x_{21}+6x_{31}+4x_{41}+7x_{51}+10x_{61}\geq 10$$

Capacidad total en la fase 1 $\geq$ mínimo exigido.

Falta exigir que el candidato 6 sólo formará parte de un equipo si también está en él el candidato 4. Más detalladamente, $x_{61}=1$ sólo es factible si también $x_{41}=1$. Esto se expresa mediante $x_{61}\leq x_{41}$, y análogamente con la fase 2, luego $x_{62}\leq x_{42}$.

Todavía falta imponer una condición, y es que un abogado no puede participar en las dos fases a la vez. Esto se consigue con las seis últimas restricciones del modelo, que resulta ser el siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 5x_{11}+8x_{12}+9x_{21}+3x_{22}+6x_{31}+8x_{32} \\ & +4x_{41}+9x_{42}+7x_{51}+6x_{52}+10x_{61}+7x_{62} \\ \text{s.a} & x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}+x_{61}=2 \\ & x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52}+x_{62}=3 \\ & 8x_{12}+3x_{22}+8x_{32}+9x_{42}+6x_{52}+7x_{62}\geq \\ & 2(5x_{11}+9x_{21}+6x_{31}+4x_{41}+7x_{51}+10x_{61}) \\ & 5x_{11}+9x_{21}+6x_{31}+4x_{41}+7x_{51}+10x_{61}\geq 10 \\ & x_{61}\leq x_{41} \\ & x_{62}\leq x_{42} \\ & x_{11}+x_{12}\leq 1 \\ & x_{21}+x_{22}\leq 1 \\ & x_{31}+x_{32}\leq 1 \\ & x_{41}+x_{42}\leq 1 \\ & x_{51}+x_{52}\leq 1 \\ & x_{61}+x_{62}\leq 1 \\ & x_{ij} \text{ binarias.} \end{array}$$

La solución que proporciona LINGO es

$$x_{11}=x_{32}=x_{42}=x_{51}=x_{62}=1,$$

y las demás variables valen 0. Esto significa que de la fase 1 deben encargarse los candidatos 1 y 5, mientras que de la fase 2 se encargarán los candidatos 3, 4 y 6.

Ejemplo 3 Una empresa fabrica un producto en dos fábricas F_1 y F_2 y lo vende en Madrid y en Valencia, donde hay una demanda de 150 y 250 kg de producto, respectivamente. Para llevarlo desde las fábricas hasta los destinos contrata a una empresa de transporte que sólo está dispuesta a hacer el servicio si la cantidad total transportada es de al menos 450 kg. Los costes de transporte vienen dados por la tabla siguiente:

	Madrid	Valencia
F_1	5	8
F_2	6	7

Determina las cantidades de producto que conviene llevar desde cada fábrica a cada ciudad para servir como mínimo las cantidades demandadas minimizando el coste de transporte, teniendo en cuenta que las fábricas tienen unas capacidades limitadas de producción de 100 y 500 kg, respectivamente.

Modelización: En primer lugar determinamos las variables del problema:

F1M kg de producto que conviene transportar de la fábrica 1 a Madrid.

F1V kg de producto que conviene transportar de la fábrica 1 a Valencia.

F2M kg de producto que conviene transportar de la fábrica 2 a Madrid.

F2V kg de producto que conviene transportar de la fábrica 2 a Valencia.

En segundo lugar determinamos la función objetivo, que en este caso es el coste de transporte.

$$\text{Coste} = 5F1M + 8F1V + 6F2M + 7F2V$$

Por último determinamos las restricciones del problema. Vemos que se exige servir 450 kg de producto como mínimo. Esto nos lleva a

$$F1M + F1V + F2M + F2V \geq 450 \quad \text{kg servidos} \geq \text{mínimo exigido.}$$

Otra condición es que hay que servir como mínimo las cantidades demandadas. Esto es una restricción para cada ciudad:

$$\begin{array}{ll} F1M + F2M \geq 150 & \text{kg servidos a Madrid} \geq \text{demanda en Madrid} \\ F1V + F2V \geq 250 & \text{kg servidos a Valencia} \geq \text{demanda en Valencia} \end{array}$$

Por último, cada fábrica tiene una capacidad, por lo que tenemos que imponer que la cantidad servida desde cada fábrica no exceda su capacidad:

$$\begin{array}{ll} F1M + F1V \leq 100 & \text{kg servidos desde F1} \leq \text{capacidad de F1} \\ F2M + F2V \leq 500 & \text{kg servidos desde F2} \leq \text{capacidad de F2} \end{array}$$

En total, el modelo es el siguiente:

$$\begin{array}{lll} \text{Min.} & 5F1M + 8F1V + 6F2M + 7F2V & \text{coste} \\ \text{s.a} & F1M + F1V + F2M + F2V \geq 450 & \text{cantidad total transportada} \geq \text{cantidad mínima} \\ & F1M + F2M \geq 150 & \text{kg servidos a Madrid} \geq \text{demanda en Madrid} \\ & F1V + F2V \geq 250 & \text{kg servidos a Valencia} \geq \text{demanda en Valencia} \\ & F1M + F1V \leq 100 & \text{kg servidos desde } F_1 \leq \text{capacidad de } F_1 \\ & F2M + F2V \leq 500 & \text{kg servidos desde } F_2 \leq \text{capacidad de } F_2 \\ & F1M,\ F1V,\ F2M,\ F2V \geq 0 & \end{array}$$

Modelización con conjuntos: Veamos ahora cómo introducir en LINGO el mismo modelo empleando conjuntos. Para ello observamos que el problema involucra a un conjunto de fábricas y un conjunto de ciudades, pero además tenemos que observar que las variables del problema no se corresponden con ninguno de estos dos conjuntos, sino que cada variable se corresponde con una ruta posible fábrica-ciudad, por lo que también tendremos que definir el conjunto de las rutas fábrica-ciudad. Esto nos lleva a:

```
SETS:
Fabrica/F1..F2/;
Ciudad/Madrid,Valencia/;
Ruta(Fabrica,Ciudad);
ENDSETS
```

A continuación tenemos que asociar cada dato o variable del problema a los conjuntos de los que depende. Por ejemplo, cada demanda está asociada a una ciudad (demanda de Madrid y demanda de Valencia), cada capacidad está asociada a una fábrica (capacidad de F1 y capacidad de F2), cada coste de transporte está asociado a una ruta (coste de transportar de una fábrica a una ciudad) y, por último, ya hemos indicado que las variables están asociadas a rutas (cantidad transportada de una fábrica a una ciudad). Esto nos lleva a:

```
SETS:
Fabrica/F1..F2/:Capacidad;
Ciudad/Madrid,Valencia/:Demanda;
Ruta(Fabrica,Ciudad):C,x;
ENDSETS
```

Hemos llamado `C` a los costes de transporte de las rutas y `x` a las variables. Por ejemplo, si resolvemos el problema en este punto obtenemos:

```
            Variable           Value
       CAPACIDAD( F1)       1.234568
       CAPACIDAD( F2)       1.234568
     DEMANDA( MADRID)       1.234568
   DEMANDA( VALENCIA)       1.234568
       C( F1, MADRID)       1.234568
     C( F1, VALENCIA)       1.234568
       C( F2, MADRID)       1.234568
     C( F2, VALENCIA)       1.234568
       X( F1, MADRID)       1.234568
     X( F1, VALENCIA)       1.234568
       X( F2, MADRID)       1.234568
     X( F2, VALENCIA)       1.234568
```

Vemos así que tenemos definidas las capacidades de las fábricas, las demandas de las ciudades, los costes de cada ruta y las variables del problema (ahora, por ejemplo, la variable que llamábamos F1M es `X(F1,Madrid)`). Como todavía no hemos asignado ningún valor a las variables, LINGO les asigna el valor por defecto `1.234568`.

El siguiente paso es introducir los datos del problema:

```
DATA:
capacidad=100 500;
demanda = 150 250;
C= 5  8
   6  7;
TM = 450;
ENDDATA
```

Es muy importante que para introducir la tabla `C` igual que está en el enunciado hemos tenido que definir antes el conjunto `Ruta(Fabrica, Ciudad)` y no `Ruta(Ciudad,Fabrica)`. Si hubiéramos tomado las fábricas como primer índice no se produciría ningún error, pero LINGO entendería incorrectamente que 8 es el coste de transporte de la fábrica 2 a Madrid y no de la fábrica 1 a Valencia.

Notemos que la cantidad mínima que debe ser transportada `TM` no está asociada a ningún conjunto, por lo que la introducimos ahora por primera vez.

Ahora ya podemos escribir el modelo. Observemos la función objetivo:

$$\text{Min. } 5F1M + 8F1V + 6F2M + 7F2V$$

Vemos que consta de una suma para todas las variables, y las variables a su vez dependen del conjunto de rutas, luego se trata de una suma para todas las rutas posibles. Cada sumando consta del coste de la ruta correspondiente multiplicado por la cantidad transportada en esa ruta. Esto nos lleva a:

```
[Coste] Min = @Sum(Ruta(i,j):C(i,j)*x(i,j));
```

Para escribir la suma en LINGO usamos `@Sum` e indicamos que la suma es para cada ruta. Como cada ruta está asociada a una fábrica y una ciudad, debemos escribir `Ruta(i,j)`, que significa "la ruta de la fábrica i a la ciudad j". Luego indicamos que cada sumando consta del coste `C(i,j)` multiplicado por la cantidad transportada `x(i,j)`.

Consideremos ahora la primera restricción:

$$F1M + F1V + F2M + F2V \geq 450$$

Vemos que el miembro izquierdo es una suma en la que aparecen todas las variables, y éstas dependen de las rutas, luego se trata de una suma para todas las rutas:

```
[Cantidad_total] @Sum(Ruta(i,j): x(i,j)) > TM;
```

Las restricciones siguientes son las de la demanda:

$$\begin{array}{ll} F1M + F2M \geq 150 & \text{kg servidos a Madrid} \geq \text{demanda en Madrid} \\ F1V + F2V \geq 250 & \text{kg servidos a Valencia} \geq \text{demanda en Valencia} \end{array}$$

Recuerda que no se puede escribir `x(i,Madrid)` o `demanda(Madrid)`, porque los índices tienen que ser números y `Madrid` es el elemento 1 del conjunto de ciudades. En todo caso podríamos escribir `x(i,@index(Madrid))`, donde la función `@index` nos da el índice de `Madrid` en el conjunto de ciudades (en este caso 1).

Tenemos una restricción para Madrid y otra para Valencia. En cada una de ellas la suma del miembro izquierdo tiene un sumando para cada fábrica, luego es una suma sobre el conjunto de las fábricas:

```
[Demanda_M] @Sum(fabrica(i):x(i,1)) > demanda(1)
[Demanda_V] @Sum(fabrica(i):x(i,2)) > demanda(2)
```

Como siempre, no ponemos únicamente `@Sum(fabrica:)`, sino que introducimos una variable i que recorrerá las fábricas. Así

`@Sum(fabrica(i):)` significa "suma para toda fábrica i".

Sin embargo, para que el problema pueda adaptarse fácilmente a problemas con un número de ciudades mayor, es conveniente escribir las dos restricciones mediante una misma expresión mediante `@For`. En este caso tenemos una restricción para cada ciudad, luego `@For` debe generar una restricción para cada ciudad:

```
@For(ciudad(j):[Demanda_] @Sum(fabrica(i):x(i,j))>demanda(j));
```

Ahora hemos puesto `@For(ciudad(j):)`, que significa "[crea una restricción] para cada ciudad j". Luego viene la etiqueta de la restricción, que no puede ser `demanda`, porque ya hemos usado este nombre para la demanda requerida en cada ciudad, así que hemos puesto `Demanda_`, con un guión bajo adicional. Después viene la restricción, que es como las dos que habíamos escrito, salvo que en lugar de 1 o 2 ponemos j, que es el índice que recorre las ciudades.

Ahora consideramos las dos restricciones de la capacidad:

$$\begin{array}{ll} F1M + F1V \leq 100 & \text{kg servidos desde } F_1 \leq \text{capacidad de } F_1 \\ F2M + F2V \leq 500 & \text{kg servidos desde } F_2 \leq \text{capacidad de } F_2 \end{array}$$

Nuevamente tenemos dos restricciones, pero ahora es una para cada fábrica, luego necesitamos un `@For(Fabrica(i):)`, es decir "[genera una restricción] para cada fábrica i". A su vez, en cada restricción hay que sumar para todas las ciudades, es decir, necesitamos un `@Sum(Ciudad(j):)`. En definitiva:

```
@For(fabrica(i): [Capacidad_] @Sum(ciudad(j):x(i,j))<capacidad(i));
```

En definitiva, el problema queda así:

```
SETS:
Fabrica/F1..F2/:Capacidad;
Ciudad/Madrid,Valencia/:Demanda;
Ruta(Fabrica,Ciudad):C,x;
ENDSETS

DATA:
capacidad=100 500;
demanda = 150 250;
C= 5  8
   6  7;
TM = 450;
ENDDATA

[Coste] Min = @Sum(Ruta(i,j):C(i,j)*x(i,j));
[Cantidad_total] @Sum(Ruta(i,j): x(i,j)) > TM;
@For(ciudad(j):[Demanda_] @Sum(fabrica(i):x(i,j))>demanda(j));
@For(fabrica(i): [Capacidad_] @Sum(ciudad(j):x(i,j))<capacidad(i));
```

La solución que proporciona LINGO es:

Variable	Value	Reduced Cost
X(F1, MADRID)	100.0000	0.000000
X(F1, VALENCIA)	0.000000	2.000000
X(F2, MADRID)	100.0000	0.000000
X(F2, VALENCIA)	250.0000	0.000000

Así pues, desde la fábrica 1 conviene servir 100 kg a Madrid, y desde la fábrica 2 conviene servir 100 kg Madrid y 250 a Valencia. El coste es de 2 850 u.m.

Modelo con sumatorios: Esta forma de introducir el problema en LINGO tiene la ventaja de que se adapta con cambios mínimos para cualquier número de fábricas y ciudades. Ahora es fácil escribir también el modelo en una forma general que valga para cualquier número de fábricas y ciudades:

Si llamamos m al número de fábricas y n al número de ciudades, el problema es:

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} & \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j & j = 1, \ldots, n \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq c_i & i = i, \ldots, m \\ & x_{ij} \geq 0 & \end{aligned}$$

```
@Sum(Ruta(i,j):  )
@Sum(fabrica(i):  )
@Sum(ciudad(j):  )
@For(ciudad(j):  )
@For(fabrica(i):  )
```

Ejemplo 4 Una empresa maderera suministra a 5 mercados desde tres centros de producción. Actualmente está sirviendo la madera por tren, pero se plantea la posibilidad de emplear el transporte marítimo en lugar del terrestre, o de combinar adecuadamente ambos medios de transporte. Las tablas siguientes contienen el coste unitario de transportar un millón de pies-tabla de madera desde cada centro de producción hasta cada mercado por tren y por barco:

Centro	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3	Mercado 4	Mercado 5
A	51	62	35	45	56
B	59	68	50	39	46
C	49	56	53	51	37

Coste del transporte por tren

Centro	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3	Mercado 4	Mercado 5
A	48	68	48	–	54
B	66	75	55	49	57
C	–	61	64	59	50

Coste del transporte por barco
(Donde no se indica ningún coste es porque no hay ruta marítima disponible.)

De cada centro puede extraerse anualmente 15, 20 y 15 millones de pies-tabla de madera, respectivamente, y la demanda de cada mercado es de 11, 12, 9, 10 y 8 millones de pies-tabla respectivamente.

a) Determina el coste de transportar la madera en tren (la solución que la empresa pone en práctica actualmente).

b) Determina el coste que tendría el transporte por barco.

c) Determina si sería preferible un uso combinado de ambos medios de transporte.

d) Concluye con una propuesta concreta sobre la forma en que la empresa debería distribuir la madera para que el coste fuera mínimo. ¿Tu propuesta requiere grandes cambios respecto de la solución actual?

e) Escribe con sumatorios los tres modelos correspondientes a los apartados a), b) y c).

> Cuando resuelvas el problema del transporte en barco, tendrás que introducir las restricciones:
> `x(1,4)=0;`
> `x(3,1)=0;`
> para impedir que se transporte madera por las dos rutas inexistentes.
> Al introducir la tabla de costes LINGO te requerirá que pongas algún valor en las dos entradas que faltan. Puedes poner un cero (o cualquier otro valor).

SOLUCIÓN: Los apartados a) y b) corresponden al mismo esquema de problema del ejemplo anterior, así que se deja como problema propuesto adaptar (mínimamente) el modelo de dicho ejemplo. Vamos a resolver el apartado c).

Como en el ejemplo anterior, necesitamos un conjunto de centros, otro de mercados y además un conjunto de rutas, formado por todos los pares posibles (centro, mercado).

Cada centro tiene asociada su producción, cada mercado su demanda, pero ahora cada ruta tiene asociados dos costes, el coste del tren y el coste del barco.
Similarmente, ahora tenemos dos variables asociadas a cada ruta: una para la cantidad de madera que conviene transportar en tren y otra para la cantidad que conviene transportar en barco, por dicha ruta. Estas consideraciones se reflejan en la definición siguiente de conjuntos:

```
SETS:
Centro/A..C/:Produccion;
Mercado/M1..M5/:Demanda;
Ruta(Centro,Mercado):CosteTren,CosteBarco,Tren,Barco;
ENDSETS
```

Con esto hemos definido las variables `Tren(centro, mercado)` y `Barco(centro, mercado)` que representarán las cantidades de madera que conviene transportar por tren y por barco, respectivamente, de cada centro a cada mercado. Una vez introducidas estas definiciones, los datos del enunciado se introducen de forma natural:

```
DATA:
Produccion = 15 20 15;
Demanda    = 11 12 9 10 8;
CosteTren = 51 62 35 45 56
            59 68 50 39 46
            49 56 53 51 37;
CosteBarco= 48 68 48  0 54
            66 75 55 49 57
             0 61 64 59 50;
ENDDATA
```

Ahora introducimos la función objetivo, que es minimizar el coste. Por ejemplo, el coste de transporte del centro A al mercado M1 es `51 Tren(A,M1)+ 48 Barco(A, M1)` (el coste de cada unidad transportada por tren por el número de unidades transportadas más el coste de cada unidad transportada por barco por el número de unidades transportadas, e igualmente hay que sumar los costes correspondientes por las demás rutas posibles. Así pues, la función objetivo se calcula sumando para todas las rutas, y cada sumando es a su vez la suma del coste del tren por esa ruta y el coste del barco por esa ruta:

```
[Coste] Min=@Sum(Ruta(i,j):
                 CosteTren(i,j)*Tren(i,j)+CosteBarco(i,j)*Barco(i,j)
                 );
```

Ahora tenemos que exigir que de cada centro no salga más madera que la que puede producir. Esto es una restricción distinta para cada centro, luego usaremos `@For(Centro(i):  )`

En la restricción correspondiente al centro `i` tenemos que sumar toda la madera que se transporta por tren y por barco a cada uno de los mercados, luego se trata de una suma sobre los mercados:

```
@For(Centro(i):[Produccion_]
               @Sum(Mercado(j): Tren(i,j)+Barco(i,j)) < Produccion(i)
    );
```

Ahora tenemos que exigir que a cada mercado llegue como mínimo la cantidad demandada. Esto es una restricción para cada mercado, luego usaremos `@For(Mercado(j):  )`

En la restricción correspondiente al mercado `j` tenemos que sumar toda la madera que llega hasta él por tren y por barco desde cada uno de los centros, luego se trata de una suma sobre los centros:

```
@For(Mercado(j):[Demanda_]
                @Sum(Centro(i): Tren(i,j)+Barco(i,j)) > demanda(j)
     );
```

```
SETS:
Centro/A..C/:Produccion;
Mercado/M1..M5/:Demanda;
Ruta(Centro,Mercado):CosteTren, CosteBarco,Tren,Barco;
ENDSETS
DATA:
Produccion = 15 20 15;
Demanda    = 11 12 9 10 8;
CosteTren = 51 62 35 45 56
            59 68 50 39 46
            49 56 53 51 37;
CosteBarco= 48 68 48  0 54
            66 75 55 49 57
             0 61 64 59 50;
ENDDATA
```

```
[Coste_] Min=@Sum(Ruta(i,j):CosteTren(i,j)*Tren(i,j)+CosteBarco(i,j)*Barco(i,j));
@For(Centro(i): [Produccion_]
                @Sum(Mercado(j): Tren(i,j)+Barco(i,j)) < Produccion(i)
     );
@For(Mercado(j):[Demanda_]
                @Sum(Centro(i):Tren(i,j)+Barco(i,j)) > demanda(j)
    );

Barco(@Index(A),@Index(M4))=0;
Barco(3,1)=0;
```

> Notemos que en las etiquetas de las restricciones hemos puesto `Produccion_` y `Demanda_` , con una barra baja al final, porque obtendríamos un error si llamáramos igual a las etiquetas que a las cantidades que hemos definido en la sección `DATA`.

Las dos últimas restricciones son las que indican que las cantidades transportadas por barco del centro `A` al mercado `M4` y del centro `C` al mercado `M1` tienen que ser 0 (porque no hay ruta marítima). Hemos expresado cada una de ellas en una de las dos formas alternativas que puedes elegir. Daría error escribir `Barco(A,M4)=0;` O bien usamos los índices correspondientes a los centros y los mercados (la segunda línea) o bien los calculamos con la función `@Index` (la primera línea).

Dejamos como problema propuesto calcular y discutir la solución como pide el enunciado. Terminamos presentando el modelo con sumatorios como pide el apartado d). Por abreviar llamamos x_{ij}, y_{ij} a las variables que en LINGO hemos llamado `Tren(i,j)` y `Barco(i,j)`.

Las variables del problema son:

x_{ij} pies-tabla de madera que conviene transportar por tren del centro i al mercado j,
y_{ij} pies-tabla de madera que conviene transportar por barco del centro i al mercado j.

`@Sum(Ruta(i,j):  )`

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}(\text{CT}_{ij}\,x_{ij} + \text{CB}_{ij}\,y_{ij})$$

`@For(Centro(i):  )`

$$\text{s.a} \quad \sum_{j=1}^{5}(x_{ij}+y_{ij}) \le p_i \qquad i = 1,\ldots,3$$

`@Sum(Mercado(j):  )`

$$\sum_{i=1}^{3}(x_{ij}+y_{ij}) \ge d_j \qquad j = 1,\ldots,5$$

`@Sum(Centro(i):  )`

$$y_{14},\; y_{31} = 0$$
$$x_{ij}, y_{ij} \ge 0$$

`@For(Mercado(j):  )`

Las cantidades CT_{ij} y CB_{ij} representan los costes unitarios de transportar por tren y por barco, respectivamente, un pie-tabla de madera desde el centro de producción i hasta el mercado j. Llamamos p_i a la producción máxima del centro i y d_j a la demanda del mercado j.

Modelización alternativa del problema Si en lugar de dos medios de transporte alternativos tuviéramos más posibilidades, hubiera sido conveniente no tratar a cada medio mediante un juego de variables distinto, sino incluir a los medios en la definición de las rutas. Para ello definimos un conjunto adicional de medios de transporte, que en este caso consta de dos medios: tren y barco, y definimos el conjunto de rutas como el de las ternas (centro, mercado, medio). Ahora las variables del problema son de la forma `X(i,j,k)`, de modo que, por ejemplo, la variable `X(A, M3, Tren)` representa la cantidad que conviene transportar por tren desde el centro `A` hasta el mercado `M3`.

```
SETS:
Centro/A..C/:Produccion;
Mercado/M1..M5/:Demanda;
Medio/Tren, Barco/;
Ruta(Centro,Mercado,Medio):Coste,X;
ENDSETS
```

La única precaución que hemos de tener si planteamos así el modelo es la de introducir los costes en el orden correcto. Sería:

```
DATA:
Coste = 51 48 62 68 35 48 45  0 56 54
        59 66 68 75 50 55 39 49 46 57
        49  0 56 61 53 64 51 59 37 50;
ENDDATA
```

Hay que escribir primero el coste del primer centro, primer mercado y considerar todas las rutas posibles (tren y barco), lo que nos da `51, 48`; luego primer centro, segundo mercado y todas las rutas, es decir, `62, 68`, y así sucesivamente.

Dejamos como problema propuesto el completar el modelo con estos conjuntos.

Ejemplo 5 Una compañía tiene tres agentes de ventas en tres ciudades, Austin, Boston y Chicago, y se propone enviarlos a otras tres, Denver, Edmonton y Fargo. La tabla siguiente indica el coste de un billete de avión de cada una de las ciudades a otra:

	Denver	Edmonton	Fargo
Austin	250	400	350
Boston	400	600	350
Chicago	200	400	250

Determina a qué ciudad conviene enviar a cada agente para que el coste de los vuelos sea el menor posible.

Solución: Lo que se nos pide determinar es adónde enviamos al vendedor que está en Austin, adónde enviamos al de Boston y adónde enviamos al de Chicago, o más precisamente, si al vendedor de Austin lo enviamos a Denver, a Edmonton o a Fargo, si al de Boston lo enviamos a Denver, a Edmonton o a Fargo y lo mismo para el de Chicago.

Esto nos lleva a plantear un problema con nueve variables binarias. Por ejemplo, la variable `x(Austin, Denver)` valdrá 1 si enviamos al agente de Austin a Denver, y 0 en caso contrario, e igualmente con todas las demás posibilidades.

Para introducir el problema en LINGO tenemos que considerar el conjunto de las ciudades origen y el de las ciudades destino, así como el conjunto de los vuelos posibles, de cada origen a cada destino:

```
SETS:
Origen/Austin,Boston,Chicago/;
Destino/Denver,Edmonton,Fargo/;
Vuelo(Origen,Destino):coste,x;
ENDSETS

DATA:
Coste = 250 400 350
        400 600 350
        200 400 250;
ENDDATA
```

En este problema tenemos que especificar que las variables son binarias. Para indicar que `x(1,1)` es binaria escribiríamos `@BIN(x(1,1));` pero no necesitamos escribir esta instrucción para cada variable, sino que podemos usar `@For`, así:

```
@For(Vuelo(i,j): @BIN(x(i,j)));
```

El objetivo del problema es minimizar el coste de los vuelos. El coste de Austin a Denver es `coste(Austin,Denver)*x(Austin,Denver)`, pues este producto vale 250 si realmente se realiza ese vuelo (la variable `x(Austin,Denver)` toma el valor 1) y vale 0 si no se realiza ese vuelo. Lo mismo vale para los demás vuelos posibles, luego el coste total es la suma, para todos los vuelos posibles, de los productos `coste(i,j)*x(i,j)`:

```
[Coste_] Min=@Sum(Vuelo(i,j): Coste(i,j)*x(i,j));
```

Si resolvemos el problema sin añadir nada más, LINGO nos dará la solución obvia: no se realiza ningún vuelo y así el coste es el mínimo posible: 0. Por eso tenemos que añadir restricciones que digan que cada agente tiene que volar hasta alguna de las ciudades destino.

Por ejemplo, para expresar que el agente de Austin debe volar a alguna de las ciudades, tendríamos que escribir:

```
x(Austin, Denver) + x(Austin, Edmonton) + x(Austin, Fargo) = 1;
```

Así obligamos a que, de los tres vuelos posibles para el vendedor de Austin, uno de ellos se lleve a cabo. Y hemos de poner otra restricción análoga para Boston y otra para Chicago. En definitiva, tenemos que escribir una restricción para cada origen, lo cual se consigue con `@For(Origen(i):  );` y cada restricción consiste en que la suma para todos los destinos sea 1:

```
@For(Origen(i): [Salida]
               @Sum(Destino(j): x(i,j)) =1
    );
```

Podríamos pensar que con esto ya hemos impuesto todas las restricciones necesarias, pero podemos ver que no es así resolviendo el problema. La solución que obtenemos con lo dicho hasta ahora es:

```
                 Variable           Value        Reduced Cost
        X( AUSTIN, DENVER)       1.000000            250.0000
      X( AUSTIN, EDMONTON)       0.000000            400.0000
         X( AUSTIN, FARGO)       0.000000            350.0000
        X( BOSTON, DENVER)       0.000000            400.0000
      X( BOSTON, EDMONTON)       0.000000            600.0000
         X( BOSTON, FARGO)       1.000000            350.0000
       X( CHICAGO, DENVER)       1.000000            200.0000
     X( CHICAGO, EDMONTON)       0.000000            400.0000
        X( CHICAGO, FARGO)       0.000000            250.0000
```

Y vemos que no nos sirve, porque LINGO nos propone enviar a Denver tanto al agente de Austin como al de Chicago, cuando queremos enviar a cada uno a una ciudad distinta. Para ello, igual que hemos pedido que de cada origen salga un vuelo, también tenemos que pedir que a cada destino llegue un vuelo. Por ejemplo, para pedir que a Denver llegue un vuelo (y sólo uno) escribiríamos:

```
x(Austin,Denver) + x(Boston, Denver) + x(Chicago, Denver) = 1;
```

Hay que escribir una restricción para cada destino, luego usamos `@For(Destino(j): )`, y cada restricción consiste en una suma para todos los orígenes. Escribimos ya el modelo completo:

```
SETS:
Origen/Austin,Boston,Chicago/;
Destino/Denver,Edmonton,Fargo/;
Vuelo(Origen,Destino):coste,x;
ENDSETS

DATA:
coste= 250 400 350
       400 600 350
       200 400 250;
ENDDATA

[Coste_] Min = @Sum(Vuelo(i,j): Coste(i,j)*x(i,j));
@For(Origen(i):   [Salida] @Sum(Destino(j): x(i,j)) = 1);
@For(Destino(j): [Llegada] @Sum(Origen(i):  x(i,j)) = 1);
@For(vuelo(i,j): @BIN(x(i,j)));
```

La solución que proporciona LINGO consiste en enviar al vendedor de Austin a Edmonton, al de Boston a Fargo y al de Chicago a Denver, con un coste de 950 u.m.

El modelo es:

Variables:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el agente de la ciudad } i \text{ vuela a la ciudad } j, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} \\ \text{s.a} & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, 3 \\ & \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, \ldots, 3 \\ & x_{ij} \text{ binarias} \end{array}$$

donde c_{ij} es el coste del vuelo de la ciudad i a la ciudad j.

Ejemplo 6 Una empresa fabrica ocho productos cuyo precio de venta en el mercado viene determinado por la cantidad total producida x_i según se indica en la tabla siguiente, que incluye además el coste de producción de cada unidad:

	Prod. 1	Prod. 2	Prod. 3	Prod. 4	Prod. 5	Prod. 6	Prod. 7	Prod. 8
Precio	$100 - 5x_1$	$250 - 6x_2$	$300 - x_3$	$125 - 3x_4$	$400 - 4x_5$	$110 - 4x_6$	$215 - 2x_7$	$190 - x_8$
Coste	30	45	20	35	40	25	10	15

Determina las cantidades que conviene producir de cada uno de los artículos para obtener el máximo beneficio.

Solución: Las variables del problema son las cantidades x_i que conviene producir de cada uno de los ocho artículos. Observamos que el precio de cada artículo es de la forma $a_i - b_i x_i$, donde a_i y b_i son datos asociados a cada producto, luego para modelizar el problema definimos un conjunto de productos y le asociamos las cantidades siguientes:

```
SETS:
Producto/P1..P8/:a,b,coste,x;
ENDSETS

DATA:
     a= 100 250 300 125 400 110 215 190;
     b=   5   6   1   3   4   4   2   1;
coste =  30  45  20  35  40  25  10  15;
ENDDATA
```

Ahora sólo tenemos que calcular la función de beneficio. El beneficio que proporciona el artículo i se calcula como ingresos − costes. Los ingresos se obtienen como el precio de venta por la cantidad vendida, es decir:

$$\text{Ingreso}_i = (a_i - b_i x_i)x_i$$

y el coste es $c_i x_i$, luego tenemos que sumar el beneficio $(a_i - b_i x_i)x_i - c_i x_i$ para todos los productos:

```
[Beneficio ]Max=@Sum(Producto(i): (a(i)-b(i)*x(i))*x(i)-coste(i)*x(i));
```

La solución que proporciona LINGO es

```
Variable           Value        Reduced Cost
  X( P1)        7.000000            0.000000
  X( P2)        17.08333            0.000000
  X( P3)        140.0000            0.000000
  X( P4)        15.00000            0.000000
  X( P5)        45.00000            0.000000
  X( P6)        10.62500            0.000000
  X( P7)        51.25000            0.000000
  X( P8)        87.50000            0.000000
```

y el beneficio óptimo es de 43 731.98 u.m.

9.2 Problemas propuestos (para modelizar sin conjuntos)

1. La función de utilidad de un consumidor es

$$U = 100\,000 - (x-100)^2 - (y-100)^2 - (z-100)^2 - (w-100)^2,$$

donde x, y, z, w son las cantidades que adquiere de cuatro bienes A, B, C, D. Los bienes A y B son sustitutivos, y el consumidor decide que necesita al menos 30 unidades de uno u otro indistintamente. El bien C es complementario de A y B, de modo que cada unidad de A requiere 2 de C y cada unidad de B requiere 3 de C (y cualquier unidad adicional de C resulta inútil). El bien D es escaso, y el consumidor no puede encontrar en el mercado más de 5 unidades. Los precios de los bienes son 20, 25, 2 y 1 unidad monetaria, respectivamente. Calcula las cantidades a adquirir de cada producto para maximizar la
77605.2 utilidad con un presupuesto de 1 000 unidades monetarias.

   (a) Interpreta la holgura de la restricción sobre las 30 unidades de los bienes sustitutivos.
   (b) ¿Podría el consumidor conseguir más utilidad si se conformara con algo menos de 30 unidades de los bienes A y B?
   (c) ¿Qué aumentaría más la utilidad del consumidor, disponer de 10 unidades más de presupuesto o encontrar en el mercado una sexta unidad de D?

2. La función de utilidad de un consumidor es

$$U = 100\,000 - (x-100)^2 - (y-100)^2 - (z-100)^2,$$

donde x, y, z son las cantidades que adquiere de tres bienes sustitutivos A, B, C cuyos precios son, respectivamente, 3, 6 y 2 €. Determina el consumo que permite conseguir una
139.4 utilidad de 80 000 unidades con coste mínimo.

   (a) Interpreta los costes reducidos de las variables.
   (b) Calcula el aumento de presupuesto que sería necesario si el consumidor quisiera 1 000 unidades más de utilidad. Haz el cálculo aproximado a partir de la solución obtenida y de forma exacta (volviendo a resolver el problema). Compara los resultados.
   (c) (Manteniendo el nivel de utilidad en 80 000) si los productos A y C sólo se pudieran comprar en paquetes de una unidad, mientras que B se pudiera comprar a granel, ¿convendría entonces comprar algo del producto B? ¿Subiría mucho el coste?

3. Un inversor quiere distribuir un capital de 1 u.m. entre tres activos financieros. El riesgo de la inversión viene dado por la función

$$R(x, y, z) = 0.01x^2 + 0.02y^2 + 0.03z^2 + 0.01xy + 0.002yz + 0.03xz,$$

donde x, y, z son las cantidades invertidas en cada activo. La rentabilidad esperada del primer activo es de un 2%, la del segundo de un 3% y la del tercero de un 4%. Determina qué capital le conviene invertir en cada activo para maximizar la rentabilidad sin que el riesgo de la inversión supere un nivel de 0.02. 0.038

   (a) Interpreta el precio dual de la restricción del riesgo.
   (b) ¿Qué sucedería si el inversor quisiera invertir al menos la décima parte del capital en el primer activo?

4. La función de producción de una empresa es

$$P(x, y, z) = \sqrt[10]{x^2y^3z^5},$$

donde x, y, z son las cantidades empleadas de tres factores de producción. El coste unitario de cada factor es, respectivamente, de 4, 6 y 5 unidades monetarias. Además, el proceso de producción exige emplear, como mínimo, el doble de unidades del primer factor que del segundo. Determina la cantidad óptima que hay que emplear de cada factor para conseguir una producción de 1 000 unidades de producto con el coste mínimo. 14567.1

Interpreta el precio dual de la producción.

5. Una empresa tiene que planificar su producción mensual de cuatro productos A, B, C, D, de tal modo que la producción total no sea inferior a 1000 unidades. De éstas, al menos 100 han de ser del producto B, debido a un compromiso con los distribuidores. La elaboración de los productos A y B requiere de una materia prima M de la que la empresa dispone en cantidad limitada: las existencias para el mes son de 900 kg, cada unidad de A requiere 2 kg de M y cada unidad de B requiere 4. Por otra parte, cada unidad de A, B, C y D requiere, respectivamente, 2, 3, 2 y 4 horas de mano de obra, y la plantilla de la empresa puede trabajar 2500 horas al mes. La función de costes de la empresa es $C(x, y, z, w) = 2000 + 2x^2 + 3y^2 + z^2 + w - x - y$, donde x, y, z, w son las cantidades producidas de cada artículo. Calcula la producción que minimiza los costes, así como el coste óptimo. 358533.2

   (a) ¿Es un inconveniente para la empresa la limitación en la cantidad disponible de M?
   (b) Si ello fuera posible, ¿le convendría a la empresa cancelar su compromiso sobre el producto B?
   (c) ¿Sería rentable para la empresa pagar horas extra a sus trabajadores a 400 u.m.?
   (d) ¿Podemos deducir del precio dual de la producción que a la empresa le convendría reducir su producción?

6. Una empresa utiliza tres inputs en la producción de su producto, en cantidades x, y, z, con los cuales consigue una producción dada por $P(x, y, z) = 3x + \ln(y + 2z)$ kg de producto. Los precios de los inputs son 2 €/kg, 5 €/kg y 3 €/kg, respectivamente. La producción

requiere al menos 30 kg de cada input, y la cantidad empleada del tercero ha de ser al menos tanta como la de los dos primeros juntos. La empresa dispone de un presupuesto de 10 000 € para la producción. Determina las cantidades que ha de comprar de cada input
5864.2 para maximizar su producción.

(a) ¿Le convendría a la empresa reducir la cantidad empleada de alguno de los inputs, en caso de que fuera posible?

(b) ¿Qué aumento de producción podría conseguir con 500 unidades adicionales de presupuesto?

7. Una empresa pretende lanzar un nuevo producto en tres mercados diferentes y quiere determinar los precios p_1, p_2 y p_3 a los que le conviene vender cada kg en cada uno de ellos. Para que la producción resulte rentable ninguno de los precios puede ser inferior a los 80 €, que es el coste de producir un kg de producto, y el segundo mercado no aceptaría un precio superior al del primero. Se estima que la demanda de cada mercado viene dada por las funciones

$$D_1(p_1) = 400 - p_1, \qquad D_2(p_2) = 1000 - 3p_2, \qquad D_3(p_3) = 900 - 5p_3.$$

Determina los precios que maximizan los beneficios garantizando una demanda de 1 000 kg
81333.3 de producto.

(a) Si la empresa redujera su producción, ¿su beneficio aumentaría o disminuiría?

(b) Interpreta las variables de holgura de todas las restricciones.

8. Una empresa multinacional de transportes se plantea las alternativas siguientes para invertir un capital de 1 millón de euros:

(a) Incrementar su stock de combustible, a un precio de 2 € /litro.

(b) Incrementar su flota de camiones, a un precio de 1 100 € /vehículo.

(c) Comprar un edificio para oficinas que le ofrece una constructora por 100 000 €.

(d) Comprar acciones de otra compañía, a un precio de 10 € cada una.

El rendimiento unitario esperado para cada inversión es el siguiente:

Combustible	10 €
Camiones	9 000 €
Edificio	850 000 €
Acciones	15 €

8 213 000 Determina la inversión que maximiza el rendimiento.

9. El propietario de una pastelería acude a un mercado mayorista con el propósito de comprar entre 10 y 20 kg de harina, entre 30 y 45 docenas de huevos (que se venden en paquetes indivisibles) y azúcar. Por cada kg de harina que compre necesitará 2 kg de azúcar, y por cada docena de huevos otro medio kg (y no está interesado en comprar más azúcar del que necesita). De cada uno de los tres productos puede elegir entre dos marcas: una de

calidad, con unos precios fijos, y una marca blanca del distribuidor, cuyo precio depende de la cantidad adquirida, según la tabla siguiente:

Precio	Harina (€ /kg)	Huevos (€ /docena)	Azúcar (€ /kg)
Marca de calidad	0.8	1.20	1
Marca blanca	$1.4 - 0.04\mathrm{Ha_b}$	$3.5 - 0.06\mathrm{Hu_b}$	$1.8 - 0.02\mathrm{Az_b}$

donde Ha_b, Hu_b y Az_b son, respectivamente, las cantidades adquiridas de harina, huevos y azúcar de marca blanca en las unidades indicadas en la tabla. Para garantizar un nivel de calidad de sus productos, el comprador quiere gastar al menos 20 € en productos de calidad, pero por razones de economía no quiere que la cantidad adquirida de la marca de calidad de cada producto sea mayor que el 30% de la cantidad adquirida de la marca blanca correspondiente.

Determina qué cantidades de cada marca de cada producto debe adquirir el comprador para minimizar el coste. 111.87

10. A Luis le han encargado que organice un puesto de hamburguesas en una feria. Se plantea vender hamburguesas de ternera y mixtas (de ternera y cerdo) y ha contactado con dos proveedores que le pueden servir la carne necesaria. El primer proveedor le vende la carne picada a 8 € /kg la de ternera y a 6 € /kg la de cerdo, mientras que el segundo le ofrece mejores precios (a 6 € /kg la ternera y a 5 € /kg el cerdo), pero sólo en piezas grandes de 10 kg.

    Según sus estimaciones sobre la asistencia a la feria, Luis considera que no conviene comprar más de 100 kg de carne en total, y no quiere comprar más de 6 piezas grandes para no tener que picar demasiada carne. Por otra parte, las hamburguesas mixtas tienen más demanda, así que Luis quiere preparar al menos tres veces más mixtas que de ternera.

    Cada hamburguesa de ternera lleva 200 gramos de ternera, mientras que una mixta lleva 50 gramos de ternera y 100 gramos de cerdo. Calcula cuántas hamburguesas conviene preparar de cada tipo y cuánta carne hay que comprar a cada proveedor de cada tipo para maximizar los beneficios, teniendo en cuenta que Luis piensa vender las hamburguesas de ternera a 3 € y las mixtas a 2 €. 786.8

11. Un empresario dispone de 500 u.m. para hacer diversas inversiones en su negocio. Las posibilidades que se plantea son las siguientes:

    (a) Invertir 100 u.m. en renovación de máquinas. La utilidad de esta inversión se valora en 2 unidades.

    (b) Invertir 300 u.m. en abrir un nuevo mercado de distribución, con una utilidad valorada en 3 unidades.

    (c) Invertir 80 u.m. en cursillos de formación para los trabajadores, con una utilidad de 1 unidad.

    (d) Invertir 85 u.m. en una rebaja promocional de los precios de sus productos, con una utilidad de 1 unidad.

    (e) Invertir cualquier cantidad en publicidad. Cada u.m. destinada a este fin proporcionaría 0.01 unidades de utilidad.

De las cuatro primeras posibilidades, se quiere llevar a término un máximo de tres, y conviene llevar adelante al menos una de las dos primeras. Determina las inversiones que conviene hacer y la cantidad del presupuesto que conviene invertir en publicidad para
6.35 maximizar la utilidad.

12. Un inversor se plantea invertir 40 000 u.m. en una operación de compra-venta de pisos en dos urbanizaciones en construcción. Las tablas siguientes contienen los precios a los que puede adquirir cada vivienda según sus características, así como los precios a los que pretende venderlos.

	Urbanización 1		Urbanización 2	
	precio compra	precio venta	precio compra	precio venta
Piso normal	550	600	350	410
Piso de lujo	700	780	600	675
Ático (de lujo)	800	900	véase enunciado	1 000

Para la compra de áticos en la segunda urbanización, el inversor ha negociado con el constructor un precio de $850 + 10/x$, donde x es el número total de áticos que compra en ella.

Para asegurarse de que podrá vender todas las viviendas, teniendo en cuenta una estimación de la demanda, quiere que el número de pisos normales en cada urbanización sea igual al número de viviendas de lujo (pisos y áticos) que adquiera en ellas. Además quiere adquirir al menos tres veces más pisos que áticos, así como que el número de pisos normales en la urbanización 1 sea al menos el 15% del número total de viviendas adquiridas entre las dos urbanizaciones.

Determina cuántas viviendas debe adquirir de cada clase en cada urbanización para maxi-
5 800 mizar el beneficio de la operación.

13. Un restaurante quiere contratar camareros temporales para reforzar los turnos de fin de semana (viernes, sábado y domingo) mediante dos tipos de contratos: para camareros con y sin experiencia. Los camareros sin experiencia cobran 400 € por turno y los que sí tienen 700 € por turno. Además, los camareros con experiencia tienen un suplemento de 70 € en los turnos de domingo. Se calcula que van a hacer falta 5 camareros para los viernes, 10 para los sábados y otros 10 para los domingos. Por otra parte, se quiere contratar como mínimo a un camarero con experiencia en cada turno, y el número de camareros con experiencia ha de ser al menos el 55% de los contratados. Determina a cuántos camareros
14270 conviene contratar de cada tipo en cada turno para minimizar su coste.

14. Una empresa agropecuaria ha adquirido dos nuevas granjas para gallinas y ahora debe comprar gallos, gallinas y pienso para ponerlas en funcionamiento. Cada gallo cuesta 30 u.m. y cada gallina 20 u.m., mientras que el pienso le cuesta a 3 u.m./kg. La primera granja puede albergar hasta 200 animales y la segunda 300, y es necesario que en cada granja haya al menos un gallo por cada 10 gallinas. Por otra parte, la empresa desea adquirir ya el pienso necesario para los próximos cuatro meses, y se estima que, en dichos meses, cada gallo necesitará en total 1.2 kg y cada gallina 3.5 kg. Los ingresos esperados que proporcionará cada animal dependen de las instalaciones de cada granja:

	Granja 1	Granja 2
Gallo	39	38
Gallina	55	50

Determina cuántos animales conviene comprar de cada tipo para cada granja y cuántos kg de pienso conviene comprar en total para maximizar los beneficios si la empresa cuenta con un presupuesto de 9 000 u.m. 6204.3

15. Un jefe de personal ha de distribuir cuatro trabajadores para hacer dos trabajos, de forma que dos trabajadores hagan uno de ellos y los otros dos el otro. La tabla siguiente contiene las horas que necesita cada trabajador para hacer su parte de cada trabajo. Determina cuál es la asignación que minimiza el tiempo necesario. 12

	Trabajador 1	Trabajador 2	Trabajador 3	Trabajador 4
Trabajo 1	3	4	2	6
Trabajo 2	2	3	1	4

16. Santi se va de excursión y debe decidir qué mete en la mochila, por lo que ha elaborado la siguiente tabla, que recoge el peso de cada uno de los objetos que podría llevarse, así como la utilidad que cada uno de ellos le proporcionaría:

	Peso (kg)	Utilidad		Peso (kg)	Utilidad
Bocadillo	0.5	9	Bolsa de frutos secos	0.2	6
Agua	1 (por litro)	10 (por litro)	Chubasquero	0.1	7
Paraguas	0.7	8	Cámara de fotos	0.6	7
Apuntes de Matemáticas II	1	0.5	Batería extra para la cámara de fotos	0.3	2

Santi tiene algunas ideas claras:

- Es imprescindible llevar algo para comer.
- Necesitará al menos un litro y medio de agua. Hay que tener en cuenta que su cantimplora tiene una capacidad de 3 litros y pesa 0.4 kg.
- No tiene sentido coger dos objetos para protegerse de la lluvia.
- Sería poco práctico cargar con una batería extra si no se lleva la cámara.

¿Qué le conviene a Santi meter en la mochila para maximizar la utilidad si el contenido de la mochila no debe pesar más de 4 kg? Ten en cuenta que Santi también debe decidir qué cantidad de agua se lleva. 51

17. Una empresa de limpieza subcontrata a otras dos empresas A y B para atender cinco trabajos que no puede realizar con su propio personal. Cada una de las empresas A y B puede atender un máximo de tres trabajos, y ha presentado un presupuesto en función del tiempo y el desplazamiento que requiere cada trabajo, según se refleja en la tabla siguiente:

Trabajo	1	2	3	4	5
Empresa A	20	50	45	40	55
Empresa B	25	40	30	30	60

No obstante, la empresa A ha comunicado que no le resulta rentable aceptar el trabajo 1 si no se hace cargo también del 2 o del 3, que requieren un desplazamiento a la misma zona. Por razones tributarias, la empresa contratante no quiere que la facturación de ninguna de las dos subcontratas supere al doble de la de la otra. Calcula qué trabajos conviene asignar
190 a cada empresa para minimizar el coste.

18. Un inversor dispone de 170 000 € que quiere invertir a un año a través de dos bancos de su confianza. Cada uno de ellos le ofrece un depósito y acciones del propio banco en las condiciones siguientes:

	Rentabilidad del depósito	Precio de cada acción	Rendimiento esperado por cada acción
Banco 1	2%	20	2
Banco 2	2.5%	15	1.7

El banco 1 le ofrece también la posibilidad de invertir 30 000 € en un proyecto impulsado por la entidad que le proporcionaría al cabo de un año un rendimiento de 5 000 €. Además, si el cliente se decide a aceptar esta inversión, el banco 1 le aumenta la rentabilidad de su depósito a un 5% en lugar del 2%. En cualquier caso (tanto si acepta esta inversión adicional como si no), el cliente debe invertir en el banco 1 al menos un capital de 55 000 € (entre el depósito y las acciones) para recibir los tipos de interés indicados.

Por otra parte, por razones de diversificación, el inversor quiere cumplir también los requisitos siguientes:

(a) No invertir más de 90 000 € en el banco 1.

(b) No invertir más de 60 000 € en productos de riesgo (las acciones más la posible inversión extra en el banco 1).

(c) El capital invertido en el banco 2 no debe superar el doble del capital invertido en el banco 1.

Determina qué capital debe invertir en el depósito de cada banco y cuántas acciones debe comprar de cada banco, así como si le conviene participar en el proyecto que le ofrece el
12 650 primer banco para maximizar el rendimiento de la inversión.

19. Carlos entra a un restaurante en el que se ofrece un menú de 20 € que incluye un primero, un segundo y un postre. Si quiere tomar café, debe pagar 1 € más. En la tabla siguiente se muestra el menú, indicándose las calorías de cada plato y la utilidad que cada uno de ellos proporcionaría a Carlos. Cada ítem marcado con un $*$ supone 2 € de suplemento. ¿Qué platos debe elegir Carlos para maximizar la utilidad conseguida con la comida si no puede
14 tomar más de 1 100 calorías y sólo lleva 24 €? ¿Incluiría su elección el café?

		Utilidad	Calorías
Primeros	Ensalada de langostinos*	2	200
	Croquetas	1	300
Segundos	Lubina	2	300
	Solomillo*	6	600
Postres	Brownie	5	500
	Fruta de temporada	3	100
	Café	4	100

20. Un empresario textil quiere comprar pantalones vaqueros de hombre y de mujer a dos fabricantes para venderlos en dos tiendas. El primer fabricante le vende cada pantalón por 30 €, y puede servirle un máximo de 1 000 unidades, mientras que el segundo puede servirle hasta 800 a un precio de 41 €. El empresario los venderá por 50 € (los de hombre) y 60 € (los de mujer) en la primera tienda, y por 45 € y 55 € en la segunda. El empresario quiere comprar el mismo número de pantalones de hombre que de mujer para cada tienda, en total, un máximo de 600 unidades para la tienda 1 y 900 para la tienda 2. Determina cuántas unidades le conviene comprar a cada fabricante de cada tipo para cada tienda para maximizar sus beneficios con un presupuesto de 50 000 €. 27374

21. Una empresa tiene fábricas en tres ciudades C_1, C_2 y C_3. La ciudad C_1 dispone de una refinería de petróleo en la que la empresa puede comprar hasta un máximo de 800 barriles de gasóleo semanales a 8 u.m. el barril. En la ciudad C_2 hay unas minas en las que la empresa puede comprar hasta 700 t de carbón semanales a 10 u.m. la t. Cada barril de gasóleo proporciona la energía equivalente a una t de carbón. El coste de transportar un barril de gasóleo es de 2 u.m. por km., mientras que el de una t de carbón es de 1 u.m. por km. Las distancias en km. entre las tres ciudades vienen dadas por la tabla siguiente:

	C_1	C_2	C_3
C_1	0	20	15
C_2		0	30
C_3			0

Si las fábricas de C_1 y C_3 requieren 500 unidades de energía semanales cada una (entre gasóleo y carbón) y la fábrica de C_2 requiere 300, determina qué cantidad de cada fuente de energía debe consumir cada fábrica para minimizar los costes de abastecimiento. 26 400

22. Tina, Mar y Flora son tres hermanas peluqueras. Esta tarde van a una boda, por lo que deben organizarse para tener las tres el recogido del pelo listo llegado el momento. Indica quién debe peinar a quién para minimizar el tiempo total que dedican a ello, teniendo en cuenta lo siguiente: 4

    - Tina tarda 2 horas en hacer un peinado, mientras que Mar tarda 3/4 de hora y Flora 1 hora.
    - Tina y Mar saben peinarse a sí mismas, pero esto les lleva algo más de tiempo. Concretamente, Tina necesita media hora más de lo normal y Mar un cuarto de hora.

- Como Flora tiene dolores de espalda, sólo podría peinar a una de sus hermanas.
- Tina y Mar no se llevan bien, así que ninguna de ellas quiere peinar a la otra.
- Mar tiene otras cosas que hacer y no puede emplear más de 1 hora y media entre su propio peinado (se lo haga ella o no) y peinar a sus hermanas.

23. La cadena de gimnasios BF ha abierto dos centros en Valencia. En el gimnasio número 1 hay 100 personas matriculadas, mientras que en el gimnasio número 2 hay 200. En cada uno de los gimnasios se van a impartir 6 clases diarias de una hora, para lo que la cadena puede contratar a 3 monitores (Pablo, Lilia y Diana). Calcula cuántas horas de clase diarias debe asignar BF a cada monitor en cada gimnasio para minimizar los costes, teniendo en cuenta lo siguiente:

    - Pablo cobra 20 € por hora. Además, exige que el gimnasio le proporcione 1/3 de litro de bebida isotónica por cada hora de clase. Cada litro de esta bebida le cuesta al gimnasio 1.20 €.
    - BF debe pagar a Lilia $2x$ € por hora, donde x es el número total de horas que la monitora trabaja para la empresa. Como Lilia también estudia, sólo puede dedicar 5 horas al día a su trabajo.
    - Diana pide por cada clase de una hora una cantidad base de 22 € más 2 céntimos de euro por cada persona matriculada en el gimnasio donde se da la clase.
    - BF quiere que, en cada gimnasio, 3 de las clases se dediquen a una actividad llamada Bodypump. Hay que tener en cuenta que Pablo y Lilia están cualificados para dirigir esta actividad, mientras que Diana no ha recibido la formación correspondiente.
    - Por exigencia de los clientes, Pablo debe impartir en total 3 clases más al día que Diana.

24. Luis tiene dos hijos, Luisito y Manolito, a los que lleva de vez en cuando a comer fuera. El menú favorito de sus hijos se compone de hamburguesas y refrescos. Cada vez que salen, Luisito se pide dos hamburguesas y Manolito una. Luis ha decidido racionalizar su consumo teniendo en cuenta las preferencias de sus hijos, pero también criterios de salud, moderación y economía. Cada hamburguesa cuesta 2 € si es de ternera y 1.5 € si es de pollo, y el refresco favorito de sus hijos cuesta 5 € /litro (pero no tienen por qué pedir ni beberse litros enteros cada vez). La tabla siguiente muestra la utilidad que Luis estima que cada producto tiene para cada uno de sus hijos, así como los gramos de grasa de cada hamburguesa:

	Hamburguesa de ternera	Hamburguesa de pollo	Refresco
Utilidad Luisito	5	2	1
Utilidad Manolito	2	1	2.5
Grasa	35	20	–

Luis considera razonable que cada uno de sus hijos beba entre 0.1 y 0.5 litros de refresco por cada hamburguesa. Además Luisito no debe tomar al mes en estas comidas rápidas más de 200 gramos de grasa, mientras que Manolito no debe excecer los 100 gramos. Además, como ya se ha dicho, Luisito toma el doble de hamburguesas que Manolito. Determina cuántas hamburguesas de cada tipo y cuántos litros de refresco debe dejar Luis que tome cada hijo al mes con un presupuesto de 50 € para maximizar su utilidad conjunta, calculada como el producto de sus utilidades individuales. 262.5

25. El profesor de matemáticas de un colegio tiene que seleccionar parejas de alumnos para participar en un concurso de televisión. Hay siete alumnos interesados cuya nota media del curso anterior viene recogida en la tabla siguiente. Se indica además si destacan en ciencias o en letras.

	Anita	Benito	Carmencita	Damianito	Emilito	Florianito	Gracita
Edad	12	12	12	13	14	14	15
Nota	10	6	7	8	9	7	5
Orient.	Ciencias	Ciencias	Letras	Ciencias	Letras	Ciencias	Letras

Las normas del concurso exigen que los miembros de cada pareja se diferencien como máximo en un año de edad. La profesora considera que una pareja formada por un alumno que destaque en ciencias y otro en letras estará mejor preparada para ganar el concurso, por lo que valora la aptitud de cada posible pareja con el criterio siguiente: la aptitud de una pareja es la suma de sus notas más 3 puntos extra si las orientaciones de sus miembros son distintas. El problema es determinar qué parejas deben ser formadas para participar en el concurso de modo que la aptitud total sea la máxima posible. A esto hay que añadir las consideraciones siguientes:

(a) Gracita no está dispuesta a participar si no participa también Emilito (aunque no formen pareja).

(b) Benito es el hijo del director del colegio, así que tiene que salir elegido sí o sí.

(c) La profesora considera que sería bueno que dos de las parejas fueran Carmencita y Danielito, por una parte, y Emilito y Florianito por otra. No se atreve a imponerlo, pero considera oportuno añadir 10 puntos a la aptitud total si esas dos parejas son seleccionadas.

Determina las parejas que conviene enviar al concurso. (Observa que en primer lugar tendrás que determinar cuáles son las parejas válidas según las reglas del concurso.) Comprueba que las parejas que propones cumplen todos los requisitos exigidos. 63

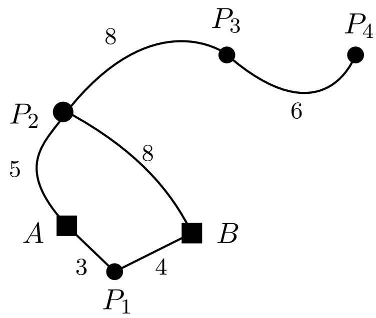
26. La diputación de una provincia dispone de un presupuesto de 70 000 u.m./año para invertir en recursos sanitarios en tres ciudades A, B y C de su jurisdicción. Concretamente, se plantea la posibilidad de construir un nuevo hospital en cada una de ellas, así como crear al menos 100 nuevas plazas de médicos y 300 de auxiliares sanitarios en total. La tabla siguiente recoge el coste medio anual de cada plaza, así como el de la construcción del hospital en cada ciudad y un indicador que es mayor cuanto más necesaria sea la dotación:

	Médico		Auxiliar		Hospital	
Ciudad	coste	necesidad	coste	necesidad	coste	necesidad
A	300	5	150	3	8 000	100
B	250	7	100	5	10 000	500
C	100	3	90	10	9 000	300

Se considera que, como mínimo, la zona necesita un hospital, aunque más de dos sería excesivo. Por razones logísticas el número de plazas de médico que se creen en A debe

ser como mínimo el número de plazas de médico que se creen en B y en C conjuntamente y, por otra parte, en cada ciudad, el número de plazas de auxiliar no debe triplicar al de plazas de médico. Determina cuántas plazas de cada tipo deben crearse en cada ciudad y en qué ciudades conviene construir un hospital para maximizar el índice total de necesidades
3 372 atendidas sin exceder el presupuesto.

27. Una empresa tiene cuatro fábricas en cuatro localidades de una comarca, P_1, P_2, P_3 y P_4, las cuales necesitan mensualmente el suministro de una materia prima. La fábrica de P_1 requiere 30 kg mensuales, la de P_2 requiere 15, la de P_3 requiere 12 y la de P_4 requiere 24. Dicha materia prima puede comprarla a dos empresas suministradoras situadas en dos ciudades cercanas A y B, cada una de las cuales puede proporcionarle hasta 50 kg al mes. La empresa suministradora de A le cobra 1 € por kg de materia prima transportada y por cada km recorrido, mientras que la situada en B le cobra 0.80 € por kg y km. En el plano figuran las distancias en km entre las distintas localidades de la comarca.



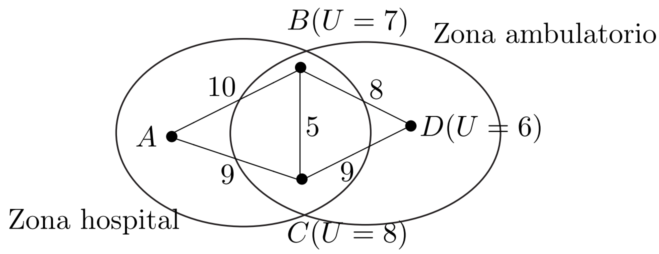
Por otra parte, la empresa no desea perder su relación comercial con ninguna de las dos suministradoras, por lo que quiere que cada una de ellas sirva al menos a una de las fábricas. Determina desde cuál de las dos ciudades conviene servir la materia prima a cada una de
741 las cuatro fábricas para minimizar los costes de transporte.

28. El responsable de obras públicas de una provincia está estudiando un plan para construir un nuevo hospital y un nuevo ambulatorio. Hay tres ciudades candidatas a alojar el hospital, y tres candidatas para el ambulatorio. La figura muestra la zona donde debe situarse cada instalación, junto con las carreteras que comunican cada ciudad, la distancia en km y una estimación de la utilidad que tendría situar el ambulatorio en cada una de las ciudades candidatas. Por otra parte, y al contrario que el ambulatorio (que prestará servicio únicamente a la ciudad en la que se instale), el hospital está previsto que sirva a todas las ciudades de la zona, por lo que la utilidad de situarlo en una ciudad se calcula como $U = 100/d$, donde d es la suma de las distancias que hay que recorrer desde las demás ciudades para llegar hasta él.

    Determina en qué ciudad conviene situar el hospital y en cuál conviene situar el ambulatorio para maximizar la utilidad, teniendo en cuenta las consideraciones siguientes:

    - No sería admisible que ambos se instalaran en la ciudad C (porque ya se ha beneficiado últimamente de muchas inversiones públicas).
    - Aunque sería factible situar ambas instalaciones en la ciudad B, el hecho es que sus habitantes demandan principalmente el hospital, por lo que sería muy criticado que se instalara en ella el ambulatorio si no se instala también el hospital y, por consiguiente, el responsable no admite esa posibilidad.

- Si finalmente se pone el hospital en A, aumentaría en 4 unidades la utilidad de poner el ambulatorio en D, pues sería la localidad más alejada del hospital. 14.7



29. Un empresario teatral piensa destinar un presupuesto de 10 000 € a organizar un espectáculo de variedades, y ha realizado unas negociaciones preliminares con varios artistas que podrían formar parte del mismo. La tabla siguiente indica el salario que le pagaría a cada uno, así como un indicador de la taquilla estimada que cada artista podría aportar:

	salario	taquilla
El mago Aquilino	3 000	500
El ventrílocuo Bonifacio	2 600	440
Calixta la malabarista	1800	200
Demetrio y sus pulgas amaestradas	1 600	100
El humorista Eladio	1 000	360

En total quiere contratar a tres o a cuatro artistas. Más concretamente, tiene que elegir a un cabeza de cartel, que realizaría una actuación más extensa y cobraría el doble de lo acordado en la negociación preliminar (y aumentaría la previsión de taquilla en un 50%), así como una segunda figura, que también sería destacada en la publicidad, y que cobraría un 50% más de lo pactado (y aumentaría la previsión de taquilla en un 25%) y a uno o dos artistas más para completar el elenco. La previsión es que cada euro invertido en publicidad aumente en un 0.01% el indicador de taquilla correspondiente a las dos primeras figuras. Además, se plantea la posibilidad de realizar una gala extraordinaria que aumentaría en 300 unidades la previsión de taquilla, pero que costaría 2 000 € de organizar.

También hay que tener en cuenta las consideraciones siguientes:

- El mago Aquilino y el ventrílocuo Bonifacio son muy famosos, y no están dispuestos a participar si no tienen papeles destacados (sea como cabeza de cartel o como segunda figura).
- El empresario no considera que un espectáculo de pulgas amaestradas sea apropiado para cabeza de cartel.
- El humorista Eladio se está promocionando, por lo que está dispuesto a reducir un 30% su salario (en lugar de duplicarlo) si se le da la cabeza de cartel, y no cobraría de más por el segundo puesto.
- El domador de pulgas no está dispuesto a compartir cartel con alguien tan joven e inexperto como es Eladio.

Determina a quién conviene contratar como cabeza de cartel, a quién como segunda figura y a quién o quiénes como restantes artistas, así como la cantidad que conviene invertir en publicidad y si conviene o no realizar la gala extraordinaria para maximizar la taquilla esperada.

9.3 Problemas propuestos (para modelizar con conjuntos)

1. Una empresa de aviación dispone de un total de 55 aviones que puede destinar a 15 rutas turísticas diferentes. Cada ruta debe tener destinados entre tres y cinco aviones. La tabla siguiente recoge los ingresos que proporciona cada avión según en la ruta en la que se emplee y los costes que requiere.

Ruta	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}	R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}
Ingresos	5	8	21	7	17	13	6	9	10	12	11	6	19	12	14
Costes	2	3	15	4	9	9	2	6	8	7	7	4	10	8	6

Los costes totales no pueden exceder el presupuesto máximo que la empresa pretende dedicar a estas rutas, que es de 380 u.m.

Calcula el número de aviones que la empresa debe destinar a cada ruta para maximizar
281 sus beneficios.

   (a) ¿Agotará la empresa su presupuesto?
   (b) ¿Empleará todos sus aviones?

2. Una editorial quiere promocionar sus productos mediante un equipo de 30 vendedores que planea distribuir en 10 ciudades. Un estudio de mercado ha establecido el número de productos que puede vender diariamente de media cada comercial en cada ciudad, y que viene reflejado en la tabla siguiente, junto con los objetivos de ventas diarias previstos.

Ciudad	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	Objetivo
Ensayo	15	23	12	17	17.5	19.3	14	20	29	20.8	500
Diccionarios	3	4	4	2	3.5	5	1.8	4	4.2	1.7	100
Enciclopedias	1	2	0.5	2	2.1	2.9	3	2	0.7	0.2	40
Complemento	0				100			150		190	

Cada vendedor cobra 300 € diarios más un complemento por desplazamiento en función de la distancia de su destino, que viene indicado en la última fila de la tabla. La editorial quiere enviar al menos un vendedor a cada ciudad, y las previsiones de ventas suponen que no se van a enviar más de cinco a cada una. Determina cuántos vendedores conviene enviar
9 440 a cada ciudad para lograr los objetivos de ventas con coste mínimo.

¿Conviene emplear los 30 vendedores disponibles?

3. Una empresa distribuye su producto en 12 mercados cuyas funciones de demanda vienen dadas por la tabla siguiente:

mercado	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
demanda	$500-3p$	$400-4p$	$1000-6p$	$900-2p$	$600-7p$	$800-5p$
mercado	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}
demanda	$400-5p$	$900-3p$	$1200-8p$	$700-3p$	$800-4p$	$700-4p$

El coste unitario de producción es de 75 €, por lo que la empresa no está dispuesta a vender el producto a menos de 80 €. Por otra parte, el mercado M_4 no aceptaría un precio superior al del mercado M_3. Determina a qué precio conviene vender el producto en cada mercado para maximizar los beneficios con una demanda de al menos 4 000 unidades de producto. 97 807

¿En qué mercados se consiguen los mayores niveles de ventas?

4. Determina la composición de una dieta con coste mínimo que satisfaga los requisitos nutricionales determinados por la tabla siguiente: 3.91

	verdura	carne	aceite	arroz	fruta	leche	pescado	huevos	mín	máx
proteínas	0.7	21	0	6.5	1	4	20	13	80	120
hidratos	1.6	0	0	81	10	5	0	1	100	230
grasas	0.8	10	100	0.9	1	1.5	3	12	30	60
colesterol	0	0.07	0	0	0	0.003	0.08	0.41	0	1
vitamina C	107	0	0	0	9	0.5	0	0	150	1 000
hierro	0.5	1.5	0	0.8	0.4	0.1	2.2	2.2	12	20
fibra	1.8	0	0	1.4	2	0	0	0	8	15
calorías	20	200	900	364	50	47	98	162	2 000	3 000
coste	0.2	0.9	0.4	0.1	0.3	0.1	1.1	0.2		

5. Una empresa tiene cuatro bulldozers en cuatro garajes distintos, y tiene que llevar cada uno a una obra. La tabla siguiente indica las distancias en km de cada garaje a cada obra:

	Obra 1	Obra 2	Obra 3	Obra 4
Bulldozer 1	90	75	75	80
Bulldozer 2	35	85	55	65
Bulldozer 3	125	95	90	105
Bulldozer 4	45	110	95	115

Determina qué bulldozer conviene enviar a cada obra para que la distancia total recorrida sea la mínima posible.

6. Una empresa tiene seis furgonetas en seis puntos distintos de una ciudad, y tiene que enviar cinco de ellas a cinco puntos distintos donde son requeridas. La tabla siguiente contiene el coste de transporte de cada origen a cada destino. Determina cuáles de las seis furgonetas deben ser enviadas a cada uno de los cinco destinos para minimizar el coste de transporte.

	Destino A	Destino B	Destino C	Destino D	Destino E
Furgoneta 1	300	290	280	290	210
Furgoneta 2	250	310	290	300	200
Furgoneta 3	180	190	300	190	180
Furgoneta 4	320	180	190	240	170
Furgoneta 5	270	210	190	250	160
Furgoneta 6	190	200	220	190	140

7. Resuelve el problema del ejemplo 6 de la página 225 teniendo en cuenta además que la empresa dispone de un presupuesto de 5 000 u.m. para la producción y que las cantidades producidas tienen que ser enteras.

8. Una empresa fabrica tres artículos A, B y C en cuatro fábricas F_1, F_2, F_3 y F_4. Con el personal de que dispone, no puede cubrir la demanda prevista para el mes próximo, sino que le faltarían por cubrir 20 000 unidades de A, 30 000 unidades de B y 25 000 de C. Por eso se plantea contratar trabajadores temporales. La tabla de la izquierda contiene los artículos que puede fabricar cada trabajador en cada fábrica según que se dedique a la producción de A, a la de B o a la de C, mientras que la tabla de la derecha contiene el coste de fabricar cada producto en cada fábrica.

Productividad	A	B	C
F_1	150	210	175
F_2	200	190	170
F_3	190	130	200
F_4	150	170	190

Coste	A	B	C
F_1	30	50	35
F_2	25	40	40
F_3	30	45	45
F_4	35	50	30

La fábrica F_1 puede albergar hasta 110 nuevos trabajadores, y las restantes hasta 130, 100 y 70, respectivamente. Por otra parte, cada trabajador cobrará un sueldo de 800 € por su trabajo. Determina cuántos trabajadores conviene destinar a cada fábrica para la producción
2 980 625 de cada artículo para cubrir las unidades demandadas con coste mínimo.

(a) ¿Estarán todas las fábricas a máxima capacidad?

(b) ¿Le conviene a la empresa producir más cantidad de la que necesita de alguno de los artículos?

(c) ¿Qué sucedería con el coste mínimo si la empresa no quisiera excedentes?

9. Una empresa explota dos minas, con las que satisface la demanda de mineral de cinco ciudades. La tabla siguiente recoge el coste de transportar cada tonelada de mineral de cada mina a cada ciudad, junto con la capacidad máxima de extracción diaria de cada mina y la demanda diaria de cada ciudad, que es la máxima cantidad de producto que la empresa puede aspirar a vender.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Capacidad
M_1	20	30	15	20	40	850
M_2	25	30	45	10	35	800
Demanda	300	300	400	350	390	

Además, el coste de extracción de cada tonelada de mineral es de 30 u.m. en la mina 1 y de 50 u.m. en la mina 2. La empresa vende cada tonelada de mineral a un precio $p = 200 - 0.01T$, donde T es el total de toneladas diarias extraídas. Determina cuántas
202 275 toneladas debe servir desde cada mina a cada ciudad para maximizar el beneficio.

(a) ¿Le conviene extraer de cada mina la máxima cantidad posible?

(b) ¿Conviene atender toda la demanda de todas las ciudades?

10. Un autobús con 12 turistas ha llegado a un pequeño pueblo y, por un error de la agencia de viajes, no se han hecho las reservas en el único hotel de la localidad. Éste sólo dispone de 5 habitaciones individuales y 3 dobles libres. Cada turista trata de conseguir una habitación

por su cuenta, y la tabla siguiente contiene lo que está dispuesto a pagar por una habitación individual y por una doble compartida con alguno de sus compañeros de viaje.

Turista	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}
Individual	300	350	300	400	250	100	150	200	300	250	150	100
doble	150	100	100	200	200	90	90	150	0	200	90	100

Determina qué tipo de habitación conviene asignar a cada turista para maximizar los ingresos del hotel y qué turista tendrá que dormir en el autobús. 2 480

11. Una empresa se propone ampliar el capital y el número de trabajadores que destina a las diez fases de que consta la elaboración de su producto. La tabla siguiente recoge el incremento de producción que espera obtener por cada unidad de capital invertida y cada trabajador en cada fase, así como el presupuesto mensual disponible para cada una de las dos partidas y el salario que cobra cada trabajador según la fase de la que se encarga:

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	Presupuesto
Capital invertido	3	5	3	2	4	1	4	4	6	5	1 500
Trabajadores	2	6	1	3	3	4	2	1	5	4	1 000
Salario	10	15	5	11	16	12	20	6	17	15	

Además, en cada fase, es necesario destinar al menos 3 unidades monetarias de capital por cada trabajador que se destine a ella.

Por otra parte, el proceso de producción requiere que por cada trabajador que se contrate para la fase 10 se contraten exactamente 2 para la fase 9, y en la fase 3 hacen falta al menos 7 trabajadores. Determina qué aporte de capital y cuántos trabajadores requiere cada fase para maximizar la producción total. 9 159

12. El director de personal de una empresa debe organizar la plantilla de tres nuevas fábricas $F1$, $F2$ y $F3$. Para ello tiene contratados cinco directivos A, B, C, D y E, que debe asignar a las fábricas, de modo que dos de las fábricas tengan dos directivos y la restante uno, y falta todavía contratar a los trabajadores necesarios. Los salarios mensuales convenidos con los directivos, así como el de los trabajadores, dependen de su destino final según la tabla siguiente:

	$F1$	$F2$	$F3$
A	4 000 €	3 000 €	3 500 €
B	3 000 €	3 500 €	3 200 €
C	4 200 €	4 000 €	4 000 €
D	3 500 €	3 600 €	3 100 €
E	3 700 €	4 000 €	3 900 €
Trabajadores	1 000 €	900 €	1 100 €

Las fábricas 1 y 3 requieren 50 trabajadores por cada directivo, mientras que la fábrica 2 requiere 60 por cada directivo. Por otra parte, el director de personal debe tener en cuenta que B y C no están dispuestos a trabajar juntos y que A sólo está dispuesto a trabajar en la fábrica 2 si E trabaja con él.

Determina a qué fábricas hay que destinar cada directivo y cuántos trabajadores conviene contratar en cada una de ellas para minimizar el coste de la plantilla. 280 500

13. Una empresa se dispone a abrir cinco nuevas fábricas en otras tantas ciudades. Para ponerlas en funcionamiento, planea trasladar temporalmente a 100 técnicos de tres de sus fábricas, para que supervisen y asesoren a los nuevos trabajadores. Para este fin, tiene 30 técnicos disponibles en la primera fábrica, 50 en la segunda y 40 en la tercera. La tabla siguiente contiene el coste de transportar a cada técnico desde cada fábrica hasta cada ciudad. Cuando no hay ningún valor es porque el precio es demasiado elevado y la empresa ha descartado esa ruta.

Fábrica	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4	Ciudad 5
A	400	–	500	350	100
B	300	600	550	400	450
C	100	200	300	–	250

En la ciudad 1 se requiere la presencia de 10 técnicos, en la ciudad 2 de 20, en la ciudad 3 de 15, en la 4 de 30 y en la 5 de 25. Para transportar los técnicos de la fábrica B, la empresa ha llegado a un acuerdo con una compañía aérea que le hace un descuento especial, pero para ello es necesario que el número de técnicos transportados desde B hasta hasta la ciudad 2 no sea inferior a la media de los transportados desde B a los demás destinos.

Determina cuántos técnicos conviene transportar desde cada fábrica hasta cada ciudad para que el coste de los desplazamientos sea mínimo.

14. Una empresa pretende comprar cierto número de máquinas para aumentar la producción de tres productos en sus 8 fábricas. La tabla siguiente indica la cantidad diaria de cada producto que podría obtener por cada máquina en cada fábrica junto con la producción mínima de cada uno de ellos que necesita obtener:

Fábrica	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	Producción
P_1	5	7	9	13	11	10	10	9	500
P_2	15	18	9	5	7	8	7	3	400
P_3	2.3	1.1	11.6	3.4	5.2	8.7	3.3	11.2	240

Cada máquina tiene un coste de 600 €, pero sólo la primera fábrica está preparada para emplear estas nuevas máquinas. En la segunda, la tercera y la cuarta serán necesarios unos gastos de instalación de 90 € por máquina, y en las restantes de 100 € por máquina.

Los planes de trabajo de la empresa requieren la instalación de entre 2 y 10 máquinas por fábrica, y el presupuesto disponible permitiría comprar un máximo de 60 máquinas. Además, las posibilidades de la empresa para distribuir a su personal exigen instalar al menos el doble de máquinas en las cuatro primeras fábricas que en las cuatro últimas.

Determina cuántas máquinas conviene instalar en cada fábrica para cumplir los objetivos previstos de producción diaria con el coste mínimo.

15. Una empresa quiere contratar tres trabajadores autónomos para llevar a cabo tres operaciones de reforma en sus fábricas. Para ello ha contactado con cinco trabajadores a los que ha pedido un presupuesto y una estimación de los días que necesitarían para completar cada operación (bajo el supuesto de que sólo se encargan de una de ellas). Los datos están

en la tabla siguiente:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
Reforma 1	3 000	5 000	3 500	4 000	3 000
Reforma 2	3 200	4 500	3 600	2 000	2 900
Reforma 3	3 100	4 900	3 000	3 000	3 500
Tiempo (días)	54	30	60	50	20

No obstante, el trabajador T_4 estima que para llevar a cabo la reforma 1 necesitaría 20 días menos que para las restantes, dado que está especializado en esa clase de trabajo.

En realidad el trabajador T_2 está subcontratado por T_1, por lo que T_1 sólo aceptará un encargo si ya se le ha asignado previamente otro a T_2 (en otro caso enviaría a T_2 en su lugar).

La empresa estima que cada día que tarde en completarse cada una de las reformas le supone unas pérdidas de 50 u.m. y por ello no quiere que el tiempo total empleado en las reformas supere los 200 días.

Determina qué trabajador autónomo debe encargarse de cada reforma para minimizar el coste para la empresa. Expresa la solución de forma que pueda entenderla alguien no familiarizado con la programación matemática.

16. El jefe de personal de una empresa está estudiando cubrir una plaza de director de sucursal, dos de subdirector y cuatro de jefe de sección promocionando a 7 de sus empleados. En una preselección, ha valorado la aptitud para cada puesto de 8 empleados, con los resultados que muestra la tabla siguiente:

	Ansúrez	Benítez	Chávez	Díez	Enríquez	Fernández	González	Hernández
Director	6	7	5	7	5	4	7	6
Subdirector	8	7	7	7	5	5	8	8
Jefe	9	8	9	7	6	7	8	9

El empleado que ocupe el cargo de director no deberá tener una aptitud inferior a la media de las aptitudes de los seleccionados. Por otra parte, Benítez y Chávez se coordinan muy bien entre sí, por lo que si ambos fueran elegidos como subdirectores, esto se valoraría con 20 puntos extra en la aptitud global. Por otra parte, el jefe de personal quiere tener en cuenta las observaciones siguientes:

- Ansúrez y Díez no se llevan bien entre sí, por lo que no deberían ser promocionados a la misma categoría.
- Chávez no llevará de buen grado recibir órdenes directas de otro que no sea Benítez, por lo que no se le puede promocionar a un grado si Benítez no es promocionado a su vez al grado inmediatamente superior.

Determina qué candidato debe ocupar cada puesto para maximizar la aptitud en el cargo de los promocionados. Expresa la solución de forma que pueda entenderla alguien no familiarizado con la programación matemática.

17. Una cadena del sector de la restauración planea abrir un máximo de 10 nuevos locales distribuidos entre 6 ciudades. El coste mensual de cada local se estima en 2 000, 2 500 o 3 000 u.m. según que se trate de un bar, una cafetería o un restaurante, y la tabla siguiente recoge los ingresos mensuales esperados para cada tipo de local:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
Bar	5 000	4 500	4 000	3 500	3 000	3 000
Cafetería	2 000	4 500	4 500	4 000	2 000	3 600
Restaurante	3 000	2 000	5 000	2 500	3 500	2 000

Los recursos de la empresa no permitirían abrir más de cuatro cafeterías ni más de cuatro restaurantes en total. Por otra parte, un estudio del mercado ha arrojado las conclusiones siguientes:

- No conviene abrir más de un local de cada tipo en cada ciudad.
- No conviene abrir más de dos locales en cada ciudad.
- En la cuarta ciudad convendría situar los locales en un centro comercial, y no convendría que uno de ellos fuera un bar si no se abre también una cafetería o un restaurante.
- Si en la cuarta ciudad se abrieran tanto una cafetería como un restaurante, los beneficios esperados aumentarían en 4 000 u.m.

Determina qué tipo de locales conviene abrir en cada ciudad para lograr el máximo beneficio. Expresa la solución de forma que pueda entenderla alguien no familiarizado con la programación matemática.

18. Una empresa tiene fábricas en Madrid, Barcelona y Valencia, con capacidad para producir mensualmente 1 500 unidades de producto cada una. Actualmente está estudiando cómo repartir su producción entre cuatro distribuidores mayoristas, uno que se encargará de distribuir a su vez el producto en España, otro en el resto de Europa, otro en América y el cuarto en Asia. Como mínimo, debe suministrar 1 000 unidades de producto al distribuidor de España, 1 500 al de Europa, 900 al de América y 800 al de Asia. La tabla siguiente contiene el coste de transporte de cada unidad producida de cada fábrica a cada destino:

	España	Europa	América	Asia
Madrid	0	50	–	110
Barcelona	10	55	80	100
Valencia	15	60	70	90

El transporte a América se hace en barco, y por ello prefiere no exportar a este destino desde Madrid. Por otro lado, por razones logísticas la empresa quiere exportar desde Valencia al menos dos veces más producto a Asia que a América.

Por otra parte, la empresa se plantea la posibilidad de mejorar las instalaciones de sus fábricas. Esto requeriría en cada fábrica una inversión mensual de 400 u.m. y a cambio le permitiría aumentar su capacidad de producción mensual en 100 unidades de producto.

Determina qué cantidad conviene servir a cada distribuidor desde cada fábrica para minimizar los costes de transporte, así como si le conviene a la empresa mejorar las instalaciones de alguna o algunas de sus fábricas.

19. Una empresa tiene en estos momentos ocho pedidos personalizados, aunque no puede hacerse cargo de todos ellos, debido principalmente a que para atender a cada uno de ellos necesita ciertas cantidades de cuatro materias primas de las que dispone temporalmente de cantidades limitadas. La tabla siguiente recoge las necesidades de cada materia prima para cada pedido, las existencias disponibles, así como el beneficio que cada pedido le reportaría:

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	Existencias
Materia prima 1	300	300	200	180	190	100	100	80	1 000
Materia prima 2	400	450	300	320	200	210	80	20	700
Materia prima 3	50	50	50	30	30	20	20	10	200
Materia prima 4	40	80	10	10	60	40	50	50	300
Beneficio	800	700	650	500	500	475	410	300	

Por una cuestión de imagen ante sus clientes potenciales, la empresa quiere hacerse cargo al menos de 4 de los pedidos. Además, el segundo pedido debe servirse antes que el primero, por lo que no es posible atender el primero si finalmente la empresa decide no hacerse cargo del segundo (pero sí que podría atender el segundo y no el primero).

Finalmente, la empresa tiene la opción de incurrir en un gasto extraordinario de 500 u.m. a cambio de incrementar en un 30% las reservas de cada una de sus materias primas.

Determina qué pedidos conviene que atienda la empresa para maximizar sus beneficios, así como si le conviene o no aumentar sus reservas de materias primas en las condiciones indicadas.

20. Una empresa distribuye tres productos en cuatro mercados: España, resto de Europa, América y Asia y se está planteando abrir nuevas sucursales. Más concretamente, la empresa tendría capacidad para abrir hasta 8 nuevas sucursales en España y hasta un máximo de 6 en cada mercado extranjero. El coste de apertura de cada nueva sucursal sería de 90 u.m. en España, de 100 u.m. en otros países europeos, de 120 u.m. en América y de 180 u.m. en Asia. Además, un estudio de los mercados americano y asiático recomienda que el número de sucursales que se abran en uno de ellos no exceda al doble de las que se abran en el otro.

La tabla siguiente recoge el beneficio anual que le reportaría cada nueva surcursal para cada producto, así como el beneficio que, como mínimo, quiere conseguir la empresa para cada producto con las nuevas sucursales:

	España	Europa	América	Asia	
Producto 1	60	50	50	90	900
Producto 2	30	40	70	80	800
Producto 3	35	70	60	70	600

Por otra parte, la empresa podría reducir en 15 u.m. el coste de cada nueva sucursal comprando los locales a otra empresa que está interesada en desprenderse de ellos, pero el acuerdo que le propone exige que le compre al menos dos locales en cada mercado.

Determina cuántas nuevas sucursales le conviene abrir a la empresa en cada mercado para obtener los beneficios deseados con coste mínimo, así como si le conviene o no adquirir los locales de la otra empresa.

21. Un directivo tiene a su cargo 10 trabajadores que quiere que se ocupen de tres nuevos proyectos que deben desarrollarse este mes. Para ello ha valorado la eficacia de cada trabajador con una puntuación entre 1 y 10:

TRABAJADOR	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}
EFICACIA	10	9	9	8	7	7	6	6	5	4

No obstante, la experiencia profesional del trabajador T_6 hace que su eficacia si estuviera en el primer proyecto sería 5 unidades mayor.

Por el contrario, el directivo considera que T_{10} no está suficientemente capacitado para ocuparse del primer proyecto.

Cada proyecto debe contar con 3 o 4 trabajadores, y cada trabajador puede ocuparse de a lo sumo dos proyectos.

La tabla siguiente contiene la remuneración adicional que recibiría cada trabajador por ocuparse de cada proyecto:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}
P_1	302	281	287	253	242	240	205	203	191	102
P_2	323	290	295	272	257	208	192	203	151	93
P_3	307	305	281	260	253	224	209	203	181	135

Los proyectos cuentan con presupuestos respectivos de 817, 750 y 935 euros.

Determina qué trabajadores deben asignarse a cada proyecto para maximizar la eficacia total de la asignación teniendo en cuenta que T_1 no aceptará participar en un proyecto si no le acompaña T_2 o T_3.

22. Inés tiene que realizar un viaje en avión y puede facturar una maleta y llevar además una bolsa de equipaje de mano. Después de incluir lo impresicindible, le quedan 5 kg. disponibles en la maleta y 3 kg. en la bolsa, y tiene que elegir qué objetos incluye en ellas. Las posibilidades vienen dadas por la tabla siguiente, en la que se incluye la utilidad de coger cada objeto.

	Peso	Utilidad
Una botella de vino	1.5	10
Un frasco de perfume	0.5	5
Un ordenador portátil	2.5	15
Un disco duro externo	0.5	8
Una carpeta con documentos de trabajo	0.9	40
Una novela	0.8	20
Un cómic	0.5	15
Cajas de bombones	0.4	3

Los documentos de trabajo, la novela y el cómic tienen 10 unidades más de utilidad si se llevan en la bolsa de mano, pues en tal caso Inés puede usarlos durante el vuelo. Además hay que tener en cuenta que:

- La ley no permite llevar líquidos en las bolsas de mano.

- La botella de vino y el frasco de perfume son posibles regalos para su madre, de modo que como mucho tendrá que llevar uno de los dos.
- Las cajas de bombones son posibles regalos para otros cuatro familiares, con lo que tampoco tendría sentido llevar más de cuatro.
- Los documentos de trabajo son imprescindibles.
- Aparte de dichos documentos, Inés quiere llevar seguro algo de lectura, pero sólo una cosa.
- Sería tonto coger el disco duro si no se lleva el portátil.

Determina qué objetos hay que llevar en la maleta y cuáles en la bolsa para maximizar la utilidad.

23. El profesor de gimnasia de un colegio tiene que organizar un equipo de fútbol para competir con el colegio del barrio vecino. Dispone únicamente de siete niños interesados, pero el equipo del otro colegio sólo cuenta con seis, así que tiene de descartar a uno. Tras examinar sus habilidades, les ha asignado una aptitud entre 0 y 10 para jugar como porteros, defensas o delanteros (como el número de jugadores es reducido, no considera la figura de mediocampista), tal y como indica la tabla siguiente:

	Albertito	Benito	Casimirito	Danielito	Emilito	Felipito	Gerardito
Delantero	0	0	4	2	8	7	6
Defensa	5	7	6	8	9	0	0
Portero	4	5	5	0	0	0	0

Una valoración de 0 indica que el profesor no lo considera apto para esa posición. Determina la alineación que maximiza la aptitud total del equipo teniendo en cuenta las consideraciones adicionales siguientes:

(a) El número de defensas debe estar entre 2 y 3.

(b) El profesor ha observado que Emilito y Gerardito se compenetran muy bien como delanteros, por lo que si ambos juegan en esa posición se consiguen dos unidades adicionales de aptitud.

(c) Gerardito no quiere participar en el equipo si no juega también su hermano Albertito.

Resuelve el problema con LINGO, indica quiénes jugarán como delanteros, quiénes como defensas y quién será el portero. Comprueba que la alineación que propones cumple todos los requisitos indicados. 42

24. Considera de nuevo el problema 17 de la página 231, pero bajo el supuesto de que hay tres empresas y seis trabajos, de modo que los presupuestos son:

Trabajo	1	2	3	4	5	6
Empresa A	20	50	45	40	55	35
Empresa B	25	40	30	30	60	50
Empresa C	22	43	37	28	55	45

La restricción tributaria sigue siendo que la facturación de ninguna de las empresas debe llegar a ser dos veces mayor que la de cualquiera de las otras.

25. El jefe de personal de una empresa ha entrevistado a diez candidatos para cubrir siete puestos de trabajo: res de categoría A y cuatro de categoría B. La tabla siguiente recoge la aptitud de cada candidato para cada categoría y su nivel de inglés:

Nombre	Aptitud para cat. A	Aptitud para cat. B	Nivel de Inglés
Argensola, Lupercio Leonardo	3	6	Alto
Asbaje, Juana Inés	5	6	Bajo
Böhl, Cecilia	7	5	Bajo
Cienfuegos, Beatriz	9	7	Alto
Dodgson, Charles	8	4	Alto
Fernández Flórez, Wenceslao	8	7	Bajo
García Alas, Leopoldo	4	8	Bajo
Larra Sánchez, Mariano	6	6	Bajo
Pollock, Mary	7	8	Alto
Saavedra Ramírez, Ángel	6	9	Bajo

Determina a qué candidatos conviene contratar para los puestos de cada categoría de modo que se maximice la aptitud total de los contratados, teniendo en cuenta que la categoría A requiere un nivel alto de inglés y que, para obtener una subvención del gobierno, la empresa
54 debe asignar al menos una mujer a cada categoría.

26. Un alumno se dispone a hacer el examen final de Matemáticas II. Éste consta de 10 preguntas, de las cuales las cuatro primeras pertenecen al examen de LINGO y las otras seis a la prueba de síntesis. La tabla siguiente contiene la puntuación de cada pregunta, una estimación de los minutos que el alumno necesitará para contestarla y una estimación (de 0 a 10) de la confianza que el alumno tiene en que su respuesta sea correcta.

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Puntuación	0.5	0.3	0.4	0.8	1	1	0.6	1.7	0.8	0.9
Tiempo	10	20	15	20	15	30	15	20	25	30
Confianza	3	6	10	7	2	5	7	9	1	10

Las preguntas 5 y 6 son alternativas (se puede hacer una de las dos, pero no ambas). Además el alumno observa que la pregunta 9 depende del resultado de la 8, de modo que si no responde a la 8 no puede hacer la 9. Para aprobar la asignatura, la nota final debe ser al menos de 5 puntos, pero la prueba de síntesis debe ser aprobada independientemente de la parte de LINGO (es decir, el alumno necesita sacar al menos 2.5 puntos de los 5 puntos que vale la prueba de síntesis).

Si la duración máxima del examen es de dos horas y media, determina qué preguntas debe abordar el alumno para que su confianza en aprobar sea máxima, así como cuánto tiempo conviene que dedique a repasar sus respuestas, teniendo en cuenta que cada minuto destinado a repasar aumenta su confianza en 10 unidades.

10 Problemas de interpretación

10.1 Ejemplos resueltos

Ejemplo 1 Una empresa dispone de un presupuesto de 500 € para fabricar cuatro artículos A, B, C y D. La tabla siguiente contiene el coste unitario de producción y el precio unitario de venta:

Artículo	A	B	C	D
Coste	5	3	2	2
Precio	8	6	6	4

La empresa se ha comprometido con un distribuidor de su producto a suministrarle al menos 100 unidades de los artículos A y B, al menos 300 unidades de C y D y al menos 50 unidades de A y D. Calcula la producción que maximiza los beneficios de la empresa. El modelo es:

$$
\begin{array}{rll}
\text{Max.} & 3x + 3y + 4z + 2w & \text{beneficio} \\
\text{s.a} & 5x + 3y + 2z + 2w \leq 500 & \text{presupuesto} \\
 & x + y \geq 100 & \text{compromisoAB} \\
 & z + w \geq 300 & \text{compromisoCD} \\
 & x + w \geq 50 & \text{compromisoAD} \\
 & x, y, z, w \geq 0 &
\end{array}
$$

a) Resuelve el problema con LINGO. Explica el resultado.

b) ¿Le convendría a la empresa aumentar su presupuesto hasta $1\,000$ €? Responde a las cuestiones
1600 siguientes considerando un presupuesto de $1\,000$ €.

c) ¿Qué cantidad le conviene a la empresa fabricar de cada artículo?

d) ¿Cuál es el beneficio máximo que puede conseguir?

e) Interpreta el coste reducido del artículo A.

f) Explica cómo se interpreta que el coste reducido del artículo B sea 0.

g) ¿Cómo variaría el beneficio de la empresa si el distribuidor se conformara con 95 unidades entre los artículos A y B? ¿Y si pidiera 110?

h) Interpreta el intervalo de sensibilidad de la variable y.

i) Interpreta el precio dual y el intervalo de sensibilidad del compromiso AD.

j) ¿Perjudicaría en algo a la empresa que el distribuidor exigiera 320 unidades entre los productos C y D?

k) Indica si la solución que proporciona LINGO nos permite concluir lo siguiente o no: "Si la empresa aumentara en una unidad la producción conjunta de C y D, el beneficio obtenido no variaría".

l) La empresa estudia la posibilidad de aumentar el precio de venta de alguno de sus productos. Si se decidiera por el producto C, ¿le convendría replantearse las cantidades a producir? ¿Y si aumentara 1.5 € el precio de venta del producto D?

m) El distribuidor informa a la empresa de que sólo le comprará el producto B si se lo vende a un precio de 3.5 € /unidad. ¿Le convendrá a la empresa servirle las mismas cantidades? ¿Y si el distribuidor acepta un precio de 4.5 € /unidad?

n) Si el presupuesto fuera de $2\,000$ €, ¿convendría producir más de 100 unidades entre los artículos A y B?

o) Modeliza el problema adecuado para determinar el presupuesto mínimo necesario para atender los compromisos con el distribuidor. ¿Cuál es dicho presupuesto mínimo?, ¿con qué producción se consigue? 900

SOLUCIÓN:

a) Resuelve el problema con LINGO. Explica el resultado.

El problema es infactible. La explicación se ve al resolver la pregunta siguiente, pues con un presupuesto de $1\,000$ euros ya hay solución óptima. La explicación es, pues, que con 500 € la empresa no tiene presupuesto suficiente para producir todo lo que se ha comprometido a producir.

b) ¿Le convendría a la empresa aumentar su presupuesto hasta $1\,000$ €?

Sí que le convendría, porque con 500 € no puede hacer nada.

Responde a las cuestiones siguientes considerando un presupuesto de $1\,000$ €. 1600

c) ¿Qué cantidad le conviene a la empresa fabricar de cada artículo?

Nada del primero, 100 unidades del segundo, 300 del tercero y 50 del cuarto.

d) ¿Cuál es el beneficio máximo que puede conseguir?

$1\,600$ €.

e) Interpreta el coste reducido del artículo A.

A la empresa no le conviene producir ninguna unidad del artículo A, pero, si se viera obligada a producirlo, por cada unidad que produjera, su beneficio empeoraría (disminuiría) en 2 €. (Más técnicamente: si cambiáramos la restricción $x \geq 0$ por $x \geq 1$, el nuevo beneficio sería 2 € menor.)

f) Explica cómo se interpreta que el coste reducido del artículo B sea 0.

Como la solución óptima supone producir 100 unidades del artículo B, si cambiáramos la restricción $y \geq 0$ por $y \geq 1$ la solución óptima sería la misma y el beneficio no cambiaría. Dicho de otro modo: si nos obligasen a producir al menos una unidad del artículo B, seguiríamos produciendo lo mismo que ahora, con lo que no cambiarían ni las cantidades producidas ni el beneficio.

Sería erróneo afirmar que si aumentara una unidad la cantidad producida del artículo B, el beneficio no variaría.

g) ¿Cómo variaría el beneficio de la empresa si el distribuidor se conformara con 95 unidades entre los artículos A y B? ¿Y si pidiera 110?

Miramos el precio dual de la segunda restricción, según el cual, por cada unidad que aumente la cantidad comprometida de A y B, el beneficio disminuirá 3 unidades.

Por lo tanto, si la cantidad requerida de A y B fuera de 95 o de 110, la variación del beneficio sería, respectivamente,

$$(-3)(-5) = 15 \qquad (-3) \cdot 10 = -30.$$

Así pues, si la cantidad comprometida pasara a ser 95 el beneficio mejoraría (o sea, aumentaría) en 15 €, mientras que si pasara a ser 110 empeoraría (disminuiría) en 30 €.

h) Interpreta el intervalo de sensibilidad de la variable y.

El beneficio unitario del artículo B es de 3 €/u.p. Para mantenerse en el intervalo de sensibilidad, este valor puede aumentar 3 € o disminuir 2 €. En otras palabras, el intervalo de sensibilidad es $[1, 6]$. Mientras el beneficio unitario se mantenga en este intervalo la solución óptima será la misma, es decir, seguiremos produciendo las mismas cantidades de los cuatro artículos (aunque el beneficio se modificará).

i) Interpreta el precio dual y el intervalo de sensibilidad del compromiso AD.

Por cada unidad adicional que la empresa se comprometiera a fabricar de los artículos A y D, el beneficio empeoraría (disminuiría) en 2 €.

La cantidad comprometida de los artículos A y D es de 50 unidades, y, para mantenerse en el intervalo de sensibilidad, esta cantidad puede aumentar 300 unidades o disminuir 50 unidades. En otras palabras, el intervalo de sensibilidad es $[0, 350]$. Mientras la cantidad comprometida se mantenga en este intervalo, las variables de la solución que ahora son 0 seguirán siendo 0. Concretamente, esto significa:

- Seguirá siendo $x = 0$, es decir, se seguirá sin producir el artículo A.
- Seguirá siendo $s_1 = 0$, es decir, la restricción presupuestaria seguirá saturada, es decir, se seguirá agotando el presupuesto.
- Seguirá siendo $s_2 = 0$, es decir, la restricción del compromiso AB seguirá saturada, es decir, se seguirá produciendo la mínima cantidad exigida por el compromiso.
- Seguirá siendo $s_4 = 0$, es decir, la restricción del compromiso AD seguirá saturada, es decir, se seguirá produciendo la mínima cantidad exigida por el compromiso.

j) ¿Perjudicaría en algo a la empresa que el distribuidor exigiera 320 unidades entre los productos C y D?

Cuando nos pregunten si va a afectar en algo la modificación de un término independiente (en este caso el de la tercera restricción), lo primero que hemos de mirar es si la restricción está saturada. En este caso no lo está, porque se nos exige producir 300 unidades y estamos fabricando 350 (esto se ve en la variable de holgura $s_3 = 50$). En general, si la restricción no está saturada y se sigue cumpliendo con el cambio propuesto, la solución óptima no cambiará. Es lo que sucede en nuestro caso: si nos exigen producir 320 unidades seguiremos produciendo lo mismo, porque ya nos conviene producir 350 sin que nos lo exijan.

k) Indica si la solución que proporciona LINGO nos permite concluir lo siguiente o no: "Si la empresa aumentara en una unidad la producción conjunta de C y D, el beneficio obtenido no variaría".

Sería un error concluir que esto es cierto basándose en que el precio dual de la tercera restricción vale 0. Lo que esto nos dice es que si nos obligaran a producir al menos 301 unidades de C y D en lugar de 300 como ahora, el beneficio no cambiará (ni la solución, tal y como hemos razonado en el apartado anterior). Ni el precio dual, ni ningún otro dato de la solución que proporciona LINGO, nos permite afirmar nada[7] de qué pasaría si aumentáramos la producción conjunta de C y D (es decir, si pasáramos de producir 350 unidades a 351).

l) La empresa estudia la posibilidad de aumentar el precio de venta de alguno de sus productos. Si se decidiera por el producto C, ¿le convendría replantearse las cantidades a producir? ¿Y si aumentara 1.5 € el precio de venta del producto D?

Un aumento en el precio de venta de un producto daría lugar al mismo aumento en el beneficio unitario, es decir, en el coeficiente correspondiente de la función objetivo. El intervalo de sensibilidad del coeficiente de z nos dice que el precio unitario del producto C puede aumentar cualquier cantidad y disminuir hasta 2 € sin que la solución óptima varíe, es decir, sin que varíen las cantidades producidas.

Por lo tanto, sea cual sea el aumento de precio, a la empresa no le convendrá replantearse las cantidades a producir, sino que le seguirá conviniendo producir lo mismo que ahora.

Para el producto D el intervalo de sensibilidad dice que mientras el beneficio unitario del producto B no aumente más de 3 € ni disminuya más de 2 € convendrá producir las mismas cantidades de los cuatro productos.

Como el aumento de 1.5 € queda dentro de este rango, concluimos que conviene producir las mismas cantidades, luego no conviene replantearse las cantidades a producir.

m) El distribuidor informa a la empresa de que sólo le comprará el producto B si se lo vende a un precio de 3.5 € /unidad. ¿Le convendrá a la empresa servirle las mismas cantidades? ¿Y si el distribuidor acepta un precio de 4.5 € /unidad?

Estamos hablando de reducir el precio (y por lo tanto el beneficio unitario) en 2.5 €. Miramos el intervalo de sensibilidad del coeficiente de B en la función objetivo, que nos dice que mientras el beneficio que proporciona cada unidad del producto B no disminuya más de 2 € ni aumente más de 3 €, las cantidades que conviene producir de todos los artículos serán las mismas.

Como la reducción del beneficio unitario que nos plantean es de más de 2 € y está fuera del intervalo, no podemos garantizar que convenga producir las mismas cantidades y habrá que resolver de nuevo el problema para determinar qué cantidades conviene producir.

En el segundo caso hablamos de una reducción de 1.5 €, que queda dentro del intervalo, luego en este caso convendrá servir las mismas cantidades de los cuatro productos.

[7] En realidad más adelante veremos que se puede deducir que la solución óptima es única y, sabiendo esto, si pasamos a otra solución en la que producimos más de la cantidad óptima, necesariamente será una solución peor, luego el beneficio disminuirá.

n) Si el presupuesto fuera de 2 000 €, ¿convendría producir más de 100 unidades entre los artículos A y B?

Se trata de estudiar las consecuencias de aumentar en 1 000 € el término independiente de la primera restricción. El intervalo de sensibilidad nos dice que mientras el presupuesto no disminuya más de 100 €, seguirá sin convenir la producción del producto A, se usará todo el presupuesto disponible, y no se servirán más que las cantidades comprometidas de A y B y de A y D.

Nos plantean que el presupuesto aumente 1 000 €, lo cual está dentro del intervalo, luego las cantidades producidas de A y B seguirán siendo únicamente las 100 exigidas, luego no convendrá producir más.

o) Modeliza el problema adecuado para determinar el presupuesto mínimo necesario para atender los compromisos con el distribuidor. ¿Cuál es dicho presupuesto mínimo?, ¿con
900 qué producción se consigue?

Se trata de buscar la producción que minimiza el coste sujeto a que se respeten los tres compromisos:

$$\begin{array}{rll} \text{Min.} & 5x+3y+2z+2w & \text{coste} \\ \text{s.a} & x+y \geq 100 & \text{compromisoAB} \\ & z+w \geq 300 & \text{compromisoCD} \\ & x+w \geq 50 & \text{compromisoAD} \\ & x,y,z,w \geq 0 & \end{array}$$

La solución óptima consiste en producir 100 unidades de B, 250 de C y 50 de D, con un coste de 900 €. Por lo tanto, el mínimo presupuesto necesario es de 900 €.

Ejemplo 2 Una empresa debe atender lo más rápidamente posible una demanda de 800 unidades de un producto A y 600 unidades de otro producto B, y para elaborarlos dispone de tres fábricas F_1, F_2 y F_3, la tercera de las cuales puede elaborar cualquier cantidad del producto B, pero no está preparada para elaborar el producto A. El problema siguiente determina las cantidades que le conviene elaborar en cada fábrica de cada producto para minimizar el tiempo requerido garantizando un beneficio mínimo de 5 900 €.

$$\begin{array}{rll} \text{Min.} & 5X_{1A}+14X_{1B}+7X_{2A}+6X_{2B}+7X_{3B} & \text{Tiempo (en minutos)} \\ \text{s.a} & X_{1A}+X_{1B} \leq 700 & \text{Producción } F_1 \leq \text{capacidad} \\ & X_{2A}+X_{2B} \leq 600 & \text{Producción } F_2 \leq \text{capacidad} \\ & X_{1A}+X_{2A} \geq 800 & \text{Producción } A \geq \text{compromiso} \\ & X_{1B}+X_{2B}+x_{3B} \geq 600 & \text{Producción } B \geq \text{compromiso} \\ & 3X_{1A}+12X_{1B}+9X_{2A}+5X_{2B}+3X_{3B} \geq 5\,900 & \text{Beneficio obtenido} \geq \text{exigido} \\ & X_{1A},\, X_{1B},\, X_{2A},\, X_{2B},\, X_{3B} \geq 0 & \end{array}$$

a) ¿Qué cantidades de cada producto conviene producir en la fábrica F_1?

b) ¿Cuántos minutos requerirá la producción total? ¿A cuántas horas equivalen?

c) Indica cuáles son las variables básicas y cuáles las no básicas de la solución óptima.

d) Interpreta el valor 25 que aparece en la línea:

Row	Slack or Surplus	Dual Price
CAPACIDAD_1	25.00000	0.000000

e) Si la empresa quisiera exigir un beneficio mínimo de 6 000 €, ¿aumentaría o disminuiría el tiempo necesario para la producción? ¿En cuánto?

f) Interpreta el coste reducido de la variable X1B.

g) En la solución falta el coste reducido de la variable X3B. Indica su interpretación. ¿Puedes deducir cuánto vale?

h) Si la empresa tuviera que aceptar un compromiso de 10 unidades adicionales, ¿cómo podría atenderlo más rápidamente, si fuera del producto A o del producto B?

i) Explica por qué es falsa la afirmación siguiente y corrígela: *"Como no estamos empleando toda la capacidad de la fábrica F_1, el precio dual de su restricción de capacidad es 0, lo que significa que podemos aumentar la cantidad producida en dicha fábrica sin alterar por ello el tiempo total empleado."*

j) Si la empresa pudiera reducir a 5 minutos el tiempo necesario para producir en F_2 una unidad del producto A, ¿le convendría replantearse las cantidades que debe de producir en cada fábrica?

k) Si el compromiso de producto B fuera de 500 unidades en lugar de 600, ¿seguiría siendo necesaria toda la capacidad de la fábrica F_2 o quedaría parte sin aprovechar?

l) ¿Qué beneficio podría obtener la empresa si pudiera aumentar en 40 unidades la capacidad de la fábrica F_2?

Responde las preguntas anteriores usando la información siguiente sobre la salida de LINGO:

Variable	Value	Reduced Cost
X1A	675.0000	0.000000
X1B	0.000000	0.2500000
X2A	125.0000	0.000000
X2B	475.0000	0.000000
X3B	125.0000	?

Row	Slack or Surplus	Dual Price
TIEMPO	7975.000	-1.000000
CAPACIDAD_1	25.00000	0.000000
CAPACIDAD_2	0.000000	2.500000
PRODUCCION_A	0.000000	-2.750000
PRODUCCION_B	0.000000	-4.750000
BENEFICIO	0.000000	-0.7500000

```
                    Objective Coefficient Ranges:

                          Current        Allowable        Allowable
      Variable        Coefficient         Increase         Decrease
           X1A           5.000000         3.000000        0.1111111
           X1B           14.00000         INFINITY        0.2500000
           X2A           7.000000        0.1111111         3.000000
           X2B           6.000000         1.666667        0.1111111
           X3B           7.000000      0.7692308E-01       1.666667

                        Righthand Side Ranges:
                          Current        Allowable        Allowable
           Row                RHS         Increase         Decrease
   CAPACIDAD_1           700.0000         INFINITY         25.00000
   CAPACIDAD_2           600.0000         50.00000         316.6667
  PRODUCCION_A           800.0000         14.28571         385.7143
  PRODUCCION_B           600.0000         33.33333         500.0000
     BENEFICIO           5900.000         1900.000         100.0000
```

Solución:

a) Conviene producir 675 unidades del producto A y ninguna del producto B.

b) Requiere 7 975 minutos, que equivalen a $7\,975/60 = 133$ horas.

c) Como hay cinco restricciones, tiene que haber 5 variables básicas, que son x_{1A}, x_{2A}, x_{2B}, x_{3B}, s_1 (donde s_1 es la variable del holgura de la primera restricción).

   Las variables no básicas son x_{1B}, s_2, s_3, s_4, s_5.

d) Significa que, aunque la fábrica 1 puede producir hasta 700 unidades de producto, conviene producir 25 unidades menos de esta capacidad máxima.

e) Miramos el precio dual de la quinta restricción, que es -0.75, lo que nos dice que por cada unidad que aumente el beneficio exigido, el tiempo de la producción empeorará (aumentará) 0.75 minutos.

   Si el beneficio exigido pasa de 5 900 a 6 000, es decir, si aumenta en 100, el tiempo requerido mejorará en $-0.75 \times 100 = -75$, es decir, empeorará (aumentará) en 75 minutos.

f) No conviene producir el producto B en la fábrica 1, pero si exigiéramos producir al menos una unidad de dicho producto en dicha fábrica, el tiempo requerido aumentaría en 0.25 minutos.

g) Dicho coste reducido es lo que aumentaría el tiempo requerido si cambiáramos la restricción $x_{1B} \geq 0$ por $x_{1B} \geq 1$, es decir, si nos viéramos obligados a producir al menos una unidad del producto B en la fábrica 1, y el coste reducido es 0, puesto que ya estamos produciendo 125 unidades de dicho producto en dicha fábrica, luego si estuviéramos obligados a producir una unidad no necesitaríamos cambiar la solución, luego el tiempo empleado sería el mismo.

h) Miramos los precios duales de las restricciones tercera y cuarta: el primero es -2.75, que nos dice que por cada unidad que aumente la cantidad comprometida del producto A, el tiempo de producción aumentará 2.75 minutos, y el de la cuarta es -4.75, que indica que por cada unidad que aumente la cantidad comprometida del producto B, el tiempo de producción aumentará 4.75 minutos.

   Por lo tanto, si aumentáramos la producción de A en 10 unidades, el tiempo requerido aumentaría en 27.5 minutos, mientras que si el aumento fuera del producto B el aumento de tiempo sería de 47.5 minutos. Por lo tanto, sería preferible aumentar la producción del producto A.

i) La afirmación es falsa porque el precio dual nulo nos dice que el tiempo empleado no cambiará si aumentamos la capacidad de la fábrica, no la cantidad producida en ella. No es lo mismo: en este caso, la capacidad es de 700 unidades, mientras que la producción es de 625 unidades. Es el 700 y no el 625 lo que podemos alterar sin que varíe el tiempo.

j) El intervalo de sensibilidad del coeficiente de x_{2A} en la función objetivo es $[4, 7.11]$. Esto significa que, mientras el tiempo de producción que requiere cada unidad de producto A en la fábrica F_2 no esté por debajo de los 4 minutos ni por encima de los 7.11 minutos, las cantidades que convendrá producir de ambos productos en ambas fábricas serán las mismas.

   Como 5 minutos está dentro del intervalo, las cantidades que convendrá producir serán las mismas, luego no convendrá replantearse la producción.

k) Miramos el intervalo de sensibilidad del término independiente de la cuarta restricción, según el cual, mientras la cantidad requerida del producto B no aumente más de 33.33 unidades ni disminuya más de 500 unidades, no convendrá producir el producto B en la fábrica F_1, se agotará la capacidad de producción de la fábrica F_2, se producirán únicamente las cantidades requeridas de ambos productos (y ninguna más) y el beneficio obtenido será el exigido (y no más).

   Como un descenso de 100 unidades queda dentro del intervalo , seguiremos empleando toda la capacidad de la fábrica 2 y no quedará parte sin aprovechar.

l) Miramos el intervalo de sensibilidad de la segunda restricción, según el cual, mientras la capacidad de la fábrica F_2 no aumente más de 50 unidades ni disminuya más de 316.6 unidades, no convendrá producir el producto B en la fábrica F_1, se agotará la capacidad de producción de la fábrica F_2, se producirán únicamente las cantidades requeridas de ambos productos (y ninguna más) y el beneficio obtenido será el exigido (y no más).

   Como un aumento de 40 unidades queda dentro del intervalo, el beneficio obtenido seguirá siendo el exigido, es decir, 5 900 €.

10.2 Problemas propuestos

1. Una empresa desea planificar la producción diaria de seis artículos para garantizar una producción mínima de 50 unidades de los tres de gama baja y de 20 unidades de los tres de gama alta sin exceder las 90 horas de trabajo disponibles. Además, por condiciones de mercado estima que venderá de uno de ellos el doble que de otro.

$$
\begin{array}{rll}
\text{Min.} & 5u + 8v + 5w + 3x + y + 2z & \text{coste} \\
\text{s.a} & u + v + w \geq 50 & \text{producción mínima gama baja} \\
 & x + y + z \geq 20 & \text{producción mínima gama alta} \\
 & x = 2z & \text{restricción de mercado} \\
 & 3.2u + v + 3.3w + 1.7x + 2.1y + z \leq 90 & \text{horas empleadas} \leq \text{disponibles} \\
 & u,\ v,\ w,\ x,\ y,\ z \text{ enteras} &
\end{array}
$$

430 (a) Determina las cantidades que le conviene producir de cada uno y el coste mínimo.

(b) ¿Agotará la empresa las horas disponibles?

Supón ahora que los productos no son contables y que, por lo tanto, tiene sentido considerar producciones fraccionarias. Vuelve a resolver el problema sin suponer que las variables sean enteras. Las preguntas siguientes se refieren a dicha solución.

(c) ¿Cuánto ha variado el coste mínimo?

(d) ¿Podríamos haber obtenido la solución óptima con variables enteras redondeando la solución sin variables enteras?

(e) ¿Agotará en este caso las horas de mano de obra disponibles?

(f) Interpreta el coste reducido y el intervalo de sensibilidad de la variable u.

(g) Interpreta el precio dual y el intervalo de sensibilidad de la restricción sobre las horas de mano de obra.

(h) Si la empresa quisiera exigir más producción, ¿qué aumentaría menos el coste, aumentar la producción de los artículos de gama alta o de gama baja?

(i) Explica, teniendo en cuenta la interpretación anterior, por qué es falsa esta afirmación: *Si la mano de obra disponible se redujera en* 10 *horas la solución óptima seguiría siendo la misma.* Di cinco cosas que podríamos decir de la solución óptima en ese caso en virtud del análisis de sensibilidad.

(j) Si uno de los costes de producción subiera una unidad, ¿podría cambiar la solución óptima? ¿Si subiera cuál, concretamente?

(k) Si la empresa pudiera reducir el coste de producción del primer artículo, ¿cuánto tendría que reducirlo al menos para que su producción pudiera ser conveniente?

(l) Si la empresa deseara producir al menos 55 unidades de gama baja, ¿de cuál de los tres artículos le convendría producir las 5 unidades adicionales?

(m) Si, por exigencias del mercado, la empresa se viera obligada a producir algunas unidades de los artículos 1 o 3, ¿cuál de los dos sería preferible producir?

2. Una empresa sirve un producto desde tres plantas de producción a dos mercados. El problema siguiente determina las cantidades x_{ij} de producto que debe servir desde cada planta i a cada mercado j para maximizar su beneficio teniendo en cuenta que la producción en cada planta está limitada por una restricción presupuestaria y que hay unas demandas mínimas que deben ser satisfechas:

$$\begin{array}{lll}
\text{Max.} & 10x_{11} + 8x_{12} + 6x_{21} + 8x_{22} + 3x_{31} + 7x_{32} & \text{Beneficio} \\
\text{s.a} & x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 450 & \text{Demanda del primer mercado} \\
 & x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 500 & \text{Demanda del segundo mercado} \\
 & 3x_{11} + 2x_{12} \leq 300 & \text{Presupuesto de la primera planta} \\
 & 2x_{21} + x_{22} \leq 550 & \text{Presupuesto de la segunda planta} \\
 & x_{31} + 4x_{32} \leq 400 & \text{Presupuesto de la tercera planta} \\
 & x_{11},\, x_{12},\, x_{21},\, x_{22},\, x_{31},\, x_{32} \geq 0 &
\end{array}$$

Responde a las preguntas particularizando las respuestas al problema concreto, evitando en tu conclusión final expresiones generales como "función objetivo" "variable de holgura", etc.

(a) Razona cuáles son las variables básicas y no básicas de la solución óptima.

(b) Razona si en algún mercado se sirve menos cantidad de la demandada.

(c) Si la empresa quisiera abrir una nueva línea de transporte, ¿qué le resultaría más favorable, empezar a servir su producto desde la planta 2 hasta el mercado 1 o desde la planta 3 al mercado 2?

(d) ¿Cómo afectaría al beneficio de la empresa que pudiera reducir la demanda del primer mercado hasta 425 unidades?

(e) Si el beneficio esperado por cada unidad servida desde alguna de las plantas a alguno de los mercados disminuyera 2 unidades, ¿debería la empresa replantearse las cantidades a servir?

(f) Razona cuáles de estos cambios podrían realizarse sin afectar al beneficio de la empresa:

a) aumentar 10 unidades la cantidad servida al mercado 2,

b) servir dos unidades más de la planta 3 al mercado 1,

c) aumentar a 600 unidades las 500 unidades que ahora deben servirse al segundo mercado.

(g) Interpreta el intervalo de sensibilidad del presupuesto de la tercera planta. Di todo lo que podemos afirmar, a partir de la información que da LINGO, sobre las características que tendrá de la nueva solución. (No se valorarán respuestas genéricas que no se refieran al contexto concreto de este problema.)

(h) Si la empresa pudiera aumentar en un 10% el presupuesto de una de sus plantas, ¿a qué mercado convendría destinar la producción adicional?

3. Una empresa fabrica un producto en dos fábricas F_1 y F_2 y lo vende en Madrid y en Valencia, donde hay una demanda de 150 y 250 kg de producto, respectivamente. Para llevarlo desde las fábricas hasta los destinos contrata a una empresa de transporte que sólo está dispuesta a hacer el servicio si la cantidad total transportada es de al menos 450 kg. El problema siguiente determina las cantidades de producto que conviene llevar desde cada fábrica a cada ciudad para minimizar el coste de transporte, teniendo en cuenta que cada fábrica tiene una capacidad máxima de producción.

$$
\begin{array}{rll}
\text{Min.} & 5x_{1M} + 8x_{1V} + 6x_{2M} + 7x_{2V} & \text{coste} \\
\text{s.a} & x_{1M} + x_{1V} \leq 100 & \text{kg servidos desde } F_1 \leq \text{capacidad de } F_1 \\
& x_{2M} + x_{2V} \leq 500 & \text{kg servidos desde } F_2 \leq \text{capacidad de } F_2 \\
& x_{1M} + x_{2M} \geq 150 & \text{kg servidos a Madrid} \geq \text{demanda en Madrid} \\
& x_{1V} + x_{2V} \geq 250 & \text{kg servidos a Valencia} \geq \text{demanda en Valencia} \\
& x_{1M} + x_{1V} + x_{2M} + x_{2V} \geq 450 & \text{cantidad total transportada} \geq \text{cantidad mínima} \\
& x_{1M},\, x_{1V},\, x_{2M},\, x_{2V} \geq 0 &
\end{array}
$$

(a) Indica el coste mínimo. ¿Cuántos kg de producto hay que transportar desde la fábrica
2850 F_1 a Madrid?, ¿y desde F_2 a Valencia?

(b) Interpreta los costes reducidos de las variables x_{1V} y x_{2M}.

(c) Interpreta el intervalo de sensibilidad de la variable x_{2V}.

(d) Interpreta el intervalo de sensibilidad de la capacidad de F_1.

(e) Si el coste de transportar cada kg de producto desde F_2 hasta Madrid aumentara 0.5 u.m., ¿convendría entonces reducir la cantidad transportada en ese trayecto?

(f) ¿Cuánto tendría que disminuir el coste de transporte desde F_1 hasta Valencia para que pudiera interesar ese recorrido?

(g) Razona si la afirmación siguiente es verdadera o falsa y corrígela en el segundo caso: *"El precio dual correspondiente a la restricción sobre la capacidad de F_2 vale 0, y esto significa que podríamos aumentar la cantidad servida desde F_2 sin que por ello se vieran afectados los costes, ya que aún no se ha agotado toda la capacidad de producción de F_2."*

(h) Razona si la afirmación siguiente es verdadera o falsa y corrígela en el segundo caso: *"El precio dual correspondiente a la restricción sobre la demanda de Madrid vale 0, y esto significa que si la demanda de Madrid aumentara una unidad el coste no se vería afectado, ya que la cantidad servida actualmente en Madrid ya cubre esa posible demanda adicional.*

(i) Si la empresa de transporte aumentara a 452 kg la cantidad mínima a transportar, ¿sería conveniente servir producto desde F_1 a Valencia?, ¿cuál sería el nuevo coste?

(j) Si disminuyera la demanda en Valencia un 20%, ¿la nueva solución óptima daría lugar a un excedente de producto en esta ciudad?

4. Una empresa dispone de 5 000 u.m. para invertir en la fabricación de dos productos A y B. Para ello puede hacer uso de dos plantas de producción P_1 y P_2, con unas capacidades máximas de 400 y 175 unidades, respectivamente. El problema siguiente determina las cantidades de cada producto que deben fabricarse en cada planta para maximizar el beneficio de la empresa, teniendo en cuenta que ya se ha hecho un encargo de 100 unidades de A y 200 de B.

$$
\begin{array}{rll}
\text{Max.} & 60x_{A1} + 80x_{A2} + 40x_{B1} + 45x_{B2} & \text{beneficio} \\
\text{s.a} & x_{A1} + x_{B1} \leq 400 & \text{producción en } P_1 \leq \text{capacidad de } P_1 \\
& x_{A2} + x_{B2} \leq 175 & \text{producción en } P_2 \leq \text{capacidad de } P_2 \\
& x_{A1} + x_{A2} \geq 100 & \text{producción de } A \geq \text{cantidad encargada} \\
& x_{B1} + x_{B2} \geq 200 & \text{producción de } B \geq \text{cantidad encargada} \\
& 40x_{A1} + 20x_{A2} + 10x_{B1} + 5x_{B2} \leq 5\,000 & \text{coste de fabricación} \leq \text{presupuesto} \\
& x_{A1},\, x_{A2},\, x_{B1},\, x_{B2} \geq 0 &
\end{array}
$$

(a) ¿Cuál es el beneficio máximo? ¿Qué cantidad del producto A debe fabricarse en la planta P_2?, ¿y de B en la planta P_1? 21875

(b) Interpreta los costes reducidos de las variables x_{A1} y x_{B2}.

(c) Interpreta el intervalo de sensibilidad de la variable x_{A2}.

(d) Indica cuatro características de la solución actual que seguirían siendo ciertas si la cantidad encargada del producto A aumentara en 10 unidades. ¿El beneficio aumentaría o disminuiría en tal caso?

(e) Si se duplicara el beneficio generado por cada unidad de B fabricada en P_1, ¿esto haría conveniente aumentar su producción en dicha planta?

(f) ¿Cuánto tendría que aumentar como mínimo el beneficio generado por cada unidad de A fabricada en P_1 para que pudiera interesar su fabricación en dicha planta?

(g) Explica por qué la interpretación siguiente sería incorrecta y corrígela: *"El precio dual correspondiente a la restricción sobre la cantidad encargada de B vale* 0*, y esto significa que podríamos reducir la cantidad producida de B sin que por ello se viera afectado el beneficio, ya que estamos produciendo bastante más cantidad de la encargada".*

(h) Si la empresa pudiera aumentar su presupuesto en 2 u.m., ¿interesaría la fabricación de A en P_1?, ¿cuál sería el nuevo beneficio, aproximadamente?

(i) Si aumentara la capacidad de P_2 en un 90%, ¿la nueva solución óptima agotaría la capacidad de dicha planta?

(j) ¿Podemos asegurar que con su presupuesto actual la empresa podría cubrir un aumento de 100 unidades en la demanda del producto B?, ¿y de 200 unidades?

5. Una empresa dispone de tres plantas en las que debe procesar 1 000 toneladas de una materia prima. El proceso tiene dos fases, y la tercera planta tiene una capacidad limitada para la segunda fase, luego parte de la materia prima que ha procesado en la fase 1 debe enviarla a las otras dos plantas para completar la fase 2. El problema siguiente determina cuántas toneladas de materia prima se deben enviar a la planta 1 (`P1`), cuántas se deben enviar a la planta 2 (`P2`), y cuántas de las enviadas a la planta 3 deben acabar de procesarse en cada una de las plantas (`P31`, `P32`, `P33`) para minimizar el coste de la producción teniendo en cuenta que, para que sean operativas, las plantas 1 y 2 deben trabajar conjuntamente al menos un total de 2 000 horas en la segunda fase.

Min.	$10P_1 + 15P_2 + 20P_{31} + 18P_{32} + 12P_{33}$	Coste
s.a	$P_1 + P_2 + P_{31} + P_{32} + P_{33} = 1\,000$	Toneladas a procesar
	$P_1 \leq 200$	Capacidad de P_1 para la primera fase
	$P_2 \leq 300$	Capacidad de P_2 para la primera fase
	$P_{33} \leq 100$	Capacidad de P_3 para la segunda fase
	$4(P_1 + P_{31}) + 2(P_2 + P_{32}) \geq 2\,000$	Horas empleadas en P_1 y P_2
	$P_1,\ P_2,\ P_{31},\ P_{32},\ P_{33} \geq 0$	

Responde a las preguntas particularizando las respuestas al problema concreto, evitando en tu conclusión final expresiones generales como "función objetivo" "variable de holgura", etc.

(a) Di cuáles son las variables básicas y no básicas de la solución óptima.

(b) Interpreta los DOS números de la línea

```
     Row    Slack or Surplus      Dual Price
HORAS12          200.0000          0.000000
```

(c) Si la planta 1 necesitara recibir al menos 3 toneladas de la planta 3, ¿cuánto variaría exactamente el coste de producción?

(d) Las estimaciones de los costes de procesado no son del todo fiables, y alguno de ellos podría ser en realidad una unidad mayor o menor que el previsto. ¿Podía eso alterar la solución más conveniente para la empresa? ¿Y el coste mínimo?

(e) ¿Cuál sería el coste de producción óptimo si la cantidad de materia prima a procesar fuera de 950 toneladas?

(f) En tal caso (si hubiera que procesar 950 toneladas), di todo lo que podemos afirmar, a partir de la información que da LINGO, sobre las características que tendrá la nueva solución. (No se valorarán respuestas genéricas que no se refieran al contexto concreto de este problema.)

(g) Si la empresa pudiera aumentar un 50% la capacidad para la primera fase de una de las dos primeras plantas, ¿de cuál sería más conveniente? ¿Tenemos garantías de que podrá aprovechar totalmente ese aumento?

6. Un empresario está estudiando la posibilidad de aportar capital a cuatro plantas de producción con objeto de hacerlas más eficientes. Actualmente la producción mensual de las cuatro plantas se realiza en 100 000 minutos, y se estima que cada unidad de capital invertida en cada planta puede reducir el tiempo en 3, 7, 4 y 5 minutos respectivamente. El problema siguiente determina qué cantidad de capital conviene invertir en cada planta para minimizar el tiempo total de producción sujeto a unas restricciones presupuestarias, exigiendo además que la utilidad de la inversión no sea inferior a 5 000 unidades y una condición técnica debido a que la producción de la primera planta está condicionada a la de la tercera:

$$
\begin{array}{rll}
\text{Min.} & 100\,000 - 3x - 7y - 4z - 5w & \text{Tiempo} \\
\text{s.a} & 4x + 5y + 2z + 3w \geq 5000 & \text{Utilidad} \\
 & x + y \leq 600 & \text{Presupuesto plantas 1 y 2} \\
 & z + w \leq 800 & \text{Presupuesto plantas 3 y 4} \\
 & x \geq 2z + 50 & \text{Restricción técnica} \\
 & x,\ y,\ z,\ w \geq 0 &
\end{array}
$$

Responde a las preguntas particularizando las respuestas al problema concreto, evitando en tu conclusión final expresiones generales como “función objetivo” “variable de holgura”, etc.

(a) Razona cuáles son las variables básicas y no básicas de la solución óptima.

(b) ¿Cuál es la utilidad que consigue el empresario con su inversión?

(c) Interpreta los costes reducidos de las variables z y w.

(d) Si el empresario pudiera disponer de más capital, ¿le convendría aumentar el presupuesto de las dos primeras plantas o el de las dos últimas?

(e) Interpreta el intervalo de sensibilidad del presupuesto de las plantas 1 y 2. No se valorarán respuestas genéricas que no se refieran a la situación concreta del problema.

(f) Actualmente, cada unidad de capital invertida en la planta 1 reduce el tiempo de producción en 3 minutos. Si este coeficiente de -3 disminuyera hasta -6, ¿convendría invertir más en dicha planta?

(g) Si el empresario dispusiera de 100 u.m. adicionales para las plantas 3 y 4, ¿en cuál de las plantas convendría invertirlas concretamente? ¿cuál pasará a ser el tiempo de producción?

7. Un inversor se plantea participar en cuatro posibles fondos de inversión, aportando a cada uno de ellos un capital x, y, z, w respectivamente. El problema siguiente determina el capital que conviene invertir en cada fondo para maximizar la rentabilidad esperada, teniendo en cuenta que el máximo capital disponible para invertir es de 100 u.m., que la inversión debe superar un índice mínimo referente a la responsabilidad social de la inversión (invertir en empresas ecológicas, que satisfagan criterios éticos, etc.). Además se imponen dos condiciones de diversificación que fijan un máximo que puede invertirse en los dos primeros fondos y un mínimo requerido en los dos últimos.

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & 0.1x + 0.2y + 0.15z + 0.21w & \text{Rentabilidad} \\ \text{s.a} & x + y + z + w \leq 100 & \text{Capital disponible} \\ & 0.7x + 0.3y + 0.15z + 0.01w \geq 50 & \text{Responsabilidad social} \\ & x + y \leq 70 & \text{Diversificación 1} \\ & z + w \geq 20 & \text{Diversificación 2} \\ & x,\ y,\ z,\ w \geq 0 & \end{array}$$

Responde a las preguntas particularizando las respuestas al problema concreto, evitando en tu conclusión expresiones generales como "función objetivo" "variable de holgura", etc.

(a) Interpreta la variable de holgura de la última restricción.

(b) ¿Qué rentabilidad podría conseguir el inversor si fuera menos exigente con la responsabilidad social de su inversión y se conformara con un índice mínimo de 49.5 unidades?

(c) Si el inversor quiere diversificar aún más su inversión y se plantea invertir al menos 0.1 u.m. en el segundo fondo, ¿cómo afectaría esto a la rentabilidad esperada?

(d) Interpreta el intervalo de sensibilidad del capital disponible.

(e) Si la rentabilidad esperada para el cuarto fondo resultara ser de 0.3, ¿convendría replantearse la inversión?

(f) Interpreta los costes reducidos de las variables X e Y.

(g) Interpreta los precios duales de las restricciones de diversificación. Explica por qué es cero el segundo.

(h) Si el inversor descubriera que la rentabilidad esperada del primer fondo es en realidad 0.09, ¿le convendría reducir el capital invertido en él?

(i) Interpreta el intervalo de sensibilidad del índice de responsabilidad social.

(j) Razona cómo afectaría a la rentabilidad de la inversión que el inversor quisiera aumentar su exigencia de responsabilidad social hasta 53 puntos.

(k) Si permitiéramos invertir 71 unidades entre los dos primeros fondos, ¿invertiríamos 0.5 unidades más en cada uno, o 1 más en el primero, o 1 más en el segundo o no podemos saberlo exactamente? ¿Mejoraría con ello la rentabilidad esperada?

(l) Razona si la afirmación siguiente es verdadera o falsa: "Como el coste reducido de la variable X es 0, podemos afirmar que invertir una unidad más en el primer fondo no afectará a la rentabilidad esperada".

8. Una cooperativa agrícola valenciana quiere distribuir su cosecha de 2 000 t de naranjas entre el consumo interno español y la exportación a tres países: Alemania, Francia y Gran Bretaña. El problema siguiente determina la distribución que maximiza el beneficio teniendo en cuenta que al menos 1 000 toneladas deben destinarse al consumo nacional (una parte V a la Comunidad Valenciana y otra E al resto de España) y que los costes de exportación no deben exceder del presupuesto destinado a tal fin. Además, por razones de mercado la cantidad distribuida en la Comunidad Valenciana debe ser el 10% de la distribuida en el resto de España y la exportación a Alemania y Gran Bretaña se beneficia de una subvención cuya cuantía interesa que no sea inferior a 800 u.m.

$$\begin{array}{rll} \text{Max.} & 195V + 190E + 220A + 200F + 210GB & \text{beneficio} \\ \text{s.a} & V + E + A + F + GB \leq 2000 & \text{toneladas cosechadas} \\ & V + E \geq 1\,000 & \text{consumo nacional} \\ & V = 0.1E & \text{distribución nacional} \\ & 23A + 5F + 27GB \leq 5000 & \text{coste exportación} \\ & 80A + 90GB \geq 800 & \text{subvención} \\ & V,\, E,\, A,\, F,\, GB \geq 0 & \end{array}$$

Responde a las preguntas siguientes particularizando la respuesta al problema concreto, evitando en tu conclusión final expresiones generales como “función objetivo”, “variable de holgura”, etc.

(a) Interpreta el coste reducido de la variable `GB`.

(b) La cooperativa se ha encontrado con que 30 toneladas de naranjas han resultado de calidad insuficiente para su venta por los canales de distribución previstos, pero puede venderlas a una fábrica de zumos por 5 000 u.m. ¿Cuánto va a perder en total a causa de este cambio?

(c) La cooperativa pidió la subvención porque necesitaba las 800 u.m. de financiación para emprender la producción, pero podría haberse propuesto conseguir una cuantía mayor. ¿Le habría convenido hacerlo?

(d) Razona si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas y si son falsas corrígelas:
   i. De las 1 000 toneladas disponibles para consumo nacional sólo se distribuyen 964.
   ii. El coste reducido 0 de la variable `V` indica que la cooperativa podría destinar más toneladas a la Comunidad Valenciana sin que ello afectara a su beneficio.

(e) Calcula los valores máximo y mínimo que puede tomar el presupuesto destinado a la exportación para permanecer en su intervalo de sensibilidad. Indica qué características concretas de la solución óptima seguirán cumpliéndose mientras dicho presupuesto no se salga del intervalo.

(f) Si la empresa pudiera aumentar en 5 u.m. el precio por tonelada en alguno de los cinco posibles destinos, ¿le convendría modificar las cantidades distribuidas? ¿Podría dar lugar esto a alguna variación en el beneficio óptimo?

(g) La cooperativa se plantea destinar 100 u.m. adicionales a financiar la exportación. ¿Cómo repercutiría ello en sus beneficios? ¿Le convendría utilizar las 100 u.m. o quedaría una parte sin gastar? ¿Con dicha financiación adicional convendría servir naranjas a Gran Bretaña?

9. Una empresa dispone de tres plantas industriales para la fabricación de dos productos A y B. A lo largo del mes próximo desea producir al menos 1 000 t de A y 2 300 t de B con coste mínimo. Cada planta tiene una capacidad máxima para la producción mensual que no puede ser rebasada. Por otra parte, en las plantas 1 y 2 hay un stock de una materia prima perecedera M que debe gastarse necesariamente el próximo mes (sin perjuicio de que, en caso de que sea necesario, pueda adquirir más cantidad). En cambio, en la planta 3 las reservas disponibles de una segunda materia prima N están limitadas y no es previsible que pueda conseguirse más durante el próximo mes. El problema siguiente determina las cantidades que le conviene producir a la empresa de cada producto en cada una de las plantas:

$$\begin{array}{lll}
\text{Min.} & 10A_1 + 17B_1 + 8A_2 + 20B_2 + 7A_3 + 15B_3 & \textit{Coste} \\
\text{s.a} & A_1 + A_2 + A_3 \geq 1000 & \textit{Producción mínima de A} \\
& B_1 + B_2 + B_3 \geq 2300 & \textit{Producción mínima de B} \\
& A_1 + B_1 \leq 2000 & \textit{Capacidad planta 1} \\
& A_2 + B_2 \leq 1200 & \textit{Capacidad planta 2} \\
& A_3 + B_3 \leq 800 & \textit{Capacidad planta 3} \\
& 5A_1 + B_1 \geq 6100 & \textit{Stock de M en la planta 1} \\
& 5A_2 + B_2 \geq 300 & \textit{Stock de M en la planta 2} \\
& 22A_3 + 10B_3 \leq 2000 & \textit{Reservas de N en la planta 3} \\
& A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 \geq 0 &
\end{array}$$

Responde a las preguntas siguientes particularizando las respuestas al ejemplo concreto, evitando en tu conclusión final expresiones generales como “función objetivo”, “variable de holgura”, “término independiente”, etc.

(a) ¿Qué cantidad de cada producto conviene producir en la planta 1? ¿Cuál es el coste total de la producción?

(b) Di cuáles son las variables básicas y cuáles las no básicas de la solución óptima.

(c) Razona qué efecto tendría sobre el coste que se estropearan 50 t del stock de M de la planta 1.

(d) Interpreta las dos cantidades de la fila

```
Row    Slack or Surplus   Dual Price
 M2         825.0000       0.000000
```

(e) Supongamos que, por razones de transporte, independientemente de la cantidad que produzca en la fábrica 1, la empresa necesita fabricar al menos 10 unidades del producto A bien en la fábrica 2 o bien en la 3. ¿En cuál sería más conveniente?

(f) Si la empresa pudiera aumentar la capacidad de producción de alguna de las fábricas, ¿de cuál sería preferible?

(g) Supón que la empresa consigue abaratar el proceso productivo del artículo B en la fábrica 2 de modo que el coste unitario pasa a ser de 6 u.m/t. ¿Convendría entonces replantearse las cantidades a producir en cada fábrica?

(h) Interpreta los tres números que aparecen en la línea siguiente, haciendo referencia al contexto concreto del problema:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
M1	6100.000	300.0000	100.0000

(i) Si la empresa pudiera aumentar sus reservas de la materia prima N a 3 000 unidades, ¿las usaría o seguiría usando la misma cantidad de que dispone actualmente?

(j) Si la empresa quisiera producir 50 unidades más del producto B, ¿podemos saber si hará falta más materia prima M en la planta 1 que ahora?, ¿y en la planta 2? ¿Cuánto variará el coste?

10. Un comerciante dispone de un stock de tres clases de aceite, en cantidades respectivas de 9 000, 15 000 y 12 000 litros y piensa transportar parte de los productos en dos camiones para su venta. El problema siguiente determina los litros de cada tipo de aceite que debe cargar en cada camión para obtener el máximo beneficio con la venta teniendo en cuenta que los camiones tienen una capacidad de 10 y 20 toneladas respectivamente y que, por razones de espacio, necesita sacar de su almacén al menos 8 000 litros del aceite 2 y otros 8 000 del aceite 3.

$$
\begin{array}{rll}
\text{Max.} & 150x_1 + 200x_2 + 80y_1 + 50y_2 + 40z_1 + 45z_2 & \text{Beneficio} \\
\text{s.a} & 0.92x_1 + 0.94y_1 + 1.1z_1 \leq 10\,000 & \text{Capacidad camión 1} \\
& 0.92x_2 + 0.94y_2 + 1.1z_2 \leq 20\,000 & \text{Capacidad camión 2} \\
& x_1 + x_2 \leq 9\,000 & \text{Stock aceite 1} \\
& y_1 + y_2 \leq 15\,000 & \text{Stock aceite 2} \\
& z_1 + z_2 \leq 12\,000 & \text{Stock aceite 3} \\
& y_1 + y_2 \geq 8\,000 & \text{Condición aceite 2} \\
& z_1 + z_2 \geq 8\,000 & \text{Condición aceite 3} \\
& x_1,\, x_2,\, y_1,\, y_2,\, z_1,\, z_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

(a) Resuelve el problema con LINGO.

(b) Razona cuáles son las variables básicas y las no básicas de la solución óptima.

(c) Razona si la afirmación siguiente es verdadera o falsa y en caso de ser falsa corrígela: “Como la holgura de la restricción `CONDICION2` es de 5744.681, esto significa que de los 8 000 litros de aceite 2 que hay que transportar, en realidad sólo se transportan 5 744.681”.

(d) Si el comerciante pudiera sustituir uno de los camiones por otro de mayor capacidad, ¿cuál sería preferible que sustituyera?

(e) Los dos camiones se dirigen a distribuidoras distintas. ¿Cómo afectaría a los beneficios que el comerciante tuviera que servir 100 litros de aceite 1 al primer distribuidor (el que recibe el primer camión)?

(f) Si, debido a un aumento de los costes de transporte, el beneficio que proporciona cada litro de aceite 3 transportado en el camión 2 pasara a ser de 30 u.m., ¿qué cantidad de aceite 3 convendría transportar en esas condiciones en el camión 2?

(g) Si el comerciante quisiera desprenderse de al menos 10 000 litros del aceite 3, ¿le convendría reducir la cantidad a transportar de aceite 1? ¿Cómo afectaría al beneficio esta decisión?

11. Un comerciante tiene un presupuesto de 1 000 € para reponer su stock de tres marcas de cerveza: *Mouha, San Ezequiel y Dumm.* De las dos primeras compra con y sin alcohol, mientras que *Dumm* sólo produce cerveza con alcohol. El problema siguiente determina los litros de cada tipo de cerveza de cada marca para maximizar los beneficios teniendo en cuenta que quiere gastar al menos 400 € en cerveza con alcohol y 350 en cerveza sin alcohol. Además, por ser la más vendida, quiere comprar al menos 200 litros más de marca San Ezequiel que de las otras dos.

$$\begin{array}{rll}
\text{Max.} & 0.70Mc + 0.60Ec + 0.56Dc + 0.70Ms + 0.30Es & \text{Beneficio} \\
\text{s.a} & Mc + 0.80Ec + 0.60Dc + 0.60Ms + 0.40Es \leq 1\,000 & \text{Presupuesto} \\
& Mc + 0.80Ec + 0.60Dc \geq 400 & \text{Con alcohol} \\
& 0.60Ms + 0.40Es \geq 350 & \text{Sin alcohol} \\
& Ec + Es - Mc - Ms - Dc \geq 200 & \text{San Ezequiel} \\
& Mc,\ Ec,\ Dc,\ Ms,\ Es \geq 0 &
\end{array}$$

(a) Resuelve el problema con LINGO.

(b) Razona cuáles son las variables básicas y las no básicas de la solución óptima.

(c) Razona si la afirmación siguiente es verdadera o falsa y en caso de ser falsa corrígela: “Como la holgura de la restricción `SIN` es de 250 €, esto significa que de los 350 € que el comerciante pretende gastar en cerveza sin alcohol, sólo le conviene gastar 250 €”.

(d) Interpreta el precio dual de la restricción correspondiente a la cerveza con alcohol.

(e) Observa que sólo conviene comprar cerveza con alcohol de una marca. Si el comerciante quisiera comprar 50 litros de otra marca, ¿de cuál le convendría más? ¿Cómo variarían sus beneficios en tal caso?

(f) El comerciante ha observado que si sube 0.30 € el precio de venta de una de las cervezas (y, por consiguiente, el beneficio que obtiene por litro), le conviene seguir comprando las mismas cantidades de cada tipo. ¿En cuál de las cervezas está pensando?

(g) Si el comerciante tuviera 400 € más de presupuesto, ¿cuánto pasaría a gastar en total en cerveza?, ¿y en cerveza con alcohol?, ¿y en cerveza sin alcohol?

12. Una empresa necesita producir 500 t de un material de construcción en el mínimo tiempo posible. Para ello puede combinar diferentes procesos de producción, cada uno de los cuales tiene su propio tiempo de ejecución, su propio coste y su propio consumo de materias primas. El problema siguiente determina las toneladas de material que debe producir con cada proceso para que las horas necesarias sean las mínimas sin exceder el presupuesto disponible ni los 2 000 kg disponibles de una materia prima.

$$
\begin{array}{rll}
\text{Min.} & 0.5x + 0.3y + 0.2z & \text{Horas} \\
\text{s.a} & x + y + z \geq 500 & \text{Producción total} \geq \text{producción requerida} \\
 & 3x + 5y + \;\; 7z \leq 2\,200 & \text{Coste} \leq \text{presupuesto} \\
 & 10x + y + 15z \leq 2\,000 & \text{kg de input} \leq \text{kg disponibles} \\
 & x,\, y,\, z \geq 0 &
\end{array}
$$

(a) Resuelve el problema con LINGO. Indica las cantidades a producir con cada proceso y las horas necesarias para la producción.

(b) Interpreta el 150 que aparece en la columna `Slack or Surplus`.

(c) Interpreta el coste reducido de las variables y, z.

(d) ¿Qué presupuesto adicional necesitaría la empresa para reducir el tiempo necesario en 10 horas?

(e) ¿Cómo se interpreta que el precio dual de la primera restricción sea negativo?

(f) Escribe el intervalo de sensibilidad del presupuesto e interprétalo en términos concretos referidos al problema específico.

(g) Razona a partir de la solución obtenida en (a) si en caso de que la producción requerida fuera de 450 t disminuiría el coste de la producción.