ALGEBRAS BOOLEANAS Y LÓGICA PROPOSICIONAL. ALGEBRAS DE HALMOS Y LÓGICA DE PREDICADOS.

J. CLIMENT VIDAL

Resumen. Estudiamos las álgebras Booleanas y la dualidad de Stone, que establece una relación (contravariante) entre las primeras y cierto tipo de espacios topológicos. A continuación, nos ocupamos del estudio de la lógica proposicional, demostrando el teorema de completud para el mismo, i.e., que las relaciones de consecuencia sintáctica y semántica coinciden. Además, demostramos el teorema de deducción de Herbrand-Tarski, definimos la noción de dualidad en la lógica proposicional, demostramos los teoremas de la forma normal conjuntiva y disyuntiva, el teorema de interpolación, la completud funcional del álgebra Booleana $\underline{2}$ y la equivalencia entre una categoría cociente de la categoría de preteorías proposicionales y la de las álgebras Booleanas.

Siguiendo a Halmos, mostramos que la teoría de los silogismos Aristotélicos se puede explicar desde la teoría de las álgebras monádicas de Halmos, que son álgebras Booleanas junto con un operador.

Seguimos con el estudio de las nociones imprescindibles del álgebra universal, para poder definir correctamente los términos y las fórmulas de la lógica de predicados de primer orden con igualdad. Entonces definimos la relación de satisfacción entre sistemas algebraicos, fórmulas y valoraciones, establecemos las nociones de modelo de un conjunto de fórmulas y de teoría de un conjunto de sistemas algebraicos; a continuación, exponemos la conexión de Galois contravariante (inducida por la relación de satisfacción) entre los retículos completos de los sistemas algebraicos (de una signatura dada) y de las fórmulas, definimos y estudiamos los conceptos de encajamiento elemental y equivalencia elemental, y, previa presentación de un sistema deductivo, demostramos el teorema de completud de Gödel-Mal'cev, que afirma la identidad entre la relación de consecuencia sintáctica y la relación de consecuencia semántica.

Índice

1. Introducción. 2
2. Algebras Booleanas. 3
2.1. Algebras Booleanas y homomorfismos. 3
2.2. Anillos Booleanos y homomorfismos. 9
2.3. Subálgebras Booleanas. 13
2.4. Congruencias, ideales y filtros en las álgebras Booleanas. 18
2.5. Productos de álgebras Booleanas. 26
2.6. Igualadores de los homomorfismos de álgebras Booleanas. 33
2.7. Álgebras Booleanas proyectivas e inyectivas. 35
2.8. La dualidad de Stone. 40
3. Lógica proposicional clásica. 47
3.1. La equivalencia de Lindenbaum-Tarski. 61
4. La teoría del silogismo. 65
5. Teoría de modelos. 70
5.1. Signaturas y álgebras. 71
5.2. Subálgebras. 78

Date: 24 de febrero de 2008.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary: ; Secondary:

5.3. Congruencias. 88
5.4. Extensión de una signatura por un conjunto. 94
5.5. Existencia del álgebra libre sobre un conjunto. 95
5.6. Algebras de Dedekind-Peano. 106
5.7. Operaciones polinómicas. 107
5.8. Signaturas de primer orden y sistemas algebraicos. 116
5.9. Homomorfismos de sistemas algebraicos. 116
5.10. Subsistemas algebraicos. 120
5.11. Congruencias sobre los sistemas algebraicos. 123
5.12. Lenguajes de primer orden. 127
5.13. El concepto de verdad de Tarski. 130
5.14. Extensiones y equivalencias elementales 136
6. Completud. 148
Referencias 150

1. Introducción.

En la primera sección estudiamos las álgebras Booleanas y los homomorfismos entre ellas, así como la equivalencia de esos conceptos con los de anillo Booleano y homomorfismo entre anillos Booleanos. Además, definimos las nociones de subálgebra Booleana, congruencia sobre un álgebra Booleana, etc., típicas de otras estructuras algebraicas. También demostramos los teoremas de Krull-Tarski, sobre la existencia de ideales o filtros maximales en las álgebras Booleanas no finales, el teorema de representación de Stone, la existencia de álgebras Booleanas libres, el teorema de dualidad de Stone, que establece una antiequivalencia entre la categoría algebraica de las álgebras Booleanas y la categoría topológica de los espacios Booleanos, y la existencia de compleciones de álgebras Booleanas.

En la segunda sección nos ocupamos del estudio de la lógica proposicional. Para ello definimos el conjunto de las fórmulas proposicionales relativas a un lenguaje proposicional, como el conjunto subyacente de un álgebra libre sobre un conjunto de variables proposicionales. Ello nos permitirá obtener un principio de demostración por inducción algebraica sobre las fórmulas proposicionales y un principio de definición por recursión algebraica sobre las mismas. A continuación definimos la noción de cálculo proposicional clásico, a partir de la cual obtenemos el operador de consecuencia sintáctica del que demostraremos que es un operador de clausura algebraico substitucional y una vez definida la noción de valoración y de modelo de un conjunto de fórmulas proposicionales, definimos la noción de consecuencia semántica entre conjuntos de fórmulas y fórmulas y demostramos que las relaciones de consecuencia sintáctica y semántica coinciden. Además, demostramos el teorema de deducción de Herbrand-Tarski, definimos la noción de dualidad en la lógica proposicional, demostramos los teoremas de la forma normal conjuntiva y disyuntiva, el teorema de interpolación, la completud funcional del álgebra Booleana $\underline{2}$ y la equivalencia entre una categoría cociente de la categoría de preteorías proposicionales y la de las álgebras Booleanas.

En la tercera sección, siguiendo a Halmos, mostramos que la teoría de los silogismos Aristotélicos se puede explicar desde la teoría de las álgebras monádicas de Halmos.

En la cuarta sección definimos el concepto de álgebra, que será un conjunto acompañado de operaciones internas, y de homomorfismo, que será una aplicación entre los conjuntos subyacentes de las álgebras que respete las operaciones de las mismas. También definimos las nociones de subálgebra de un álgebra, las álgebras libres sobre los conjuntos y las operaciones polinómicas sobre un álgebra. Además, una vez definido el concepto de sistema algebraico, que será un ágebra junto con relaciones, como pueda ser el conjunto de los números reales junto con las operaciones $+$, $\times$ y la relación $\leq$, definimos los términos y las fórmulas de la lógica de predicados de primer orden con igualdad y la relación de satisfacción entre sistemas algebraicos, fórmulas y valoraciones, establecemos las nociones de modelo de un conjunto de fórmulas y de teoría de un conjunto de sistemas algebraicos; a continuación, exponemos la conexión de Galois contravariante (inducida por la relación de satisfacción) entre los retículos completos de los sistemas algebraicos (de una signatura dada) y de las fórmulas, definimos y estudiamos los conceptos de encajamiento elemental y equivalencia elemental.

En la última sección, desarrollamos la teoría de la deducción para la lógica de predicados de primer orden y establecemos el teorema de completud de Gödel-Mal'cev, que afirma la coincidencia entre la relación de consecuencia semántica y la relación de consecuencia sintáctica.

2. Algebras Booleanas.

> But perhaps the greatest service the present account could render would stem from its stressing of its final conclusion that *mathematical thinking is, and must be, essentially creative*. It is to the writer's continuing amazement that ten years after Gödel's remarkable achievement current views on the nature of mathematics are thereby affected only to the point of seeing the need of many formal systems, instead of a universal one. Rather has it seemed to us to be inevitable that these developments will result in a reversal of the entire axiomatic trend of the late nineteenth and early twentieth centuries, with a return to meaning and truth. Postulational thinking will then remain as but one phase of mathematical thinking.
>
> *E. Post.*

En esta sección, una vez definidas las álgebras Booleanas y los homomorfismos entre ellas, demostramos la equivalencia de esos conceptos con los de anillo Booleano y homomorfismo entre anillos Booleanos. Además, definimos las nociones de subálgebra Booleana, congruencia sobre un álgebra Booleana, filtro, filtro maximal o ultrafiltro, ideal e ideal maximal de un álgebra Booleana; caracterizamos los monomorfismos y los epimorfismos y demostramos los teoremas de Noether para las álgebras Booleanas. También demostramos los teoremas de Krull-Tarski, sobre la existencia de ideales o filtros maximales en las álgebras Booleanas no finales, el teorema de representación de Stone, la existencia de álgebras Booleanas libres, el teorema de dualidad de Stone y la existencia de compleciones de álgebras Booleanas.

2.1. Algebras Booleanas y homomorfismos.

Definición 2.1. Un *álgebra Booleana* es un séxtuplo $\mathbf{A} = (A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ en el que A es un conjunto, $\vee$ y $\wedge$ operaciones binarias sobre A, $\neg$ una operación unaria sobre A y 0, $1 \in A$ tales que:

1. $\forall x \in A,\ x \vee x = x$ y $x \wedge x = x$.
2. $\forall x, y \in A,\ x \vee y = y \vee x$ y $x \wedge y = y \wedge x$.
3. $\forall x, y, z \in A,\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ y $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.
4. $\forall x, y \in A,\ x \vee (x \wedge y) = x$ y $x \wedge (x \vee y) = x$.
5. $\forall x, y, z \in A,\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ y $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
6. $\forall x \in A,\ x \wedge \neg x = 0$ y $x \vee \neg x = 1$.
7. $\forall x \in A,\ x \wedge 0 = 0$ y $x \vee 1 = 1$.

Ejemplo. Para cada conjunto A, $\mathbf{Sub}(A) = (\mathrm{Sub}(A), \cup, \cap, \complement_A, \varnothing, A)$ es un álgebra Booleana. En particular, para $A = 1$, $\mathbf{Sub}(1)$, denotado por $\mathbf{2}$, es un álgebra Booleana y para $A = \varnothing$, $\mathbf{Sub}(\varnothing)$, denotado por $\mathbf{1}$, también es un álgebra Booleana, a la que denominamos el álgebra Booleana *final*.

Mas adelante demostraremos que el álgebra Booleana $\mathbf{2}$ es un álgebra Booleana inicial, un coseparador y que, sobre todo, es un objeto esquizofrénico, i.e., que está dotado de una doble personalidad, topológica y algebraica, que conmutan entre sí, en el sentido de que las operaciones Booleanas son continuas.

Ejemplo. Sea A un conjunto. Entonces el conjunto de las partes de A finitas o cofinitas, i.e., el conjunto

$$\{\, X \subseteq A \mid \mathrm{card}(X) < \aleph_0 \,\vee\, \mathrm{card}(A - X) < \aleph_0 \,\},$$

junto con $\cup$, $\cap$, $\complement_A$, $\varnothing$ y A es un álgebra Booleana, a la que denotamos por $\mathbf{FC}(A)$.

Sea $\mathfrak{m}$ un cardinal transfinito. Demuéstrese que existe un álgebra Booleana $\mathbf{A}$ tal que $\mathrm{card}(A) = \mathfrak{m}$.

Ejemplo. Sea $\mathbf{R}$ un anillo y $\mathrm{Z}(\mathbf{R})$ el centro del mismo, i.e., el conjunto $\{\, x \in R \mid \forall y \in R\,(xy = yx)\,\}$. Entonces el conjunto $\mathrm{B}(\mathbf{R}) = \{\, e \in \mathrm{Z}(\mathbf{R}) \mid e^2 = e \,\}$, formado por los centrales idempotentes de $\mathbf{R}$, junto con las operaciones $\vee$, $\wedge$ y $\neg$, definidas, para cada $e, f \in \mathrm{B}(\mathbf{R})$, como:

1. $e \vee f = e + f - ef$.
2. $e \wedge f = ef$.
3. $\neg e = 1 - e$.

el neutro aditivo, 0, y el neutro multiplicativo, 1, del anillo $\mathbf{R}$, constituyen un álgebra Booleana.

Definición 2.2. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra Booleana. Entonces $\leq_{\mathbf{A}}$, o simplemente $\leq$, es la relación binaria en A definida como:

$$\leq_{\mathbf{A}} = \{\, (x, y) \in A^2 \mid x \wedge y = x \,\}.$$

Sea $\mathbf{A}$ un álgebra Booleana. Demuéstrese que $x \leq y$ si y sólo si $x \vee y = y$.

Proposición 2.3. *Sea $\mathbf{A}$ un álgebra Booleana y $x, y, z \in A$. Entonces:*

1. *$x \leq x$, i.e., la relación $\leq$ es reflexiva.*
2. *Si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x = y$, i.e., la relación $\leq$ es antisimétrica.*
3. *Si $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces $x \leq z$, i.e., la relación $\leq$ es transitiva.*
4. *$x \vee 0 = x$, i.e., 0 es neutro para $\vee$.*
5. *$x \wedge 1 = x$, i.e., 1 es neutro para $\wedge$.*
6. *$x \leq y$ si y sólo si $x \wedge \neg y = 0$.*
7. *$x = \neg y$ si y sólo si $x \wedge y = 0$ y $x \vee y = 1$.*
8. *$\neg\neg x = x$ (*Ley de la doble negación*).*
9. *$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$ (*Ley de De Morgan*).*
10. *$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$ (*Ley de De Morgan*).*
11. *$0 \leq x$ y $x \leq 1$.*
12. *$x \leq z$ e $y \leq z$ si y sólo si $x \vee y \leq z$.*
13. *$z \leq x$ y $z \leq y$ si y sólo si $z \leq x \wedge y$.*

Demostración. □

Definición 2.4. Sea $\mathbf{A}$ es un álgebra Booleana y $x, y \in A$. Entonces la *diferencia* de x e y, denotada por $x - y$, es $x \wedge \neg y$, la *diferencia simétrica* de x e y, denotada por $x \oplus y$, es $(x - y) \vee (y - x)$ y el *exponencial* de x e y, denotado por $x \Rightarrow y$, es $\neg x \vee y$.

En la proposición que sigue establecemos la generalización, a familias finitas, de las leyes de De Morgan.

Proposición 2.5. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra Booleana. Entonces dado un* $x \in A$*, un número natural* n *y una familia* $(x_k \mid k \in n+1) \in A^{n+1}$*, se cumple que:*

1. $x - \bigvee_{k \in n+1} x_k = \operatorname{ínf}_{k \in n+1} x - x_k \quad y \quad \neg(\bigvee_{k \in n+1} x_k) = \operatorname{ínf}_{k \in n+1} \neg x_k$.
2. $x - \operatorname{ínf}_{k \in n+1} x_k = \bigvee_{k \in n+1} x - x_k \quad y \quad \neg(\operatorname{ínf}_{k \in n+1} x_k) = \bigvee_{k \in n+1} \neg x_k$.

Demostración. □

Ahora establecemos la generalización, a familias finitas, de las leyes distributivas.

Proposición 2.6. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra Booleana. Entonces dado un número natural* n*, una familia* $(r_k \mid k \in n+1) \in \mathbb{N}^{n+1}$ *y una familia* $(x_{k,i} \mid (k,i) \in \bigcup_{k \in n+1} \{k\} \times (r_k + 1))$ *en* A *y siendo* $K = \prod_{k \in n+1} (r_k + 1)$*, se cumple que:*

1. $\operatorname{ínf}_{k \in n+1} \bigvee_{i \in r_k+1} x_{k,i} = \bigvee_{f \in K} \operatorname{ínf}_{k \in n+1} x_{k,f(k)}$.
2. $\bigvee_{k \in n+1} \operatorname{ínf}_{i \in r_k+1} x_{k,i} = \operatorname{ínf}_{f \in K} \bigvee_{k \in n+1} x_{k,f(k)}$.

Demostración. □

Una vez definido el concepto de álgebra Booleana, definimos los homomorfismos entre las mismas, la composición de los homomorfismos y establecemos las propiedades básicas de la composición.

Definición 2.7. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos álgebras Booleanas. Un *homomorfismo de álgebras Booleanas* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ es un triplo ordenado $(\mathbf{A}, f, \mathbf{B})$, abreviado como f y denotado por $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, en el que f es una aplicación de A en B, tal que, para cada $x, y \in A$:

$$\begin{aligned} f(x \vee y) &= f(x) \vee f(y). \\ f(x \wedge y) &= f(x) \wedge f(y). \\ f(\neg x) &= \neg f(x). \\ f(0) &= 0. \\ f(1) &= 1. \end{aligned}$$

A los homomorfismos de un álgebra Booleana en sí misma los denominamos *endomorfismos*.

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos álgebras Booleanas. Demuéstrese que una aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ precisamente si, para cada $x, y \in A$:

$$\begin{aligned} f(x \vee y) &= f(x) \vee f(y). \\ f(\neg x) &= \neg f(x). \end{aligned}$$

Proposición 2.8. *Si* $\mathbf{A} = (A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *es un álgebra Booleana, entonces* $\mathbf{A}^{\mathrm{op}} = (A, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ *es un álgebra Booleana, el álgebra Booleana* dual *de* $\mathbf{A}$.

Demostración. □

Definición 2.9. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos álgebras Booleanas. Un *antihomomorfismo de álgebras Booleanas* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ es un triplo ordenado $(\mathbf{A}, f, \mathbf{B})$, abreviado como f y denotado por $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, en el que f es una aplicación de A en B, tal que, para cada $x, y \in A$:

$$
\begin{aligned}
f(x \vee y) &= f(x) \wedge f(y).\\
f(x \wedge y) &= f(x) \vee f(y).\\
f(\neg x) &= \neg f(x).\\
f(0) &= 1.\\
f(1) &= 0.
\end{aligned}
$$

Proposición 2.10. *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *dos álgebras Booleanas y* f *una aplicación de* A *en* B. *Una condición necesaria y suficiente para que* f *sea un antihomomorfismo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{B}$ *es que sea un homomorfismo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{B}^{\mathrm{op}}$ *o de* $\mathbf{A}^{\mathrm{op}}$ *en* $\mathbf{B}$.

Demostración. □

Proposición 2.11. *Sean* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, $g\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ *y* $h\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ *tres homomorfismos de álgebras Booleanas. Entonces:*

1. *Siendo* $id_{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}, id_A, \mathbf{A})$, *se cumple que* $id_{\mathbf{A}}: \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$, *el homomorfismo* identidad *de* $\mathbf{A}$, *es un endomorfismo de* $\mathbf{A}$.
2. *Siendo* $g \circ f = (\mathbf{A}, g \circ f, \mathbf{C})$, *se cumple que* $g \circ f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$, *el homomorfismo* composición *de* f *y* g, *es un homomorfismo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{C}$.
3. (Asociatividad). *El diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] \arrow[drr, bend left=60, "(h\circ g)\circ f"] \arrow[drr, bend right=60, "h\circ (g\circ f)"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\
 & \mathbf{C} \arrow[r, "h"'] & \mathbf{D}
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

4. (Neutros). *Los diagramas:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "id_{\mathbf{A}}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{A} \arrow[d, "f"] \\
 & \mathbf{B}
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "id_{\mathbf{B}}"] \\
 & \mathbf{B}
\end{tikzcd}
$$

conmutan.

Demostración. 1. Puesto que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{id}_A^n = \mathrm{id}_{A^n}$, tenemos que $\mathrm{id}_{\mathbf{A}}: \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ es un homomorfismo, ya que, para $F \in \{\vee, \wedge, \neg, 0, 1\}$, el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
A^n \arrow[r, "\mathrm{id}_A^n"] \arrow[d, "F"'] & A^n \arrow[d, "F"] \\
A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"'] & A
\end{tikzcd}
$$

conmuta, siendo $n = 2$, si $F = \vee$ o $F = \wedge$, $n = 1$, si $F = \neg$ y $n = 0$, si $F = 0$ o $F = 1$.

2. Puesto que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $g^n \circ f^n = (g \circ f)^n$, y, por hipótesis, para $F \in \{\vee, \wedge, \neg, 0, 1\}$, los diagramas:

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "F"'] & B^n \arrow[d, "F"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} B^n \arrow[r, "g^n"] \arrow[d, "F"'] & C^n \arrow[d, "F"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

conmutan, entonces también conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "(g \circ f)^n"] \arrow[d, "F"'] & C^n \arrow[d, "F"] \\ A \arrow[r, "g \circ f"'] & C \end{tikzcd}$$

luego $g \circ f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ es un homomorfismo. □

Por cumplir las álgebras Booleanas junto con los homomorfismos entre ellas las propiedades establecidas en la proposición anterior, podemos afirmar que constituyen una categoría, concepto que definimos a continuación.

Definición 2.12. Una *categoría* $\mathbf{C}$ consta de los siguientes datos:

1. Un conjunto $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ de *objetos*, A, B, ...
2. Un conjunto $\mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ de *morfismos* f, g, ...
3. Una aplicación $\mathrm{d}_0\colon \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ que a cada morfismo $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ le asigna el objeto $\mathrm{d}_0(f)$, al que denominamos el *dominio* de f.
4. Una aplicación $\mathrm{d}_1\colon \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ que a cada morfismo $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ le asigna el objeto $\mathrm{d}_1(f)$, al que denominamos el *codominio* de f.
5. Una aplicación $\mathrm{id}\colon \mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ que a cada objeto $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ le asigna el morfismo id_A, al que denominamos el morfismo *identidad* de x.
6. Siendo $\mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \prod_{\mathrm{Ob}(\mathbf{C})} \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ el conjunto definido como:

$$\mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \textstyle\prod_{\mathrm{Ob}(\mathbf{C})} \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) = \{ (f, g) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C})^2 \mid \mathrm{d}_0(f) = \mathrm{d}_1(g) \},$$

una aplicación $\circ\colon \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \prod_{\mathrm{Ob}(\mathbf{C})} \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$, que a cada par $(f, g) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \prod_{\mathrm{Ob}(\mathbf{C})} \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ le asigna el morfismo $f \circ g$, al que denominamos la *composición* de f y g.

Si $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ es el conjunto de los morfismos de $\mathbf{C}$ cuyo dominio es A y cuyo codominio es B, i.e., el conjunto definido como:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B) = \{ f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C} \mid \mathrm{d}_0(f) = A \ \& \ \mathrm{d}_1(f) = B \}.$$

Convenimos que $f\colon A \longrightarrow B$ es sinónimo de $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$.

Estando estos datos sujetos a cumplir las siguientes condiciones:

1. Para cada $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, $\mathrm{d}_0(\mathrm{id}_A) = A$ y $\mathrm{d}_1(\mathrm{id}_A) = A$.
2. Para cada par $(f, g) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \prod_{\mathrm{Ob}(\mathbf{C})} \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$, $\mathrm{d}_0(f \circ g) = \mathrm{d}_0(g)$ y $\mathrm{d}_1(f \circ g) = \mathrm{d}_1(f)$.

3. Si $f\colon A \longrightarrow B$, $g\colon B \longrightarrow C$ y $h\colon C \longrightarrow D$ son tres morfismos, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, i.e., el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] \arrow[drr, bend left=60, "(h \circ g) \circ f"] \arrow[drr, bend right=60, "h \circ (g \circ f)"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h \circ g"] & \\ & C \arrow[r, "h"'] & D \end{tikzcd}$$

conmuta.

4. Si $f\colon A \longrightarrow B$, entonces $f \circ \mathrm{id}_A = f$ y $\mathrm{id}_B \circ f = f$, i.e., los diagramas:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "\mathrm{id}_B"] \\ & B \end{tikzcd}$$

conmutan.

En algunas ocasiones, para abreviar, denotaremos el conjunto de los objetos de una categoría $\mathbf{C}$, simplemente por $\mathbf{C}$, y si $A, B \in \mathbf{C}$, i.e., si $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, entonces denotaremos por $\mathrm{Hom}(A, B)$ o por $\mathbf{C}(A, B)$ el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ de los morfismos de A en B.

En lo que sigue, salvo indicación expresa de lo contrario, suponemos elegido un universo de Grothendieck $\boldsymbol{\mathcal{U}}$.

Corolario 2.13. *Las álgebras Booleanas* $\mathbf{A}$ *tales que* $A \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$*, junto con los homomorfismos entre ellas constituyen una categoría, a la que denotamos por* **Bool**.

Definición 2.14. Sea $\mathbf{C}$ una categoría y $f\colon A \longrightarrow B$ un morfismo de $\mathbf{C}$. Decimos que

1. El morfismo $f\colon A \longrightarrow B$ es un *monomorfismo* si, para cada objeto X de $\mathbf{C}$ y cualesquiera morfismos $g, h\colon X \longrightarrow A$, si el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] \arrow[rr, bend left, "f \circ g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ h"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $g = h$, i.e., si cuando $f \circ g = f \circ h$, entonces $g = h$; es por ello que a este tipo de morfismos también se los denomina *simplificables a la izquierda*. Denotamos al conjunto de los monomorfismos de A en B por $\mathrm{Mono}(A, B)$. Convenimos entonces que $f\colon A \rightarrowtail B$ significa que el morfismo $f\colon A \rightarrowtail B$ es un monomorfismo.

2. El morfismo $f\colon A \longrightarrow B$ es un *epimorfismo* si, para cada objeto Y de $\mathbf{C}$ y cualesquiera morfismos $g, h\colon B \longrightarrow Y$, si el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] \arrow[rr, bend right, "h \circ f"'] & B \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $g = h$, i.e., si cuando $g \circ f = h \circ f$, entonces $g = h$; es por ello que a este tipo de morfismos también se los denomina *simplificables a la derecha*. Convenimos entonces que $f\colon A \twoheadrightarrow B$ significa que el morfismo $f\colon A \longrightarrow B$ es un epimorfismo, y denotamos al conjunto de los epimorfismos de A en B por $\mathrm{Epi}(A, B)$.
3. El morfismo $f\colon A \longrightarrow B$ es un *isomorfismo* si existe un $g\colon B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ g = \mathrm{id}_B$. A los isomorfismos de un objeto en sí mismo los denominamos *automorfismos*.

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos álgebras Booleanas. Demuéstrese que si un homomorfismo $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es inyectivo, resp., sobreyectivo, entonces es un monomorfismo, resp., epimorfismo.

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos álgebras Booleanas. Demuéstrese que un homomorfismo $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es un isomorfismo precisamente si es un homomorfismo biyectivo.

Proposición 2.15. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra Booleana. Entonces* $\neg$ *es un isomorfismo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{A}^{\mathrm{op}}$ *y* $\neg \circ \neg = \mathrm{id}_{\mathbf{A}}$.

2.2. Anillos Booleanos y homomorfismos. A continuación definimos los conceptos de anillo Booleano y de homomorfismo entre tales anillos y demostramos que las categorías de álgebras Booleanas y de anillos Booleanos son *concretamente isomorfas*.

Definición 2.16. Un *anillo Booleano* es un séxtuplo $\mathbf{A} = (A, +, -, 0, \cdot, 1)$ tal que:

1. $\forall x, y, z \in A,\ x + (y + z) = (x + y) + z$.
2. $\forall x \in A,\ x + 0 = x$ y $0 + x = x$.
3. $\forall x \in A,\ x + (-x) = 0$ y $(-x) + x = 0$.
4. $\forall x, y \in A,\ x + y = y + x$.
5. $\forall x, y, z \in A,\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
6. $\forall x \in A,\ x \cdot 1 = x$ y $1 \cdot x = x$.
7. $\forall x, y, z \in A,\ x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ y $(y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x)$.
8. $\forall x \in A,\ x \cdot x = x$.

Proposición 2.17. *Si* $\mathbf{A}$ *es un anillo Booleano, entonces, para cada* $x, y \in A$, $x \cdot y = y \cdot x$, *i.e., es un anillo conmutativo y* $x + x = 0$, *luego es un anillo de característica* 2.

Demostración. $\square$

Definición 2.18. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos anillos Booleanos. Un *homomorfismo de anillos Booleanos* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ es un triplo ordenado $(\mathbf{A}, f, \mathbf{B})$, abreviado como f y denotado por $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, en el que f es una aplicación de A en B, tal que, para cada

$x, y \in A$:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)+f(y). \\ f(x\cdot y) &= f(x)\cdot f(y). \\ f(-x) &= -f(x). \\ f(0) &= 0. \\ f(1) &= 1. \end{aligned}$$

A los homomorfismos de un anillo Booleano en sí mismo los denominamos *endomorfismos.*

Proposición 2.19. *Sean* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$*,* $g\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ *y* $h\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ *tres homomorfismos de anillos Booleanos. Entonces:*

1. *Siendo* $id_{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}, id_A, \mathbf{A})$*, se cumple que* $id_{\mathbf{A}}\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$*, el homomorfismo* identidad *de* $\mathbf{A}$*, es un endomorfismo de* $\mathbf{A}$*.*
2. *Siendo* $g\circ f = (\mathbf{A}, g\circ f, \mathbf{C})$*, se cumple que* $g\circ f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$*, el homomorfismo* composición *de* f *y* g*, es un homomorfismo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{C}$*.*
3. (Asociatividad)*. El diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] \arrow[drr, bend left=60, "(h\circ g)\circ f"] \arrow[drr, bend right=60, "h\circ(g\circ f)"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\ & \mathbf{C} \arrow[r, "h"'] & \mathbf{D} \end{tikzcd}$$

conmuta.

4. (Neutros)*. Los diagramas:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "id_{\mathbf{A}}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{A} \arrow[d, "f"] \\ & \mathbf{B} \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "id_{\mathbf{B}}"] \\ & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

conmutan.

Corolario 2.20. *Los anillos Booleanos* $\mathbf{A}$ *tales que* $A \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$*, junto con los homomorfismos entre ellos constituyen una categoría, a la que denotamos por* **BRng**

Para establecer el teorema de Stone relativo a la coincidencia de los conceptos de álgebra Booleana y anillo Booleano, definimos las nociones de functor (covariante) de una categoría en otra, categoría concreta e isomorfismo concreto entre categorías concretas.

Definición 2.21. Dadas dos categorías $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, un *functor* de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$ es un triplo $F = (\mathbf{C}, (F_0, F_1), \mathbf{D})$, denotado por $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$, en el que F_0 es una aplicación de $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ en $\mathrm{Ob}(\mathbf{D})$, F_1 una aplicación de $\mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ to $\mathrm{Mor}(\mathbf{D})$, y que cumple las siguientes condiciones:

1. Los diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "\mathrm{d}_0"'] & \mathrm{Mor}(\mathbf{D}) \arrow[d, "\mathrm{d}_0"] \\
\mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_0"'] & \mathrm{Ob}(\mathbf{D})
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "\mathrm{d}_1"'] & \mathrm{Mor}(\mathbf{D}) \arrow[d, "\mathrm{d}_1"] \\
\mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_0"'] & \mathrm{Ob}(\mathbf{D})
\end{tikzcd}
$$

   conmutan.
2. El diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_0"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathrm{Ob}(\mathbf{D}) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_1"'] & \mathrm{Mor}(\mathbf{D})
\end{tikzcd}
$$

   conmuta.
3. El diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \prod_{\mathrm{Ob}(\mathbf{C})} \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_1^2"] \arrow[d, "\circ"'] & \mathrm{Mor}(\mathbf{D}) \prod_{\mathrm{Ob}(\mathbf{D})} \mathrm{Mor}(\mathbf{D}) \arrow[d, "\circ"] \\
\mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_1"'] & \mathrm{Mor}(\mathbf{D})
\end{tikzcd}
$$

   conmuta.

De ahora en adelante, para un functor $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$, convenimos en denotar mediante el mismo símbolo F a las dos aplicaciones F_0 y F_1.

Proposición 2.22. *Sean $F\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, $G\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ y $H\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ tres functores. Entonces:*

1. *Siendo $Id_{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}, (id_{\mathrm{Ob}(\mathbf{A})}, id_{\mathrm{Mor}(\mathbf{A})}), \mathbf{A})$, se cumple que $Id_{\mathbf{A}}\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$, el functor* identidad *de $\mathbf{A}$, es un endofunctor de $\mathbf{A}$.*
2. *Siendo $G \circ F = (\mathbf{A}, (G_0 \circ F_0, G_1 \circ F_1), \mathbf{C})$, se cumple que $G \circ F\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$, el functor* composición *de F y G, es un functor de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{C}$.*
3. (Asociatividad). *El diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "G \circ F"'] \arrow[rrd, bend left=60, "(H \circ G) \circ F"] \arrow[rrd, bend right=60, "H \circ (G \circ F)"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "G"] \arrow[dr, "H \circ G"] & \\
& \mathbf{C} \arrow[r, "H"'] & \mathbf{D}
\end{tikzcd}
$$

   conmuta.

4. (Neutros). *Los diagramas:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "Id_{\mathbf{A}}"] \arrow[dr, "F"'] & \mathbf{A} \arrow[d, "F"] \\ & \mathbf{B} \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "F"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "Id_{\mathbf{B}}"] \\ & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

conmutan.

Definición 2.23. Decimos que un functor $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ es un *isomorfismo* de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$ si existe un functor $G\colon \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ tal que $G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$ y $F \circ G = \mathrm{Id}_{\mathbf{D}}$.

Demuéstrese que una condición necesaria y suficiente para que un functor $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ sea un isomorfismo es que tanto F_0 como F_1 sean isomorfismos.

Definición 2.24. Decimos que un functor $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ es *fiel* si, para cada par de morfismos $f, g\colon A \longrightarrow B$ de $\mathbf{C}$, si $F(f) = F(g)$, entonces $f = g$; que es *pleno* si, para cada morfismo $u\colon F(A) \longrightarrow F(B)$ de $\mathbf{D}$, existe un morfismo $f\colon A \longrightarrow B$ tal que $F(f) = u$; y que es *esencialmente sobreyectivo* si, para cada $D \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$, existe un $C \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ tal que D y $F(C)$ son isomorfos. Por último, decimos que el functor F es una *equivalencia* si es fiel, pleno y esencialmente sobreyectivo.

Demuéstrese que todo isomorfismo de categorías es una equivalencia entre las mismas.

Definición 2.25. Sea $\mathbf{K}$ una categoría. Una *categoría concreta* sobre $\mathbf{K}$ es un par $(\mathbf{C}, G)$ en el que $\mathbf{C}$ es una categoría y $G\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{K}$ un functor fiel. Un *functor concreto* $F\colon (\mathbf{C}, G) \longrightarrow (\mathbf{D}, H)$ sobre $\mathbf{K}$ de la categoría concreta $(\mathbf{C}, G)$ sobre $\mathbf{K}$ en la categoría concreta $(\mathbf{D}, H)$ sobre $\mathbf{K}$ es un functor $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & & \mathbf{D} \arrow[dl, "H"] \\ & \mathbf{K} & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Decimos que el functor concreto $F\colon (\mathbf{C}, G) \longrightarrow (\mathbf{D}, H)$ sobre $\mathbf{K}$ es un *isomorfismo de categorías concretas* de $(\mathbf{C}, G)$ en $(\mathbf{D}, H)$ si F es un isomorfismo.

Proposición 2.26 (Stone)**.** *Las categorías concretas* $(\mathbf{Bool}, G_{\mathbf{Bool}})$ *y* $(\mathbf{BRng}, G_{\mathbf{BRng}})$ *sobre* $\mathbf{Set}$ *son concretamente isomorfas, i.e., hay un isomorfismo* $F\colon \mathbf{Bool} \longrightarrow \mathbf{BRng}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Bool} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G_{\mathbf{Bool}}"'] & & \mathbf{BRng} \arrow[dl, "G_{\mathbf{BRng}}"] \\ & \mathbf{Set} & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

2.3. Subálgebras Booleanas.

Definición 2.27. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos álgebras Booleanas y X un subconjunto de A.

1. Decimos que X es un *cerrado* de $\mathbf{A}$ si, para cada $x, y \in X$, $x \vee y, x \wedge y$ y $\neg x \in X$, y, además, $0, 1 \in X$. Al conjunto de los cerrados de $\mathbf{A}$ lo denotamos por $\mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.
2. Decimos que $\mathbf{B}$ es una *subálgebra Booleana* de $\mathbf{A}$, y lo denotamos por $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$, si $B \subseteq A$ y si la inclusión canónica, $\mathrm{in}_{\mathbf{B}} = (\mathbf{B}, \mathrm{in}_B, \mathbf{A})$, de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$ es un homomorfismo de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$. Si además $B \neq A$, decimos que $\mathbf{B}$ es una *subálgebra Booleana estricta* de A. Denotamos por $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ el conjunto de las subálgebras Booleanas de A.

Demuéstrese que una condición necesaria y suficiente para que una parte no vacía X de un álgebra Booleana $\mathbf{A}$ sea un cerrado de $\mathbf{A}$ es que para cada $x, y \in X$, $x \vee y$ y $\neg x \in X$ o que $x \wedge y$ y $\neg x \in X$.

Proposición 2.28. *Sea $\mathbf{A}$ un álgebra Booleana. Entonces existe una biyección, natural, entre el conjunto $\mathrm{Cl}(\mathbf{A})$, de los cerrados de $\mathbf{A}$ y el conjunto $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$, de las subálgebras Booleanas de $\mathbf{A}$. Además, esa biyección se extiende hasta un isomorfismo, cuando los conjuntos $\mathrm{Cl}(\mathbf{A})$ y $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ se consideran ordenados por la inclusión.*

Demostración. En efecto, la aplicación de $\mathrm{Cl}(\mathbf{A})$ en $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ que a un cerrado X de $\mathbf{A}$ le asigna la subálgebra Booleana $\mathbf{X} = (X, \vee\restriction X, \wedge\restriction X, \neg\restriction X, 0, 1)$ de $\mathbf{A}$ es una biyección entre ambos conjuntos. □

Proposición 2.29. *Sea $\mathbf{A}$ un álgebra Booleana y X un cerrado de $\mathbf{A}$. Entonces hay un álgebra Booleana $\mathbf{X}$, la* subálgebra Booleana de $\mathbf{A}$ asociada a X, *y un homomorfismo inyectivo $\mathrm{in}_{\mathbf{X}} \colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A}$, la* inclusión canónica *de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{A}$, tal que:*

1. $\mathrm{Im}(\mathrm{in}_{\mathbf{X}}) = X$.
2. (Propiedad universal) *Para cada homomorfismo $f \colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$, si $\mathrm{Im}(f) \subseteq X$, entonces existe un único homomorfismo g de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{X}$ tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{B} \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "f"] \\
\mathbf{X} \arrow[r, "\mathrm{in}_{\mathbf{X}}"'] & \mathbf{A}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposición 2.30. *Si $f \colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, entonces $\mathrm{Im}(f)$ es un cerrado de $\mathbf{B}$.*

Demostración. □

Haciendo uso de las dos proposiciones anteriores obtenemos la factorización de un homomorfismo a través de su imagen.

Proposición 2.31 (Noether)**.** *Sea $f \colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo. Entonces hay un único homomorfismo sobreyectivo f^s, el* sobreyectivizado *de f, de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{Im}(f)$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, two heads, "f^s"'] & \mathbf{B} \\
 & \mathbf{Im}(f) \arrow[u, tail, "in_{\mathbf{Im}(f)}"']
\end{tikzcd}$$

conmuta. Esta es la factorización a través de la imagen *de un homomorfismo de álgebras Booleanas. Además, si f es inyectivo, entonces f^s es inyectivo, luego biyectivo.*

Por otra parte, se cumple que para cada álgebra Booleana $\mathbf{C}$, cualquier homomorfismo $g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ y cualquier homomorfismo inyectivo $h\colon \mathbf{C} \rightarrowtail \mathbf{B}$, si el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbf{B} \\ & \mathbf{C} \arrow[u, tail, "h"'] \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces existe un único monomorfismo $t\colon \mathbf{Im}(f) \rightarrowtail \mathbf{C}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"] \arrow[ddr, two heads, "f^s"'] & & \mathbf{B} \\ & \mathbf{C} \arrow[ur, tail, "h"'] & \\ & \mathbf{Im}(f) \arrow[u, tail, "t"'] \arrow[uur, tail, "\mathrm{in}_{\mathbf{Im}(f)}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. De modo que $\mathbf{Im}(f)$ es, esencialmente, la mínima subálgebra de $\mathbf{B}$ a través del cual factoriza f.

Proposición 2.32. *Sea f un homomorfismo inyectivo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$, g un homomorfismo de $\mathbf{D}$ en $\mathbf{B}$ y h un homomorfismo inyectivo de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$. Entonces:*

1. *Una condición necesaria y suficiente para que exista un homomorfismo t de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{A}$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "t"] \arrow[d, tail, "h"'] & \mathbf{A} \arrow[d, tail, "f"] \\ \mathbf{D} \arrow[r, "g"'] & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

   conmute, es que $Im(g \circ h) \subseteq Im(f)$.

2. *Si $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ y $\mathbf{C} \leq \mathbf{D}$, entonces una condición necesaria y suficiente para que exista un homomorfismo t de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{A}$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "t"] \arrow[d, tail, "in_{\mathbf{C}}"'] & \mathbf{A} \arrow[d, tail, "in_{\mathbf{A}}"] \\ \mathbf{D} \arrow[r, "g"'] & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

   conmute, es que $g[C] \subseteq A$.

Además, tanto en el primero como en el segundo caso t está unívocamente determinado y recibe el nombre de birrestricción *de g a $\mathbf{C}$ y $\mathbf{A}$.*

Demostración. $\square$

Proposición 2.33. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra Booleana. Entonces el conjunto de los cerrados de* $\mathbf{A}$, $\mathrm{Cl}(\mathbf{A})$, *es un sistema de clausura algebraico sobre* A, *i.e., tiene las siguientes propiedades:*

1. $A \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.
2. *Si* $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$ *y* $\mathcal{C} \neq \varnothing$, *entonces* $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.
3. *Si* $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$, $\mathcal{C} \neq \varnothing$ *y si dados* $X, Y \in \mathcal{C}$, *hay un* $Z \in \mathcal{C}$ *tal que* $X \cup Y \subseteq Z$, *entonces* $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.

Demostración. □

Corolario 2.34. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra Booleana. Entonces la endoaplicación* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *del conjunto* $\mathrm{Sub}(A)$, *definida como:*

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(A) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \\ \quad X \quad \longmapsto \bigcap \{\, C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid X \subseteq C \,\} \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{Im}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}) \subseteq \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.
2. $\{\, X \in \mathrm{Sub}(A) \mid X = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \,\} = \mathrm{S}(\mathbf{A})$.
3. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es extensiva o inflacionaria, i.e., para cada* $X \in \mathrm{Sub}(A)$,
$$X \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X).$$
4. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es isótona, i.e., para cada* $X, Y \in \mathrm{Sub}(A)$, *si* $X \subseteq Y$, *entonces*
$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(Y).$$
5. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es idempotente, i.e., para cada* $X \in \mathrm{Sub}(A)$,
$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)).$$
6. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es algebraica, i.e., para cada* $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sub}(A)$, *si* $\mathcal{X} \neq \varnothing$ *y para cada* $X, Y \in \mathcal{X}$, *existe un* $Z \in \mathcal{X}$ *tal que* $X \cup Y \subseteq Z$, *entonces*
$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}\left(\bigcup \mathcal{X}\right) = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X).$$

Por consiguiente, para cada $X \subseteq A$, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ *es el mínimo cerrado de* $\mathbf{A}$ *que contiene a* X, *y lo denominamos el cerrado de* $\mathbf{A}$ generado *por* X. *Además, a la subálgebra Booleana de* $\mathbf{A}$ *canónicamente asociada a* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, *la denotamos por* $\mathbf{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ *y la denominamos, también, la subálgebra Booleana de* $\mathbf{A}$ *generada por* X.

Demostración. □

Proposición 2.35. *Si* $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$ *y* $X \subseteq B$, *entonces* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(X) = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$

Demostración. □

La proposición anterior nos autoriza, para un álgebra Booleana $\mathbf{A}$ y un subconjunto X de A, a escribir simplemente $\mathrm{Sg}(X)$ en lugar de $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

A continuación, introducimos unas nociones que nos permitirán obtener una descripción más *constructiva* de la subálgebra Booleana generada por un conjunto.

Definición 2.36. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra Booleana. Entonces:

1. Denotamos por $\mathrm{E}_{\mathbf{A}}$ el operador sobre $\mathrm{Sub}(A)$, definido como:
$$\mathrm{E}_{\mathbf{A}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(A) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \\ \quad X \quad \longmapsto X \cup (\vee[X^2] \cup \wedge[X^2] \cup \neg[X] \cup \{\, 0, 1 \,\}). \end{cases}$$

2. Si $X \subseteq A$, entonces denotamos por $(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X) \mid n \in \mathrm{N})$ la familia en $\mathrm{Sub}(A)$ definida por recursión como:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}^0_{\mathbf{A}}(X) &= X,\\ \mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X) &= \mathrm{E}_{\mathbf{A}}(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)),\ n \geq 0.\end{aligned}$$

Además, convenimos que:

$$\mathrm{E}^\omega_{\mathbf{A}}(X) = \textstyle\bigcup_{n\in\mathrm{N}} \mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X).$$

Proposición 2.37. *Si* $\mathbf{A}$ *es un álgebra Booleana y* $X \subseteq A$*, entonces* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{E}^\omega_{\mathbf{A}}(X)$.

Demostración. □

Proposición 2.38. *Sea* $\mathbf{A}$ *es un álgebra Booleana y* $X \subseteq A$*. Entonces:*

1. *Si* $X = \varnothing$, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \{\,0,1\,\}$.
2. *Si* $X \neq \varnothing$*, entonces, conviniendo que, para* $x \in A$, $x^1 = x$ *y* $x^{-1} = \neg x$*, tenemos que*

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \left\{ \bigvee_{k\in n+1} \operatorname*{\acute{i}nf}_{i\in r_k+1} x_{k,i}^{\epsilon_{k,i}} \;\middle|\; \begin{array}{c} n \in \mathbb{N},\ \forall k \in n+1\,(r_k \in \mathbb{N})\,\forall k \in n+1 \\ \forall i \in r_k+1\,(x_{k,i} \in X \ \ \&\ \ \epsilon_{k,i} \in \{\,-1,1\,\}) \end{array} \right\},$$

Demostración. □

Sea $\mathbf{A}$ es un álgebra Booleana y $X \subseteq A$. Demuéstrese que si $X \neq \varnothing$, entonces

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \left\{ \operatorname*{\acute{i}nf}_{k\in n+1} \bigvee_{i\in r_k+1} x_{k,i}^{\epsilon_{k,i}} \;\middle|\; \begin{array}{c} n \in \mathbb{N},\ \forall k \in n+1\,(r_k \in \mathbb{N})\,\forall k \in n+1 \\ \forall i \in r_k+1\,(x_{k,i} \in X \ \ \&\ \ \epsilon_{k,i} \in \{\,-1,1\,\}) \end{array} \right\}.$$

Demuéstrese que en el álgebra Booleana $\mathbf{Sub}(A)$, la subálgebra generada por $\{\,\{a\} \mid a \in A\,\}$ tiene como conjunto subyacente el conjunto

$$\{\, X \subseteq A \mid \mathrm{card}(X) < \aleph_0 \ \vee\ \mathrm{card}(A - X) < \aleph_0 \,\},$$

i.e., el conjunto de las partes de A finitas o cofinitas.

Proposición 2.39. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra Booleana,* X *un cerrado de* $\mathbf{A}$ *e* $Y \subseteq A$*. Entonces hay un cerrado* Z *de* $\mathbf{A}$ *tal que* $X \subseteq Z$ *y* $Z \cap Y = X \cap Y$ *y* Z *es maximal con dichas propiedades.*

Demostración. □

Definición 2.40. Sea $\mathbf{A}$ es un álgebra Booleana y $X \subseteq A$. Decimos que X es un *conjunto de generadores* de $\mathbf{A}$, o que X *genera* $\mathbf{A}$, si $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = A$ y que es un *conjunto de generadores minimal* de $\mathbf{A}$ si es un conjunto de generadores y si ningún subconjunto estricto de X genera $\mathbf{A}$. Además, decimos que $\mathbf{A}$ está *finitamente generada*, o que es de *generación finita*, si hay un subconjunto X de A tal que $\mathrm{card}\, X < \aleph_0$ y X genera $\mathbf{A}$.

Teorema 2.41 (Sikorski)**.** *Sea* $\mathbf{A}$ *es un álgebra Booleana que esté generada por un conjunto no vacío* X, $\mathbf{B}$ *un álgebra Booleana y* $f\colon X \longrightarrow B$ *tal que, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, cada* $(x_k \mid k \in n+1) \in X^{n+1}$ *y cada* $(\epsilon_k \mid k \in n+1) \in \{\,-1,1\,\}^{n+1}$*, si* $\mathrm{\acute{i}nf}_{k\in n+1} x_k^{\epsilon_k} = 0$*, entonces* $\mathrm{\acute{i}nf}_{k\in n+1} f(x_k)^{\epsilon_k} = 0$*. Entonces hay a un único homomorfismo* $g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *tal que* $g{\restriction}X = f$.

Demostración. □

Teorema 2.42 (Sikorski)**.** *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *dos álgebras Booleanas que estén generadas, resp., por los conjuntos no vacíos* X *e* Y *y sea* $f\colon X \longrightarrow Y$ *un isomorfismo tal que, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, cada* $(x_k \mid k \in n{+}1) \in X^{n+1}$ *y cada* $(\epsilon_k \mid k \in n{+}1) \in \{-1, 1\}^{n+1}$*,* $\operatorname{ínf}_{k\in n+1} x_k^{\epsilon_k} = 0$*, precisamente si* $\operatorname{ínf}_{k\in n+1} f(x_k)^{\epsilon_k} = 0$*. Entonces hay a un único isomorfismo* $g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *tal que la birrestricción de* g *a* X *e* Y *es* f*.*

Demostración. □

Proposición 2.43. *Si* $\mathbf{A}$ *es un álgebra Booleana finitamente generada, entonces cualquier conjunto de generadores de* $\mathbf{A}$ *contiene un subconjunto finito que también genera* $\mathbf{A}$*. Además,* $\mathbf{A}$ *tiene un conjunto de generadores minimal.*

Demostración. □

Proposición 2.44. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra Booleana y* X *un conjunto de generadores minimal de* $\mathbf{A}$*. Si* X *es infinito, entonces cualquier conjunto de generadores de* $\mathbf{A}$ *es tal que su cardinal es al menos el cardinal de* X*. En particular,* $\mathbf{A}$ *no puede ser un álgebra Booleana finitamente generada y dos conjuntos de generadores minimales cualesquiera de* $\mathbf{A}$ *tienen el mismo cardinal.*

Demuéstrese que si $\mathbf{A}$ es un álgebra Booleana que está generada por un conjunto infinito numerable, entonces cualquier conjunto infinito de generadores de $\mathbf{A}$ contiene un subconjunto infinito numerable que también genera $\mathbf{A}$.

Proposición 2.45. *Si* $\mathbf{A}$ *es un álgebra Booleana, entonces una condición necesaria y suficiente para que toda* ω*-cadena ascendente de subálgebras Booleanas de* $\mathbf{A}$ *sea estacionaria es que toda subálgebra Booleana de* $\mathbf{A}$ *esté finitamente generada.*

Demostración. □

Proposición 2.46. *Si* $\mathbf{A}$ *es un álgebra Booleana que está finitamente generada e* Y *es una subálgebra Booleana de* $\mathbf{A}$ *tal que* $Y \neq A$*, entonces hay una subálgebra de* $\mathbf{A}$ *distinta de* A *que contiene a* Y *y es maximal con esas propiedades.*

Demostración. □

Proposición 2.47. *Sean* $f, g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *dos homomorfismos y* X *un subconjunto de* A*. Si* f *y* g *coinciden en* X*, entonces también coinciden en* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$*.*

Demostración. □

Proposición 2.48. *Sea* f *una aplicación de un subconjunto* X *de un álgebra Booleana* $\mathbf{A}$ *en el conjunto subyacente de otra álgebra Booleana* $\mathbf{B}$*. Entonces hay a lo sumo una extensión* g *de* f *que sea un homomorfismo de* $\mathbf{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ *en* $\mathbf{B}$*.*

Demostración. □

Corolario 2.49. *Sean* $f, g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *dos homomorfismos y* X *un subconjunto de* A *tal que* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = A$*. Si* f *y* g *coinciden en* X*, entonces* $f = g$*.*

Demostración. □

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos álgebras Booleanas. Demuéstrese que hay a lo sumo un homomorfismo de $\mathbf{Sg}_{\mathbf{A}}(\varnothing)$ en $\mathbf{B}$. Además, si tal homomorfismo existe, demuéstrese que tiene como imagen la subálgebra de $\mathbf{B}$ generada por $\varnothing$.

Proposición 2.50. *Sea* f *una biyección de un conjunto de generadores* X *de un álgebra Booleana* $\mathbf{A}$ *en un conjunto de generadores* Y *de otra álgebra Booleana* $\mathbf{B}$*. Si* g *y* h *son extensiones homomorfas de* f *y de la inversa* f^{-1} *hasta* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$*, resp., entonces* g *es un isomorfismo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{B}$*, cuyo inverso es* h*.*

Demostración. □

Proposición 2.51. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo y* X *un subconjunto de* A *tal que* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = A$*. Entonces* f *es un monomorfismo precisamente si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. f *es inyectiva sobre* X*, i.e.,* $f{\restriction}X$ *es inyectiva.*
2. $(f{\restriction}X)^{-1}$ *tiene una extensión homomorfa.*

Proposición 2.52. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo de álgebras Booleanas,* $X \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$ *e* $Y \in \mathrm{Cl}(\mathbf{B})$*. Entonces* $f[X] \in \mathrm{Cl}(\mathbf{B})$ *y* $f^{-1}[Y] \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$*. En particular,* $\mathrm{Im}(f) \in \mathrm{Cl}(\mathbf{B})$

Demostración. □

Proposición 2.53. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo de álgebras Booleanas y* $X \subseteq A$*. Entonces* $f[\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)] = \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$*.*

Demostración. □

Proposición 2.54. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo de álgebras Booleanas y* X *un subconjunto de* A *tal que* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = A$*. Entonces* f *es un homomorfismo sobreyectivo precisamente si* $f[X]$ *es un conjunto de generadores de* $\mathbf{B}$*.*

Demostración. □

Definición 2.55. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra Booleana y $a \in A$. Decimos que a es un *no-generador* de $\mathbf{A}$ precisamente si, para cada $X \subseteq A$, si $\mathrm{Sg}(X \cup \{a\}) = A$, entonces $\mathrm{Sg}(X) = A$. Denotamos por $\mathrm{Frat}(\mathbf{A})$ el conjunto de los no-generadores de $\mathbf{A}$.

Proposición 2.56. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra Booleana. Entonces* $\mathrm{Frat}(\mathbf{A})$ *es un cerrado de* $\mathbf{A}$*, al que llamamos el* cerrado de Frattini *de* $\mathbf{A}$*.*

Demostración. □

Proposición 2.57. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra Booleana. Entonces* $\mathrm{Frat}(\mathbf{A})$ *es la intersección de todos los cerrados maximales de* $\mathbf{A}$*, si tal conjunto de cerrados no es vacío, y es* A *en caso contrario.*

Demostración. Si a es un no-generador de $\mathbf{A}$, entonces para cada cerrado maximal X de $\mathbf{A}$, $\mathrm{Sg}(X \cup \{a\})$ está entre X y A, pero no puede ser igual a A porque $X = \mathrm{Sg}(X) \subset A$. Por lo tanto $\mathrm{Sg}(X \cup \{a\}) = X$, luego $a \in X$. Así que el conjunto de los no-generadores de $\mathbf{A}$ está contenido en cualquier cerrado maximal de $\mathbf{A}$.

Por otra parte, si $a \in A$ no es un no-generador, entonces hay un subconjunto X de A tal que $\mathrm{Sg}(X \cup \{a\}) = A$ pero $\mathrm{Sg}(X) = A$. Sea $\mathcal{Y}$ el conjunto de todos los cerrados Y de $\mathbf{A}$ tales que $X \subseteq Y$ y $a \notin Y$. Se cumple que $\mathcal{Y} \neq \varnothing$, porque $\mathrm{Sg}(X) \in \mathcal{Y}$. Además, la unión de una cadena no vacía en $(\mathcal{Y}, \subseteq)$ está en $\mathcal{Y}$. Por lo tanto $(\mathcal{Y}, \subseteq)$ tiene un maximal Y. Para cada cerrado Z de $\mathbf{A}$, si $Y \subset Z$, entonces $a \in Z$, y puesto que $X \subseteq Z$, $Z = A$. Luego Y es un cerrado maximal de $\mathbf{A}$. Esto demuestra que a no pertenece a la intersección de todos los maximales de $\mathbf{A}$.

□

2.4. Congruencias, ideales y filtros en las álgebras Booleanas.

Definición 2.58. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra Booleana y Φ una relación binaria en A. Decimos que Φ es una *congruencia* sobre $\mathbf{A}$ si Φ es una relación de equivalencia sobre A y si, para cada $a, b, c, d \in A$ se cumple que:

1. Si $a \equiv b \pmod{\Phi}$ y $c \equiv d \pmod{\Phi}$, entonces $a \vee c \equiv b \vee d \pmod{\Phi}$.
2. Si $a \equiv b \pmod{\Phi}$ y $c \equiv d \pmod{\Phi}$, entonces $a \wedge c \equiv b \wedge d \pmod{\Phi}$.
3. Si $a \equiv b \pmod{\Phi}$, entonces $\neg a \equiv \neg b \pmod{\Phi}$.

Denotamos por $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$ el conjunto de las congruencias sobre el álgebra Booleana $\mathbf{A}$.

Proposición 2.59. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra Booleana. Entonces el conjunto de las congruencias sobre* $\mathbf{A}$, $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$, *es un sistema de clausura algebraico sobre* $A \times A$, *i.e., tiene las siguientes propiedades:*

1. $A \times A \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$.
2. *Si* $(\Phi_i \mid i \in I)$ *es una familia no vacía en* $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$, *entonces* $\bigcap_{i\in I} \Phi_i$ *es una congruencia sobre* $\mathbf{A}$.
3. *Si* $(\Phi_i \mid i \in I)$ *es una familia no vacía en* $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$ *y si dados* $i, j \in I$, *hay un* $k \in I$ *tal que* $\Phi_i \cup \Phi_j \subseteq \Phi_k$, *entonces* $\bigcup_{i\in I} \Phi_i$ *es una congruencia sobre* $\mathbf{A}$.

Demostración. □

Corolario 2.60. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra Booleana. Entonces la endoaplicación* $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}$ *del conjunto* $\mathrm{Sub}(A \times A)$, *definida como:*

$$\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(A \times A) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A \times A) \\ \quad \Phi \quad\quad\quad \longmapsto \bigcap\{\, \Psi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A}) \mid \Phi \subseteq \Psi \,\} \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{Im}(\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}) \subseteq \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$.
2. $\{\, \Phi \in \mathrm{Sub}(A \times A) \mid \Phi = \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi) \,\} = \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$.
3. $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}$ *es extensiva o inflacionaria, i.e., para cada* $\Phi \in \mathrm{Sub}(A \times A)$,
$$\Phi \subseteq \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi).$$
4. $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}$ *es isótona, i.e., para cada* $\Phi, \Psi \in \mathrm{Sub}(A \times A)$, *si* $\Phi \subseteq \Psi$, *entonces*
$$\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Psi) \subseteq \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Psi).$$
5. $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}$ *es idempotente, i.e., para cada* $\Phi \in \mathrm{Sub}(A \times A)$,
$$\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi) = \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)).$$
6. $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}$ *es algebraica, i.e., para cada familia* $(\Phi_i \mid i \in I)$ *no vacía dirigida superiormente en* $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$ *se cumple que*
$$\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\textstyle\bigcup_{i\in I}\Phi_i) = \bigcup_{i\in I}\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi_i).$$

Por consiguiente, para cada $\Phi \subseteq A \times A$, $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$ *es la mínima congruencia sobre* $\mathbf{A}$ *que contiene a* Φ, *y la denominamos la congruencia sobre* $\mathbf{A}$ generada *por* Φ.

Demostración. □

Proposición 2.61. *El conjunto* $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$ *de las congruencias sobre un álgebra Booleana* $\mathbf{A}$ *es un subretículo completo del retículo* $\mathbf{Eqv}(A)$ *de las equivalencias sobre* A.

Demostración. La proposición significa que si $(\Phi_i \mid i \in I)$ es una familia de congruencias sobre $\mathbf{A}$, entonces el ínfimo y el supremo de tal familia en $\mathbf{Eqv}(A)$, son de hecho congruencias sobre $\mathbf{A}$.

Nos limitamos a demostrar el caso del supremo y sólo para la operación $\vee$, dejando los demás casos como ejercicio. Sean $(x_\alpha \mid \alpha \in 2)$ e $(y_\alpha \mid \alpha \in 2) \in A^2$ tales que, para cada $\alpha \in 2$, $x_\alpha \equiv y_\alpha \pmod{\bigvee_{i\in I} \Phi_i}$. Entonces, ya que en $\mathbf{Eqv}(A)$ se cumple que

$$\bigvee_{i\in I} \Phi_i = \left\{ (x, y) \in A^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists k \in \mathrm{N} - 1\, \exists (a_\alpha)_{\alpha\in k+1} \in A^{k+1}\, \exists (i_\alpha)_{\alpha\in k} \in I^k \\ \text{tal que } x = a_0,\ y = a_k,\ \text{ y } \forall \alpha \in k\, (a_\alpha, a_{\alpha+1}) \in \Phi_{i_\alpha} \end{array} \right\},$$

podemos afirmar que hay sucesiones finitas de elementos de A y congruencias de la familia $(\Phi_i \mid i \in I)$ tales que

$$\begin{array}{lll} x_0 = z_{0,0}\Phi_{i_{0,0}}z_{0,1} & \cdots & z_{0,k_0-1}\Phi_{i_{0,k_0-1}}z_{0,k_0} = y_0 \\ x_1 = z_{1,0}\Phi_{i_{1,0}}z_{1,1} & \cdots & z_{1,k_1-1}\Phi_{i_{1,k_1-1}}z_{1,k_1} = y_1 \end{array}$$

Luego tenemos que

$$\begin{aligned} x_0 \vee x_1 &\equiv y_0 \vee x_1 \pmod{\bigvee_{\beta\in k_0} \Phi_{i_{0,\beta}}} \\ y_0 \vee x_1 &\equiv y_0 \vee y_1 \pmod{\bigvee_{\beta\in k_1} \Phi_{i_{1,\beta}}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$x_0 \vee x_1 \equiv y_0 \vee y_1 \pmod{\bigvee_{\alpha\in 2} \bigvee_{\beta\in k_{n-1}} \Phi_{i_{\alpha,\beta}}}.$$

Así que podemos afirmar que

$$x_0 \vee x_1 \equiv y_0 \vee y_1 \pmod{\bigvee_{i\in I} \Phi_i},$$

lo cual demuestra que $\bigvee_{i\in I} \Phi_i$ es una congruencia sobre $\mathbf{A}$.

□

Antes de pasar a demostrar que el retículo de las congruencias sobre un álgebra Booleana $\mathbf{A}$ es algebraico, convenimos que, para una parte X de A, $\mathrm{Cg}(X)$ denota la congruencia sobre $\mathbf{A}$ generada por X^2. En particular, para $X = \{a, b\}$, usamos $\mathrm{Cg}(a, b)$, en lugar de $\mathrm{Cg}(\{a, b\})$.

Proposición 2.62. *El retículo* $\mathbf{Cgr}(\mathbf{A})$ *de las congruencias sobre un álgebra Booleana* $\mathbf{A}$*, es algebraico.*

Demostración. Demostramos en primer lugar que, para cada congruencia Φ sobre $\mathbf{A}$ se cumple que:

$$\Phi = \bigvee_{(a,b)\in\Phi} \mathrm{Cg}(a, b).$$

Es evidente que $\Phi \subseteq \bigvee_{(a,b)\in\Phi} \mathrm{Cg}(a, b)$. Recíprocamente, si suponemos que $(x, y) \in \bigvee_{(a,b)\in\Phi} \mathrm{Cg}(a, b)$, entonces hay un $n \in \mathrm{N} - 1$, una familia $(c_\alpha)_{\alpha\in n+1} \in A^{n+1}$ y una familia $((a_\alpha, b_\alpha))_{\alpha\in n} \in \Phi^n$ tales que $x = c_0$, $y = c_n$ y, para cada $\alpha \in n$, $c_\alpha \equiv c_{\alpha+1} \pmod{\mathrm{Cg}(a_\alpha, b_\alpha)}$. Luego, para cada $\alpha \in n$, $\mathrm{Cg}(a_\alpha, b_\alpha) \subseteq \Phi$, porque $(a_\alpha, b_\alpha) \in \Phi$, por lo tanto, para cada $\alpha \in n$, $c_\alpha \equiv c_{\alpha+1} \pmod{\Phi}$. De donde $x \equiv y \pmod{\Phi}$ y por lo tanto $\bigvee_{(a,b)\in\Phi} \mathrm{Cg}(a, b) \subseteq \Phi$.

Demostramos ahora que, para cada $(a, b) \in A^2$, $\mathrm{Cg}(a, b)$ es compacta en $\mathbf{Cgr}(\mathbf{A})$. Sea $(\Phi_i \mid i \in I)$ una familia de congruencias sobre $\mathbf{A}$ tal que $\mathrm{Cg}(a, b) \subseteq \bigvee_{i\in I} \Phi_i$. Entonces $(a, b) \in \bigvee_{i\in I} \Phi_i$, luego hay un $n \in \mathrm{N} - 1$, una familia $(c_\alpha)_{\alpha\in n+1} \in A^{n+1}$ y una familia $(i_\alpha)_{\alpha\in n} \in I^n$ tales que $a = c_0$, $b = c_n$ y, para cada $\alpha \in n$, $c_\alpha \equiv c_{\alpha+1} \pmod{\Phi_{i_\alpha}}$. Por lo tanto $a \equiv b \pmod{\bigvee_{\alpha\in n} \Phi_{i_\alpha}}$. luego $\mathrm{Cg}(a, b) \subseteq \bigvee_{\alpha\in n} \Phi_{i_\alpha}$. Por consiguiente $\mathrm{Cg}(a, b)$ es compacta.

□

Proposición 2.63. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra Booleana,* Φ *una relación binaria en* A *y* Ψ *una congruencia sobre* $\mathbf{A}$*. Entonces hay una congruencia* Θ *sobre* $\mathbf{A}$ *tal que* $\Psi \subseteq \Theta$ *y* $\Theta \cap \Phi = \Psi \cap \Phi$ *y* Θ *es maximal con dichas propiedades.*

Demostración. □

Procedemos ahora a definir, entre otros, los conceptos de filtro e ideal, y a demostrar que están íntimamente relacionados con las congruencias sobre las álgebras Booleanas y los homomorfismos entre ellas.

Respecto de los filtros dice P. Samuel:

> It is therefore necessary to have a tool permitting the passage from the finite to the infinite (or conversal by using dual methods). The necessary tool has to have finite features in its definition, but to be infinite in its essence; and the filters fulfill both requirements.

Definición 2.64. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra Booleana y $F, I \subseteq A$.

1. Decimos que el subconjunto F de A es

   a) Una *subbase para un filtro propio* de **A** si $F \neq \varnothing$ y si, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $(x_k \mid k \in n+1) \in F^{n+1}$, $\inf_{k \in n+1} x_k \neq 0$.
   b) Un *filtro* de **A** si $F \neq \varnothing$, para cada $x, y \in F$, $x \wedge y \in F$ y, para cada $x \in F$ y cada $y \in A$, si $x \leq y$, entonces $y \in F$. A los filtros F tales que $0 \notin F$ los denominamos *filtros propios* de **A**.
   c) Un *filtro principal* si existe un $a \in A$ tal que $F = \Uparrow a$.
   d) Un *filtro maximal* o *ultrafiltro* de **A** si es un filtro propio de **A** y no está estrictamente contenido en ningún otro filtro propio de **A**.
2. Decimos que el subconjunto I de A es
   a) Una *subbase para un ideal propio* de **A** si $I \neq \varnothing$ y si, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $(x_k \mid k \in n+1) \in I^{n+1}$, $\bigvee_{k \in n+1} x_k \neq 1$.
   b) Un *ideal* de **A** si $I \neq \varnothing$, para cada $x, y \in I$, $x \vee y \in I$ y, para cada $x \in I$ y cada $y \in A$, si $y \leq x$, entonces $y \in I$. A los ideales I tales que $1 \notin I$ los denominamos *ideales propios* de **A**.
   c) Un *ideal principal* si existe un $a \in A$ tal que $F = \Downarrow a$.
   d) Un *ideal maximal* de **A** si es un ideal propio de **A** y no está estrictamente contenido en ningún otro ideal propio de **A**.

Denotamos al conjunto de los filtros, resp., ideales, de **A** por $\mathrm{Fil}(\mathbf{A})$, resp., $\mathrm{Idl}(\mathbf{A})$, y al conjunto de los ultrafiltros, resp., ideales maximales, de **A** por $\mathrm{Ufil}(\mathbf{A})$, resp., $\mathrm{Spec}(\mathbf{A})$. Cuando los consideramos ordenados por la inclusión, los denotamos por $\mathbf{Fil}(\mathbf{A})$, $\mathbf{Idl}(\mathbf{A})$, $\mathbf{Ufil}(\mathbf{A})$ y $\mathbf{Spec}(\mathbf{A})$.

Demuéstrese que si F es una subbase para un filtro propio de un álgebra Booleana **A**, entonces $0 \notin F$.

Demuéstrese que si F es un filtro de un álgebra Booleana **A**, entonces $\{ \neg x \mid x \in F \}$ es un ideal de **A**.

Demuéstrese que si $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{Sub}(X)$ es un homomorfismo de álgebras Booleanas, entonces, para cada $x \in X$, el conjunto $\{ a \in A \mid x \in f(a) \}$ es un ultrafiltro sobre **A**.

Definición 2.65. Sea **A** un álgebra Booleana y $a \in A$. Decimos que a es un *átomo* de **A** si $0 < a$ y si entre 0 y a no hay ningún elemento de A. Denotamos por $\mathrm{At}(\mathbf{A})$ el conjunto de los átomos de **A**. Además, decimos que **A** es *atómica* si, para cada $x \in A - \{0\}$, existe un $a \in \mathrm{At}(\mathbf{A})$ tal que $a \leq x$.

Cuando dispongamos de la lógica proposicional demostraremos que hay álgebras Booleanas sin átomos.

Demuéstrese que F es un ultrafiltro principal de un álgebra Booleana **A** precisamente si $F = \Uparrow a$, para un átomo a de **A**.

Demuéstrese que para cada conjunto A, $\mathrm{At}(\mathbf{Sub}(A))$ coincide con el conjunto $\{ \{a\} \mid a \in A \}$

Definición 2.66. Decimos que un álgebra Booleana **A** es *completa* si cada subconjunto de A tiene un supremo y un ínfimo.

Proposición 2.67. *Sea* **A** *un álgebra Booleana. Entonces hay un homomorfismo de* **A** *en* $\mathbf{Sub}(\mathrm{At}(\mathbf{A}))$. *Además, tal homomorfismo es inyectivo si* **A** *es atómica y es sobreyectivo si* **A** *es completa.*

Demostración. La aplicación $f_{\mathbf{A}}\colon A \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathrm{At}(\mathbf{A}))$ definida como:

$$f_{\mathbf{A}} \begin{cases} A & \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathrm{At}(\mathbf{A})) \\ x & \longmapsto \{ a \in \mathrm{At}(\mathbf{A}) \mid a \leq x \}, \end{cases}$$

es un homomorfismo de **A** en $\mathbf{Sub}(\mathrm{At}(\mathbf{A}))$. □

Corolario 2.68. *Cualquier álgebra Booleana atómica es isomorfa a un cuerpo de conjuntos y cualquier álgebra Booleana completa y atómica es isomorfa al álgebra Booleana de los subconjuntos de un conjunto.*

Corolario 2.69. *Las álgebras Booleanas finitas son, salvo isomorfismo, precisamente las álgebras Booleanas de los subconjuntos de los conjuntos finitos.*

Proposición 2.70. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra Booleana. Entonces el retículo algebraico* $\mathbf{Cgr}(\mathbf{A})$ *de las congruencias sobre* $\mathbf{A}$ *es distributivo e isomorfo a los conjuntos ordenados* $\mathbf{Fil}(\mathbf{A})$ *y* $\mathbf{Idl}(\mathbf{A})$

Demostración. □

Teorema 2.71 (Krull-Tarski)**.** *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra Booleana no final, i.e., tal que* $0 \neq 1$. *Entonces:*

1. *Cada filtro propio de* $\mathbf{A}$ *está incluido en un ultrafiltro de* $\mathbf{A}$.
2. *Cada ideal propio de* $\mathbf{A}$ *está incluido en un ideal maximal de* $\mathbf{A}$.

Demostración. □

Proposición 2.72. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo de álgebras Booleanas. Entonces el* núcleo *de* f, *i.e.,* $\mathrm{Ker}(f) = \{\, (x,y) \in A \times A \mid f(x) = f(y) \,\}$, *es una congruencia sobre* $\mathbf{A}$ *y el ideal que le corresponde es* $f^{-1}[0] = \{\, x \in A \mid f(x) = 0 \,\}$.

Demostración. □

Demuéstrese que un homomorfismo $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es inyectivo si y sólo si $f^{-1}[0] = \{0\}$.

Proposición 2.73. *Cualquier monomorfismo de álgebras Booleanas es inyectivo.*

Demostración. □

Proposición 2.74. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra Booleana y* $\Phi \in \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}$. *Entonces hay un álgebra Booleana* $\mathbf{A}/\Phi$, *el álgebra Booleana* cociente de $\mathbf{A}$ entre Φ, *y un homomorfismo* $\mathrm{pr}_\Phi\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}/\Phi$, *la* proyección canónica *de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{A}/\Phi$, *tal que:*

1. $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_\Phi) = \Phi$.
2. (Propiedad universal) *Para cada homomorfismo* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, *si* $\Phi \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, *entonces hay un único homomorfismo* $g\colon \mathbf{A}/\Phi \longrightarrow \mathbf{B}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "\mathrm{pr}_\Phi"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{A}/\Phi \arrow[d, "g"] \\
& \mathbf{B}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Si en lugar de partir de una congruencia sobre un álgebra Booleana $\mathbf{A}$, partimos de un ideal I, resp., de un filtro F de $\mathbf{A}$, entonces denotamos por $\mathbf{A}/I$, resp., $\mathbf{A}/F$ el cociente de $\mathbf{A}$ entre la congruencia determinada por el ideal I, resp., por el filtro F.

La siguiente proposición establece que toda imagen homomorfa de un álgebra Booleana es isomorfa a un álgebra Booleana cociente de la misma.

Proposición 2.75. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo sobreyectivo de álgebras Booleanas. Entonces* $\mathbf{A}/\mathrm{Ker}(f)$ *es isomorfa a* $\mathbf{B}$.

Demostración. □

A continuación establecemos la factorización de un homomorfismo a través de su núcleo.

Proposición 2.76 (Noether)**.** *Sea f un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$. Entonces hay un único homomorfismo inyectivo f^{i}, el* inyectivizado *de f, de $\mathbf{A}/\mathrm{Ker}(f)$, la* coimagen *de f, en $\mathbf{B}$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, two heads, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}(f)}"'] & \mathbf{B} \\
& \mathbf{A}/\mathrm{Ker}(f) \arrow[u, tail, "f^{\mathrm{i}}"']
\end{tikzcd}$$

conmuta. Esta es la factorización a través de la coimagen *de un homomorfismo. Además, si f es sobreyectivo, entonces f^{i} es sobreyectivo, luego biyectivo.*

Por otra parte, se cumple que para cada álgebra Booleana $\mathbf{C}$, cualquier homomorfismo sobreyectivo $g\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{C}$ y cualquier homomorfismo $h\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{B}$, si el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, two heads, "g"'] & \mathbf{B} \\
& \mathbf{C} \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces existe un único homomorfismo sobreyectivo $t\colon \mathbf{C} \twoheadrightarrow \mathbf{A}/\mathrm{Ker}(f)$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}(f)}"] \arrow[ddr, two heads, "g"'] & & \mathbf{B} \\
& \mathbf{A}/\mathrm{Ker}(f) \arrow[ur, tail, "f^{\mathrm{i}}"'] & \\
& \mathbf{C} \arrow[u, two heads, "t"'] \arrow[uur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposición 2.77. *Sea f un homomorfismo sobreyectivo de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$, h un homomorfismo sobreyectivo de $\mathbf{D}$ en $\mathbf{C}$ y g un homomorfismo de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{D}$. Entonces:*

1. *Una condición necesaria y suficiente para que exista un homomorfismo t de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{C}$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B} \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, "g"'] & \mathbf{A} \arrow[d, "t"] \\
\mathbf{D} \arrow[r, two heads, "h"'] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

   conmute, es que $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(h \circ g)$.

2. *Si Φ es una congruencia sobre $\mathbf{B}$ y Ψ una congruencia sobre $\mathbf{D}$, entonces una condición necesaria y suficiente para que exista un homomorfismo t de $\mathbf{B}/\Phi$ en $\mathbf{D}/\Psi$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B} \arrow[r, "\mathrm{pr}_\Phi"] \arrow[d, "g"'] & \mathbf{B}/\Phi \arrow[d, "t"] \\
\mathbf{D} \arrow[r, "\mathrm{pr}_\Psi"'] & \mathbf{D}/\Psi
\end{tikzcd}$$

conmute, es que, para cada $x, y \in B$, si $(x, y) \in \Phi$, entonces $(g(x), g(y)) \in \Psi$

Además, tanto en el primero como en el segundo caso t está unívocamente determinada.

Demostración. □

Proposición 2.78. *Sean $\Phi, \Psi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$ y $\Phi \subseteq \Psi$. Entonces se cumple que:*

1. *La relación Ψ/Φ es una congruencia sobre $\mathbf{A}/\Phi$.*
2. *Existe un único homomorfismo $\mathrm{p}_{\Phi,\Psi}$ de $\mathbf{A}/\Phi$ en $\mathbf{A}/\Psi$ tal que $\mathrm{p}_{\Phi,\Psi} \circ \mathrm{pr}_\Phi = \mathrm{pr}_\Psi$, i.e., el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{A} \arrow[dl, "\mathrm{pr}_\Phi"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_\Psi"] & \\
\mathbf{A}/\Phi \arrow[rr, "\mathrm{p}_{\Phi,\Psi}"'] & & \mathbf{A}/\Psi
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, $\mathrm{p}_{\Phi,\Psi}$ es sobreyectivo.

3. *$(\mathbf{A}/\Phi)/(\Psi/\Phi)$ es isomorfa a $\mathbf{A}/\Psi$.*
4. *$\Psi/\Phi = \mathrm{Ker}(\mathrm{p}_{\Phi,\Psi})$.*

Demostración. □

En la proposición que sigue demostramos que un homomorfismo factoriza a través de su núcleo y de su imagen.

Proposición 2.79. *Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos álgebras Booleanas y $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo. Entonces el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}(f)}"'] & \mathbf{B} \\
\mathbf{A}/\operatorname{Ker}(f) \arrow[r, "f^b"'] & \mathbf{Im}(f) \arrow[u, "\mathrm{in}_{\mathbf{Im}(f)}"']
\end{tikzcd}$$

conmuta, siendo f^b la biyectivizada *de f. Además, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}(f)}"] \arrow[d, "f^{\mathrm{s}}"'] & \mathbf{A}/\operatorname{Ker}(f) \arrow[dl, "f^{\mathrm{b}}"'] \arrow[d, "f^{\mathrm{i}}"] \\
\mathbf{Im}(f) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\mathbf{Im}(f)}"'] & \mathbf{B}
\end{tikzcd}$$

Proposición 2.80. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo de álgebras Booleanas. Si* $\Phi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{B})$ *entonces la imagen inversa de* Φ *mediante* f^2 *es una congruencia sobre* $\mathbf{A}$*, i.e.,* $(f^2)^{-1}[\Phi] \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$.

Proposición 2.81. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra Booleana,* $X \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$ *y* $\Phi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$*. Entonces se cumple que:*

1. $\mathrm{Sat}_\Phi(X) \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.
2. $\Phi \upharpoonright \mathrm{Sat}_\Phi(X)$ *es una congruencia sobre* $\mathrm{Sat}_\Phi(X)$.
3. $\mathbf{X}/(\Phi \upharpoonright \mathbf{X})$ *y* $\mathrm{Sat}_\Phi(X)/(\Phi \upharpoonright \mathrm{Sat}_\Phi(X))$ *son isomorfas.*

□

Demostración. □

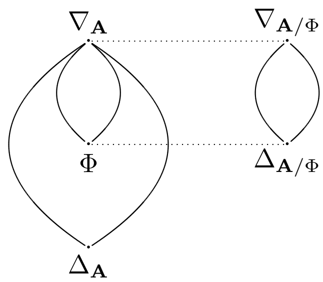
Proposición 2.82. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra Booleana y* $\Phi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$*. Entonces se cumple que los retículos* $(\Uparrow \Phi, \subseteq)$ *y* $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A}/\Phi)$ *son isomorfos.*

Demostración. El isomorfismo viene dado por la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \Uparrow \Phi & \longrightarrow & \mathrm{Cgr}(\mathbf{A}/\Phi) \\ \Psi & \longmapsto & \Psi/\Phi \end{array}$$

□

La proposición anterior se puede ilustrar con la siguiente figura:



Proposición 2.83. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo sobreyectivo de álgebras Booleanas. Si* $\Phi \subseteq A^2$*, entonces*

$$f^2[\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)] = \mathrm{Cg}_{\mathbf{B}}(f^2[\Phi]).$$

Demostración. $(f^2)^{-1}[\mathrm{Cg}_{\mathbf{B}}(f^2[\Phi])]$ es una congruencia sobre $\mathbf{A}$ que contiene a $\Phi \cup \mathrm{Ker}(f)$, luego contiene a $\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$, así que, por ser f sobreyectiva, $\mathrm{Cg}_{\mathbf{B}}(f^2[\Phi])$ contiene a $f^2[\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)]$.

Por otra parte, al ser f un homomorfismo, hay un isomorfismo entre los conjuntos ordenados $(\Uparrow \mathrm{Ker}(f), \subseteq)$ y $\mathrm{Cgr}(\mathbf{B})$. Pero $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$ así que corresponde a una congruencia $f^2[\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)]$ que contiene a $f^2[\Phi]$, luego $f^2[\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)]$ contiene a $\mathrm{Cg}_{\mathbf{B}}(f^2[\Phi])$. □

Proposición 2.84. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra Booleana e* $I \in \mathrm{Idl}(\mathbf{A})$*. Entonces son equivalentes:*

1. $I \in \mathrm{Spec}(\mathbf{A})$.
2. $I \neq A$ *y, para cada* $x, y \in A$*, si* $x \wedge y \in I$*, entonces* $x \in I$ *o* $y \in I$*, i.e.,* I *es un* ideal primo*.*
3. $I \neq A$ *y, para cada* $x \in A$*,* $x \in I$ *precisamente si* $\neg x \notin I$*.*
4. $\mathbf{A}/I$ *es isomorfa a* $\mathbf{2}$*.*

Demostración. □

Proposición 2.85. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra Booleana y* $F \in \mathrm{Fil}(\mathbf{A})$*. Entonces son equivalentes:*

1. $F \in \mathrm{Ufil}(\mathbf{A})$.
2. $F \neq A$ *y, para cada* $x, y \in A$*, si* $x \vee y \in I$*, entonces* $x \in F$ *o* $y \in F$.
3. $F \neq A$ *y, para cada* $x \in A$*,* $x \in F$ *precisamente si* $\neg x \notin F$.
4. $\mathbf{A}/F$ *es isomorfa a* $\mathbf{2}$.

Demostración. □

Para demostrar el teorema de Stone, según el cual cualquier álgebra Booleana es isomorfa a una subálgebra Booleana del álgebra Booleana de las partes de un conjunto, pero no sólo para tal fin, introducimos los conceptos de producto de una familia de álgebras Booleanas, igualador de dos homomorfismos de álgebras Booleanas, sistema proyectivo de álgebras Booleanas y de homomorfismos entre álgebras Booleanas, límite proyectivo de un sistema proyectivo de álgebras Booleanas y de un sistema proyectivo de homomorfismos entre álgebras Booleanas, y también los de álgebra Booleana simple, subdirectamente irreducible y directamente irreducible; además, demostramos dos teoremas de Birkhoff, uno sobre la descomposición de las álgebras Booleanas finitas en productos de álgebras Booleanas directamente irreducibles y otro sobre la representación de un álgebra Booleana como un producto subdirecto de álgebras Booleanas subdirectamente irreducibles.

Nos ocupamos, en primer lugar, de demostrar tanto la existencia de productos de familias de álgebras Booleanas, como la de productos de familias de homomorfismos entre familias de álgebras Booleanas, así como, en segundo lugar, de estudiar la conducta del operador de formación de productos, respecto de las identidades y de la composición de familias de homomorfismos entre familias de álgebras Booleanas.

2.5. Productos de álgebras Booleanas.

Proposición 2.86. *Sea* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *una familia de álgebras Booleanas. Entonces hay un par ordenado* $\left(\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i, (\mathrm{pr}_i \mid i \in I)\right)$ *en el que* $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i$*, el* producto *de* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$*, es un álgebra Booleana y, para cada* $i \in I$*,* pr_i*, la* proyección canónica i-ésima *del producto, un homomorfismo de* $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i$ *en* $\mathbf{A}_i$*, que tiene la siguiente* propiedad universal*:*

Para cada par ordenado $(\mathbf{A}, (f_i \mid i \in I))$*, en el que* $\mathbf{A}$ *es un álgebra Booleana y, para cada* $i \in I$*,* $f_i \colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}_i$ *un homomorfismo de álgebras Booleanas, hay un único homomorfismo* $\langle f_i \mid i \in I\rangle : \mathbf{A} \longrightarrow \prod_{i\in I}\mathbf{A}_i$ *tal que, para cada* $i \in I$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[d, "\langle f_i \mid i \in I\rangle"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\ \prod_{i\in I}\mathbf{A}_i \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"'] & \mathbf{A}_i \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Sea $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i$ el álgebra Booleana cuyo conjunto subyacente es el producto cartesiano de la familia de conjuntos $(A_i \mid i \in I)$, i.e., el conjunto definido como:

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{\, x \in \mathrm{Fnc}(I, \bigcup_{i\in I} A_i) \;\middle|\; \forall i \in I(x_i \in A_i) \,\right\},$$

y en la que, para cada $x, y \in \prod_{i\in I} A_i$, las operaciones estructurales están definidas como:

$$\begin{aligned} x \vee y &= (x_i \vee y_i \mid i \in I),\\ x \wedge y &= (x_i \wedge y_i \mid i \in I),\\ \neg x &= (\neg x_i \mid i \in I),\\ 0 &= (0_i \mid i \in I),\\ 1 &= (1_i \mid i \in I); \end{aligned}$$

y, para cada $i \in I$, sea pr_i el triplo ordenado $(\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i, \mathrm{pr}_i, \mathbf{A}_i)$, denotado por $\mathrm{pr}_i\colon \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{A}_i$, en el que pr_i es la aplicación de $\prod_{i\in I} A_i$ en A_i definida como:

$$\mathrm{pr}_i \begin{cases} \prod_{i\in I} A_i & \longrightarrow \ A_i \\ \quad x & \longmapsto \ x_i. \end{cases}$$

Entonces se cumple que, para cada $i \in I$, pr_i es un homomorfismo de $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ en $\mathbf{A}_i$.

Por otra parte, dado un par ordenado $(\mathbf{A}, (f_i \mid i \in I))$, en el que $\mathbf{A}$ es un álgebra Booleana y, para cada $i \in I$, $f_i\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}_i$ un homomorfismo, sea $\langle f_i \mid i \in I\rangle$ la aplicación de A en $\prod_{i\in I} A_i$ definida como:

$$\langle f_i \mid i \in I\rangle \begin{cases} A & \longrightarrow \ \prod_{i\in I} A_i \\ a & \longmapsto \ (f_i(a) \mid i \in I). \end{cases}$$

Es evidente que, para cada $i \in I$, $\mathrm{pr}_i \circ \langle f_i \mid i \in I\rangle = f_i$ y que $\langle f_i \mid i \in I\rangle$ es un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$. Con ello queda demostrada la existencia de al menos un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ con la propiedad indicada. Dejamos, como ejercicio, la demostración de la unicidad. □

En la proposición anterior hemos demostrado, para una familia de álgebras Booleanas, la existencia de al menos un par ordenado, formado por un álgebra Booleana y una familia de homomorfismos desde el álgebra Booleana hasta cada uno de las álgebras Booleanas de la familia dada, sujeto a cumplir una cierta propiedad universal; pero, ni hemos afirmado que tal par sea absolutamente único, ni que las proyecciones canónicas sean necesariamente sobreyectivas.

Demostraremos en lo que sigue, entre otras cosas, que:

- El par ordenado de la proposición anterior, es único salvo (un único) isomorfismo.
- Las proyecciones canónicas son sobreyectivas.

Proposición 2.87. *Sea* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *una familia de álgebras Booleanas. Entonces:*

1. *Para cada álgebra Booleana* $\mathbf{A}$ *y cualesquiera homomorfismos* $f, g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$, *si, para cada* $i \in I$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{pr}_i \circ f"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{pr}_i \circ g"'] & \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"] & \mathbf{A}_i \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $f = g$, *i.e., la familia* $(\mathrm{pr}_i \mid i \in I)$ *es* colectivamente monomórfica.

2. *Para cada par ordenado $(\mathbf{A},(f_i \mid i \in I))$, en el que $\mathbf{A}$ sea un álgebra Booleana y, para cada $i \in I$, $f_i\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}_i$ un homomorfismo, y para cada homomorfismo sobreyectivo $t\colon \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i \twoheadrightarrow \mathbf{A}$, si, para cada $i \in I$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i \arrow[rr, "\mathrm{pr}_i"] \arrow[dr, two heads, "t"'] & & \mathbf{A}_i \\
& \mathbf{A} \arrow[ur, "f_i"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces t es un isomorfismo, i.e., la familia $(\mathrm{pr}_i \mid i \in I)$ es extremal.

Demostración. □

Corolario 2.88. *Sea $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia de álgebras Booleanas. Si un par ordenado $(\mathbf{P},(p_i \mid i \in I))$, en el que $\mathbf{P}$ es un álgebra Booleana y, para cada $i \in I$, $p_i\colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{A}_i$, tiene la propiedad de que para cada par ordenado $(\mathbf{A},(f_i \mid i \in I))$, en el que $\mathbf{A}$ es un álgebra Booleana y, para cada $i \in I$, $f_i\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}_i$ un homomorfismo, hay un único homomorfismo $h\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{P}$ tal que, para cada $i \in I$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\
\mathbf{P} \arrow[r, "p_i"'] & \mathbf{A}_i
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay un único isomorfismo t de $\mathbf{P}$ en $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ tal que, para cada $i \in I$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P} \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, "p_i"] & \\
\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"'] & \mathbf{A}_i
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposición 2.89. *Sea $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia de álgebras Booleanas. Entonces, para cada $i \in I$, pr_i es un homomorfismo sobreyectivo.*

Demostración. □

Demuéstrese que no existe el producto de todas las álgebras Booleanas.

Sea $\mathbf{A}$ un álgebra Booleana y Φ una relación de equivalencia sobre A. Demuéstrese que Φ es una congruencia sobre $\mathbf{A}$ precisamente si Φ es un cerrado del álgebra Booleana $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$.

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos álgebras Booleanas y f una aplicación de A en B. Demuéstrese que f es un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ precisamente si f es un cerrado del álgebra Booleana $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Proposición 2.90. *Sea $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia de álgebras Booleanas. Entonces:*

1. *Si $I = \varnothing$, entonces $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ es un álgebra Booleana final.*

2. *Si* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *es tal que, para cada* $i, j \in I$, $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_j$, *y* $\mathbf{A}$ *es el valor común, entonces denotamos por* $\mathbf{A}^I$ *el producto* $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$ *de la familia de álgebras Booleanas* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$, *al que denominamos la* potencia directa *I-ésima de* $\mathbf{A}$, *y al único homomorfismo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{A}^I$, *determinado por la familia de homomorfismos* $(\mathrm{id}_{\mathbf{A}} \mid i \in I)$, *lo denominamos el homomorfismo* diagonal *de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{A}^I$ *y lo denotamos por* $\mathrm{dg}_{I,\mathbf{A}}$; *además,* $\mathrm{dg}_{I,\mathbf{A}}$ *es un monomorfismo. Así pués, para cada* $i \in I$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[d, tail, "\mathrm{dg}_{I,\mathbf{A}}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathbf{A}}"] & \\ \mathbf{A}^I \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"'] & \mathbf{A}_i \end{tikzcd}$$

   conmuta.
3. *Si* I *es un conjunto final y su único miembro es* i, *entonces*
$$\textstyle\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i^{\{i\}}.$$
   Por consiguiente, en este caso, $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$ *es isomorfo a* $\mathbf{A}_i$.
4. *Si* I *tiene exactamente dos miembros y éstos son* i *y* j, *entonces*
$$\textstyle\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i \cong \mathbf{A}_i \times \mathbf{A}_j \quad y \quad \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i \cong \mathbf{A}_j \times \mathbf{A}_i$$
5. *Si para cada* $i \in I$, $\mathbf{A}_i$ *es un álgebra Booleana final, entonces* $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$ *es un álgebra Booleana final.*

Demostración. □

Proposición 2.91. *Para cada conjunto* A, *el álgebra Booleana* $\mathbf{Sub}(A)$ *es, naturalmente, isomorfa al álgebra Booleana* $\mathbf{2}^A$.

Demostración. □

Proposición 2.92 (Conmutatividad)**.** *Sea* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *una familia de álgebras Booleanas y* φ *un automorfismo de* I, *entonces*
$$\textstyle\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i \cong \prod_{i \in I} \mathbf{A}_{\varphi(i)}.$$
Demostración. □

Para establecer la proposición que sigue, convenimos en denotar por $(\mathbf{A}_j \mid j \in J)$ la restricción de $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ a J, si $J \subseteq I$, que no es más que la composición de in_J y de $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$. Además, usaremos pr_j para denotar la proyección canónica j-ésima, del producto de cualquier familia de álgebras Booleanas para la cual se cumpla que j sea miembro del conjunto de índices de la misma.

Proposición 2.93. *Sea* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *una familia de álgebras Booleanas y* $J, K, L \subseteq I$ *tales que* $K \subseteq J$ *y* $L \subseteq K$. *Entonces:*

1. $\mathrm{pr}_{J,J} = \mathrm{id}_{\prod_{j \in J} \mathbf{A}_j}$, *siendo* $\mathrm{pr}_{J,J}$ *el único endomorfismo* $\langle \mathrm{pr}_j \mid j \in J \rangle$ *del álgebra Booleana* $\prod_{j \in J} \mathbf{A}_j$ *tal que, para cada* $j \in J$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \prod_{j \in J} \mathbf{A}_j \arrow[d, "\mathrm{pr}_{J,J}"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_j"] & \\ \prod_{j \in J} \mathbf{A}_j \arrow[r, "\mathrm{pr}_j"'] & \mathbf{A}_j \end{tikzcd}$$

   conmuta.

2. $\mathrm{pr}_{J,L} = \mathrm{pr}_{K,L} \circ \mathrm{pr}_{J,K}$, *i.e., el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\prod_{j\in J}\mathbf{A}_j \arrow[d, "\mathrm{pr}_{J,K}"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{J,L}"] & \\
\prod_{k\in K}\mathbf{A}_k \arrow[r, "\mathrm{pr}_{K,L}"'] & \prod_{l\in L}\mathbf{A}_l
\end{tikzcd}$$

conmuta; siendo, para $J, K \subseteq I$, con $K \subseteq J$, $\mathrm{pr}_{J,K}$ el único homomorfismodel álgebra Booleana $\prod_{j\in J}\mathbf{A}_j$ en el álgebra Booleana $\prod_{k\in K}\mathbf{A}_k$ tal que, para cada $k \in K$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\prod_{j\in J}\mathbf{A}_j \arrow[d, "\mathrm{pr}_{J,K}"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{k}"] & \\
\prod_{k\in K}\mathbf{A}_k \arrow[r, "\mathrm{pr}_{k}"'] & \mathbf{A}_k
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposición 2.94. *Sean $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ y $(\mathbf{B}_i \mid i \in I)$ dos familias de álgebras Booleanas. Entonces se cumple que:*

1. *Si, para cada $i \in I$, $\mathbf{A}_i \leq \mathbf{B}_i$, entonces $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i \leq \prod_{i\in I}\mathbf{B}_i$.*
2. *Si $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i \leq \prod_{i\in I}\mathbf{B}_i$, entonces, para cada $i \in I$, $\mathbf{A}_i \leq \mathbf{B}_i$.*

Demostración. □

Proposición 2.95. *Sean $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ y $(\mathbf{B}_i \mid i \in I)$ dos familias de álgebras Booleanas y $(f_i \mid i \in I)$ una familia de homomorfismos en la que, para cada $i \in I$, $f_i\colon \mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{B}_i$. Entonces hay un único homomorfismo, denotado por $\prod_{i\in I} f_i$ y denominado el* producto *de $(f_i \mid i \in I)$, del álgebra Booleana $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i$ en el álgebra Booleana $\prod_{i\in I}\mathbf{B}_i$ tal que, para cada $i \in I$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"] \arrow[d, "\prod_{i\in I} f_i"'] & \mathbf{A}_i \arrow[d, "f_i"] \\
\prod_{i\in I}\mathbf{B}_i \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"'] & \mathbf{B}_i
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposición 2.96. *Sean $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$, $(\mathbf{B}_i \mid i \in I)$ y $(\mathbf{C}_i \mid i \in I)$ tres familias de álgebras Booleanas y $(f_i \mid i \in I)$ y $(g_i \mid i \in I)$ dos familias de homomorfismos tales que, para cada $i \in I$, $f_i\colon \mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{B}_i$ y $g_i\colon \mathbf{B}_i \longrightarrow \mathbf{C}_i$. Entonces:*

1. $\prod_{i\in I}\mathrm{id}_{\mathbf{A}_i} = \mathrm{id}_{\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i}$.
2. $(\prod_{i\in I} g_i) \circ (\prod_{i\in I} f_i) = \prod_{i\in I}(g_i \circ f_i)$.

Demostración. □

Proposición 2.97. *Sean $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$, $(\mathbf{B}_j \mid j \in J)$ y $(\mathbf{C}_k \mid k \in K)$ tres familias de álgebras Booleanas y $(f_j \mid j \in J)$ y $(g_k \mid k \in K)$ dos familias de homomorfismos tales que, para cada $j \in J$, $f_j\colon \prod_{i\in I}\mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{B}_j$ y, para cada*

$k \in K$, $g_k\colon \prod_{j\in J}\mathbf{B}_j \longrightarrow \mathbf{C}_k$. Entonces se cumple que el único homomorfismo $\langle g_k \circ \langle f_j \mid j\in J\rangle \mid k\in K\rangle$ del álgebra Booleana $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i$ en el álgebra Booleana $\prod_{k\in K}\mathbf{C}_k$ tal que, para cada $k\in K$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i \arrow[d, "\langle g_k \circ \langle f_j \mid j\in J\rangle \mid k\in K\rangle"'] \arrow[dr, "g_k \circ \langle f_j \mid j\in J\rangle"] & \\
\prod_{k\in K}\mathbf{C}_k \arrow[r, "\mathrm{pr}_k"'] & \mathbf{C}_k
\end{tikzcd}$$

conmuta, coincide con la composición del único homomorfismo $\langle f_j \mid j\in J\rangle$ de $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i$ en $\prod_{j\in J}\mathbf{B}_j$ y del único homomorfismo $\langle g_k \mid k\in K\rangle$ de $\prod_{j\in J}\mathbf{B}_j$ en $\prod_{k\in K}\mathbf{C}_k$ tales que, resp., para cada $j\in J$ y cada $k\in K$, los dos triángulos del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i \arrow[d, "\langle f_j \mid j\in J\rangle"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\
\prod_{j\in J}\mathbf{B}_j \arrow[r, "\mathrm{pr}_j"] \arrow[d, "\langle g_k \mid k\in K\rangle"'] \arrow[dr, "g_k"] & \mathbf{B}_j \\
\prod_{k\in K}\mathbf{C}_k \arrow[r, "\mathrm{pr}_k"'] & \mathbf{C}_k
\end{tikzcd}$$

conmutan. Así pués, se cumple que:

$$\langle g_k \mid k\in K\rangle \circ \langle f_j \mid j\in J\rangle = \langle g_k \circ \langle f_j \mid j\in J\rangle \mid k\in K\rangle$$

Demostración. □

Proposición 2.98. *Sean $(\mathbf{A}_i \mid i\in I)$ y $(\mathbf{B}_i \mid i\in I)$ dos familias de álgebras Booleanas y $(f_i \mid i\in I)$ una familia de homomorfismos en la que, para cada $i\in I$, $f_i\colon \mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{B}_i$. Entonces se cumple que:*

1. *Si para cada $i\in I$, f_i es un isomorfismo, entonces $\prod_{i\in I} f_i$ es un isomorfismo.*
2. *Si para cada $i\in I$, f_i es un monomorfismo, entonces $\prod_{i\in I} f_i$ es un monomorfismo.*
3. *Si para cada $i\in I$, f_i es un homomorfismo sobreyectivo, entonces $\prod_{i\in I} f_i$ es un homomorfismo sobreyectivo.*
4. *Si para cada $i\in I$, f_i es constante, entonces $\prod_{i\in I} f_i$ es constante.*

Demostración. □

Corolario 2.99. *Sea I un conjunto y $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo de álgebras Booleanas. Si f es un isomorfismo (resp. monomorfismo, homomorfismo sobreyectivo, constante), entonces f^I, i.e., el producto de la familia $(f \mid i\in I)$, es un isomorfismo (resp. monomorfismo, homomorfismo sobreyectivo, constante) de $\mathbf{A}^I$ en $\mathbf{B}^I$.*

Demostración. □

Proposición 2.100 (Asociatividad del producto)**.** *Sea $(\mathbf{A}_i \mid i\in I)$ una familia de álgebras Booleanas y $(J_l \mid l\in L)$ una familia de subconjuntos de I tal que $\bigcup_{l\in L} J_l = I$ y, para cada $l,m\in L$, si $l\neq m$, entonces $J_l\cap J_m=\varnothing$. Entonces*

$$\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i \cong \prod_{l\in L}\prod_{i\in J_l}\mathbf{A}_i.$$

Demostración. □

Proposición 2.101. *Sea* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *una familia no vacía de álgebras Booleanas,* $\mathbf{B}$ *un álgebra Booleana y* $(f_i \mid i \in I)$ *una familia no vacía de homomorfismos en la que, para cada* $i \in I$, $f_i \colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}_i$. *Entonces* $\mathrm{Ker}(\langle f_i \mid i \in I \rangle) = \bigcap_{i \in I} \mathrm{Ker}(f_i)$.

Demostración. □

Proposición 2.102. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra Booleana y* $a \in A$. *Entonces, siendo* $A\!\restriction\! a = \{\, x \in A \mid x \leq a \,\}$ *y, para* $x, y \in A\!\restriction\! a$, *estando* $x \vee y$ *y* $x \wedge y$ *definidos del mismo modo que en* $\mathbf{A}$ *y siendo* $\neg x = a \wedge \neg x$, *se cumple que* $\mathbf{A}\!\restriction\! a = (A\!\restriction\! a, \vee, \wedge, \neg, 0, a)$ *es un álgebra Booleana.*

Demostración. □

Proposición 2.103. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra Booleana y* $a \in A$. *Entonces hay un homomorfismo sobreyectivo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{A}\!\restriction\! a$

Demostración. □

Proposición 2.104. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra Booleana y* $a \in A$. *Entonces*

$$\mathbf{A} \cong \mathbf{A}\!\restriction\! a \times \mathbf{A}\!\restriction\! \neg a.$$

Demostración. □

A diferencia de lo que ocurre con otras álgebras, las descomposiciones de un álgebra Booleana en un producto de un número finito de factores están en correspondencia biunívoca con las particiones finitas de la unidad. Del mismo modo, las descomposiciones transfinitas están en correspondencia biunívoca con las particiones transfinitas de la unidad.

Definición 2.105. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra Booleana y $(a_i \mid i \in I)$ una familia en A. Decimos que $(a_i \mid i \in I)$ es una *partición de la unidad* en $\mathbf{A}$ si, para cada $i, j \in I$, si $i \neq j$, entonces $a_i \wedge a_j = 0$ y $\bigvee_{i \in I} a_i = 1$.

Proposición 2.106. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra Booleana y* $(a_i \mid i \in I)$ *una partición de la unidad en* $\mathbf{A}$. *Entonces la aplicación:*

$$f \left\{ \begin{array}{lcl} A & \longrightarrow & \prod_{i \in I} A_i\!\restriction\! a_i \\ x & \longmapsto & (x \wedge a_i \mid i \in I), \end{array} \right.$$

es un monomorfismo. Además, f *es sobreyectiva si y sólo si, para cada familia* $(b_i \mid i \in I)$ *en* $\prod_{i \in I} A_i\!\restriction\! a_i$, *existe el supremo de* $(b_i \mid i \in I)$ *en* $\mathbf{A}$. *Recíprocamente, para cada isomorfismo* f *de* $\mathbf{A}$ *en* $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$, *hay una partición de la unidad* $(a_i \mid i \in I)$ *en* $\mathbf{A}$ *tal que, para cada* $i \in I$, $\mathbf{A}_i \cong \mathbf{A}\!\restriction\! a_i$.

Demostración. □

Corolario 2.107. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra Booleana* $n > 0$ *y* $(a_i \mid i \in n)$ *una partición de la unidad en* $\mathbf{A}$, *i.e., una familia en* A *tal que, para cada* $i, j \in n$, *si* $i \neq j$, *entonces* $a_i \wedge a_j = 0$ *y* $\bigvee_{i \in n} a_i = 1$. *Entonces la aplicación:*

$$f \left\{ \begin{array}{lcl} A & \longrightarrow & \prod_{i \in n} A_i\!\restriction\! a_i \\ x & \longmapsto & (x \wedge a_i \mid i \in n), \end{array} \right.$$

es un isomorfismo. Recíprocamente, para cada isomorfismo f *de* $\mathbf{A}$ *en* $\prod_{i \in n} \mathbf{A}_i$, *hay una partición de la unidad* $(a_i \mid i \in n)$ *en* $\mathbf{A}$ *tal que, para cada* $i \in n$, $\mathbf{A}_i \cong \mathbf{A}\!\restriction\! a_i$.

Demostración. □

Definición 2.108. Un álgebra Booleana $\mathbf{A}$ es *simple* precisamente si $\mathbf{A}$ tiene exactamente dos congruencias: $\Delta_{\mathbf{A}}$ y $\nabla_{\mathbf{A}}$.

Proposición 2.109. *Un álgebra Booleana* $\mathbf{A}$ *es simple si y sólo si cualquier homomorfismo desde* $\mathbf{A}$ *que no sea constante es inyectivo.*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{A}$ sea simple y sea $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo que no sea constante, i.e., que no factorice a través del álgebra Booleana final. Si $\mathrm{Ker}(f) \neq \Delta_{\mathbf{A}}$, entonces, necesariamente, $\mathrm{Ker}(f) = \nabla_{\mathbf{A}}$, luego, para cada $x, y \in A$, $f(x) = f(y)$, por lo tanto f sería constante, contradicción. De modo que f es inyectiva.

Recíprocamente, si $\mathbf{A}$ no fuera simple, existiría una congruencia Φ sobre $\mathbf{A}$ tal que $\Delta_{\mathbf{A}} \subset \Phi \subset \nabla_{\mathbf{A}}$, luego la proyección canónica pr_{Φ} no sería ni constante ni inyectiva. □

Definición 2.110. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra Booleana. Decimos que $\mathbf{A}$ es *directamente irreducible* si no es isomorfa al producto de dos álgebras Booleanas no finales.

Demuéstrese que si un álgebra Booleana es final, entonces es directamente irreducible.

Proposición 2.111 (Stone)**.** *El álgebra Booleana* $\mathbf{2}$ *es la única álgebra Booleana no final que es directamente irreducible.*

Demostración. Por ser 2 un número primo, es evidente que $\mathbf{2}$ es directamente irreducible. Por otra parte, si $\mathbf{A}$ un álgebra Booleana tal que $\mathrm{cardA} > 3$. Entonces hay un $a \in A$ tal que $a \neq 0$ y $a \neq 1$. Por lo tanto también $\neg a \neq 0$ y $\neg a \neq 1$. Luego $\mathbf{A}{\restriction}a$ y $\mathbf{A}{\restriction}\neg a$ no son finales y $\mathbf{A} \cong \mathbf{A}{\restriction}a \times \mathbf{A}{\restriction}\neg a$. De donde podemos afirmar que $\mathbf{A}$ no es directamente irreducible. □

Proposición 2.112 (Birkhoff)**.** *Cualquier álgebra Booleana finita es isomorfa a un producto de álgebras Booleanas directamente irreducibles.*

Demostración. □

Corolario 2.113 (Stone)**.** *Cualquier álgebra Booleana finita es isomorfa al álgebra Booleana de los subconjuntos de un conjunto.*

Proposición 2.114 (Birkhoff)**.** *Cualquier álgebra Booleana es isomorfa a un producto subdirecto de álgebras Booleanas subdirectamente irreducibles.*

Demostración. □

Corolario 2.115. *Cualquier álgebra Booleana es isomorfa a una potencia subdirecta de* $\mathbf{2}$*, luego cualquier álgebra Booleana es isomorfa a un cuerpo de conjuntos.*

2.6. Igualadores de los homomorfismos de álgebras Booleanas.

Proposición 2.116. *Sean* $f, g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *dos homomorfismos de álgebras Booleanas. Entonces existe un par ordenado* $(\mathrm{Eq}(f,g), \mathrm{eq}(f,g))$*, el* igualador *de* f *y* g*, en el que* $\mathrm{Eq}(f,g)$ *es un álgebra Booleana y* $\mathrm{eq}(f,g)$ *un homomorfismo de* $\mathrm{Eq}(f,g)$ *en* $\mathbf{A}$*, que tiene las siguientes propiedades:*

1. $f \circ \mathrm{eq}(f,g) = g \circ \mathrm{eq}(f,g)$.
2. (Propiedad universal del igualador) *Para cualquier álgebra Booleana* $\mathbf{X}$ *y cualquier homomorfismo* $h\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A}$*, si* $f \circ h = g \circ h$*, entonces hay un único homomorfismo* $t\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathrm{Eq}(f,g)$ *tal que* $\mathrm{eq}(f,g) \circ t = h$.

La situación descrita por las condiciones anteriores la expresamos diagramáticamente como:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X} \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
\mathrm{Eq}(f,g) \arrow[r, "\mathrm{eq}(f,g)"'] & \mathbf{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathbf{B}
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $\mathrm{Eq}(f,g)$ el subconjunto de A definido como:

$$\mathrm{Eq}(f,g) = \{\, a \in A \mid f(a) = g(a) \,\}.$$

Se cumple que $\mathrm{Eq}(f,g)$ es un cerrado de $\mathbf{A}$ y que $\mathrm{eq}(f,g)$, la inclusión canónica de $\mathrm{Eq}(f,g)$ en A, es un homomorfismo de $\mathbf{Eq}(f,g)$ en $\mathbf{A}$.

Es evidente que $f \circ \mathrm{eq}(f,g) = g \circ \mathrm{eq}(f,g)$. Además, si $\mathbf{X}$ es un álgebra Booleana y $h\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A}$ un homomorfismo tal que $f \circ h = g \circ h$, entonces $\mathrm{Im}(h) \subseteq \mathrm{Eq}(f,g)$, luego, por la propiedad universal de la subálgebra, hay un único homomorfismo $t\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Eq}(f,g)$ tal que $\mathrm{eq}(f,g) \circ t = h$.

□

En la proposición anterior hemos demostrado, para un par de homomorfismos, ambos con el mismo dominio y codominio, la existencia de al menos un par ordenado, formado por un álgebra Booleana y un homomorfismo desde el álgebra Booleana hasta el dominio de los homomorfismos dados, sujeto a cumplir un par de condiciones; pero no hemos afirmado que tal par sea absolutamente único. Demostramos a continuación que el par ordenado de la proposición anterior, es único, sólo, salvo (un único) isomorfismo.

Proposición 2.117. *Sean $f, g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ dos homomorfismos de álgebras Booleanas. Si un par ordenado $(\mathbf{E}, e)$, en el que $\mathbf{E}$ es un álgebra Booleana y $e\colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{A}$ un homomorfismo, tiene las propiedades:*

1. $f \circ e = g \circ e$.
2. *Para cualquier álgebra Booleana $\mathbf{X}$ y cada homomorfismo $h\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A}$, si $f \circ h = g \circ h$, entonces hay un único homomorfismo $u\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{E}$ tal que $e \circ u = h$.*

Entonces hay un único isomorfismo $t\colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathrm{Eq}(f,g)$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{E} \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, "e"] & \\
\mathrm{Eq}(f,g) \arrow[r, "\mathrm{eq}(f,g)"'] & \mathbf{A}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Corolario 2.118. *Sea $\mathbf{A}$ un álgebra Booleana y f un endomorfismo de $\mathbf{A}$. Entonces el conjunto de los puntos fijos de f es una subálgebra de $\mathbf{A}$.*

Demostración. □

Proposición 2.119. *Si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "u"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "v"] \\
\mathbf{A}' \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, shift right, "g'"'] & \mathbf{B}'
\end{tikzcd}$$

conmuta serialmente, i.e., si $v \circ f = f' \circ u$ y $v \circ g = g' \circ u$, entonces hay un único homomorfismo $\mathrm{Eq}(u, v)\colon \mathrm{Eq}(f, g) \longrightarrow \mathrm{Eq}(f', g')$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Eq}(f,g) \arrow[r, "\mathrm{eq}(f,g)"] \arrow[d, "\mathrm{Eq}(u,v)"'] & \mathbf{A} \arrow[d, "u"] \\
\mathrm{Eq}(f',g') \arrow[r, "\mathrm{eq}(f',g')"'] & \mathbf{A}'
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Definición 2.120. Un homomorfismo $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ de álgebras Booleanas es un *monomorfismo regular* si existen dos homomorfismos $u, v\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ tales que el par ordenado $(\mathbf{A}, f)$ es un igualador de u y v.

Proposición 2.121. *Un homomorfismo $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es un monomorfismo regular precisamente si es inyectivo.*

2.7. Álgebras Booleanas proyectivas e inyectivas. Demostramos en primer lugar que las álgebras Booleanas libres tienen la propiedad especial de que cualquier homomorfismo desde ellas hasta el codominio de un homomorfismo sobreyectivo de álgebras Booleanas, se puede elevar hasta el dominio del mismo.

Proposición 2.122. *Sea X un conjunto y $\mathbf{T}_{\mathbf{Bool}}(X)$ el álgebra Booleana libre sobre X. Entonces dado un homomorfismo sobreyectivo $f\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$ y un homomorfismo $g\colon \mathbf{T}_{\mathbf{Bool}}(X) \longrightarrow \mathbf{B}$, hay un homomorfismo $t\colon \mathbf{T}_{\mathbf{Bool}}(X) \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{T}_{\mathbf{Bool}}(X) \arrow[dl, "t"'] \arrow[d, "g"] \\
\mathbf{A} \arrow[r, two heads, "f"'] & \mathbf{B}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

A las álgebras Booleanas que tienen la misma propiedad que la puesta de manifieto para las álgebras Booleanas libres en la proposición anterior, las denominamos proyectivas, y son el objeto de la definición que sigue.

Definición 2.123. Un álgebra Booleana $\mathbf{P}$ es *proyectiva* si dado un homomorfismo sobreyectivo $f\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$ y un homomorfismo $g\colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{B}$, hay un homomorfismo $t\colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{P} \arrow[dl, "t"'] \arrow[d, "g"] \\
\mathbf{A} \arrow[r, two heads, "f"'] & \mathbf{B}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proposición 2.124. *Cualquier álgebra Booleana proyectiva* $\mathbf{P}$ *es un* retracto cociente absoluto, *i.e., para cada homomorfismo sobreyectivo* $r\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{P}$, *hay un homomorfismo* $s\colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{A}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P} \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathbf{P}}"'] & \mathbf{A} \arrow[d, two heads, "r"] \\
& \mathbf{P}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Demostramos a continuación que cualquier retracto de un álgebra Booleana proyectiva es proyectiva.

Proposición 2.125. *Si* $\mathbf{P}$ *es un álgebra Booleana proyectiva y el álgebra Booleana* $\mathbf{B}$ *es un* retracto *de* $\mathbf{P}$, *i.e., es tal que hay dos homomorfismos* $s\colon \mathbf{B} \twoheadrightarrow \mathbf{P}$ *y* $r\colon \mathbf{P} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$ *tales que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B} \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathbf{B}}"'] & \mathbf{P} \arrow[d, "r"] \\
& \mathbf{B}
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $\mathbf{B}$ *es proyectiva.*

Demostración. Puesto que $\mathbf{B}$ es un *retracto* de $\mathbf{P}$, sean $s\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{P}$ y $r\colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{B}$ tales que $r \circ s = \mathrm{id}_{\mathbf{B}}$. Veamos que $\mathbf{B}$ es proyectiva. Para ello consideremos un homomorfismo sobreyectivo $f\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{C}$ y un homomorfismo $g\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$. Entonces en el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& & \mathbf{B} \arrow[dl, shift left, "s"] \arrow[dd, "g"] \arrow[ddll, bend right, "t \circ s"'] \\
& \mathbf{P} \arrow[ur, shift left, "r"] \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g \circ r"] & \\
\mathbf{A} \arrow[rr, two heads, "f"'] & & \mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

el homomorfismo $t\colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{A}$ existe, aunque no es necesariamente único, y es tal que $f \circ t = g \circ r$, por ser $\mathbf{P}$ proyectiva. Por lo tanto el homomorfismo $t \circ s \circ \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ es tal que $f \circ (t \circ s) = g$. De donde podemos concluir que $\mathbf{B}$ es proyectiva. □

Proposición 2.126. *Una condición necesaria y suficiente para que el producto de una familia finita de álgebras Booleanas sea un álgebra Booleana proyectiva es que cada una de ellas lo sea. Además, el coproducto de una familia arbitraria de álgebras Booleanas es proyectiva si y sólo si cada una de ellas lo és.*

Demostración. □

Proposición 2.127. *Una condición necesaria y suficiente para que un álgebra Booleana sea proyectiva es que sea un retracto de una libre.*

Demostración. □

Demuéstrese que una condición necesaria y suficiente para que un álgebra Booleana sea proyectiva es que sea un retracto cociente absoluto.

Cualquier álgebra Booleana libre cumple la *condición de la cadena numerable*, i.e., tiene la propiedad de que cualquier subconjunto de la misma al que no pertenezca el 0 y esté formado por elementos dos a dos disjuntos, es numerable, luego también cualquier subálgebra de una libre tendrá la misma propiedad. Por lo tanto, para obtener álgebras Booleanas que no sean proyectivas, será suficiente mostrar álgebras Booleanas que no cumplan la condición de la cadena numerable, e.g., el álgebra Booleana de los subconjuntos finitos-cofinitos de un conjunto innumerable.

Dice Halmos, refiriéndose a la proyectividad:

> Freedom is a rather severe structural restriction on a Boolean algebra and it is not too surprising that freedom implies projectivity. It is considerably more surprising that a cardinal number restriction can also imply projectivity.

Proposición 2.128. *Cualquier álgebra Booleana numerable es proyectiva.*

Definición 2.129. Un álgebra Booleana $\mathbf{I}$ es *inyectiva* si dado un homomorfismo inyectivo $f\colon \mathbf{A} \rightarrowtail \mathbf{B}$ y un homomorfismo $g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{I}$, hay un homomorfismo $t\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{I}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, rightarrowtail, "f"] \arrow[d, "g"'] & \mathbf{B} \arrow[dl, "t"] \\
\mathbf{I} &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proposición 2.130. *Cualquier álgebra Booleana inyectiva* $\mathbf{I}$ *es un* subretracto absoluto*, i.e., para cada homomorfismo inyectivo* $s\colon \mathbf{I} \rightarrowtail \mathbf{A}$*, hay un homomorfismo* $r\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{I}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{I} \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathbf{I}}"'] & \mathbf{A} \arrow[d, rightarrowtail, "r"] \\
& \mathbf{I}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Demostramos a continuación que cualquier retracto de un álgebra Booleana inyectiva es inyectiva.

Proposición 2.131. *Si* $\mathbf{I}$ *es un álgebra Booleana inyectiva y el álgebra Booleana* $\mathbf{B}$ *es un retracto de* $\mathbf{I}$*, entonces* $\mathbf{B}$ *es inyectiva.*

Demostración. Puesto que $\mathbf{B}$ es un *retracto* de $\mathbf{I}$, sean $s\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{P}$ y $r\colon \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{B}$ tales que $r \circ s = \mathrm{id}_{\mathbf{B}}$. Veamos que $\mathbf{B}$ es inyectiva. Para ello consideremos un homomorfismo inyectivo $f\colon \mathbf{A} \rightarrowtail \mathbf{C}$ y un homomorfismo $g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$. Entonces en el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[rr, tail, "f"] \arrow[dr, "s \circ g"] \arrow[dd, "g"'] & & \mathbf{C} \arrow[dl, "t"'] \arrow[ddll, bend left, "r \circ t"] \\
& \mathbf{I} \arrow[dl, shift left, "r"] & \\
\mathbf{B} \arrow[ur, shift left, "s"] & &
\end{tikzcd}
$$

el homomorfismo $t\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{I}$ existe, aunque no es necesariamente único, y es tal que $t \circ f = s \circ g$, por ser $\mathbf{I}$ inyectiva. Por lo tanto el homomorfismo $r \circ t\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{B}$ es tal que $(r \circ t) \circ f = g$. De donde podemos concluir que $\mathbf{B}$ es inyectiva. □

Proposición 2.132. *Una condición necesaria y suficiente para que el coproducto de una familia finita de álgebras Booleanas sea un álgebra Booleana inyectiva es que cada una de ellas lo sea. Además, el producto de una familia arbitraria de álgebras Booleanas es inyectiva si y sólo si cada una de ellas lo és.*

Demostración. □

Lema 2.133. *Cualquier retracto de un álgebra Booleana completa es completa.*

Demostración. □

Proposición 2.134. *Cualquier álgebra Booleana inyectiva es completa.*

Demostración. Cualquier álgebra Booleana se puede encajar en una que sea completa. Puesto que cualquier álgebra Booleana inyectiva es un subretracto absoluto, luego cualquier álgebra Booleana inyectiva es un retracto de una que sea completa, por lo tanto, en virtud del lema anterior, concluimos que que es completa. □

Lema 2.135. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra Booleana,* X *una subálgebra de* $\mathbf{A}$*,* $c \in A$ *y* $f\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo. Si* $\mathbf{A}$ *está generada por* $X \cup \{c\}$ *y existen dos elementos* $b_{X,c}$ *y* $b^{X,c}$ *en* B *tales que:*

1. $\forall x \in X \cap \Downarrow_{\leq} c\, (\, f(x) \leq b_{X,c}\,)$;
2. $\forall x \in X \cap \Uparrow_{\leq} c\, (\, b^{X,c} \leq f(x)\,)$,

entonces, para cada $d \in B$ *tal que* $b_{X,c} \leq d \leq b^{X,c}$*, hay un único homomorfismo* $t\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *tal que el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{X} \arrow[r, tail, "\mathrm{in}_{\mathbf{X}}"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{A} \arrow[dl, "t"] \\
\mathbf{B} & 1 \arrow[l, "\kappa_d"] \arrow[u, "\kappa_c"']
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Demostración. Puesto que $\mathbf{A}$ está generada por la subálgebra X junto con $c \in A$, se cumple que

$$A = \{\, (x \wedge c) \vee (y \wedge \neg c) \mid x, y \in X \,\}.$$

Téngase en cuenta que, para $x, y \in X$, se cumple la ecuación:

$$\neg((x \wedge c) \vee (y \wedge \neg c)) = (\neg x \wedge c) \vee (\neg y \wedge \neg c).$$

La aplicación t de A en B que a un $(x \wedge c) \vee (y \wedge \neg c) \in A$ le asigna $(f(x) \wedge d) \vee (f(y) \wedge \neg d)$, cumple todas las condiciones estipuladas en el enunciado de la proposición. $\square$

Demuéstrese que la aplicación t de la proposición anterior está bien definida, que es un homomorfismo, que extiende a f, que transforma c en d y que es el único homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ con dichas propiedades.

Proposición 2.136. *Cualquier álgebra Booleana completa es inyectiva.*

Demostración. Sea $\mathbf{I}$ un álgebra Booleana completa. Vamos a demostrar que $\mathbf{I}$ es inyectiva, i.e., que dado un homomorfismo inyectivo $f\colon \mathbf{A} \rightarrowtail \mathbf{B}$ y un homomorfismo $g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{I}$, hay un homomorfismo $t\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{I}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "g"'] & \mathbf{B} \arrow[dl, "t"] \\
\mathbf{I} &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Sea $\mathcal{F}_g$ el conjunto formado por todos los pares (X, h) en los que X es una subálgebra Booleana de $\mathbf{B}$ tal que $\mathrm{Im}(f) \subseteq X$ y h un homomorfismo de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{I}$ tal que la composición de la correstricción de f a $\mathbf{X}$ con h es g; situación que representamos como:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[rr, tail, "f"] \arrow[dr] \arrow[dd, "g"'] & & \mathbf{B} \\
& \mathbf{X} \arrow[ur, "\mathrm{in}_{\mathbf{X}}"'] \arrow[dl, "h"] & \\
\mathbf{I} & &
\end{tikzcd}$$

El conjunto $\mathcal{F}_g$ no es vacío, porque el par $(\mathrm{Im}(f), g \circ (f^{\mathrm{s}})^{-1})$ le pertenece. Por otra parte, sea $\leq$ la relación binaria sobre $\mathcal{F}_g$ definida como:

$$(X, h) \leq (X', h') \text{ si y sólo si } X \subseteq X' \text{ y } h' {\upharpoonright} X = h.$$

Tal relación ordena al conjunto $\mathcal{F}_g$ y $(\mathcal{F}_g, \leq)$ es fuertemente inductivo, i.e., cualquier cadena no vacía en $(\mathcal{F}_g, \leq)$ tiene un supremo. Por lo tanto, al no ser $\mathcal{F}_g$ vacío y ser el conjunto ordenado $(\mathcal{F}_g, \leq)$ fuertemente inductivo, podemos afirmar, en virtud del lema de Kuratowski-Zorn, que tiene un maximal. Sea $(\widehat{X}, \widehat{h})$ un maximal, arbitrario, pero fijo. Se cumple que $\widehat{X} = B$. Supongamos que no sea ése el caso, i.e., que $B - \widehat{X} \neq \varnothing$, y sea $c \in B - \widehat{X}$. Entonces, para

$$i_{\widehat{X},c} = \mathrm{Sup}_{\mathbf{I}}\{\, \widehat{h}(x) \mid x \in \widehat{X} \cap \Downarrow_{\leq} c \,\} \ \text{ e } \ i^{\widehat{X},c} = \mathrm{Inf}_{\mathbf{I}}\{\, \widehat{h}(x) \mid x \in \widehat{X} \cap \Uparrow_{\leq} c \,\},$$

se cumple que $i_{\widehat{X},c} \leq i^{\widehat{X},c}$. Luego, para cualquier $d \in I$ tal que $i_{\widehat{X},c} \leq d \leq i^{\widehat{X},c}$, en virtud del lema 2.135, hay un único homomorfismo $t\colon \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(\widehat{X} \cup \{c\}) \longrightarrow \mathbf{I}$ tal que el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbf{X}} \arrow[r, hook, "\mathrm{in}_{\widehat{\mathbf{X}}}"] \arrow[d, "\widehat{h}"'] & \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(\widehat{X} \cup \{c\}) \arrow[dl, "t"] \\
\mathbf{I} & 1 \arrow[l, "\kappa_d"] \arrow[u, "\kappa_c"']
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Pero esto contradice la maximalidad del par $(\widehat{X}, \widehat{h})$. Por lo tanto $\widehat{X} = B$. □

Corolario 2.137. *Una condición necesaria y suficiente para que un álgebra Booleana sea inyectiva es que sea completa.*

Demostración. □

Demuéstrese que una condición necesaria y suficiente para que un álgebra Booleana sea proyectiva es que sea un retracto cociente absoluto.

2.8. La dualidad de Stone. Puesto que a continuación vamos a estudiar la dualidad de Stone entre la categoría de las álgebras Booleanas y la de espacios topológicos Booleanos, definimos las nociones y construcciones pertinentes de la teoría de categorías y de la topología, concretamente, consideramos la categoría dual de una categoría, las dualidades entre dos categorías, los espacios topológicos, las bases de las topologías, los espacios topológicos compactos, Hausdorff y cero-dimensionales, las aplicaciones continuas de un espacio topológico en otro y ciertas construcciones sobre los espacios topológicos y las aplicaciones continuas.

Definición 2.138. Si $\mathbf{C}$ es una categoría, la categoría *dual* de $\mathbf{C}$, denotada por $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$, consta de los siguientes datos:

1. Un conjunto $\mathrm{Ob}(\mathbf{C}^{\mathrm{op}})$ de *objetos*, A, B, ..., que coincide con el conjunto de objetos de $\mathbf{C}$.
2. Un conjunto $\mathrm{Mor}(\mathbf{C}^{\mathrm{op}})$ de *morfismos* f, g, ..., que coincide con el conjunto de morfismos de $\mathbf{C}$.
3. Una aplicación $\mathrm{d}_0^{\mathrm{op}}\colon \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ que a cada morfismo $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ le asigna el objeto $\mathrm{d}_0^{\mathrm{op}}(f) = \mathrm{d}_1(f)$.
4. Una aplicación $\mathrm{d}_1^{\mathrm{op}}\colon \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ que a cada morfismo $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ le asigna el objeto $\mathrm{d}_1^{\mathrm{op}}(f) = \mathrm{d}_0(f)$.
5. Una aplicación $\mathrm{id}^{\mathrm{op}}\colon \mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ que a cada objeto $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ le asigna el morfismo $\mathrm{id}_A^{\mathrm{op}} = \mathrm{id}_A$.
6. Siendo $\mathrm{Mor}(\mathbf{C}^{\mathrm{op}}) \prod_{\mathrm{Ob}(\mathbf{C}^{\mathrm{op}})} \mathrm{Mor}(\mathbf{C}^{\mathrm{op}})$ el conjunto definido como:
$$\mathrm{Mor}(\mathbf{C}^{\mathrm{op}}) \textstyle\prod_{\mathrm{Ob}(\mathbf{C}^{\mathrm{op}})} \mathrm{Mor}(\mathbf{C}^{\mathrm{op}}) = \{\, (f, g) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C}^{\mathrm{op}})^2 \mid \mathrm{d}_0^{\mathrm{op}}(f) = \mathrm{d}_1^{\mathrm{op}}(g) \,\},$$
una aplicación $\circ^{\mathrm{op}}\colon \mathrm{Mor}(\mathbf{C}^{\mathrm{op}}) \prod_{\mathrm{Ob}(\mathbf{C}^{\mathrm{op}})} \mathrm{Mor}(\mathbf{C}^{\mathrm{op}}) \longrightarrow \mathrm{Mor}(\mathbf{C}^{\mathrm{op}})$, que a cada par $(f, g) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C}^{\mathrm{op}}) \prod_{\mathrm{Ob}(\mathbf{C}^{\mathrm{op}})} \mathrm{Mor}(\mathbf{C}^{\mathrm{op}})$ le asigna el morfismo $f \circ^{\mathrm{op}} g = g \circ f$.

Si $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A)$. Además, convenimos que $f\colon A \longleftarrow B$ es sinónimo de $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A)$.

Sea $\mathbf{C}$ una categoría. Demuéstrese que $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ es, de hecho, una categoría.

Ejemplo. Si $\mathbf{A} = (A, \leq)$ es un conjunto preordenado, entonces la dual de la categoría determinada por $\mathbf{A}$ es la categoría determinada por $\mathbf{A}^{\mathrm{op}} = (A, \geq)$.

Definimos a continuación el concepto de functor contravariante de una categoría en otra, que, en definitiva, es reducible al concepto de functor, haciendo uso de la dual de una categoría.

Definición 2.139. Dadas dos categorías $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, un *functor contravariante* de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$ es un triplo $F = (\mathbf{C}, (F_0, F_1), \mathbf{D})$, denotado por $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$, en el que F_0 es una aplicación de $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ en $\mathrm{Ob}(\mathbf{D})$, F_1 una aplicación de $\mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ to $\mathrm{Mor}(\mathbf{D})$, y que cumple las siguientes condiciones:

1. Los diagramas:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "\mathrm{d}_1"'] & \mathrm{Mor}(\mathbf{D}) \arrow[d, "\mathrm{d}_0"] \\ \mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_0"'] & \mathrm{Ob}(\mathbf{D}) \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "\mathrm{d}_0"'] & \mathrm{Mor}(\mathbf{D}) \arrow[d, "\mathrm{d}_1"] \\ \mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_0"'] & \mathrm{Ob}(\mathbf{D}) \end{tikzcd}$$

   conmutan.
2. El diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_0"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathrm{Ob}(\mathbf{D}) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_1"'] & \mathrm{Mor}(\mathbf{D}) \end{tikzcd}$$

   conmuta.
3. Siendo tw el automorfismo de $\mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \prod \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ que intercambia las coordenadas y $F_1^2 \circ \mathrm{tw}$ la aplicación de $\mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \prod_{\mathrm{Ob}(\mathbf{C})} \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ en $\mathrm{Mor}(\mathbf{D}) \prod_{\mathrm{Ob}(\mathbf{D})} \mathrm{Mor}(\mathbf{D})$, que a un par (f, g) del primero le asigna el par $(F_1(g), F_1(f))$ del segundo, entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \prod_{\mathrm{Ob}(\mathbf{C})} \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_1^2 \circ \mathrm{tw}"] \arrow[d, "\circ"'] & \mathrm{Mor}(\mathbf{D}) \prod_{\mathrm{Ob}(\mathbf{D})} \mathrm{Mor}(\mathbf{D}) \arrow[d, "\circ"] \\ \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_1"'] & \mathrm{Mor}(\mathbf{D}) \end{tikzcd}$$

   conmuta.

Lo mismo que para los functores, de ahora en adelante, para un functor contravariante $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$, denotaremos mediante el mismo símbolo F a las dos aplicaciones F_0 y F_1.

Demuéstrese que dar un functor contravariante de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$ equivale a dar un functor de $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ en $\mathbf{D}$ o un functor de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}^{\mathrm{op}}$.

Ejemplo. De la categoría $\mathbf{Set}$ en la categoría $\mathbf{CABA}$, de las álgebras Booleanas completas atómicas y homomorfismos completos, tenemos el functor contravariante $\mathrm{P}^-\colon \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{CABA}$ que a un conjunto A le asigna el álgebra Booleana completa atómica $\mathbf{Sub}(A)$ y a una aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ le asigna el homomorfismo completo $f^{-1}\colon \mathbf{Sub}(B) \longrightarrow \mathbf{Sub}(A)$.

Definición 2.140. Una *dualidad* o *antiequivalencia* de una categoría $\mathbf{C}$ en otra categoría $\mathbf{D}$ es un functor contravariante F de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$ que es fiel pleno y esencialmente sobreyectivo.

Dados dos functores $F, G\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ vamos a definir a continuación el concepto de transformación natural del functor F en el functor G. Esta noción nos permitirá obtener una caracterización de las dualidades.

Definición 2.141. Sean $F, G\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ dos functores de la categoría $\mathbf{C}$ en la categoría $\mathbf{D}$. Una *transformación natural* o un *morfismo functorial* de F en G es un triplo (F, η, G), denotado por $\eta\colon F \longrightarrow G$, en el que η es una aplicación de $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ en $\mathrm{Mor}(\mathbf{D})$ tal que:

1. Para cada $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, $\eta_A\colon F(A) \longrightarrow G(A)$.
2. Para cada $f\colon A \longrightarrow B \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ el diagrama:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

conmuta. Si $\eta\colon F \longrightarrow G$ es tal que, para cada $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, $\eta_A\colon F(A) \longrightarrow G(A)$ es un isomorfismo, entonces decimos que η es un *isomorfismo functorial* de F en G.

Proposición 2.142. *Sea G un functor contravariante de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$. Una condición necesaria y suficiente para que G sea una dualidad de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$ es que exista un functor contravariante F de $\mathbf{D}$ en $\mathbf{C}$ y dos isomorfismos functoriales $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathbf{D}} \longrightarrow G \circ F$ y $\varepsilon\colon F \circ G \longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$.*

Antes de pasar a considerar las nociones topológicas necesarias para establecer la dualidad de Stone, señalamos que según Pontryagin:

> Just as the theory of groups studies the algebraic operation of multiplication in its purest aspect, so abstract topology sets as its goal the investigation of the operation of passing to the limit, disregarding all other properties of the elements under consideration. If a group can be regarded as a generalisation of the concept of real number, then a topological space should also be regarded as a generalisation of the same real numbers. Only in the first case the operation of multiplication is generalized, while in the second it is the limiting operation, or, what is the same, the concept of limit point which is generalized.

Definición 2.143. Sea X un conjunto. Una *topología* sobre X es un subconjunto $\mathcal{T}$ de $\mathrm{Sub}(X)$, a cuyos elementos los llamamos *abiertos*, que cumple las siguientes condiciones:

1. Para cada $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{T}$, $\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \mathcal{T}$.
2. Para cada $G, H \in \mathcal{T}$, $G \cap H \in \mathcal{T}$.
3. $X \in \mathcal{T}$.

Un *espacio topológico* es un par $(X, \mathcal{T})$ en el que X es un conjunto y $\mathcal{T}$ una topología sobre X.

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Un subconjunto F de X es un *cerrado* de $(X, \mathcal{T})$ si $X - F \in \mathcal{T}$.

Si $\mathcal{G} = \varnothing$, entonces $\bigcup \mathcal{G} = \varnothing \in \mathcal{T}$.

Observemos que si $\mathcal{T}$ es una topología sobre un conjunto X, entonces $\varnothing \in \mathcal{T}$, porque $\varnothing \subseteq \mathcal{T}$, $\varnothing = \bigcup \varnothing$ y, en virtud de la primera condición de la definición anterior, para cada $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{T}$, $\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \mathcal{T}$.

Debido a que la topología sobre el conjunto $\mathrm{Ufil}(\mathbf{A})$ de los ultrafiltros de un álgebra Booleana $\mathbf{A}$, la definiremos haciendo uso de unos abiertos especiales, que constituyen una base para una topología, definimos ahora este último concepto.

Definición 2.144. Sea X un conjunto. Una *base para una topología* sobre X es un subconjunto $\mathcal{B}$ de $\mathrm{Sub}(X)$, a cuyos elementos los llamamos *abiertos básicos* de $\mathcal{B}$, que cumple las siguientes condiciones:

1. $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$.
2. Para cada $U, V \in \mathcal{B}$, y cada $x \in U \cap V$, existe un $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subseteq U \cap V$.

Si $\mathcal{T}$ es una topología sobre X, una *base* de $\mathcal{T}$ es un subconjunto $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ tal que, cada abierto G de $\mathcal{T}$, se puede representar como la unión de un subconjunto de $\mathcal{B}$.

Proposición 2.145. *Toda topología $\mathcal{T}$ sobre un conjunto X es una base de $\mathcal{T}$. Además, si $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre X, entonces existe una única topología sobre X, la* topología generada *por $\mathcal{B}$, a la que denotamos por $\mathrm{Tg}_X(\mathcal{B})$, de la cual $\mathcal{B}$ es base.*

Demostración. □

Definición 2.146. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Decimos que $(X, \mathcal{T})$ es *cero-dimensional* si tiene una base formada por conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados; que $(X, \mathcal{T})$ es de *Hausdorff* si, dados dos elementos distintos $x, y \in X$, hay dos abiertos disjuntos G, H tales que $x \in G$ e $y \in H$; por último, que $(X, \mathcal{T})$ es *compacto* si, de cualquier subconjunto $\mathcal{G}$ de $\mathcal{T}$ que recubra a X, se puede extraer un subconjunto finito con la misma propiedad.

Teorema 2.147. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$:*

1. *$(X, \mathcal{T})$ es compacto.*
2. *Para cada subconjunto $\mathcal{S}$ de $\mathrm{Cl}(\mathcal{T})$, si $\mathcal{S} \neq \varnothing$ y, para cada subconjunto finito no vacío $\mathcal{L}$ de $\mathcal{S}$, $\bigcap \mathcal{L} \neq$ vacio, entonces $\bigcap \mathcal{S} \neq$ vacio, i.e., para cada subbase de filtro $\mathcal{S}$ formada por cerrados, se cumple que $\bigcap \mathcal{S} \neq$ vacio.*
3. *Si $\mathcal{I}$ es un ideal propio de $(\mathcal{T}, \subseteq)$, entonces $\bigcup \mathcal{I} \neq X$.*
4. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro de $(\mathrm{Cl}(\mathcal{T}), \subseteq)$, entonces $\bigcap \mathcal{F} \neq \varnothing$.*

Definimos ahora las aplicaciones continuas de un espacio topológico en otro, que darán lugar, como no podía ser menos, a la categoría de los espacios topológicos.

Definición 2.148. Sean $(X, \mathcal{T})$ e $(X', \mathcal{T}')$ dos espacios topológicos. Una *aplicación continua* de $(X, \mathcal{T})$ en $(X', \mathcal{T}')$ es un triplo ordenado $((X, \mathcal{T}), f, (X', \mathcal{T}'))$, abreviado como f y denotado por $f\colon (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$, en el que f es una aplicación de X en X', tal que, para cada abierto $G' \in \mathcal{T}'$, $f^{-1}[G'] \in \mathcal{T}$.

Proposición 2.149. *Sea f una aplicación continua de $(X, \mathcal{T})$ en $(X', \mathcal{T}')$, g una de $(X', \mathcal{T}')$ en $(X'', \mathcal{T}'')$ y h una de $(X'', \mathcal{T}'')$ en $(X''', \mathcal{T}''')$. Entonces:*

1. *Siendo $\mathrm{id}_{(X,\mathcal{T})} = ((X, \mathcal{T}), \mathrm{id}_A, (X, \mathcal{T}))$, se cumple que $\mathrm{id}_{(X,\mathcal{T})}\colon (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X, \mathcal{T})$, la aplicación continua* identidad *de $(X, \mathcal{T})$, es una aplicación continua de $(X, \mathcal{T})$.*
2. *Siendo $g \circ f = ((X, \mathcal{T}), g \circ f, (X'', \mathcal{T}''))$, se cumple que $g \circ f\colon (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X'', \mathcal{T}'')$, la aplicación continua* composición *de f y g, es una aplicación continua de $(X, \mathcal{T})$ en $(X'', \mathcal{T}'')$.*

3. (Asociatividad). *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathcal{T}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] \arrow[drr, bend left=60, "(h\circ g)\circ f"] \arrow[drr, bend right=60, "h\circ(g\circ f)"'] & (X',\mathcal{T}') \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\
& (X'',\mathcal{T}'') \arrow[r, "h"'] & (X''',\mathcal{T}''')
\end{tikzcd}$$

conmuta.

4. (Neutros). *Los diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathcal{T}) \arrow[r, "\mathrm{id}_{(X,\mathcal{T})}"] \arrow[dr, "f"'] & (X,\mathcal{T}) \arrow[d, "f"] \\
& (X',\mathcal{T}')
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
(X,\mathcal{T}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & (X',\mathcal{T}') \arrow[d, "\mathrm{id}_{(X',\mathcal{T}')}"] \\
& (X',\mathcal{T}')
\end{tikzcd}$$

conmutan.

Corolario 2.150. *Los espacios topológicos $(X,\mathcal{T})$ tales que $X\in\boldsymbol{\mathcal{U}}$, junto con las aplicaciones continuas entre ellos constituyen una categoría, a la que denotamos por* **Top**. *En particular, los espacios topológicos compactos, Hausdorff y cero-dimensionales, a los que llamamos espacios topológicos* Booleanos, *$(X,\mathcal{T})$ tales que $X\in\boldsymbol{\mathcal{U}}$, junto con las aplicaciones continuas entre ellos constituyen una categoría, a la que denotamos por* **BTop**.

Establecemos a continuación un Lema que nos permitirá obtener una topología, de manera optimal, sobre el dominio de una aplicación cuando el codominio de la misma esté dotado de una topología .

Lema 2.151. *Sea X un conjunto, $(X',\mathcal{T}')$ un espacio topológico y $f\colon X\longrightarrow X'$ una aplicación; situación que indicamos por:*

$$f\colon X\longrightarrow (X',\mathcal{T}').$$

Entonces hay un levantamiento optimal de $\mathcal{T}'$ a través de f, *i.e., hay una topología sobre X, denotada por $\mathrm{L}^f(\mathcal{T}')$, el* levantamiento optimal de $\mathcal{T}'$ a través de f, *tal que $((X,\mathrm{L}^f(\mathcal{T}')),f,(X',\mathcal{T}'))$ es una aplicación continua del espacio topológico $(X,\mathrm{L}^f(\mathcal{T}'))$ en el espacio topológico $(X',\mathcal{T}')$ y para cada espacio topológico $(X'',\mathcal{T}'')$ y cada aplicación $g\colon X''\longrightarrow X$, si $((X'',\mathcal{T}''),f\circ g,(X',\mathcal{T}'))$ es un morfismo de $(X'',\mathcal{T}'')$ en $(X',\mathcal{T}')$, entonces $((X'',\mathcal{T}''),g,(X,\mathrm{L}^f(\mathcal{T}')))$ lo es de $(X'',\mathcal{T}'')$ en $(X,\mathrm{L}^f(\mathcal{T}'))$. Además, se cumple que:*

1. *Para cada topología $\mathcal{U}$ sobre X:*

$$\mathrm{L}^{\mathrm{id}_X}(\mathcal{U})=\mathcal{U}.$$

2. *Si $f\colon X\longrightarrow X'$, $g\colon X'\longrightarrow X''$ son aplicaciones y $\mathcal{T}''$ una topología sobre X'', entonces:*

$$\mathrm{L}^{g\circ f}(\mathcal{T}'')=\mathrm{L}^f(\mathrm{L}^g(\mathcal{T}'')).$$

Demostración. Es suficiente tomar como $\mathrm{L}^f(\mathcal{T}')$ la topología sobre X definida como:

$$\mathrm{L}^f(\mathcal{T}') = \{\, f^{-1}[G'] \mid G' \in \mathcal{T}' \,\}.$$

□

Establecemos ahora el dual del Lema anterior, que nos permitirá obtener una topología, de manera cooptimal, sobre el codominio de una aplicación cuando el dominio de la misma esté dotado de una topología .

Lema 2.152. *Sea X un conjunto, $(X', \mathcal{T}')$ un espacio topológico y $f\colon X' \longrightarrow X$ una aplicación; situación que indicamos por:*

$$f\colon (X', \mathcal{T}') \longrightarrow X.$$

Entonces hay un levantamiento cooptimal de $\mathcal{T}'$ a través de f*, i.e., hay una topología sobre X, denotada por $\mathrm{L}_f(\mathcal{T}')$, el* levantamiento cooptimal de $\mathcal{T}'$ a través de f*, tal que $((X', \mathcal{T}'), f, (X, \mathrm{L}_f(\mathcal{T}')))$ es una aplicación continua del espacio topológico $(X', \mathcal{T}')$ en el espacio topológico $(X, \mathrm{L}_f(\mathcal{T}'))$ y para cada espacio topológico $(X'', \mathcal{T}'')$ y cada aplicación $g\colon X \longrightarrow X''$, si $((X', \mathcal{T}'), g \circ f, (X'', \mathcal{T}''))$ es un morfismo de $(X', \mathcal{T}')$ en $(X'', \mathcal{T}'')$, entonces $((X, \mathrm{L}_f(\mathcal{T}'))), g, (X'', \mathcal{T}'')$ lo es de $(X, \mathrm{L}_f(\mathcal{T}'))$ en $(X'', \mathcal{T}'')$. Además, se cumple que:*

1. *Para cada topología $\mathcal{U}$ sobre X:*
$$\mathrm{L}_{\mathrm{id}_X}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}.$$
2. *Si $f\colon X' \longrightarrow X$, $g\colon X'' \longrightarrow X'$ son aplicaciones y $\mathcal{T}''$ una topología sobre X'', entonces:*
$$\mathrm{L}_{f\circ g}(\mathcal{T}'') = \mathrm{L}_f(\mathrm{L}_g(\mathcal{T}'')).$$

Demostración. Es suficiente tomar como $\mathrm{L}_f(\mathcal{T}')$ la topología sobre X definida como:

$$\mathrm{L}_f(\mathcal{T}') = \{\, G \subseteq X \mid f^{-1}[G] \in \mathcal{T}' \,\}.$$

□

Proposición 2.153. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico compacto y C un cerrado del mismo. Entonces C es compacto, i.e., para cada subconjunto $\mathcal{G}$ de $\mathcal{T}$, si $C \subseteq \bigcup_{G\in\mathcal{G}} G$, entonces hay un subconjunto finito $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ tal que $C \subseteq \bigcup_{H\in\mathcal{H}} H$.*

Demostración. □

Proposición 2.154. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico de Hausdorff y C un compacto del mismo. Entonces C es cerrado.*

Demostración. □

Proposición 2.155. *Sea $f\colon (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$ una aplicación continua. Si $(X, \mathcal{T})$ es compacto y f sobreyectiva, entonces $(X', \mathcal{T}')$ es compacto. Además, si f es inyectiva y $(X', \mathcal{T}')$ es de Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo, i.e., f es biyectiva y bicontinua.*

Demostración. □

Proposición 2.156. *Si A y B son subconjuntos compactos disjuntos de un espacio de Hausdorff $(X, \mathcal{T})$, entonces hay entornos disjuntos de A y B. Por lo tanto cada espacio topológico compacto y Hausdorff es normal.*

Del exioma de elección se deduce el teorema de Tychonoff.

Teorema 2.157 (Higgins)**.** *Sea $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos compactos. Entonces $\prod_{i\in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$ es compacto.*

Demostración. Suponemos que $I \neq \varnothing$ y que, para cada $i \in I$, $X_i \neq \varnothing$, ya que en caso contrario, el resultado es obviamente cierto. Sea $\mathcal{T}$ la mínima topología sobre $\prod_{i\in I} X_i$ para la que las proyecciones canónicas son contínuas.

En principio hemos de demostrar que, para cada ideal propio $\mathcal{I}$ de $(\mathcal{T}, \subseteq)$, $\bigcup \mathcal{I} \neq \prod_{i\in I} X_i$. Pero, debido a que cada ideal propio está contenido en uno maximal, es suficiente que demostremos que, para cada ideal maximal $\mathcal{M}$ de $(\mathcal{T}, \subseteq)$, $\bigcup \mathcal{M} \neq \prod_{i\in I} X_i$, ya que $\bigcup \mathcal{I} \subseteq \bigcup \mathcal{M}$, si el ideal propio $\mathcal{I}$ está contenido en el ideal maximal $\mathcal{M}$.

Sea $\mathcal{M}$ un ideal maximal de $(\mathcal{T}, \subseteq)$ y, para cada $i \in I$, sea $\mathcal{M}_i$ el subconjunto de $\mathcal{T}_i$ definido como:

$$\mathcal{M}_i = \{\, G \in \mathcal{T}_i \mid \mathrm{pr}_i^{-1}[G] \in \mathcal{M} \,\}.$$

Se cumple que, para cada $i \in I$, $\mathcal{M}_i$ es un ideal propio de $(\mathcal{T}_i, \subseteq)$ (comprobarlo), luego, por ser $(X_i, \mathcal{T}_i)$ compacto, $\bigcup \mathcal{M}_i \neq X_i$. Sea $x \in \prod_{i\in I}(X_i - \bigcup \mathcal{M}_i)$. Entonces $x \notin \bigcup \mathcal{M}$. Supongamos lo contrario, i.e., que $x \in \bigcup \mathcal{M}$, entonces hay un abierto $G \in \mathcal{M}$ tal que $x \in G$. Por lo tanto hay un $n \in \mathrm{N} - 1$, una familia $(i_\alpha)_{\alpha\in n}$ en I y una familia de abiertos $(G_{i_\alpha})_{\alpha\in n}$, con $G_{i_\alpha} \in \mathcal{T}_{i_\alpha}$, para cada $\alpha \in n$, tal que

$$x \in \bigcap\nolimits_{\alpha\in n} \mathrm{pr}_{i_\alpha}^{-1}[G_{i_\alpha}] \subseteq G.$$

Ahora bien, por ser $\mathcal{M}$ maximal y cumplirse que $\bigcap_{\alpha\in n} \mathrm{pr}_{i_\alpha}^{-1}[G_{i_\alpha}] \in \mathcal{M}$, esto último, por ser $\mathcal{M}$ ideal y estar $\bigcap_{\alpha\in n} \mathrm{pr}_{i_\alpha}^{-1}[G_{i_\alpha}]$ incluido en un elemento G de $\mathcal{M}$, hay un $\beta \in n$ tal que $\mathrm{pr}_{i_\beta}^{-1}[G_{i_\beta}] \in \mathcal{M}$, luego hay un $\beta \in n$ tal que $G_{i_\beta} \in \mathcal{M}_{i_\beta}$, pero $x_{i_\beta} \in G_{i_\beta} \subseteq \bigcup \mathcal{M}_{i_\beta}$ y $x_{i_\beta} \in X_{i_\beta} - \bigcup \mathcal{M}_{i_\beta}$, absurdo. Por lo tanto $X \neq \bigcup \mathcal{M}$, y $\prod_{i\in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$ es compacto. □

El axioma de elección es equivalente al teorema de Tychonoff.

Teorema 2.158. *Si el producto de espacios topológicos compactos es compacto, entonces el producto cartesiano de una familia no vacía $(X_i)_{i\in I}$ de conjuntos no vacíos, no es vacío.*

Demostración. Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos. Entonces, para el conjunto $\omega = \{\, X_i \mid i \in I \,\}$, que tiene la propiedad de ser un conjunto porque es la imagen de la función $(X_i)_{i\in I}$, se cumple que, para cada $i \in I$, $\omega \notin X_i$, ya que en caso contrario, i.e., si existiera un $i \in I$ tal que $\omega \in X_i$, entonces existiría una cadena del tipo $X_i \in \omega \in X_i$, lo cual es imposible, por el axioma de regularidad. Sea, para $i \in I$, $X_i^* = X_i \cup \{\, \omega \,\}$ y $\mathcal{T}_{i,\omega} = \{\, \varnothing, X_i, \{\, \omega \,\}, X_i^* \,\}$. Entonces se cumple que $(X_i^*, \mathcal{T}_{i,\omega})$ es un espacio topológico compacto, luego, por el teorema de Tychonoff, $\prod_{i\in I}(X_i^*, \mathcal{T}_{i,\omega})$ es un espacio topológico compacto. Sea, para $i \in I$, $F_i = \mathrm{pr}_i^{-1}[X_i]$, que es un cerrado de $\prod_{i\in I}(X_i^*, \mathcal{T}_{i,\omega})$. Entonces el conjunto no vacío $\{\, F_i \mid i \in I \,\}$ tiene la propiedad de la intersección finita, i.e., para cada subconjunto finito no vacío J de I, se cumple que $\bigcap_{j\in J} F_j \neq \varnothing$, porque la función x de I en $\bigcup_{i\in I} X_i^*$ definida, para $j \in J$, como $x_j = a_j$, siendo a_j un elemento arbitrario pero fijo de X_j, y, para $i \in I - J$, como $x_i = \omega$ pertenece, no sólo a $\prod_{i\in I} X_i^*$, sino a $\bigcap_{j\in J} F_j$. Por lo tanto $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \varnothing$, pero $\prod_{i\in I} X_i = \bigcap_{i\in I} F_i$, luego $\prod_{i\in I} X_i \neq \varnothing$. □

Proposición 2.159. *Sea $\mathbf{A}$ un álgebra Booleana. El subconjunto $\mathcal{B}_{\mathbf{A}}$ de* $\mathrm{Sub}(\mathrm{Ufil}(\mathbf{A}))$ *definido como:*

$$\mathcal{B}_{\mathbf{A}} = \{\, \mathrm{B}_a \mid a \in A \,\},$$

siendo, para cada $a \in A$, B_a el conjunto definido como:

$$\mathrm{B}_a = \{\, F \in \mathrm{Ufil}(\mathbf{A}) \mid a \in F \,\},$$

tiene las siguientes propiedades:

1. *Para cada $a, b \in A$,* $\mathrm{B}_a \cup \mathrm{B}_b = \mathrm{B}_{a\vee b}$.

2. *Para cada* $a, b \in A$, $\mathrm{B}_a \cap \mathrm{B}_b = \mathrm{B}_{a \wedge b}$.
3. *Para cada* $a \in A$, $\mathrm{B}_{\neg a} = \complement_{\mathrm{Ufil}(\mathbf{A})} \mathrm{B}_a$.

Por lo tanto $\mathcal{B}_{\mathbf{A}}$ *es una base para una topología sobre* $\mathrm{Ufil}(\mathbf{A})$. *Al espacio topológico* $(\mathrm{Ufil}(\mathbf{A}), \mathrm{Tg}_{\mathrm{Ufil}(\mathbf{A})}(\mathcal{B}_{\mathbf{A}}))$ *lo denotamos por* $\mathrm{St}(\mathbf{A})$ *y lo denominamos el espacio topológico de* Stone *del álgebra Booleana* $\mathbf{A}$.

Demostración. □

Teorema 2.160 (Stone)**.** *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra Booleana. Entonces* $\mathrm{St}(\mathbf{A})$ *es un espacio topológico Booleano. Además, si* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *es un homomorfismo de álgebras Booleanas, entonces la aplicación*

$$\mathrm{St}(f) \begin{cases} \mathrm{St}(\mathbf{B}) & \longrightarrow \mathrm{St}(\mathbf{A}) \\ \quad G & \longmapsto f^{-1}[G], \end{cases}$$

es una aplicación continua de $\mathrm{St}(\mathbf{B})$ *en* $\mathrm{St}(\mathbf{A})$ *y se cumple que:*

1. *Para cada álgebra Booleana* $\mathbf{A}$, $\mathrm{St}(\mathrm{id}_{\mathbf{A}}) = \mathrm{id}_{\mathrm{St}(\mathbf{A})}$.
2. *Para cada par de homomorfismos* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *y* $g\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$, $\mathrm{St}(g \circ f) = \mathrm{St}(f) \circ \mathrm{St}(g)$.

Por lo tanto $\mathrm{St}\colon \mathbf{Bool} \longrightarrow \mathbf{BTop}$ *es un functor contravariante de la categoría de álgebras Booleanas en la categoría de espacios topológicos Booleanos y es una dualidad.*

Demostración. □

Demuéstrese que la categoría **Set** es antiequivalente a la categoría **CABA** de las álgebras Booleanas completas atómicas y homomorfismos de álgebras Booleanas completos.

3. Lógica proposicional clásica.

Nos ocupamos ahora del estudio de la lógica proposicional. Para ello, una vez establecido el concepto de lenguaje de orden cero, o lenguaje proposicional, definimos el conjunto de las fórmulas proposicionales relativas a un lenguaje proposicional, como el conjunto subyacente de un álgebra libre sobre un conjunto de variables proposicionales. Ello nos permitirá obtener un principio de demostración por inducción algebraica sobre las fórmulas proposicionales y un principio de definición por recursión algebraica sobre las mismas. A continuación definiremos la noción de cálculo proposicional clásico, a partir de la cual obtendremos el operador de consecuencia sintáctica del que demostraremos que es un operador de clausura algebraico y una vez definida la noción de valoración y de modelo de un conjunto de fórmulas proposicionales, definiremos la noción de consecuencia semántica entre conjuntos de fórmulas y fórmulas y demostraremos que las relaciones de consecuencia sintáctica y semántica coinciden. Además, demostraremos el teorema de deducción de Herbrand-Tarski, definiremos la noción de dualidad en la lógica proposicional, demostraremos los teoremas de la forma normal conjuntiva y disyuntiva, el teorema de interpolación, la completud funcional del álgebra Booleana **2** y la equivalencia entre una categoría cociente de la categoría de preteorías proposicionales y la de las álgebras Booleanas.

Respecto de lo que sea la lógica dicen Font & Jansana en [**?**]:

> Every proposal of a scientific theory that aims for a reasonable degree of generality must first provide an answer to a preliminary methodological question: What should its basic objects of study be? In the case of Sentential Logic, several answers can be found in the literature: For some, a logic is a set of formulas (probably closed under substitution and other rules), while for others it is a relation of consequence among

> formulas (in both cases, defined either semantically or sintactically); but for others, a logic is a "calculus", either of a "Hilbert style"or of a "Gentzen style", or for some other kind of formalism, while some think that a logic should necessarily incorporate both a calculus and a semantics; for others, forcing the meaning of the word slightly outside its natural scope, a logic is just an algebra, or a truth-table....
> We entirely agree that the study of all the issues just mentioned belong to *logic* as a scientific discipline; but when faced with the question of what *a logic* is, we prefer a more neutral view that sees logic as the study of the notion of formal logical consequence; accordingly, a sentential logic is for us just a structural consequence relation (or consequence operation) on the algebra of sentential formulas.

A las anteriores opiniones cabe añadir que, para algunos, una lógica no es más que un tipo de 2-categoría estructurada.

Definición 3.1. Un *lenguaje de orden cero*, o un *lenguaje proposicional* es un par $\mathcal{L} = (V, \mathbf{\Lambda})$, en el que V es un conjunto no vacío, de *variables proposicionales*, $\mathbf{\Lambda}$ una signatura algebraica, a la que denominamos la signatura *lógica*, tal que, para cada $n \in \mathrm{N}$, los conjuntos Λ_n, de símbolos de operación lógicos, están definidos como:

1. $\Lambda_1 = \{\neg\}$.
2. $\Lambda_2 = \{\rightarrow\}$.
3. $\Lambda_n = \varnothing$, si $n \neq 1, 2$,

Definición 3.2. El conjunto $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, de las *$\mathcal{L}$-fórmulas proposicionales* es:

$$\mathrm{Fm}(\mathcal{L}) = \mathrm{T}_{\mathbf{\Lambda}}(V),$$

i.e., el conjunto subyacente de la $\mathbf{\Lambda}$-álgebra libre sobre el conjunto V.

De modo que para cada $\mathcal{L}$-fórmula proposicional φ o bien $\varphi = (v)$, para una única $v \in V$, o bien $\varphi = (\neg)\psi$, para una única fórmula ψ, o bien $\varphi = (\rightarrow)\psi\xi$, para un único par de fórmulas ψ y ξ.

Para abreviar, convenimos en identificar las fórmulas proposicionales del tipo (v) con v y en denotar a las de la forma $(\neg)\psi$, resp., de la forma $(\rightarrow)\psi\xi$ por $\neg\psi$, resp., por $\psi \rightarrow \xi$. Además, utilizaremos paréntesis cuando sea necesario para evitar ambigüedades y convenimos que $\varphi \vee \psi$ está por $\neg\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \wedge \psi$ por $\neg(\varphi \rightarrow \psi)$ y $\varphi \leftrightarrow \psi$ por $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \psi)$. Debe quedar claro que los paréntesis no son símbolos de la signatura algebraica, son simplemente símbolos auxiliares, cuya finalidad ya ha sido indicada.

Los miembros de $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ denotan funciones, esencialmente, finitarias, que se realizan como tales sobre conjuntos que estén dotados de una estructura de $\mathbf{\Lambda}$-álgebra.

En virtud de la definición del conjunto de las $\mathcal{L}$-fórmulas, como el conjunto subyacente de la $\mathbf{\Lambda}$-álgebra libre sobre el conjunto V, disponemos de un principio de demostración por inducción algebraica y de un principio de definición por recursión algebraica sobre las $\mathcal{L}$-fórmulas.

Corolario 3.3. *Sea $F \subseteq \mathrm{W}_{\mathbf{\Lambda}}(V)$. Si F es un cerrado de la $\mathbf{\Lambda}$-álgebra $\mathbf{W}_{\mathbf{\Lambda}}(V)$ y además $\{\, (v) \mid v \in V\} \subseteq F$, entonces $\mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \subseteq F$.*

Corolario 3.4. *El par ordenado* $(\eta_V, \mathbf{Fm}(\mathcal{L}))$ *en el que* η_V *es la única aplicación de* V *en* $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\eta_V"'] \arrow[d, "\mathrm{in}_V"] \\ & \Lambda \coprod V \arrow[d, "\eta_{\Lambda\coprod V}"] \\ \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}"'] & \mathrm{Ml}(\Lambda \coprod V) \end{tikzcd}$$

conmuta, tiene la propiedad de que, para cada $\mathbf{\Lambda}$*-algebra* $\mathbf{A}$ *y cada aplicación* $f\colon V \longrightarrow A$*, existe un único homomorfismo* $f^\sharp$ *de* $\mathbf{Fm}(\mathcal{L})$ *en* $\mathbf{A}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \arrow[d, "f^\sharp"] \\ & A \end{tikzcd}$$

conmuta.

Definición 3.5. Denotamos por $\mathrm{Var}_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}$ el único homomorfismo de $\mathbf{Fm}(\mathcal{L})$ en $\mathbf{Fin}_{\mathbf{\Lambda}}(V)$ tal que, para cada $v \in V$, $\mathrm{Var}_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}((v)) = \{v\}$, siendo $\mathbf{Fin}_{\mathbf{\Lambda}}(V)$ la $\mathbf{\Lambda}$-álgebra cuyo conjunto subyacente es $\mathrm{Sub}_{\mathrm{f}}(V)$ y en la que las operaciones estructurales son:

1. $F_{\neg} = \mathrm{id}_{\mathrm{Sub}_{\mathrm{f}}(V)}$.
2. $F_{\rightarrow} = \cup$.

Definimos a continuación el proceso de substitución de las variables de una fórmula proposicional por otras fórmulas proposicionales.

Definición 3.6. A los endomorfismos de $\mathbf{Fm}(\mathcal{L})$ los denominamos *substituciones.*

Si $(\varphi_v \mid v \in V)\colon V \longrightarrow \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, entonces el *soporte* de $(\varphi_v \mid v \in V)$ es el conjunto definido como:

$$\mathrm{Supp}(\varphi_v \mid v \in V) = \{\, v \in V \mid \varphi_v \neq (v)\,\},$$

y a las substituciones de la forma $(\varphi_v \mid v \in V)^\sharp$ tales que $\mathrm{card}(\mathrm{Supp}(\varphi_v \mid v \in V))$ sea finito, las denominamos substituciones de *soporte finito.* Esta última clase de substituciones la obtenemos a partir de un $n \in \mathbb{N}$ una familia $(v_i \mid\in n)\colon n \rightarrowtail V$ y una familia $(\varphi_i \mid i \in n) \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})^n$, considerando, en primer lugar, la aplicación $\binom{v_i}{\varphi_i}_{i\in n}$ de V en $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ definida como:

$$\binom{v_i}{\varphi_i}_{i\in n} \begin{cases} V \longrightarrow \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \\ v \longmapsto \binom{v_i}{\varphi_i}_{i\in n}(v) = \begin{cases} (v), & \text{si para cada } i \in n,\ v \neq v_i; \\ \varphi_i, & \text{si hay un } i \in n \text{ tal que } v = v_i, \end{cases} \end{cases}$$

y, a continuación $\binom{v_i}{\varphi_i}^\sharp_{i\in n}$, la extensión canónica de $\binom{v_i}{\varphi_i}_{i\in n}$ hasta $\mathbf{Fm}(\mathcal{L})$, que es el único endomorfismo de $\mathbf{Fm}(\mathcal{L})$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[dr, "\binom{v_i}{\varphi_i}_{i\in n}"'] & \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \arrow[d, "\binom{v_i}{\varphi_i}^\sharp_{i\in n}"] \\ & \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \end{tikzcd}$$

conmuta. Al operador $\binom{v_i}{\varphi_i}^\sharp_{i\in n}$ lo denominamos el *operador de substitución* relativo a $(v_i \mid i\in n)\in V^n$ y $(\varphi_i \mid i\in n)$

Convenimos que, para $n=0$, $\binom{v_i}{\varphi_i}_{i\in 0}=\eta_V$ y entonces $\binom{v_i}{\varphi_i}^\sharp_{i\in 0}=\mathrm{id}_{\mathbf{Fm}(\mathcal{L})}$.

Debemos observar que, para una fórmula proposicional ψ, el resultado de la acción de un operador de substitución $\binom{v_i}{\varphi_i}^\sharp_{i\in n}$ es:

$$\binom{v_i}{\varphi_i}^\sharp_{i\in n}(\psi)=\begin{cases}(v), & \text{si } \psi=(v) \text{ y para cada } i\in n,\ v\neq v_i;\\ \varphi_i, & \text{si } \psi=(v_i) \text{ para un } i\in n;\\ \neg\binom{v_i}{\varphi_i}^\sharp_{i\in n}(\alpha), & \text{si } \psi=\neg\alpha;\\ \binom{v_i}{\varphi_i}^\sharp_{i\in n}(\alpha)\to\binom{v_i}{\varphi_i}^\sharp_{i\in n}(\beta), & \text{si } \psi=\alpha\to\beta.\end{cases}$$

De modo que la fórmula $\binom{v_i}{\varphi_i}^\sharp_{i\in n}(\psi)$ es el resultado de la substitución simultánea de las variables proposicionales v_i por las fórmulas φ_i en la fórmula ψ.

Proposición 3.7. *Sea* $n\in\mathbb{N}$, $(v_i \mid i\in n)\colon n \rightarrowtail V$, $(\varphi_i \mid i\in n)\in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})^n$ *y* $f\colon V\longrightarrow 2$. *Entonces*

$$f^\sharp\circ\binom{v_i}{\varphi_i}^\sharp_{i\in n}=\left(f^\sharp\circ\binom{v_i}{\varphi_i}_{i\in n}\right)^\sharp.$$

Demostración. Es suficiente que tomemos en consideración los diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[dr, "\binom{v_i}{\varphi_i}_{i\in n}"'] \arrow[ddr, bend right, "f^\sharp\circ\binom{v_i}{\varphi_i}_{i\in n}"'] & \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \arrow[d, "\binom{v_i}{\varphi_i}^\sharp_{i\in n}"] \arrow[dd, bend left, "f^\sharp\circ\binom{v_i}{\varphi_i}^\sharp_{i\in n}"] \\
V \arrow[r, "\eta_V"'] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \arrow[d, "f^\sharp"] \\
 & 2
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[dr, "f^\sharp\circ\binom{v_i}{\varphi_i}_{i\in n}"'] & \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \arrow[d, "\left(f^\sharp\circ\binom{v_i}{\varphi_i}_{i\in n}\right)^\sharp"] \\
 & 2
\end{tikzcd}$$

□

Demuéstrese que dados $m,n\in\mathbb{N}$, las familias de variables proposicionales $(v_i \mid i\in m)\colon m\rightarrowtail V$, $(w_j \mid j\in n)\colon n\rightarrowtail V$, las familias de fórmulas proposicionales $(\varphi_i \mid i\in m)\in\mathrm{Fm}(\mathcal{L})^m$, $(\psi_j \mid i\in n)\in\mathrm{Fm}(\mathcal{L})^n$ y siendo además $\{\, w_j \mid j\in n\,\}-\{\, v_i \mid i\in m\,\}=\{\, w_{j_\alpha} \mid \alpha\in p\,\}$, se cumple que

$$\left(\binom{w_{j_\alpha}}{\psi_{j_\alpha}}_{\alpha\in p}\amalg\binom{v_i}{\binom{w_j}{\psi_j}^\sharp_{j\in n}(\varphi_i)}_{i\in m}\right)^\sharp=\binom{w_j}{\psi_j}^\sharp_{j\in n}\circ\binom{v_i}{\varphi_i}^\sharp_{i\in m}.$$

Proposición 3.8. *Para cada fórmula proposicional* φ *y cualesquiera valoraciones* $f,g\colon V\longrightarrow 2$, *si* $\mathrm{Var}_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}(\varphi)\subseteq\mathrm{Eq}(f,g)$, *entonces* $f^\sharp(\varphi)=g^\sharp(\varphi)$.

Demostración. □

Definición 3.9. Sea $\mathcal{L}=(V,\mathbf{\Lambda})$ un lenguaje proposicional. Entonces el $\mathcal{L}$-*cálculo proposicional clásico* es el triplo $\mathbf{Prop}(\mathcal{L})=(\mathrm{Fm}(\mathcal{L}),\mathrm{Ax},\mathrm{MP})$ en el que Ax, el conjunto de los *axiomas de la lógica proposicional clásica*, es el subconjunto del conjunto de las fórmulas proposicionales formado por las $\delta\in\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tales que:

$$\delta=\begin{cases}\varphi\to(\psi\to\varphi), & \text{para un } (\varphi,\psi)\in\mathrm{Fm}(\mathcal{L})^2;\text{ o}\\ (\varphi\to(\psi\to\chi))\to((\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\chi)), & \text{para un } (\varphi,\psi,\chi)\in\mathrm{Fm}(\mathcal{L})^3;\text{ o}\\ (\neg\varphi\to\neg\psi)\to(\psi\to\varphi), & \text{para un } (\varphi,\psi)\in\mathrm{Fm}(\mathcal{L})^2,\end{cases}$$

y MP, la regla de inferencia *modus ponens*, la aplicación de $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})^2$ en $\mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L}))$ definida como:

$$\mathrm{MP}\begin{cases} \mathrm{Fm}(\mathcal{L})^2 \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L})) \\ (\varphi,\chi) \longmapsto \mathrm{MP}(\varphi,\chi) = \begin{cases} \{\psi\}, & \text{si } \chi = \varphi \to \psi; \\ \varnothing, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \end{cases}$$

Al conjunto de las fórmulas de la forma $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ lo denotamos por Ax_1, al de las fórmulas de la forma $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$ por Ax_2 y, por último, al de las fórmulas de la forma $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$ por Ax_3. Además, denotamos por $\mathrm{Cl}(\mathbf{Prop}(\mathcal{L}))$ el conjunto de los subconjuntos de $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ que contienen al conjunto de los axiomas y están cerrados bajo el modus ponens.

Proposición 3.10. *Sea* $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$. *Entonces hay un único conjunto de fórmulas proposicionales* $\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma)$, *el conjunto de las* consecuencias sintácticas *de* Γ, *tal que:*

1. $\mathrm{Ax} \cup \Gamma \subseteq \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma)$.
2. *Para cada* $\varphi, \psi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, *si* $\varphi, \varphi \to \psi \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma)$, *entonces* $\psi \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma)$.
3. *Para cada* $\Theta \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, *si* $\mathrm{Ax}\cup\Gamma \subseteq \Theta$ *y, para cada* $\varphi, \psi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, *si cuando* $\varphi, \varphi \to \psi \in \Theta$, *entonces* $\psi \in \Theta$, *entonces* $\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma) \subseteq \Theta$.

Demostración. □

Definición 3.11. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional. Entonces $\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}$, al que denominamos el *operador de consecuencia sintáctica* del cálculo proposicional clásico $\mathbf{Prop}(\mathcal{L})$, es el operador sobre $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ que a un conjunto de fórmulas proposicionales Γ le asigna el conjunto $\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma)$ de las consecuencias sintácticas de Γ, o los Γ-*teoremas*, en $\mathbf{Prop}(\mathcal{L})$. Además, consideramos sinónimas las expresiones $\varphi \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma)$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$. Por otra parte, a los miembros de $\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\varnothing)$ los denominamos *teoremas* del cálculo proposicional clásico $\mathbf{Prop}(\mathcal{L})$ y consideramos sinónimas las expresiones $\varphi \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\varnothing)$, $\varnothing \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ y $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.

Corolario 3.12. *Sea* $\mathcal{L}$ *un lenguaje proposicional. Entonces la endoaplicación* $\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}$ *del conjunto* $\mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L}))$, *definida como:*

$$\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}\begin{cases} \mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L})) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L})) \\ \qquad\Gamma \qquad\longmapsto \bigcap\{\, \Delta \in \mathrm{Cl}(\mathbf{Prop}(\mathcal{L})) \mid \Gamma \subseteq \Delta \,\} \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{Im}(\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}) \subseteq \mathrm{Cl}(\mathbf{Prop}(\mathcal{L}))$.
2. $\{\, \Gamma \in \mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L})) \mid \Gamma = \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma) \,\} = \mathrm{Cl}(\mathbf{Prop}(\mathcal{L}))$.
3. $\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}$ *es extensiva o inflacionaria, i.e., para cada* $\Gamma \in \mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L}))$,
$$\Gamma \subseteq \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma).$$
4. $\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}$ *es isótona, i.e., para cada* $\Gamma, \Delta \in \mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L}))$, *si* $\Gamma \subseteq \Delta$, *entonces*
$$\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma) \subseteq \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Delta).$$
5. $\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}$ *es idempotente, i.e., para cada* $\Gamma \in \mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L}))$,
$$\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma) = \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma)).$$
6. $\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}$ *es algebraica, i.e., para cada familia* $(\Gamma_i \mid i \in I)$ *en* $\mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L}))$, *si* $I \neq \varnothing$ *y para cada* $i, j \in I$, *existe un* $k \in I$ *tal que* $\Gamma_i \cup \Gamma_j \subseteq \Gamma_k$, *entonces*
$$\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}\big(\textstyle\bigcup_{i\in I}\Gamma_i\big) = \textstyle\bigcup_{i\in I}\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma_i).$$
7. *Para cada endomorfismo* f *de* $\mathbf{Fm}(\mathcal{L})$ *y cada* $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, *se cumple que:*
$$f[\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma)] \subseteq \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(f[\Gamma]).$$

Por consiguiente, para cada $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, $\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma)$ *es el mínimo cerrado de* $\mathbf{Prop}(\mathcal{L})$ *que contiene a* Γ, *y lo denominamos el cerrado de* $\mathbf{Prop}(\mathcal{L})$ generado *por* Γ.

Demostración. □

Demuéstrese que $\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\varnothing) = \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Ax})$.

El hecho de que el $\mathcal{L}$-cálculo proposicional clásico $\mathbf{Prop}(\mathcal{L}) = (\mathrm{Fm}(\mathcal{L}), \mathrm{Ax}, \mathrm{MP})$ determine el par $(\mathbf{Fm}(\mathcal{L}), \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}})$, formado por un álgebra y un operador clausura algebraico estructural sobre el conjunto subyacente de la misma, es el punto de partida para construir una teoría, la de las *lógicas abstractas* y morfismos entre ellas, que estudiaremos posteriormente.

Proposición 3.13. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional, $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ y $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$. Una condición necesaria y suficiente para que $\varphi \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma)$ es que exista un $n \in \mathrm{N}-1$ y una familia $(\psi_i \mid i \in n)$ en $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tal que $\varphi = \psi_{n-1}$ y $\forall i \in n$, $\psi_i \in \mathrm{Ax}$, o $\psi_i \in \Gamma$, o $\exists j, k \in i$ tales que $\psi_i \in \mathrm{MP}(\psi_j, \psi_k)$ (de modo que, en este último caso, ψ_k tiene la forma $\psi_j \to \psi_i$). En particular, una condición necesaria y suficiente para que $\varphi \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\varnothing)$ es que exista un $n \in \mathrm{N} - 1$ y una familia $(\psi_i \mid i \in n)$ en $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tal que $\varphi = \psi_{n-1}$ y $\forall i \in n$, $\psi_i \in \mathrm{Ax}$, o $\exists j, k \in i$ tales que $\psi_i \in \mathrm{MP}(\psi_j, \psi_k)$.*

Demostración. □

Lema 3.14. *Para cada $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ se cumple que $\varphi \to \varphi \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\varnothing)$*

Demostración. La sucesión que sigue constituye una deducción de $\varphi \to \varphi$ a partir del conjunto vacío:

(1)	$(\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$	(Ax_2)
(2)	$\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$	(Ax_1)
(3)	$(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$	(MP((1), (2)))
(4)	$\varphi \to (\varphi \to \varphi)$	(Ax_1)
(5)	$\varphi \to \varphi$	(MP((3),(4)))

□

A continuación establecemos el teorema de deducción de Herbrand-Tarski.

Teorema 3.15 (Herbrand-Tarski)**.** *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional, $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ y $\varphi, \psi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$. Una condición necesaria y suficiente para que $\psi \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma \cup \{\varphi\})$ es que $\varphi \to \psi \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma)$, i.e., se cumple que:*

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{L}} \psi \quad \textit{precisamente si} \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi.$$

Demostración. Supongamos que $\varphi \to \psi \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma)$. Puesto que $\Gamma \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$, $\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma) \subseteq \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma \cup \{\varphi\})$, por lo tanto $\varphi \to \psi \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma \cup \{\varphi\})$. Pero ya que también $\varphi \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma \cup \{\varphi\})$, se cumple que $\psi \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma \cup \{\varphi\})$.

Recíprocamente, supongamos que $\psi \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma \cup \{\varphi\})$. Entonces hay un $n \in \mathrm{N}-1$ y una familia $(\psi_i \mid i \in n)$ en $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tal que $\psi = \psi_{n-1}$ y $\forall i \in n$, $\psi_i \in \mathrm{Ax}$, o $\psi_i \in \Gamma \cup \{\varphi\}$, o $\exists j, k \in i$ tales que $\psi_i \in \mathrm{MP}(\psi_j, \psi_k)$ (de modo que, en este último caso, ψ_k tiene la forma $\psi_j \to \psi_i$). Si $n = 1$, entonces, necesariamente, $\psi = \psi_0$. Luego $\psi \in \mathrm{Ax}$ o $\psi \in \Gamma \cup \{\varphi\}$. Si $\psi \in \mathrm{Ax}$, entonces $(\psi, \psi \to (\varphi \to \psi), \varphi \to \psi)$ es una deducción de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ, i.e., $\varphi \to \psi \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma)$. Si $\psi \in \Gamma \cup \{\varphi\}$, entonces $\psi \in \Gamma$ o $\psi = \varphi$. Si $\psi \in \Gamma$, entonces $(\psi, \psi \to (\varphi \to \psi), \varphi \to \psi)$ es una deducción de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ, i.e., $\varphi \to \psi \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma)$. Si $\psi = \varphi$, entonces $\varphi \to \varphi \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\varnothing)$, luego $\varphi \to \varphi \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma)$.

Supongamos que la deducción $(\psi_i \mid i \in n)$ de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$ tenga longitud $n > 1$, y que el teorema se cumpla para todas las fórmulas χ que se puedan deducir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$ mediante una sucesión con menos de n términos. Tenemos ahora que ψ es un axioma, o $\psi \in \Gamma \cup \{\varphi\}$, o que ψ se obtiene de dos fórmulas anteriores mediante MP. En los dos primeros casos se procede como antes. Supongamos que ψ se obtenga de dos fórmulas anteriores ψ_j, ψ_k, mediante MP. Entonces $\psi_j \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma \cup \{\varphi\})$ y $\psi_j \to \psi \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma \cup \{\varphi\})$, luego $\varphi \to \psi_j \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma)$ y $\varphi \to (\psi_j \to \psi) \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma)$. Así que hay un $p \in \mathrm{N}-1$ y una familia $(\delta_i \mid i \in p)$ en $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tal que $\varphi \to \psi_j = \delta_{p-1}$ y $\forall i \in p$, $\delta_i \in \mathrm{Ax}$, o $\delta_i \in \Gamma$, o $\exists j, k \in i$ tales que $\delta_i \in \mathrm{MP}(\delta_j, \delta_k)$ y hay un $q \in \mathrm{N}-1$ y una familia $(\varepsilon_i \mid i \in q)$ en $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tal que $\varphi \to (\psi_j \to \psi) = \varepsilon_{q-1}$ y $\forall i \in q$, $\varepsilon_i \in \mathrm{Ax}$, o $\varepsilon_i \in \Gamma$, o $\exists j, k \in i$ tales que $\varepsilon_i \in \mathrm{MP}(\varepsilon_j, \varepsilon_k)$. Concatenando las dos sucesiones anteriores y agregándoles las fórmulas $(\varphi \to (\psi_j \to \psi)) \to ((\varphi \to \psi_j) \to (\varphi \to \psi))$, $(\varphi \to \psi_j) \to (\varphi \to \psi)$ y $\varphi \to \psi$ obtenemos una deducción de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ. □

Demostramos a continuación que una serie de fórmulas proposicionales son teoremas. Esto será usado para demostrar el teorema de completud, que establece la coincidencia entre la relación de consecuencia sintáctica y la relación de consecuencia semántica, definida más adelante, mediante el concepto de valoración de las variables proposicionales de una fórmula en una cierta álgebra booleana.

Lema 3.16 (Transitividad)**.** *Sean φ, ψ y χ fórmulas proposicionales. Entonces*

$$\vdash_{\mathcal{L}} (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)).$$

Demostración. En virtud del teorema de Herbrand-Tarski, demostrar

$$\vdash_{\mathcal{L}} (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$$

equivale a demostrar

$$\{\, \varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi \,\} \vdash_{\mathcal{L}} \chi.$$

Ahora bien, siendo $\Gamma = \{\, \varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi \,\}$, tenemos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi$, luego, por MP, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$. Pero $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \psi \to \chi$, luego, por MP, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \chi$. □

Lema 3.17 (Intercambio de premisas)**.** *Sean φ, ψ y χ fórmulas proposicionales. Entonces*

$$\vdash_{\mathcal{L}} (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi)).$$

Demostración. En virtud del teorema de Herbrand-Tarski, demostrar

$$\vdash_{\mathcal{L}} (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$$

equivale a demostrar

$$\{\, \varphi \to (\psi \to \chi), \psi, \varphi \,\} \vdash_{\mathcal{L}} \chi.$$

Ahora bien, siendo $\Gamma = \{\, \varphi \to (\psi \to \chi), \psi, \varphi \,\}$, tenemos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to (\psi \to \chi)$, luego, por MP, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \psi \to \chi$. Pero $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$, luego, por MP, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \chi$. □

Lema 3.18. *Sean φ y ψ fórmulas proposicionales. Entonces*

$$\vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to (\neg\varphi \to \psi).$$

Demostración. En virtud del teorema de Herbrand-Tarski, demostrar

$$\vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$$

equivale a demostrar

$$\{\, \varphi, \neg\varphi \,\} \vdash_{\mathcal{L}} \psi.$$

Ahora bien, siendo $\Gamma = \{\, \varphi, \neg\varphi \,\}$, tenemos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$, porque $\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ es del tipo Ax_1, y $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$, luego, por MP, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\psi \to \neg\varphi$. Pero $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$, porque $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$ es del tipo Ax_3 luego, por MP, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi$. Ahora bien, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, luego, por MP, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$. □

Lema 3.19. *Sean φ y ψ fórmulas proposicionales. Entonces*

$$\vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi \to (\varphi \to \psi).$$

Lema 3.20. *Sea φ una fórmula proposicional. Entonces*

$$\vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\varphi \to \varphi.$$

Demostración. En virtud del teorema de Herbrand-Tarski, demostrar

$$\vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\varphi \to \varphi$$

equivale a demostrar

$$\{\,\neg\neg\varphi\,\} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi.$$

Ahora bien, siendo $\Gamma = \{\,\neg\neg\varphi\,\}$, tenemos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\varphi \to (\neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi)$, porque $\neg\neg\varphi \to (\neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi)$ es del tipo Ax_1, y $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\varphi$, luego, por MP, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi$. Pero $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (\neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi)$, porque $(\neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi)$ es del tipo Ax_3, luego, por MP, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi$. Ahora bien, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)$, porque $(\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)$ es del tipo Ax_3 luego, por MP, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\varphi \to \varphi$, pero $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\varphi$, así que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$. □

Lema 3.21 (Ley de contraposición)**.** *Sean φ y ψ fórmulas proposicionales. Entonces*

$$\vdash_{\mathcal{L}} (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi).$$

Demostración. En virtud del teorema de Herbrand-Tarski, demostrar

$$\vdash_{\mathcal{L}} (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$$

equivale a demostrar

$$\{\,\varphi \to \psi, \neg\psi\,\} \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi.$$

Ahora bien, siendo $\Gamma = \{\,\varphi \to \psi, \neg\psi\,\}$, puesto que $\vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\varphi \to \varphi$ tenemos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\varphi \to \varphi$, así que $\Gamma \cup \{\,\neg\neg\varphi\,\} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$. Ahora bien, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi$, luego $\Gamma \cup \{\,\neg\neg\varphi\,\} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi$, por lo tanto, por MP, $\Gamma \cup \{\,\neg\neg\varphi\,\} \vdash_{\mathcal{L}} \psi$. Pero, ya que $\neg\psi \in \Gamma$, $\Gamma \cup \{\,\neg\neg\varphi\,\} \vdash_{\mathcal{L}} \neg\psi$. Por otra parte, se cumple que $\vdash_{\mathcal{L}} \neg\psi \to (\psi \to \neg\neg\psi)$, luego $\Gamma \cup \{\,\neg\neg\varphi\,\} \vdash_{\mathcal{L}} \neg\psi \to (\psi \to \neg\neg\psi)$, por lo tanto, por MP, $\Gamma \cup \{\,\neg\neg\varphi\,\} \vdash_{\mathcal{L}} \psi \to \neg\neg\psi$ y, otra vez, por MP, $\Gamma \cup \{\,\neg\neg\varphi\,\} \vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\psi$, luego $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi$, por el teorema de Herbrand-Tarski. Ahora bien, $\vdash_{\mathcal{L}} (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$, porque $(\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ es del tipo Ax_3, luego, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$, por lo tanto, por MP, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\psi \to \neg\varphi$, pero $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\psi$, luego, por MP, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$. □

Lema 3.22. *Sea φ una fórmula proposicional. Entonces*

$$\vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \neg\neg\varphi.$$

Demostración. En virtud del teorema de Herbrand-Tarski, demostrar

$$\vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \neg\neg\varphi$$

equivale a demostrar

$$\{\,\varphi\,\} \vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\varphi.$$

Se cumple que $\vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\varphi \to \varphi$, luego, también se cumple que $\vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$, por lo tanto, en virtud del teorema de Herbrand-Tarski, $\{\,\neg\neg\neg\varphi\,\} \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$, de donde $\{\,\varphi, \neg\neg\neg\varphi\,\} \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$, así que, otra vez, por el teorema de Herbrand-Tarski, $\{\,\varphi\,\} \vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$, pero $\vdash_{\mathcal{L}} (\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$, porque $(\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$ es del tipo Ax_3, luego $\{\,\varphi\,\} \vdash_{\mathcal{L}} (\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$, así que, por MP, $\{\,\varphi\,\} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \neg\neg\varphi$. Ahora bien, $\{\,\varphi\,\} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, luego, por MP, $\{\,\varphi\,\} \vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\varphi$. □

Lema 3.23. *Sea φ una fórmula proposicional. Entonces*

$$\vdash_{\mathcal{L}} (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi.$$

Demostración. Puesto que $\vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\varphi \to \varphi$, tenemos que $\{\, \varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi \,\} \vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\varphi \to \varphi$, pero también $\{\, \varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi \,\} \vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\varphi$, luego, por MP, $\{\, \varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi \,\} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, pero también $\{\, \varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi \,\} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \neg\varphi$, luego, por MP, $\{\, \varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi \,\} \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$. Puesto que $\{\, \varphi, \neg\varphi \,\} \vdash_{\mathcal{L}} \neg(\varphi \to \varphi)$, podemos concluir que $\{\, \varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi \,\} \vdash_{\mathcal{L}} \neg(\varphi \to \varphi)$, así que, en virtud del teorema de Herbrand-Tarski, $\{\, \varphi \to \neg\varphi \,\} \vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi)$, pero $\vdash_{\mathcal{L}} (\neg\neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi)) \to ((\varphi \to \varphi) \to \neg\varphi)$, porque $(\neg\neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi)) \to ((\varphi \to \varphi) \to \neg\varphi)$ es del tipo Ax_3, luego $\{\, \varphi \to \neg\varphi \,\} \vdash_{\mathcal{L}} (\varphi \to \varphi) \to \neg\varphi$, pero $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \varphi$, luego, por MP, $\{\, \varphi \to \neg\varphi \,\} \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$, así que, por el teorema de Herbrand-Tarski, $\vdash_{\mathcal{L}} (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$. $\square$

Lema 3.24. *Sea φ una fórmula proposicional. Entonces*

$$\vdash_{\mathcal{L}} (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi.$$

Demostración. En virtud del teorema de Herbrand-Tarski, demostrar

$$\vdash_{\mathcal{L}} (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$$

equivale a demostrar

$$\{\, \neg\varphi \to \varphi \,\} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi.$$

Sea $\Gamma = \{\, \neg\varphi \to \varphi \,\}$. Puesto que $\vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi \to (\neg\neg(\neg\varphi \to \varphi) \to \neg\varphi)$, porque $\neg\varphi \to (\neg\neg(\neg\varphi \to \varphi) \to \neg\varphi)$ es del tipo Ax_1, tenemos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi \to (\neg\neg(\neg\varphi \to \varphi) \to \neg\varphi)$.

Por otra parte, puesto que $\vdash_{\mathcal{L}} (\neg\neg(\neg\varphi \to \varphi) \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi))$, porque $(\neg\neg(\neg\varphi \to \varphi) \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi))$ es del tipo Ax_3, tenemos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (\neg\neg(\neg\varphi \to \varphi) \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi))$.

Además, se cumple que

$$\begin{aligned}\vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi \to (\neg\neg(\neg\varphi \to \varphi) \to \neg\varphi) \to \\ ((\neg\neg(\neg\varphi \to \varphi) \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi))) \to \\ (\neg\varphi \to (\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi)))),\end{aligned}$$

luego $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi \to (\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi))$.

Puesto que

$$\vdash_{\mathcal{L}} (\neg\varphi \to (\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi))) \to ((\neg\varphi \to \varphi) \to (\neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi))),$$

porque $(\neg\varphi \to (\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi))) \to ((\neg\varphi \to \varphi) \to (\neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi)))$ es del tipo Ax_2, tenemos, por MP, que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (\neg\varphi \to \varphi) \to (\neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi))$, luego, ya que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi \to \varphi$, tenemos, por MP, que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi)$. Ahora bien, se cumple que $\vdash_{\mathcal{L}} (\neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi)) \to ((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi)$, porque $(\neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi)) \to ((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi)$ es del tipo Ax_3, por lo tanto, por MP, tenemos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$, así que, por MP, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.

$\square$

Definición 3.25. Sea $\mathcal{L} = (\mathbf{\Lambda}, V)$ un lenguaje proposicional. Una *valoración* de $\mathcal{L}$ es una aplicación del conjunto de las variables V en 2

Proposición 3.26. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional y $f\colon V \longrightarrow 2$ una valoración de las variables. Entonces hay un único homomorfismo $f^\sharp$ del álgebra $\mathbf{Fm}(\mathcal{L})$ en el álgebra $\mathbf{2}$ tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \arrow[d, "f^\sharp"] \\ & 2 \end{tikzcd}$$

conmuta.

Definición 3.27. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional, $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ y $f\colon V \longrightarrow 2$ una valoración de las variables. Decimos que f es un *modelo* de φ si $f^\sharp(\varphi) = 1$ y que es un *modelo* de Γ si, para cada $\gamma \in \Gamma$, $f^\sharp(\gamma) = 1$.

La relación de *consecuencia semántica* entre los conjuntos de fórmulas proposicionales y las fórmulas proposicionales, denotada por $\Vdash_{\mathcal{L}}$, es el subconjunto de $\mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L})) \times \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ que consta de los pares (Γ, φ) tales que, para cada valoración $f\colon V \longrightarrow 2$, si, para cada $\gamma \in \Gamma$, $f^\sharp(\gamma) = 1$, entonces $f^\sharp(\varphi) = 1$. Si $(\Gamma, \varphi) \in \Vdash_{\mathcal{L}}$, también denotado por $\Gamma \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, entonces decimos que φ es *consecuencia semántica* de Γ. En particular, si $\{\psi\} \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, denotado simplemente por $\psi \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, entonces decimos que φ es *consecuencia semántica* de ψ y si tanto $\psi \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ como $\varphi \Vdash_{\mathcal{L}} \psi$, situación que denotamos por $\varphi \approx_{\mathcal{L}} \psi$, que φ y ψ son *semánticamente equivalentes.* Por último, decimos que una fórmula proposicional φ es una *tautología* si $\varnothing \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, i.e., si, para cada valoración $f\colon V \longrightarrow 2$, $f^\sharp(\gamma) = 1$ y que φ es una *contradicción* si, para cada valoración $f\colon V \longrightarrow 2$, $f^\sharp(\gamma) = 0$.

Demuéstrese que la relación $\approx_{\mathcal{L}}$ en $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ es la intersección de los núcleos de todos los homomorfismos del álgebra $\mathbf{Fm}(\mathcal{L})$ en el álgebra $\mathbf{2}$.

Proposición 3.28. *Sea $n \in \mathbb{N}$, $(v_i \mid i \in n)\colon n \rightarrowtail V$, $(\psi_i \mid i \in n) \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})^n$ y $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$. Si φ es una tautología, entonces también lo es $\binom{v_i}{\psi_i}^\sharp_{i\in n}(\varphi)$.*

Demostración. □

Lema 3.29. *Sean φ y ψ dos fórmulas tales que $\mathrm{var}_{\mathcal{L}}(\varphi) \cap \mathrm{var}_{\mathcal{L}}(\psi) = \varnothing$. Entonces son equivalentes:*

1. *La fórmula $\varphi \to \psi$ es una tautología.*
2. *La fórmula $\neg\varphi$ o la fórmula ψ es una tautología.*

Demostración. Supongamos que $\neg\varphi$ o ψ sea una tautología. Entonces, para cada valoración $f\colon V \longrightarrow 2$, $f^\sharp(\psi) = 1$, si ψ es una tautología y $f^\sharp(\varphi) = 0$, si $\neg\psi$ es una tautología. En ambos casos $f^\sharp(\varphi \to \psi) = 1$.

Para la recíproca, demostramos que si ni $\neg\varphi$ ni ψ es una tautología, entonces la fórmula $\varphi \to \psi$ no es una tautología. Al no ser ni $\neg\varphi$ ni ψ una tautología, hay una valoración $f\colon V \longrightarrow 2$ tal que $f^\sharp(\neg\varphi) = 0$, i.e., $f^\sharp(\varphi) = 1$, y hay una valoración $g\colon V \longrightarrow 2$ tal que $g^\sharp(\psi) = 0$. Entonces para la valoración:

$$h \begin{cases} V \longrightarrow 2 \\ v \longmapsto h(v) = \begin{cases} f(v), & \text{si } v \in \mathrm{var}_{\mathcal{L}}(\varphi); \\ g(v), & \text{si } v \notin \mathrm{var}_{\mathcal{L}}(\varphi), \end{cases} \end{cases}$$

se cumple que h coincide con f sobre $\mathrm{var}_{\mathcal{L}}(\varphi)$ y con g sobre $\mathrm{var}_{\mathcal{L}}(\psi)$. Luego $h^\sharp(\varphi) = f^\sharp(\varphi) = 1$ y $h^\sharp(\psi) = g^\sharp(\psi) = 0$, por lo tanto $h^\sharp(\varphi \to \psi) = 0$. □

Teorema 3.30 (Interpolación)**.** *Sea $n \leq 1$, $(v_i \mid i \in n)\colon n \rightarrowtail \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ y φ, ψ dos fórmulas tales que $\mathrm{var}_{\mathcal{L}}(\varphi) \cap \mathrm{var}_{\mathcal{L}}(\psi) = \{\, v_i \mid i \in n \,\}$. Entonces son equivalentes:*

1. *La fórmula $\varphi \to \psi$ es una tautología.*
2. *Hay una fórmula ξ tal que $\mathrm{var}_{\mathcal{L}}(\xi) \subseteq \{\, v_i \mid i \in n \,\}$ y las fórmulas $\varphi \to \xi$ y $\xi \to \psi$ son tautologías.*

Demostración. Supongamos que las fórmulas $\varphi \to \xi$ y $\xi \to \psi$ sean tautologías y sea $f\colon V \longrightarrow 2$. Si $f^\sharp(\xi) = 0$, entonces $f^\sharp(\varphi) = 0$, porque $f^\sharp(\varphi \to \xi) = 1$ y si $f^\sharp(\xi) = 1$, entonces $f^\sharp(\psi) = 1$, porque $f^\sharp(\xi \to \psi) = 1$. Por lo tanto, $f^\sharp(\varphi \to \psi) = 1$, i.e., $\varphi \to \psi$ es una tautología.

Recíprocamente, supongamos que $\varphi \to \psi$ sea una tautología. Vamos a demostrar, por inducción sobre el número de las variables que ocurren en φ pero no en ψ, que entonces existe una fórmula ξ tal que $\mathrm{var}_{\mathcal{L}}(\xi) \subseteq \{\, v_i \mid i \in n \,\}$ y las fórmulas

$\varphi \to \xi$ y $\xi \to \psi$ son tautologías. Si $\mathrm{card}(\mathrm{var}_{\mathcal{L}}(\varphi) - \mathrm{var}_{\mathcal{L}}(\psi)) = 0$, entonces para $\xi = \varphi$, se cumple que $\mathrm{var}_{\mathcal{L}}(\xi) \subseteq \{\, v_i \mid i \in n \,\}$ y las fórmulas $\varphi \to \xi$ y $\xi \to \psi$ son tautologías. Supongamos el resultado para las fórmulas φ que tienen a lo sumo m variables que no ocurren en ψ, y sea $\mathrm{var}_{\mathcal{L}}(\varphi) - \mathrm{var}_{\mathcal{L}}(\psi) = \{\, w_j \mid j \in m+1 \,\}$. Entonces $\mathrm{var}_{\mathcal{L}}(\varphi) \subseteq \{\, v_i \mid i \in n \,\} \cup \{\, w_j \mid j \in m+1 \,\}$. Sea, además, $\varphi_0 = \binom{w_m}{(v_0)}^\sharp \varphi$ y $\varphi_1 = \binom{w_m}{\neg(v_0)}^\sharp \varphi$. Puesto que $w_m \notin \mathrm{var}_{\mathcal{L}}(\psi)$, el resultado de la substitución de la variable w_m por la fórmula (v_0) en $\varphi \to \psi$ es la fórmula $\varphi_0 \to \psi$ y el resultado de la substitución de la variable w_m por la fórmula $\neg(v_0)$ en $\varphi \to \psi$ es la fórmula $\varphi_1 \to \psi$. Entonces, las fórmulas $\varphi_0 \to \psi$ y $\varphi_1 \to \psi$ son tautologías, luego también la fórmula $(\varphi_0 \to \psi) \wedge (\varphi_1 \to \psi)$ es una tautología y, por lo tanto también lo es $(\varphi_0 \vee \varphi_1) \to \psi$. Ahora bien, $\mathrm{var}_{\mathcal{L}}(\varphi_0 \vee \varphi_1) \subseteq \{\, v_i \mid i \in n \,\} \cup \{\, w_j \mid j \in m \,\}$, luego hay una fórmula ξ tal que $\mathrm{var}_{\mathcal{L}}(\xi) \subseteq \{\, v_i \mid i \in n \,\}$ y $(\varphi_0 \vee \varphi_1) \to \xi$ y $\xi \to \psi$ son tautologías. Veamos que $\varphi \to (\varphi_0 \vee \varphi_1)$ es una tautología, con lo cual también tendremos que $\varphi \to \xi$ es una tautología. Sea $f\colon V \longrightarrow 2$ una valoración tal que $f^\sharp(\varphi) = 1$. Entonces, o bien $f^\sharp((v_0)) = f^\sharp((w_m))$, y entonces $f^\sharp(\varphi_0) = f^\sharp(\varphi) = 1$, o bien $f^\sharp((v_0)) \neq f^\sharp((w_m))$, y entonces $f^\sharp(\varphi_1) = f^\sharp(\varphi) = 1$. En cualquier caso $f^\sharp(\varphi_0 \vee \varphi_1) = 1$. Luego $\varphi \to (\varphi_0 \vee \varphi_1)$ es una tautología. □

Demostramos a continuación que la relación de consecuencia sintáctica está incluida en la relación de consecuencia semántica.

Teorema 3.31 (Corrección). *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional, $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ y $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$. Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, entonces $\Gamma \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, i.e., si la fórmula proposicional φ es una consecuencia sintáctica de Γ, entonces φ es una consecuencia semántica de Γ. En particular, si $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, entonces $\Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, i.e., todos los teoremas son verdaderos.*

Demostración. □

Definición 3.32. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional y $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$. Decimos que Γ es *consistente* si $\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma) \neq \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, i.e., si hay un $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tal que $\Gamma \nvdash \varphi$.

Proposición 3.33. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional y $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$. Entonces son equivalentes:*

1. *El conjunto de fórmulas Γ es inconsistente, i.e., $\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma) = \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$.*
2. *Para cada fórmula proposicional φ, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg(\varphi \to \varphi)$.*
3. *Hay una fórmula proposicional φ tal que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg(\varphi \to \varphi)$.*

Demostración. Es evidente que 1. → 2. y que 2. → 3.

Supongamos que, para una fórmula proposicional φ, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg(\varphi \to \varphi)$. Sea $\psi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ arbitraria, queremos demostrar que entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$. Ahora bien, por Ax_1, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (\varphi \to \varphi) \to (\neg\psi \to (\varphi \to \varphi))$, pero $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \varphi$, luego $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\psi \to (\varphi \to \varphi)$, pero, para cualesquiera fórmulas α y β, se cumple que $\vdash_{\mathcal{L}} (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$, así que, en particular, $\vdash_{\mathcal{L}} (\neg\psi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\neg(\varphi \to \varphi) \to \neg\neg\psi)$, por lo tanto $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg(\varphi \to \varphi) \to \neg\neg\psi$, pero habíamos supuesto que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg(\varphi \to \varphi)$, así que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\psi$, pero, para cualquier fórmula α, se cumple que $\vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\alpha \to \alpha$, luego, en particular, $\vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\psi \to \psi$, por lo tanto $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$. □

Proposición 3.34. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional y $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$. Una condición necesaria y suficiente para que Γ sea inconsistente es que exista una fórmula φ tal que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$.*

Demostración. Si hay una fórmula φ tal que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$, entonces, ya que, para cualesquiera fórmulas α y β, $\vdash_{\mathcal{L}} \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$, i.e., $\beta \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\{\, \alpha, \neg\alpha \,\})$, tenemos que, para cada fórmula ψ, $\psi \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\{\, \varphi, \neg\varphi \,\})$, pero $\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\{\, \varphi, \neg\varphi \,\}) \subseteq \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma)$, luego Γ es inconsistente.

Si Γ es inconsistente, entonces hay una fórmula proposicional φ tal que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg(\varphi \to \varphi)$. Ahora bien, para cualesquiera fórmulas α y β, $\vdash_{\mathcal{L}} \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$, luego $\vdash_{\mathcal{L}} \neg(\varphi \to \varphi) \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$ y $\vdash_{\mathcal{L}} \neg(\varphi \to \varphi) \to ((\varphi \to \varphi) \to \neg\varphi)$, por lo tanto $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (\varphi \to \varphi) \to \varphi$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (\varphi \to \varphi) \to \neg\varphi$, pero $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \varphi$, luego $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$. $\square$

Proposición 3.35. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional, $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ y $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$. Una condición necesaria y suficiente para que $\Gamma \cup \{\varphi\}$ sea inconsistente es que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$.*

Demostración. Supongamos que $\Gamma \cup \{\varphi\}$ sea inconsistente. Entonces, para cada fórmula proposicional ψ, $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{L}} \psi$, en particular, para $\psi = \neg\varphi$, $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$, luego, por el teorema de Herbrand-Tarski, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \neg\varphi$, pero, para cada fórmula α, tenemos que $\vdash_{\mathcal{L}} (\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$, así que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$.

Supongamos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$. Entonces $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$ y $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, i.e., $\{\, \varphi, \neg\varphi \,\} \subseteq \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma \cup \{\varphi\})$, luego $\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\{\, \varphi, \neg\varphi \,\}) \subseteq \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma \cup \{\varphi\})$, pero, para cada fórmula ψ, $\psi \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\{\, \varphi, \neg\varphi \,\})$, ya que, para cualesquiera fórmulas α y β, $\vdash_{\mathcal{L}} \alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$, i.e., $\{\, \alpha, \neg\alpha \,\} \vdash_{\mathcal{L}} \beta$, así que, para cada fórmula ψ, $\psi \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma \cup \{\varphi\})$ $\square$

Demuéstrese que una condición necesaria y suficiente para que $\Gamma \cup \{\varphi\}$ sea consistente es que $\Gamma \nvdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$.

A continuación, establecemos la justificación del método de la demostración por reducción al absurdo.

Proposición 3.36. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional, $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ y $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$. Una condición necesaria y suficiente para que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ sea inconsistente es que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, i.e., demostrar que φ se deduce de Γ equivale a demostrar que de Γ junto con la negación de φ se deduce una contradicción.*

Demostración. Supongamos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, entonces φ y $\neg\varphi \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma \cup \{\neg\varphi\})$, luego $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.

Supongamos que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ sea inconsistente. Entonces, en particular, $\varphi \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma \cup \{\neg\varphi\})$, i.e., $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, luego $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi \to \varphi$, pero, para cada fórmula α, $\vdash_{\mathcal{L}} (\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$, así que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$. $\square$

Por ejemplo, en el año 1733, G. Saccheri intentó deducir el postulado euclídeo de las paralelas (por un punto exterior a una recta, en el plano, pasa una única recta paralela a la dada), denotado por π, del resto de los postulados. Si denotamos por Eucl el sistema de los postulados euclídeos, lo que trató de hacer Saccheri fué establecer que:

$$\mathrm{Eucl} - \{\pi\} \vdash \pi.$$

Para ello intentó obtener una contradicción a partir de $(\mathrm{Eucl} - \{\pi\}) \cup \{\neg\pi\}$. Saccheri creyó, erróneamente, haberla obtenido.

Proposición 3.37. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional. Entonces $\varnothing$ es consistente.*

Demostración. Si $\varnothing$ fuera inconsistente, existiría una fórmula φ tal que $\varnothing \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ y $\varnothing \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$. Por lo tanto, para cada valoración $f\colon V \longrightarrow 2$, $f^{\sharp}(\varphi) = 1$ y $f^{\sharp}(\neg\varphi) = 1$, i.e., $f^{\sharp}(\varphi) = 1$ y $f^{\sharp}(\varphi) = 0$, que es absurdo. $\square$

Lema 3.38. *Cualquier conjunto de fórmulas proposicionales que sea consistente está incluido en un conjunto de fórmulas proposicionales consistente maximal.*

Demostración. Sea Γ un conjunto de fórmulas proposicionales consistente. Vamos a demostrar que el conjunto $\mathcal{F}_{\Gamma} = \{\, \Delta \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \mid \Gamma \subseteq \Delta \;\;\&\;\; \Delta \text{ es consistente } \}$ no es vacío y que cualquier cadena no vacía en $(\mathcal{F}_{\Gamma}, \subseteq)$ tiene un supremo, para entonces, aplicando el lema de Zorn, poder afirmar que hay un maximal en $(\mathcal{F}_{\Gamma}, \subseteq)$.

Es obvio que $\mathcal{F}_\Gamma$ no es vacío. Sea $(\Delta_i \mid i \in I)$ una cadena no vacía en $(\mathcal{F}_\Gamma, \subseteq)$. Veamos que $\bigcup_{i\in I} \Delta_i$ es el supremo de la mencionada familia en $(\mathcal{F}_\Gamma, \subseteq)$. Es evidente que $\Gamma \subseteq \bigcup_{i\in I} \Delta_i$. Si $\bigcup_{i\in I} \Delta_i$ no fuera consistente, existiría una fórmula φ tal que $\bigcup_{i\in I} \Delta_i \vdash_{\mathcal{L}} \neg(\varphi \to \varphi)$, luego hay una parte finita $\Theta = \{\, \theta_0, \dots, \theta_{m-1} \,\}$ de $\bigcup_{i\in I} \Delta_i$ tal que $\Theta \vdash_{\mathcal{L}} \neg(\varphi \to \varphi)$. Ahora bien, para cada $\alpha \in m$, hay un Δ_{i_α} tal que $\theta_\alpha \in \Delta_{i_\alpha}$ y puesto que $(\Delta_i \mid i \in I)$ es una cadena, hay un $\beta \in m$ tal que, para cada $\alpha \in m$, $\Delta_{i_\alpha} \subseteq \Delta_{i_\beta}$, luego $\Theta \subseteq \Delta_{i_\beta}$, por lo tanto $\Delta_{i_\beta} \vdash_{\mathcal{L}} \neg(\varphi \to \varphi)$, contradicción, así que $\bigcup_{i\in I} \Delta_i$ es consistente. Aplicando el lema de Zorn, podemos afirmar que $(\mathcal{F}_\Gamma, \subseteq)$ tiene un maximal.

□

Proposición 3.39. *Sea Δ un conjunto de fórmulas tal que*

1. *Para cada fórmula φ, si $\Delta \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, entonces $\varphi \in \Delta$, i.e.,* $\mathrm{Cn}_{\vdash_{\mathcal{L}}}(\Delta) = \Delta$.
2. *Para cada fórmula φ, $\varphi \in \Delta$ o $\neg\varphi \in \Delta$, pero no ambas a la vez.*

Entonces Δ es consistente maximal.

Demostración. Si Δ fuera inconsistente, existiría una fórmula φ tal que $\Delta \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ y $\Delta \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$, luego existiría una fórmula φ tal que $\varphi, \neg\varphi \in \Delta$, que es absurdo.

Si un conjunto de fórmulas Θ fuera tal que contuviera estrictamente a Δ, existiría una fórmula $\theta \in \Theta$ tal que $\theta \notin \Delta$, por lo tanto $\neg\theta \in \Delta$, así que $\theta, \neg\theta \in \Theta$, luego Θ sería inconsistente. □

Lema 3.40. *Si Δ es un conjunto de fórmulas consistente maximal, entonces:*

1. *Para cada fórmula φ, si $\Delta \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, entonces $\varphi \in \Delta$, i.e.,* $\mathrm{Cn}_{\vdash_{\mathcal{L}}}(\Delta) = \Delta$.
2. *Para cada fórmula φ, $\varphi \in \Delta$ o $\neg\varphi \in \Delta$, pero no ambas a la vez.*
3. *Dadas dos fórmulas φ y ψ, se cumple que $\varphi \to \psi \in \Delta$ precisamente si $\neg\varphi \in \Delta$ o $\psi \in \Delta$.*

Demostración. Por lo que respecta a la primera parte, si $\Delta \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ pero $\varphi \notin \Delta$, entonces el conjunto de fórmulas $\Delta \cup \{\varphi\}$, por contener estrictamente a Δ, sería inconsistente, luego $\Delta \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$, así que $\Delta \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ y $\Delta \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$, luego Δ sería inconsistente, contradicción, por lo tanto $\varphi \in \Delta$.

Respecto de la segunda parte, si $\varphi \notin \Delta$, entonces $\Delta \cup \{\varphi\}$, por contener estrictamente a Δ, sería inconsistente, luego $\Delta \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$ y entonces, por la primera parte, $\neg\varphi \in \Delta$.

Por último, si $\neg\varphi \notin \Delta$ y $\psi \notin \Delta$, entonces, por la segunda parte, $\varphi \in \Delta$ y $\neg\psi \in \Delta$, pero se cumple que $\vdash_{\mathcal{L}} \alpha \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta))$, luego, teniendo en cuenta la primera parte, $\neg(\varphi \to \psi) \in \Delta$, así que $\varphi \to \psi \notin \Delta$, por ser Δ consistente. Por lo tanto, si $\varphi \to \psi \in \Delta$, entonces $\neg\varphi \in \Delta$ o $\psi \in \Delta$. Recíprocamente, si $\neg\varphi \in \Delta$, entonces, por cumplirse que $\vdash_{\mathcal{L}} \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$ y por la primera parte, $\varphi \to \psi \in \Delta$. Si $\psi \in \Delta$, entonces, por cumplirse que $\vdash_{\mathcal{L}} (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ y por la primera parte, $\varphi \to \psi \in \Delta$.

□

Proposición 3.41. *Si Γ es un conjunto de fórmulas consistente, entonces Γ tiene un modelo.*

Demostración. Sea Δ un conjunto de fórmulas consistente que contenga a Γ y sea maximal con dicha propiedad. Además, sea $f\colon V \longrightarrow 2$ la valoración definida como:

$$f\begin{cases} V \longrightarrow 2 \\ v \longmapsto f(v) = \begin{cases} 1, & \text{si } (v) \in \Delta; \\ 0, & \text{si } (v) \notin \Delta. \end{cases} \end{cases}$$

Entonces se cumple que, para cada fórmula φ, $f^\sharp(\varphi) = 1$ si y sólo si $\varphi \in \Delta$. Procedemos a demostrar la última afirmación por inducción algebraica. Para ello consideramos el conjunto

$$\Theta = \{\, \varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \mid f^\sharp(\varphi) = 1 \text{ si y sólo si } \varphi \in \Delta \,\}.$$

En virtud de la definición de la valoración f, es obvio que, para cada $v \in V$, $(v) \in \Theta$. Sea φ una fórmula y supongamos que $\varphi \in \Theta$. Puesto que:

$$\begin{aligned} f^\sharp(\neg\varphi) = 1 \quad & \text{si y sólo si} \quad f^\sharp(\varphi) = 0 \\ & \text{si y sólo si} \quad f^\sharp(\varphi) \neq 1 \\ & \text{si y sólo si} \quad \varphi \notin \Delta \\ & \text{si y sólo si} \quad \neg\varphi \in \Delta, \end{aligned}$$

podemos afirmar que $\neg\varphi \in \Theta$. Sean φ y ψ dos fórmulas tales que $\varphi, \psi \in \Theta$. Puesto que:

$$\begin{aligned} f^\sharp(\varphi \to \psi) = 1 \quad & \text{si y sólo si} \quad f^\sharp(\varphi) = 0 \text{ o } f^\sharp(\varphi) = 1 \\ & \text{si y sólo si} \quad f^\sharp(\varphi) \neq 1 \text{ o } f^\sharp(\varphi) = 1 \\ & \text{si y sólo si} \quad \varphi \notin \Delta \text{ o } \psi \in \Delta \\ & \text{si y sólo si} \quad \varphi \to \psi \in \Delta, \end{aligned}$$

podemos afirmar que $\varphi \to \psi \in \Theta$. De modo que $\Theta = \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ y se cumple que, para cada fórmula φ, $f^\sharp(\varphi) = 1$ si y sólo si $\varphi \in \Delta$. Por último, si $\gamma \in \Gamma$, entonces $\gamma \in \Delta$, luego $f^\sharp(\gamma) = 1$, por lo tanto f es un modelo de Γ.

□

Establecemos a continuación el recíproco del teorema de corrección.

Teorema 3.42 (Adecuación)**.** *Para cada conjunto de fórmulas* Γ *y cada fórmula* φ*, si* $\Gamma \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$*, entonces* $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$*. En particular, si* $\Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$*, entonces* $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$*, i.e., todas las verdades de la lógica proposicional clásica son demostrables.*

Demostración. Si $\Gamma \nvdash_{\mathcal{L}} \varphi$, entonces, ya que $\vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\varphi \to \varphi$, $\Gamma \nvdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\varphi$ (porque si $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\varphi$, entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$), luego $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es consistente. Sea f un modelo de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, entonces f es un modelo de Γ pero no de φ, luego $\Gamma \nVdash_{\mathcal{L}} \varphi$. □

Corolario 3.43 (Completud)**.** *Para cada conjunto de fórmulas* Γ *y cada fórmula* φ*,* $\Gamma \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$*, si y sólo si* $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$*.*

Corolario 3.44 (Teorema de compacidad)**.** *Para cada conjunto de fórmulas* Γ *y cada fórmula* φ*, si* $\Gamma \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$*, entonces hay un subconjunto finito* Δ *de* Γ *tal que* $\Delta \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$*.*

El hecho de que al corolario anterior se le denomine teorema de *compacidad* no es casual, porque es equivalente a que un cierto espacio topológico, formado por valoraciones de las variables, sea compacto.

Proposición 3.45. *El subconjunto* $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ *de* $\mathrm{Sub}(2^V)$ *definido como:*

$$\mathcal{B}_{\mathcal{L}} = \{\, \mathrm{B}_\varphi \mid \varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \,\},$$

siendo, para cada $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$*,* B_φ *el conjunto definido como:*

$$\mathrm{B}_\varphi = \{\, f \in 2^V \mid f^\sharp(\varphi) = 1 \,\},$$

es una base para una topología sobre 2^V*.*

Teorema 3.46. *El teorema de compacidad equivale a que el espacio topológico* $(2^V, \mathrm{Tg}_{2^V}(\mathcal{B}_{\mathcal{L}})$ *sea compacto.*

Demostración. □

3.1. La equivalencia de Lindenbaum-Tarski. Nos proponemos demostrar ahora que la categoría de las álgebras Booleanas, que es una entidad puramente matemática, es equivalente a una categoría cociente de una cierta categoría de origen lógico, de modo que dos entidades, una matemática y otra lógica, son indistinguibles.

Definición 3.47. Sea $\mathcal{L} = (V, \mathbf{\Lambda})$ un lenguaje proposicional y $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$. Entonces denotamos por $\approx_\Gamma$ la relación binaria en $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ definida como:

$$\approx_\Gamma = \{\, (\varphi, \psi) \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})^2 \mid \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \leftrightarrow \psi \,\}.$$

Proposición 3.48. *Sea $\mathcal{L} = (V, \mathbf{\Lambda})$ un lenguaje proposicional y $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$. Entonces, para cualesquiera fórmulas $\varphi, \varphi', \psi, \psi'$, se cumple que:*

1. *La relación $\approx_\Gamma$ en $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ es una relación de equivalencia.*
2. *Si $\varphi \approx_\Gamma \psi$, entonces $\neg\varphi \approx_\Gamma \neg\psi$.*
3. *Si $\varphi \approx_\Gamma \psi$ y $\varphi' \approx_\Gamma \psi'$ entonces $\varphi \vee \varphi' \approx_\Gamma \psi \vee \psi'$.*
4. *Si $\varphi \approx_\Gamma \psi$ y $\varphi' \approx_\Gamma \psi'$ entonces $\varphi \wedge \varphi' \approx_\Gamma \psi \wedge \psi'$.*
5. *$\varphi \wedge \neg\varphi \approx_\Gamma \psi \wedge \neg\psi$.*
6. *$\varphi \vee \neg\varphi \approx_\Gamma \psi \vee \neg\psi$.*

Demostración. □

Definición 3.49. Sea $\mathcal{L} = (V, \mathbf{\Lambda})$ un lenguaje proposicional y $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$. Entonces denotamos por $\mathbf{LT}_\Gamma(\mathcal{L})$ la $\mathbf{\Lambda}$-álgebra cuyo conjunto subyacente es $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})/\approx_\Gamma$ y cuyas operaciones estructurales $\vee, \wedge, \neg, 0$ y 1 están definidas, para cualesquiera fórmulas φ y ψ, como:

$$\begin{aligned}
[\varphi]_{\approx_\Gamma} \vee [\psi]_{\approx_\Gamma} &= [\varphi \vee \psi]_{\approx_\Gamma}. \\
[\varphi]_{\approx_\Gamma} \wedge [\psi]_{\approx_\Gamma} &= [\varphi \wedge \psi]_{\approx_\Gamma}. \\
\neg[\varphi]_{\approx_\Gamma} &= [\neg\varphi]_{\approx_\Gamma}. \\
0 &= [\varphi \wedge \neg\varphi]_{\approx_\Gamma}. \\
1 &= [\varphi \vee \neg\varphi]_{\approx_\Gamma}.
\end{aligned}$$

Proposición 3.50. *Sea $\mathcal{L} = (V, \mathbf{\Lambda})$ un lenguaje proposicional y $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$. Entonces $\mathbf{LT}_\Gamma(\mathcal{L})$ es un álgebra Booleana, a la que denominamos el álgebra Booleana de* Lindenbaum-Tarski.

Demostración. □

Demostramos a continuación que ciertas álgebras de Lindenbaum-Tarski son libres.

Proposición 3.51. *Sea $\mathcal{L} = (V, \mathbf{\Lambda})$ un lenguaje proposicional. Entonces el par ordenado $(\eta_V, \mathbf{LT}_\varnothing(\mathcal{L}))$ en el que η_V es la aplicación de V en $\mathrm{LT}_\varnothing(\mathcal{L})$ que a una variable proposicional v le asigna $[(v)]_{\approx_\varnothing}$, tiene la propiedad de que, para cada álgebra Booleana $\mathbf{A}$ y cada aplicación $f\colon V \longrightarrow A$, existe un único homomorfismo $f^\sharp$ de $\mathbf{LT}_\varnothing(\mathcal{L})$ en $\mathbf{A}$ tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{LT}_\varnothing(\mathcal{L}) \arrow[d, "f^\sharp"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Lema 3.52. *Sea* $\mathbf{LT}_\Gamma(\mathcal{L})$ *un álgebra Booleana de Lindenbaum-Tarski y* F *un filtro en* $\mathbf{LT}_\Gamma(\mathcal{L})$. *Entonces* $F \subseteq \bigcup F$ *y* $\mathbf{LT}_\Gamma(\mathcal{L})/F \cong \mathbf{LT}_{\bigcup F}(\mathcal{L})$

Demostración. □

Proposición 3.53. *Cualquier álgebra Booleana es isomorfa a un álgebra Booleana de Lindenbaum-Tarski.*

Demostración. □

Definición 3.54. Denotamos por **BPth** la categoría que tiene como objetos las *preteorías proposicionales clásicas*, i.e., los pares $((X, \mathbf{\Lambda}), \Gamma)$ siendo X un conjunto no vacío y $\Gamma \subseteq \mathrm{T}_{\mathbf{\Lambda}}(X)$, y como morfismos de $((X, \mathbf{\Lambda}), \Gamma)$ en $((Y, \mathbf{\Lambda}), \Delta)$ los homomorfismos $f\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}}(X) \longrightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}}(Y)$ tales que $f[\mathrm{Cn}_{(X,\mathbf{\Lambda})}(\Gamma)] \subseteq \mathrm{Cn}_{(Y,\mathbf{\Lambda})}(\Delta)$.

En **BPth**, cualquier preteoría $((X, \mathbf{\Lambda}), \Gamma)$ es isomorfa a la teoría $((X, \mathbf{\Lambda}), \mathrm{Cn}_{(X,\mathbf{\Lambda})}(\Gamma))$. De hecho la categoría **BPth** es equivalente a la subcategoría plena de la misma determinada por las teorías.

Proposición 3.55. *Sean* $((X, \mathbf{\Lambda}), \Gamma)$ *y* $((Y, \mathbf{\Lambda}), \Delta)$ *dos preteorías proposicionales clásicas y* f *un homomorfismo de* $\mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}}(X)$ *en* $\mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}}(Y)$. *Entonces son equivalentes:*

1. $f[\Gamma] \subseteq \mathrm{Cn}_{(Y,\mathbf{\Lambda})}(\Delta)$.
2. $f[\mathrm{Cn}_{(X,\mathbf{\Lambda})}(\Gamma)] \subseteq \mathrm{Cn}_{(Y,\mathbf{\Lambda})}(\Delta)$.
3. *Dadas dos fórmulas* $\varphi, \psi \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Lambda}}(X)$, *si* $\varphi \approx_\Gamma \psi$, *entonces* $f(\varphi) \approx_\Delta f(\psi)$.

Demostración. □

Proposición 3.56. *Hay un functor pleno y esencialmente sobreyectivo* LT *de la categoría* **BPth** *en la categoría* **Bool**.

Demostración. Si $((X, \mathbf{\Lambda}), \Gamma)$ es una preteoría, entonces $\mathrm{LT}((X, \mathbf{\Lambda}), \Gamma) = \mathbf{LT}_\Gamma(\mathbf{\Lambda}, X)$. Por otra parte, si $f\colon ((X, \mathbf{\Lambda}), \Gamma) \longrightarrow ((Y, \mathbf{\Lambda}), \Delta)$ es un morfismo de la categoría **BPth**, entonces $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_{\approx_\Gamma}) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_{\approx_\Delta} \circ f)$, luego hay un único homomorfismo $\mathrm{LT}(f)$ del álgebra Booleana $\mathbf{LT}_\Gamma(X, \mathbf{\Lambda})$ en el álgebra Booleana $\mathbf{LT}_\Delta(Y, \mathbf{\Lambda})$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}}(X) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\approx_\Gamma}"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{LT}_\Gamma(X, \mathbf{\Lambda}) \arrow[d, "\mathrm{LT}(f)"] \\
\mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}}(Y) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\approx_\Delta}"'] & \mathbf{LT}_\Delta(Y, \mathbf{\Lambda})
\end{tikzcd}$$

conmuta. Así definido, LT es un functor de **BPth** en **Bool** y en virtud de la proposición 3.53, es esencialmente sobreyectivo.

Demostramos a continuación que LT es un functor pleno. Sea g un homomorfismo de álgebras Booleanas de $\mathbf{LT}_\Gamma(X, \mathbf{\Lambda})$ en $\mathbf{LT}_\Delta(Y, \mathbf{\Lambda})$. Entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}}(X) \arrow[d, "g \circ \mathrm{pr}_{\approx_\Gamma}"] \\
\mathbf{T}_{\mathbf{\Lambda}}(Y) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\approx_\Delta}"'] & \mathbf{LT}_\Delta(Y, \mathbf{\Lambda})
\end{tikzcd}$$

se puede completar hasta el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{T}_{\boldsymbol{\Lambda}}(X) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\approx_\Gamma}"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{LT}_\Gamma(X, \boldsymbol{\Lambda}) \arrow[d, "g"] \\ \mathbf{T}_{\boldsymbol{\Lambda}}(Y) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\approx_\Delta}"'] & \mathbf{LT}_\Delta(Y, \boldsymbol{\Lambda}) \end{tikzcd}$$

para algún homomorfismo $f\colon \mathbf{T}_{\boldsymbol{\Lambda}}(X) \longrightarrow \mathbf{T}_{\boldsymbol{\Lambda}}(Y)$, porque $\mathrm{pr}_{\approx_\Delta}$ es un epimorfismo y $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\Lambda}}(X)$ siendo libre, es proyectiva. Además, f es un morfismo de $((X, \boldsymbol{\Lambda}), \Gamma)$ en $((Y, \boldsymbol{\Lambda}), \Delta)$, ya que si $\alpha, \beta \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Lambda}}(X)$ son tales que $\alpha \approx_\Gamma \beta$, entonces $g([\alpha]_{\approx_\Gamma}) = g([\beta]_{\approx_\Gamma})$, por consiguiente $[f(\alpha)]_{\approx_\Delta} = [f(\beta)]_{\approx_\Delta}$, i.e., $f(\alpha) \approx_\Delta f(\beta)$. Por último, es evidente que $\mathrm{LT}(f) = g$. $\square$

Para obtener la equivalencia de Lindenbaum-Tarski tenemos de definir una congruencia, la relación de homotopía, sobre la categoría **BPth**. Por ello pasamos a continuación a considerar el concepto de congruencia sobre una categoría y el de categoría cociente de una categoría entre una congruencia.

Definición 3.57. Sea $\mathbf{C}$ una categoría. Una congruencia sobre la categoría $\mathbf{C}$ es una familia $\Phi = (\Phi_{A,B} \mid (A, B) \in \mathbf{C}^2)$ que cumple las siguientes condiciones:

1. $\Phi_{A,B}$ es una equivalencia sobre $\mathbf{C}(A, B)$.
2. Para cualesquiera $u\colon X \longrightarrow A$, $f, g\colon A \longrightarrow B$ y $v\colon B \longrightarrow Y$,

$$\frac{f \equiv g \pmod{\Phi_{A,B}}}{v \circ f \circ u \equiv v \circ g \circ u \pmod{\Phi_{X,Y}}}.$$

Denotamos por $\mathrm{Cgr}(\mathbf{C})$ el conjunto de las congruencias sobre la categoría $\mathbf{C}$.

Sea $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ un functor de la categoría $\mathbf{C}$ en la categoría $\mathbf{D}$. Siendo $\mathrm{Ker}(F)$, el *núcleo* del functor F, i.e., la familia definida como:

$$\mathrm{Ker}(F)_{A,B} = \{\, (f, g) \in \mathbf{C}(A, B)^2 \mid F(f) = F(g) \,\},$$

demuéstrese que es una congruencia sobre $\mathbf{C}$.

Proposición 3.58. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría. Entonces el conjunto de las congruencias sobre* $\mathbf{C}$*,* $\mathrm{Cgr}(\mathbf{C})$*, es un sistema de clausura algebraico sobre* $(\mathbf{C}(A, B) \mid (A, B) \in \mathbf{C}^2)$*, i.e., tiene las siguientes propiedades:*

1. $(\mathbf{C}(A, B)^2 \mid (A, B) \in \mathbf{C}^2) \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{C})$.
2. *Si* $(\Phi^i \mid i \in I)$ *es una familia no vacía en* $\mathrm{Cgr}(\mathbf{C})$*, entonces* $\bigcap_{i\in I} \Phi^i$ *es una congruencia sobre* $\mathbf{C}$*.*
3. *Si* $(\Phi^i \mid i \in I)$ *es una familia no vacía en* $\mathrm{Cgr}(\mathbf{C})$ *y si dados* $i, j \in I$*, hay un* $k \in I$ *tal que* $\Phi^i \cup \Phi^j \subseteq \Phi^k$*, entonces* $\bigcup_{i\in I} \Phi^i$ *es una congruencia sobre* $\mathbf{C}$*.*

Demostración. $\square$

Corolario 3.59. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría. Entonces la endoaplicación* $\mathrm{Cg}_{\mathbf{C}}$ *de la familia* $(\mathrm{Sub}(\mathbf{C}(A, B)^2) \mid (A, B) \in \mathbf{C}^2)$*, definida como:*

$$\mathrm{Cg}_{\mathbf{C}} \begin{cases} (\mathrm{Sub}(\mathbf{C}(A, B)^2) \mid (A, B) \in \mathbf{C}^2) & \longrightarrow (\mathrm{Sub}(\mathbf{C}(A, B)^2) \mid (A, B) \in \mathbf{C}^2) \\ \qquad\qquad\Phi & \longmapsto \bigcap\{\, \Psi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{C}) \mid \Phi \subseteq \Psi \,\} \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{Im}(\mathrm{Cg}_{\mathbf{C}}) \subseteq \mathrm{Cgr}(\mathbf{C})$.
2. $\{\, \Phi \in (\mathrm{Sub}(\mathbf{C}(A, B)^2) \mid (A, B) \in \mathbf{C}^2) \mid \Phi = \mathrm{Cg}_{\mathbf{C}}(\Phi) \,\} = \mathrm{Cgr}(\mathbf{C})$.

3. $\mathrm{Cg}_{\mathbf{C}}$ *es extensiva, i.e., para cada* $\Phi \in (\mathrm{Sub}(\mathbf{C}(A,B)^2) \mid (A,B) \in \mathbf{C}^2)$,
$$\Phi \subseteq \mathrm{Cg}_{\mathbf{C}}(\Phi).$$
4. $\mathrm{Cg}_{\mathbf{C}}$ *es isótona, i.e., para cada* $\Phi, \Psi \in (\mathrm{Sub}(\mathbf{C}(A,B)^2) \mid (A,B) \in \mathbf{C}^2)$, *si* $\Phi \subseteq \Psi$, *entonces*
$$\mathrm{Cg}_{\mathbf{C}}(\Psi) \subseteq \mathrm{Cg}_{\mathbf{C}}(\Psi).$$
5. $\mathrm{Cg}_{\mathbf{C}}$ *es idempotente, i.e., para cada* $\Phi \in (\mathrm{Sub}(\mathbf{C}(A,B)^2) \mid (A,B) \in \mathbf{C}^2)$,
$$\mathrm{Cg}_{\mathbf{C}}(\Phi) = \mathrm{Cg}_{\mathbf{C}}(\mathrm{Cg}_{\mathbf{C}}(\Phi)).$$
6. $\mathrm{Cg}_{\mathbf{C}}$ *es algebraica, i.e., para cada familia* $(\Phi^i \mid i \in I)$ *no vacía dirigida superiormente en* $(\mathrm{Sub}(\mathbf{C}(A,B)^2) \mid (A,B) \in \mathbf{C}^2)$ *se cumple que*
$$\mathrm{Cg}_{\mathbf{C}}(\bigcup_{i\in I}\Phi^i) = \bigcup_{i\in I}\mathrm{Cg}_{\mathbf{C}}(\Phi^i).$$

Por consiguiente, para cada $\Phi \in \prod_{(A,B)\in\mathbf{C}^2}\mathrm{Sub}(\mathbf{C}(A,B)^2)$, $\mathrm{Cg}_{\mathbf{C}}(\Phi)$ *es la mínima congruencia sobre* $\mathbf{C}$ *que contiene a* Φ, *y la denominamos la congruencia sobre* $\mathbf{C}$ generada *por* Φ.

Demostración. □

Proposición 3.60. *El conjunto* $\mathrm{Cgr}(\mathbf{C})$ *de las congruencias sobre una categoría* $\mathbf{C}$ *es un subretículo completo del retículo* $\mathbf{Eqv}(\mathbf{C}(A,B) \mid (A,B) \in \mathbf{C}^2)$ *de las equivalencias sobre* $(\mathbf{C}(A,B) \mid (A,B) \in \mathbf{C}^2)$.

Proposición 3.61. *El retículo* $\mathbf{Cgr}(\mathbf{C})$ *de las congruencias sobre una categoría* $\mathbf{C}$, *es algebraico.*

Proposición 3.62. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría y* $\Phi \in \mathrm{Cg}_{\mathbf{C}}$. *Entonces hay una categoría* $\mathbf{C}/\Phi$, *la categoría* cociente de $\mathbf{C}$ entre Φ, *y un functor* $\mathrm{Pr}_\Phi\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}/\Phi$, *la* proyección canónica *de* $\mathbf{C}$ *en* $\mathbf{C}/\Phi$, *tal que:*

1. $\mathrm{Ker}(\mathrm{Pr}_\Phi) = \Phi$.
2. (Propiedad universal) *Para cada functor* $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$, *si* $\Phi \subseteq \mathrm{Ker}(F)$, *entonces hay un único functor* $G\colon \mathbf{C}/\Phi \longrightarrow \mathbf{D}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "\mathrm{Pr}_\Phi"] \arrow[dr, "F"'] & \mathbf{C}/\Phi \arrow[d, "G"] \\ & \mathbf{D} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Definición 3.63. Sean $f, g\colon ((X,\mathbf{\Lambda}),\Gamma) \longrightarrow ((Y,\mathbf{\Lambda}),\Delta)$ dos morfismo de la categoría **BPth**. Decimos que los morfismos f y g son *homótopos*, y lo denotamos por $f \equiv g$, si se cumple que $\mathrm{pr}_{\approx_\Delta} \circ f = \mathrm{pr}_{\approx_\Delta} \circ g$.

Proposición 3.64. *La relación de homotopía es una congruencia sobre la categoría* **BPth**.

Demostración. It is easy to check that the relation $\equiv$ is an equivalence and right compatible with the composition of morphisms. In order to prove left compatibility, given the situation:

$$\begin{tikzcd} (X,\Phi) \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & (Y,\Delta) \arrow[r, "h"] & (Z,\Theta), \end{tikzcd}$$

let us suppose that $f \equiv g$. Then $\mathrm{pr}_{\equiv_\Delta} \circ f = \mathrm{pr}_{\equiv_\Delta} \circ g$, and the diagram:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(Y) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\equiv_\Delta}"] \arrow[d, "h"'] & \mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(Y)/\equiv_\Delta \arrow[d, "\mathrm{lt}_1(h)"] \\
\mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(Z) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\equiv_\Theta}"'] & \mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(Z)/\equiv_\Theta
\end{tikzcd}$$

commutes. Hence $\mathrm{pr}_{\equiv_\Theta} \circ (h \circ f) = \mathrm{pr}_{\equiv_\Theta} \circ (h \circ g)$, therefore $h \circ f = h \circ g$.

□

Corolario 3.65. *La categoría* **BPth**$/\equiv$ *es equivalente a la categoría* **Bool**

4. La teoría del silogismo.

Siguiendo a Halmos, mostramos que la teoría aristotélica del silogismo se puede explicar desde la teoría de las álgebras monádicas de Halmos. Pero antes vamos a recordar algunos de los puntos esenciales de la doctrina lógica de Aristóteles.

En el capítulo 4 del tratado *De la expresión o interpretación* de Aristóteles, dice que un *juicio* es una frase con significado, pero que no todo juicio es una proposición. Según Aristóteles, un juicio es una *proposición* si tiene verdad en sí o falsedad. Una súplica (o una interrogación, o una orden) es, por ejemplo, un juicio, pero no tiene ni verdad ni falsedad. Así pues, Aristóteles distingue, dentro de los juicios o sentencias, una clase especial a cuyos miembros les corresponde en exclusiva la posibilidad de ser considerados verdaderos o falsos. Se trata de las proposiciones (apofánticas o declarativas).

Aunque las nociones de verdad y falsedad son esenciales para su caracterización de las proposiciones, Aristóteles no procede a definirlas en sus escritos. No obstante ello, en su *Metafísica* encontramos la siguiente definición: "Pues es falso decir de lo que es que no es o de lo que no es que es, y verdadero decir de lo que es que es y de lo que no es que no es".

Señalamos que, además del principio de bivalencia: *Toda proposición es o bien verdadera o bien falsa*, Aristóteles acepta el principio de no contradicción, i.e. para cada proposición φ, $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$, el del tercero excluido i.e. para cada proposición φ, $\varphi \vee \neg\varphi$[, y los principios de la *identidad de los indiscernibles* y de la *indiscernibilidad de los idénticos*. The Identity of Indiscernibles is usually formulated as follows: if, for every property F, object x has F if and only if object y has F, then x is identical to y. Or in the notation of symbolic logic: $\forall F(F(x) \to F(y)) \to x = y$. This formulation of the Principle is equivalent to the Dissimilarity of the Diverse as McTaggart called it, namely: if x and y are distinct then there is at least one property that x has and y does not, or vice versa.]

The converse of the Principle, $x = y \to \forall F(F(x) \to F(y))$, is called the Indiscernibility of Identicals. Sometimes the conjunction of both principles, rather than the Principle by itself, is known as Leibniz's Law.

En el tratado *De la expresión o interpretación*, Aristóteles se ocupa de la teoría de la oposición y de la clasificación formal de las proposiciones a que ésta da lugar. De hecho agrupa a pares proposiciones tales que el segundo miembro de los mismos constituya la negación del primero. La excepción viene dada por las proposiciones cuantitativamente indefinidas o indeterminadas, como, por ejemplo, "El hombre es blanco". Prescindiendo de las proposiciones indefinidas, Aristóteles reconoce tres formas de proposiciones en las que se afirma un predicado de un sujeto:

1. Proposición *singular* es aquélla en la que el término que oficia de sujeto es el nombre de un individuo que no puede ser él mismo predicado de ninguna otra cosa.
2. Proposición *universal* es aquélla que es de alcance universal y en la que el término que oficia de sujeto es el símbolo de un género de cosas, y como tal se puede predicar de una pluralidad de individuos.
3. Proposición *particular* es aquélla que no es de alcance universal y en la que el término que oficia de sujeto es el símbolo de un género de cosas, y como tal se puede predicar de una pluralidad de individuos

Las entidades de las que se ocupa la lógica son las proposiciones, y esto es así porque el objetivo primordial de la deducción es llegar a establecer proposiciones verdaderas y cuya verdad esté garantizada; y la lógica tiene, por lo tanto, que tratar de las relaciones formales entre las proposiciones que aseguren que las conclusiones se siguen de las premisas.

En la lógica tradicional cualquier proposición es tratada como siendo analizable en sujeto y predicado, y esto significa que sólo puede expresar o bien la coincidencia o bien la diferencia de dos cosas o conceptos generales. Ejemplos de proposiciones tratadas por la lógica tradicional son: "Todos los hombres son mortales", "Sócrates es un hombre", "Algunos hombres son inteligentes", "Ningún hombre es perfecto".

Las constituyentes de las proposiciones, que son los que se comparan en las mismas, se denominan *términos*, y son nombres de cosas, o de clases de cosas, o de cualidades. Así pues, de acuerdo con la lógica tradicional, los constituyentes básicos de las proposiciones son los términos, i.e., los nombres de entidades o de clases de entidades, y es la costumbre clasificar a los términos en *singulares* y *generales* y también en *positivos* y *negativos*. Una proposición se construye, por lo tanto, tomando dos términos, uno como sujeto y el otro como predicado, y conectándolos mediante la *cópula*, i.e., la partícula "es" o "son", si la proposición expresa la coincidencia entre los términos, y la partícula "no es" o "no son", si expresa la diferencia entre los términos. Si los términos de hecho coinciden o difieren tal como se asevera, entonces la proposición es *verdadera*; en caso contrario, es *falsa*.

En la proposición "Sócrates es mortal" el sujeto, "Sócrates", es singular, el predicado "mortal", es general, además, puesto que expresa acuerdo entre los términos, es verdadera.

En la proposición "Los atenienses no son griegos" tanto el sujeto, "ateniense", como el predicado "griego", son generales, puesto que se aplican a muchos individuos, además, puesto que expresa incorrectamente una diferencia entre los términos, es falsa.

Las proposiciones de las que se ocupa la lógica tradicional se subdividen con respecto a la *cantidad* y a la *cualidad*. En lo que respecta a la cantidad una proposición es o bien *universal* o bien *particular*, y en lo que respecta a la cualidad una proposición es o bien *afirmativa* o bien *negativa*.

Una proposición es *universal* si el predicado es afirmado o negado de la totalidad del sujeto, como por ejemplo con "Todos los hombres son mortales" o con "Ningún hombre es perfecto"; es *particular* si el predicado es afirmado de alguna parte incompletamente especificada del sujeto, como por ejemplo con "Unos pocos hombres son sabios" o con "Algunos hombres no son imbéciles". Una proposición singular, i.e., una como "Sócrates es mortal", que tiene a un individuo particular como sujeto, se ha de incluir entre las universales porque, siendo el sujeto indivisible, el predicado es afirmado de su totalidad.

Una proposición es *afirmativa* si se declara que el sujeto y el predicado coinciden y es *negativa* si se declara que difieren.

Las cuatro formas posibles de la proposición son:

1. *Universal afirmativa*, denotada por A, y esquematizada por
$$\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)).$$
Como ejemplo de ella tenemos: Todo hombre es mortal.
2. *Universal negativa*, denotada por E, y esquematizada por
$$\forall x(\varphi(x) \rightarrow \neg\psi(x)).$$
Como ejemplo de ella tenemos: Ningún hombre es mortal.
3. *Particular afirmativa*, denotada por I, y esquematizada por
$$\exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x)).$$
Como ejemplo de ella tenemos: Algún hombre es mortal.
4. *Particular negativa*, denotada por O, y esquematizada por
$$\exists x(\varphi(x) \wedge \neg\psi(x)).$$
Como ejemplo de ella tenemos: Algún hombre no es mortal.

Observemos que O es la contradictoria de A, i.e., que $O = \neg A$. En efecto, A es $\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$, luego, ya que $\neg(\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)))$ es $\exists x(\varphi(x) \wedge \neg\psi(x))$, tenemos que $O = \neg A$. Además, I es la contradictoria de E, i.e., que $I = \neg E$. En efecto, E es $\forall x(\varphi(x) \rightarrow \neg\psi(x))$, luego, ya que $\neg(\forall x(\varphi(x) \rightarrow \neg\psi(x)))$ es $\exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$, tenemos que $I = \neg E$.

Por otra parte, I y E son simétricas en φ y en ψ, i.e., se cumple que
$$\exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) = \exists x(\psi(x) \wedge \varphi(x)),$$
y que
$$\forall x(\varphi(x) \rightarrow \neg\psi(x)) = \forall x(\psi(x) \rightarrow \neg\varphi(x)).$$

Además, tenemos las siguientes reglas de contraposición para A y O:
$$\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) = \forall x(\neg\psi(x) \rightarrow \neg\varphi(x)), \text{ y}$$
$$\exists x(\varphi(x) \wedge \neg\psi(x)) = \exists x(\neg\psi(x) \wedge \neg\neg\varphi(x)).$$

Las relaciones lógicas entre las cuatro proposiciones, una de cada uno de los tipos A, E, I, O, que se pueden formar a partir de dos términos dados φ y ψ se expresan tradicionalmente como sigue:

1. A, i.e., $\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$, y E, i.e., $\forall x(\varphi(x) \rightarrow \neg\psi(x))$ son *contrarias*.
2. I, i.e., $\exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$, y O, i.e., $\exists x(\varphi(x) \wedge \neg\psi(x))$ son *subcontrarias*.
3. A, i.e., $\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$, y O, i.e., $\exists x(\varphi(x) \wedge \neg\psi(x))$ son *contradictorias*.
4. E, i.e., $\forall x(\varphi(x) \rightarrow \neg\psi(x))$, e I, i.e., $\exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$ son *contradictorias*.
5. A, i.e., $\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$, e I, i.e., $\exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$ son *subalternas*.
6. E, i.e., $\forall x(\varphi(x) \rightarrow \neg\psi(x))$, y O, i.e., $\exists x(\varphi(x) \wedge \neg\psi(x))$ son *subalternas*.

Después de considerar las dos primeras fases en la construcción de la lógica tradicional, i.e., determinar, en primer lugar, los *términos* y, en segundo lugar, las *proposiciones*, obtenidas a partir de los primeros, podemos pasar a considerar la tercera fase, i.e., la que tiene que ver con la *inferencia lógica*. La inferencia lógica es un proceso de transformación en el que se obtiene una proposición, la *conclusión* de la inferencia, a partir de otra u otras proposiciones, sus *premisas*.

Es evidente que a partir de una sola premisa no se puede inferir gran cosa. Podemos, de hecho, considerar a la premisa como conclusión de sí misma, una inferencia vacua; o podemos inferir una proposición particular subalterna a partir de una proposición universal, I a partir de A, u O a partir de E; o podemos pasar de una proposición universal a una proposición particular que esté subsumida bajo ella, como por ejemplo de "Todos los hombres son mortales"a "Sócrates es mortal".

Sin embargo, si se parte, no de una, sino de un par de premisas y entre ambas hay algo en común, entonces el proceso inferencial ya no es necesariamente trivial, como en el caso anterior en el que se partía de una sola premisa. De hecho el caso más simple, cuando están involucradas dos premisas, es aquél que surge cuando la inferencia consiste precisamente en la eliminación de un término común a ambas premisas. Esta forma de inferencia, establecida por Aristóteles, y que permite construir razonamientos, i.e., cadenas finitas de inferencias, se conoce por el nombre de inferencia *silogística*; y uno de los mayores logros de Aristóteles consistió en dar una clasificación exhaustiva de las formas válidas del silogismo. Para no ser acusados, por Łukasiewicz, de ignorantes, o de no haber leído el *Organon*, hemos de decir que el silogismo de Aristóteles tiene la forma: Si A es predicado de todo B y B es predicado de todo C, entonces A es predicado de todo C, luego la de un condicional cuyo antecedente es la conjunción de dos proposiciones. Por lo tanto, ningún silogismo es formulado por Aristóteles como una inferencia con las palabras "por consiguiente", como en la lógica tradicional.

El término M, que aparece en ambas premisas, se llama el *término medio* del silogismo; el predicado P de la conclusión se llama el *término mayor*; y el sujeto S de la conclusión se llama el *término menor*. Las tres proposiciones que componen un silogismo se disponen en dos filas separadas por un segmento de línea como sigue: en la fila superior se escribe, a la izquierda, la premisa mayor y, a la derecha, la premisa menor, en la fila inferior se escribe la conclusión.

Puesto que los dos pares M, P y M, S pueden ser ordenados independientemente de cuatro maneras posibles, obtenemos cuatro *figuras* distintas del silogismo:

$$\begin{array}{cccc} \text{Figura I} & \text{Figura II} & \text{Figura III} & \text{Figura VI} \\ \dfrac{MP\ \ SM}{SP} & \dfrac{PM\ \ SM}{SP} & \dfrac{MP\ \ MS}{SP} & \dfrac{PM\ \ MS}{SP} \end{array}$$

La cuarta figura no es mencionada por Aristóteles. Por otra parte, cada una de las figuras silogísticas tiene precisamente 64 *modos*, que es el número de las aplicaciones distintas de un conjunto que consta de exactamente tres elementos, en este caso las dos premisas junto con la conclusión, en un conjunto con exactamente cuatro elementos, en este caso el formado por los tipos proposicionales A, E, I, O. Por lo tanto, en total, hay $256 = 4 \times 64$ esquemas silogísticos. De estos los hay concluyentes o válidos, i.e., tales que de las premisas realmente se infiere la conclusión, y no concluyentes o no válidos. De hecho, excepto 24, los demás no son concluyentes, y, además, de los 24 concluyentes cinco son poco usados.

Definición 4.1. Un álgebra monádica es un par $(\mathbf{B}, \exists)$ en el que $\mathbf{B}$ es un álgebra Booleana y $\exists$ una endoaplicación de B que cumple los siguientes axiomas:

1. $\exists(0) = 0$, i.e., $\exists$ está normalizado.
2. Para cada $x \in B$, $x \leq \exists(x)$, i.e., $\exists$ es extensivo.
3. Para cada $x, y \in B$, $\exists(x \wedge \exists(y)) = \exists(x) \wedge \exists(y)$, i.e., $\exists$ es modular sobre $\wedge$ o cuasi-multiplicativo.

Observemos que el segundo axioma se puede representar ecuacionalmente como:

$$\forall x \in B, x \wedge \exists(x) = x.$$

A partir del álgebra monádica $(\mathbf{B}, \exists)$ obtenemos el operador $\forall\colon B \longrightarrow B$ definido como:

$$\forall \begin{cases} B \longrightarrow B \\ x \longmapsto \forall(x) = \neg\exists(\neg x) \end{cases}$$

Definiendo los morfismos entre dos álgebra monádicas como los homomorfismos que preservan la estructura adicional se obtiene una categoría **MAlg**.

Definimos a continuación cuatro operaciones binarias sobre un álgebra monádica $(\mathbf{B}, \exists)$.

$$A \begin{cases} B \times B \longrightarrow B \\ (x,y) \longmapsto A(x,y) = \forall(x \to y) \text{ [todo } x \text{ es } y] \end{cases}$$

$$E \begin{cases} B \times B \longrightarrow B \\ (x,y) \longmapsto E(x,y) = \forall(x \to \neg y) \text{ [ningún } x \text{ es } y] \end{cases}$$

$$I \begin{cases} B \times B \longrightarrow B \\ (x,y) \longmapsto I(x,y) = \exists(x \wedge y) \text{ [algún } x \text{ es } y] \end{cases}$$

$$O \begin{cases} B \times B \longrightarrow B \\ (x,y) \longmapsto O(x,y) = \exists(x \wedge \neg y) \text{ [algún } x \text{ no es } y] \end{cases}$$

Los nombres de las anteriores funciones provienen de las vocales de las palabras latinas: **A***FF***I***RMO* y *N***E***G***O**. Las funciones A e I son afirmativas, mientras que las funciones E y O son negativas. Además, A y E son universales, mientras que I y O son particulares. También se dice que A y E son contrarias, que I y O son subcontrarias y que A y O, así como E e I son contradictorias. Por último, A implica I y E implica O.

El motivo por el que A y O, así como E e I se dice que son contradictorias, es que $\neg O = A$ y $\neg E = I$.

Proposición 4.2. *Se cumple que E e I son simétricas, i.e., que, para cada $x, y \in B$, $E(y,x) = E(x,y)$ e $I(y,x) = I(x,y)$. También se cumple que, para cada $x, y \in B$, $A(\neg y, \neg x) = A(x,y)$ y $O(\neg y, \neg x) = O(x,y)$.*

El problema principal de la lógica tradicional es el de clasificar los silogismos. Antes de definir el concepto de silogismo convenimos que si $F\colon B \times B \longrightarrow B$, entonces $F^{\mathrm{s}}\colon B \times B \longrightarrow B$ es la aplicación definida como:

$$F^{\mathrm{s}} \begin{cases} B \times B \longrightarrow B \\ (x,y) \longmapsto F^{\mathrm{s}}(x,y) = F(y,x) \end{cases}$$

Definición 4.3. Un silogismo es un triplo (F_0, F_1, F_2) de funciones binarias sobre B, conjunto subyacente del álgebra monádica $(\mathbf{B}, \exists)$ tal que $F_0, F_1 \in \{A, E, I, O\} \cup \{A^{\mathrm{s}}, E^{\mathrm{s}}, I^{\mathrm{s}}, O^{\mathrm{s}}\}$ y $F_2 \in \{A, E, I, O\}$

Definición 4.4. Un silogismo (F_0, F_1, F_2) es válido en el álgebra monádica $(\mathbf{B}, \exists)$ si, para cada $x, y, z \in B$, $F_0(y,z) \wedge F_1(x,y) \leq F_2(x,z)$.

En principio hay $8 \times 8 \times 4 = 256$ silogismos; el problema de la clasificación es el de elegir los válidos de entre ellos.

Para cada operación binaria $F\colon B \times B \longrightarrow B$, el primer argumento se llama el *sujeto* y el segundo el *predicado*. En un silogismo (F_0, F_1, F_2), F_0 y F_1 son las *premisas* y F_2 la *conclusión*. El sujeto de la conclusión es el *término menor* del silogismo y el predicado de la conclusión es el *término mayor* del silogismo. El sujeto de F_0, que es el mismo que el predicado de F_1, se llama el *término medio* del silogismo. La premisa, F_1, que contiene el término menor es la *premisa menor*, la otra premisa, F_0, que contiene el término mayor, es la *premisa mayor*.

$$\frac{\overbrace{F_0(\text{Término medio}, \text{Término mayor})}^{\text{Premisa mayor}} \quad \overbrace{F_1(\text{Término menor}, \text{Término medio})}^{\text{Premisa menor}}}{\underbrace{F_2(\text{Término menor}, \text{Término mayor})}_{\text{Conclusión}}}$$

Los silogismos válidos son:

$$(A, A, A)$$
$$(E, A, E)$$
$$(A, I, I)$$
$$(E, I, O)$$
$$(A^{\mathrm{s}}, O, O)$$
$$(A^{\mathrm{s}}, E, E)$$
$$(O, A^{\mathrm{s}}, O)$$
$$(I, A^{\mathrm{s}}, I)$$

5. Teoría de modelos.

En este sección definimos la noción de signatura, el concepto de álgebra y los homomorfismos entre las álgebras. También definimos las nociones de subálgebra de un álgebra, las álgebras libres sobre los conjuntos y las operaciones polinómicas sobre un álgebra. Además, una vez definidas las nociones de signatura de primer orden y de sistema algebraico, definimos los términos y las fórmulas de la lógica de predicados de primer orden con igualdad y la relación de satisfacción entre sistemas algebraicos, fórmulas y valoraciones, establecemos las nociones de modelo de un conjunto de fórmulas y de teoría de un conjunto de sistemas algebraicos; a continuación, exponemos la conexión de Galois contravariante (inducida por la relación de satisfacción) entre los retículos completos de los sistemas algebraicos (de una signatura dada) y de las fórmulas, definimos y estudiamos los conceptos de encajamiento elemental y equivalencia elemental, y demostramos el teorema de completud de Gödel-Mal'cev, previa presentación de un sistema deductivo, que afirma la identidad entre la relación de consecuencia sintáctica y la relación de consecuencia semántica.

La teoría de modelos es la rama de la lógica matemática que estudia la conexión que existe entre los conjuntos de fórmulas, relativas a cierto lenguaje formal, y conjuntos de sistemas algebraicos, adecuados al mismo lenguaje formal, inducida por la relación de satisfacibilidad de Tarski. También podría decirse, en tanto que ampliación del Programa de Erlangen de Klein, que la teoría de modelos se ocupa del estudio de los invariantes de los sistemas algebraicos, i.e., del estudio de las propiedades de los sistemas algebraicos que son preservadas bajo equivalencias elementales. Para ciertos autores, e.g., Chang & Keisler, la teoría de modelos es simplemente la "suma" del álgebra universal y de la lógica matemática.

El teorema de Löwenheim-Skolem, según el cual cualquier sentencia de la lógica de predicados de primer orden (abreviado como FOPL) que sea verdadera en un sistema algebraico lo es en uno que sea a lo sumo infinito-numerable, es el primer resultado de la FOPL que puede ser considerado como perteneciente a la teoría de modelos. Sin embargo, el primer resultado que establece un vínculo entre la noción de demostrabilidad y la de verdad es el teorema de completud de Gödel, según el cual una sentencia de FOPL es verdadera exactamente si es demostrable, estableciendo asi la identidad, para la FOPL, entre las relaciones de consecuencia sintáctica y semántica.

Cabe señalar también que Tarski, en su trabajo "The concept of truth in formalized languages", realizó un profundo análisis de la interpretación de las sentencias de un lenguaje formal en sistemas algebraicos adecuados al mismo. Además, Skolem, en la misma época, demostró la existencia de modelos no-standard de la aritmética, haciendo uso del método de los ultraproductos.

Estos desarrollos autónomos de la teoría de modelos, tuvieron su continuación con los trabajos de Mal'cev sobre el teorema de compacidad, según el cual una condición suficiente para que un conjunto de sentencias de FOPL tenga un modelo es que cada subconjunto finito del mismo tenga un modelo, y su aplicación a la demostración de teoremas de la teoría de grupos infinitos. Además, el teorema de compacidad proporciona un medio para demostrar teoremas de encajamiento en álgebra, e.g., si cualquier subanillo finito-generado de un anillo no conmutativo se puede encajar en un anillo con división, entonces el anillo se puede encajar en un anillo con división. También en esta línea algebraica, A. Robinson estudió a los conjuntos de modelos de conjuntos de sentencias de la FOPL en el mismo sentido que en la geometría algebraica se estudian los conjuntos de los ceros de ideales generados por polinomios y obtuvo resultados aplicables a la teoría de cuerpos.

Otro tipo de aplicación está relacionado con la completud, e.g., hay resultados acerca del cuerpo de los números reales que se pueden formular en FOPL pero que han sido demostrados usando métodos topológicos. Un resultado de Tarski demuestra que tales resultados son verdaderos en todos los cuerpos reales cerrados independientemente de sus propiedades topológicas. Un método relacionado ha sido usado por A. Robinson para dar una nueva demostración de un teorema de Artin relativo a un problema de Hilbert. El mismo A. Robinson, haciendo uso del método de los ultraproductos, aplicó la teoría de modelos para obtener nuevos resultados en el análisis matemático. También han sido obtenidos resultados acerca de la independencia y consistencia relativa, por parte de Cohen, mediante la construcción de modelos adecuados.

Además, los métodos de la teoría de modelos permiten obtener caracterizaciones de ciertas clases de sentencias mediante el estudio de las propiedades de clausura de los conjuntos de modelos de las mismas, asi e.g., como vimos en el capítulo anterior, las clases ecuacionalmente definibles son exactamente las clases de álgebra universales cerradas bajo imágenes homomorfas, subálgebras y productos.

5.1. Signaturas y álgebras.

Definición 5.1. Una *signatura algebraica* $\mathbf{\Sigma}$ es un par ordenado $\mathbf{\Sigma} = (\Sigma, \mathrm{ar})$ en el que Σ, el conjunto de los *símbolos de operación*, es un conjunto y ar, la *ariedad*, una aplicación de Σ en $\mathbb{N}$. Si $\sigma \in \Sigma$ y $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, entonces decimos que σ es un símbolo de operación n-ario, y, para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por Σ_n el conjunto de todos los símbolos de operación n-arios.

La ariedad de un símbolo de operación σ, indica el número de los argumentos que tendrá cualquier realización de σ como una operación sobre un conjunto.

Definición 5.2. Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y A un conjunto. Una $\mathbf{\Sigma}$-*estructura algebraica* sobre el conjunto A es una aplicación F de Σ en $\bigcup_{\sigma\in\Sigma} \mathrm{Hom}(A^{\mathrm{ar}(\sigma)}, A)$ tal que, para cada $\sigma \in \Sigma$, $F_\sigma \in \mathrm{Hom}(A^{\mathrm{ar}(\sigma)}, A)$.

En algunos casos, para evitar equivocaciones, denotaremos la $\mathbf{\Sigma}$-estructura algebraica que estemos considerando sobre un conjunto A por $F^{\mathbf{A}}$, y a las operaciones que la componen por $F^{\mathbf{A}}_\sigma$, con $\sigma \in \Sigma$. Además, cuando $\mathrm{ar}(\sigma) = 0$, denotaremos por $\sigma^{\mathbf{A}}$ el valor de $F^{\mathbf{A}}_\sigma \colon 1 \longrightarrow A$ en el único miembro de 1.

Una $\mathbf{\Sigma}$-*álgebra* es un par ordenado $\mathbf{A} = (A, F)$, en el que A es un conjunto y F una $\mathbf{\Sigma}$-estructura algebraica sobre A.

En la definición de $\mathbf{\Sigma}$-estructura algebraica sobre un conjunto no hemos exigido que a símbolos de operación distintos, de la misma ariedad, correspondan operaciones distintas sobre el conjunto en cuestión.

Presentamos a continuación algunos ejemplos de álgebras especialmente relevantes en las matemáticas, sin ánimo de ser exhaustivo.

5.1.1. Magmas. Un *magma* es un par $(A, \cdot)$ en el que A es un conjunto y $\cdot$ una operación binaria sobre A. Para cada conjunto A, los pares $(\mathrm{Rel}(A), \circ)$, $(\mathrm{End}_{\mathrm{p}}(A), \circ)$ y $(\mathrm{End}(A), \circ)$ son magmas.

5.1.2. Semigrupos. Un *semigrupo* es un par $(A, \cdot)$ en el que A es un conjunto y $\cdot$ una operación binaria sobre A tal que:

$$\forall x, y, z \in A,\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

Para cada conjunto A, los pares $(\mathrm{Rel}(A), \circ)$, $(\mathrm{End}_{\mathrm{p}}(A), \circ)$ y $(\mathrm{End}(A), \circ)$ son semigrupos.

5.1.3. Monoides. Un *monoide* es un triplo $(A, \cdot, 1)$ en el que A es un conjunto, $\cdot$ una operación binaria sobre A y 1 un elemento de A tal que:

1. $\forall x, y, z \in A,\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$
2. $\forall x \in A,\ x \cdot 1 = x$ y $1 \cdot x = x.$

Para cada conjunto A, $(\mathrm{Rel}(A), \circ, \Delta_A)$, $(\mathrm{End}_{\mathrm{p}}(A), \circ, \mathrm{id}_A)$ y $(\mathrm{End}(A), \circ, \mathrm{id}_A)$ son monoides. Además, si $\mathrm{Ml}(A)$, también denotado por $A^\star$, es el conjunto de todas las palabras sobre el alfabeto A, i.e., el conjunto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$, de todas las funciones cuyo dominio es un número natural y cuya imagen está incluida en A, entonces el par ordenado $(\curlywedge, \lambda)$, en el que $\curlywedge$, la operación (binaria) de *concatenación* de palabras construidas con las letras del alfabeto A, es la aplicación de $\mathrm{Ml}(A) \times \mathrm{Ml}(A)$ en $\mathrm{Ml}(A)$ definida como:

$$\curlywedge \begin{cases} \mathrm{Ml}(A) \times \mathrm{Ml}(A) \longrightarrow \mathrm{Ml}(A) \\ ((x_i)_{i \in m}, (y_j)_{j \in n}) \longmapsto (z_k)_{k \in m+n} = \begin{cases} x_k, & \text{si } 0 \leq k < m; \\ y_{k-m}, & \text{si } m \leq k < m+n, \end{cases} \end{cases}$$

y λ, la *palabra vacía* sobre el alfabeto A, la única función de 0 en A, es una estructura de monoide sobre $\mathrm{Ml}(A)$.

5.1.4. Monoides abelianos. Un *monoide abeliano* es un triplo $(A, +, 0)$ en el que A es un conjunto, $+$ una operación binaria sobre A y 0 un elemento de A tal que:

1. $\forall x, y, z \in A,\ x + (y + z) = (x + y) + z.$
2. $\forall x \in A,\ x + 0 = x$ y $0 + x = x.$
3. $\forall x, y \in A,\ x + y = y + x.$

Para un conjunto A, si $\mathbb{N}^{(A)}$ es el conjunto de todas las funciones $(n_a)_{a \in A}$ de *soporte finito* de A en $\mathbb{N}$, i.e., el conjunto definido como:

$$\mathbb{N}^{(A)} = \{\, (n_a)_{a \in A} \in \mathbb{N}^A \mid \mathrm{card}(\{\, a \in A \mid n_a \neq 0 \,\}) < \aleph_0 \,\},$$

entonces el par ordenado $(+, \kappa_0)$, en el que $+$ es la aplicación de $\mathbb{N}^{(A)} \times \mathbb{N}^{(A)}$ en $\mathbb{N}^{(A)}$ definida como:

$$+ \begin{cases} \mathbb{N}^{(A)} \times \mathbb{N}^{(A)} \longrightarrow \mathbb{N}^{(A)} \\ ((m_a)_{a \in A}, (n_a)_{a \in A}) \longmapsto (m_a + n_a)_{a \in A} \end{cases}$$

y κ_0, la aplicación de A en $\mathbb{N}$ cuya imagen es $\{0\}$, es una estructura de monoide abeliano sobre $\mathbb{N}^{(A)}$.

5.1.5. Cuasigrupos. Un *cuasigrupo* es un cuádruplo $(A, \cdot, /, \backslash)$ en el que A es un conjunto y $\cdot$, $/$ y $\backslash$ operaciones binarias sobre A tales que:

1. $\forall x, y \in A,\ (x/y) \cdot y = x.$
2. $\forall x, y \in A,\ (x \cdot y)/y = x.$
3. $\forall x, y \in A,\ y \cdot (y \backslash x) = x.$
4. $\forall x, y \in A,\ y \backslash (y \cdot x) = x.$

5.1.6. Bucles. Un *bucle* es un quíntuplo $(A, \cdot, /, \backslash, 1)$ en el que $(A, \cdot, /, \backslash)$ es un cuasigrupo y $1 \in A$ tal que

$$\forall x, y \in A,\ x \cdot 1 = x \text{ y } 1 \cdot x = x.$$

5.1.7. Grupos. Un *grupo* es un cuádruplo $(A, \cdot, {}^{-1}, 1)$ en el que A es un conjunto, $\cdot$ una operación binaria sobre A, ${}^{-1}$ una operación unaria sobre A y 1 un elemento de A tal que:

1. $\forall x, y, z \in A,\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
2. $\forall x \in A,\ x \cdot 1 = x$ y $1 \cdot x = x$.
3. $\forall x \in A,\ x \cdot x^{-1} = 1$ y $x^{-1} \cdot x = 1$.

Para cada conjunto A, el cuádruplo $(\mathrm{Aut}(A), \circ, {}^{-1}, \mathrm{id}_A)$ es un grupo.

5.1.8. Grupos abelianos. Un *grupo abeliano* es un cuádruplo $(A, +, -, 0)$ en el que A es un conjunto, $+$ una operación binaria sobre A, $-$ una operación unaria sobre A y 0 un elemento de A tal que:

1. $\forall x, y, z \in A,\ x + (y + z) = (x + y) + z$.
2. $\forall x \in A,\ x + 0 = x$ y $0 + x = x$.
3. $\forall x \in A,\ x + (-x) = 0$ y $(-x) + x = 0$.
4. $\forall x, y \in A,\ x + y = y + x$.

5.1.9. Anillos. Un *anillo* es un séxtuplo $(A, +, -, 0, \cdot, 1)$ tal que:

1. $(A, +, -, 0)$ es un grupo abeliano.
2. $(A, \cdot, 1)$ es un monoide.
3. $\forall x, y, z \in A,\ x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ y $(y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x)$.

Para cada grupo abeliano $\mathbf{A} = (A, +, -, 0)$, el séxtuplo $(\mathrm{End}(\mathbf{A}), +, -, \kappa_0, \circ, \mathrm{id}_A)$, en el que $+$ es la operación binaria sobre $\mathrm{End}(\mathbf{A})$ que a un par de endomorfismos f, g del grupo abeliano $\mathbf{A} = (A, +, -, 0)$ le asigna el endomorfismo $f + g$ que, a cada $x \in A$, le asocia $f(x) + g(x)$, $-$ la operación unaria sobre $\mathrm{End}(\mathbf{A})$ que a un endomorfismo f del grupo abeliano $\mathbf{A} = (A, +, -, 0)$ le asigna el endomorfismo $-f$ que, a cada $x \in A$, le asocia $-f(x) = -(f(x))$, $\circ$ la composición de endomorfismos y κ_0 el endomorfismo de $\mathbf{A}$ cuya imagen es $\{0\}$, es un anillo.

5.1.10. Anillos conmutativos. Un *anillo conmutativo* es un séxtuplo $(A, +, -, 0, \cdot, 1)$ tal que:

1. $(A, +, -, 0)$ es un grupo abeliano.
2. $(A, \cdot, 1)$ es un monoide abeliano.
3. $\forall x, y, z \in A,\ x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ y $(y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x)$.

5.1.11. Módulos. Si $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda, +, -, 0, \cdot, 1)$ es un anillo, un $\mathbf{\Lambda}$-*módulo a la izquierda* es un quíntuplo $(M, +, -, 0, (F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda))$ tal que:

1. $(M, +, -, 0)$ es un grupo abeliano.
2. $\forall \lambda \in \Lambda,\ \forall x, y \in M,\ F_\lambda(x + y) = F_\lambda(x) + F_\lambda(y)$.
3. $\forall \lambda, \mu \in \Lambda,\ \forall x \in M,\ F_{\lambda+\mu}(x) = F_\lambda(x) + F_\mu(x)$.
4. $\forall \lambda, \mu \in \Lambda,\ \forall x \in M,\ F_{\lambda\cdot\mu}(x) = F_\lambda(F_\mu(x))$.
5. $\forall x \in M,\ F_1(x) = x$.

5.1.12. Espacios vectoriales.

5.1.13. Grupos con multioperadores. Si $\mathbf{\Omega}$ es un dominio de operadores tal que $\Omega_0 = \varnothing$, entonces un $\mathbf{\Omega}$-*grupo* es un quíntuplo $(G, +, -, 0, (F_\omega \mid \omega \in \Omega))$ tal que:

1. $(G, +, -, 0)$ es un grupo (no necesariamente abeliano).
2. $\forall \omega \in \Omega$, si $\mathrm{ar}(\omega) = n$, entonces $F_\omega \colon G^n \longrightarrow G$ y $F_\omega(0, \ldots, 0) = 0$.

5.1.14. Algebras lineales.

5.1.15. Semirretículos. Un *semirretículo* es un par $(A, \cdot)$ en el que A es un conjunto y $\cdot$ una operación binaria sobre A tal que:

1. $\forall x \in A,\ x \cdot x = x$.
2. $\forall x, y \in A,\ x \cdot y = y \cdot x$.
3. $\forall x, y, z \in A,\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

Para cada conjunto A, $(\mathrm{Sub}(A), \cup)$ y $(\mathrm{Sub}(A), \cap)$ son semirretículos.

5.1.16. Retículos. Un *retículo* es un triplo $(A, \vee, \wedge)$ en el que A es un conjunto y $\vee$ y $\wedge$ operaciones binarias sobre A tales que:

1. $\forall x \in A,\ x \vee x = x$ y $x \wedge x = x$.
2. $\forall x, y \in A,\ x \vee y = y \vee x$ y $x \wedge y = y \wedge x$.
3. $\forall x, y, z \in A,\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ y $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.
4. $\forall x, y \in A,\ x \vee (x \wedge y) = x$ y $x \wedge (x \vee y) = x$.

Para cada conjunto A, $(\mathrm{Sub}(A), \cup, \cap)$ es un retículo.

5.1.17. Algebras Booleanas. Un *álgebra Booleana* es un séxtuplo $(A, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ en el que A es un conjunto, $\vee$ y $\wedge$ operaciones binarias sobre A, $-$ una operación unaria sobre A y 0, $1 \in A$ tales que:

1. $\forall x \in A,\ x \vee x = x$ y $x \wedge x = x$.
2. $\forall x, y \in A,\ x \vee y = y \vee x$ y $x \wedge y = y \wedge x$.
3. $\forall x, y, z \in A,\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ y $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.
4. $\forall x, y \in A,\ x \vee (x \wedge y) = x$ y $x \wedge (x \vee y) = x$.
5. $\forall x, y, z \in A,\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ y $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
6. $\forall x \in A,\ x \wedge -x = 0$ y $x \vee -x = 1$.
7. $\forall x \in A,\ x \wedge 0 = 0$ y $x \vee 1 = 1$.

Para cada conjunto A, $(\mathrm{Sub}(A), \cup, \cap, \complement_A, \varnothing, A)$ es un álgebra Booleana.

5.1.18. Algebras de Heyting.

5.1.19. Anillos ternarios planares. Un *anillo ternario planar* es un cuádruplo $(\Gamma, T, 0, 1)$ en el que Γ es un conjunto, T una operación ternaria sobre Γ y 0, 1 elementos de Γ, tal que:

1. $0 \neq 1$.
2. $\forall m, c \in \Gamma,\ T(0, m, c) = c$.
3. $\forall x, c \in \Gamma,\ T(x, 0, c) = c$.
4. $\forall x \in \Gamma,\ T(x, 1, 0) = x$.
5. $\forall m \in \Gamma,\ T(1, m, 0) = m$.
6. $\forall x, m, v \in \Gamma,\ \exists! c \in \Gamma$ tal que $T(x, m, c) = v$.
7. $\forall m, n, c, d \in \Gamma$, si $m \neq n$, entonces $\exists! x \in \Gamma$ tal que $T(x, m, c) = T(x, n, d)$.
8. $\forall x, y, v, w \in \Gamma$, si $x \neq y$, entonces $\exists! (m, c) \in \Gamma^2$ tal que $T(x, m, c) = v$ y $T(y, m, c) = w$.

Los anteriores ejemplos de álgebras muestran que, con la excepción de los anillos ternarios, las operaciones de que están dotadas son a lo sumo binarias, como dice Cohn:

> This is no accident, for in a certain sense all finitary operators may be built up from binary ones. However, there may be no particularly natural way of doing this in any given instance, and besides, the gain in simplicity would not be very great.

Además, salvo en el caso de los anillos ternarios, las álgebras consideradas están sujetas a cumplir ecuaciones.

Por otra parte, el concepto de álgebra considerado está sujeto a las siguientes limitaciones:

- Las álgebras tienen un único conjunto subyacente, i.e., son entidades homogéneas.
- Las operaciones son finitarias.
- Las operaciones están totalmente definidas.

De modo que objetos matemáticos tales como e.g., los *autómatas*, los *monoides con cancelación*, los *anillos con división*, los *cuerpos*, los *espacios topológicos*, los $\mathcal{L}^*$-*espacios*, los *grupos topológicos*, los *espacios vectoriales topológicos* o las *variedades diferenciables*, no son objeto de estudio del álgebra universal, aunque sí del álgebra universal heterogénea o de la teoría de modelos (de primer orden u orden superior). Concretamente, los autómatas no son objeto de estudio del álgebra universal, pero sí del álgebra universal heterogénea, porque un autómata es una entidad heterogénea $(I, Q, O, \delta, \lambda, q_0)$ en la que I es el conjunto de las *entradas*, Q el de los *estados*, O el de las *salidas*, $\delta\colon I \times Q \longrightarrow Q$ la aplicación de *transición*, $\lambda\colon I \times Q \longrightarrow O$ la aplicación de *salida* y q_0 el estado inicial; los monoides con cancelación tampoco son objeto de estudio del álgebra universal, pero sí de la lógica implicacional, porque un monoide con cancelación es un monoide $(A, \cdot, 1)$ tal que, para cada $x, y, z \in A$, si $x \cdot y = x \cdot z$, entonces $y = z$ y si $y \cdot x = z \cdot x$, entonces $y = z$, que no son ecuaciones; los anillos con división tampoco son objeto de estudio del álgebra universal, pero sí de la teoría de modelos, porque un anillo con división es un anillo $(A, +, -, 0, \cdot, 1)$ tal que $0 \neq 1$ y, para cada $x \in A$, si $x \neq 0$, entonces existe un $y \in A$ tal que $x \cdot y = 1$ e $y \cdot x = 1$, que no son ecuaciones; los $\mathcal{L}^*$-espacios tampoco lo son, pero sí del álgebra universal infinitaria no determinista, porque un $\mathcal{L}^*$-espacio es un par (X, Λ) en el que X es un conjunto y $\Lambda\colon X^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathrm{Sub}(X)$ tal que:

1. Para cada $x \in X$, $x \in \Lambda(\kappa_x)$, siendo κ_x la aplicación de $\mathbb{N}$ en X cuya imagen es $\{x\}$.
2. Para cada $(x_n \mid n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbb{N}}$, si $\Lambda(x_n \mid n \in \mathbb{N}) \neq \varnothing$, entonces para cada subsucesión $(y_n \mid n \in \mathbb{N})$ de $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$, se cumple que
$$\Lambda(x_n \mid n \in \mathbb{N}) \subseteq \Lambda(y_n \mid n \in \mathbb{N}).$$
Recordamos que una sucesión $(y_n \mid n \in \mathbb{N})$ en X es una subsucesión de otra sucesión $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ en el mismo conjunto, si existe una aplicación estrictamente creciente $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_{\varphi_n}$.
3. Para cada $x \in X$ y cada $(x_n \mid n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbb{N}}$, si $x \notin \Lambda(x_n \mid n \in \mathbb{N})$, entonces existe una subsucesión $(y_n \mid n \in \mathbb{N})$ de $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ tal que, para cada subsucesión $(z_n \mid n \in \mathbb{N})$ de $(y_n \mid n \in \mathbb{N})$ se cumple que $x \notin \Lambda(z_n \mid n \in \mathbb{N})$,

que es una operación infinitaria no determinista.

Una vez definido el concepto de $\mathbf{\Sigma}$-álgebra, un medio para estudiarlas es el de compararlas entre sí, para ello definimos los homomorfismos entre las mismas, la composición de los homomorfismos y establecemos las propiedades básicas de la composición.

Definición 5.3. Un $\mathbf{\Sigma}$-*homomorfismo* o, para abreviar, un *homomorfismo* de $\mathbf{A} = (A, F^{\mathbf{A}})$ en $\mathbf{B} = (B, F^{\mathbf{B}})$ es un triplo ordenado $(\mathbf{A}, f, \mathbf{B})$, abreviado como f y denotado por $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, en el que f es una aplicación de A en B, tal que, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\Sigma) = n$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "F^{\mathbf{A}}_\sigma"'] & B^n \arrow[d, "F^{\mathbf{B}}_\sigma"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., para cada $x \in A^n$, $f(F_\sigma^{\mathbf{A}}(x)) = F_\sigma^{\mathbf{B}}(f^n(x))$. A los homomorfismos de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra en sí misma los denominamos *endomorfismos*.

Proposición 5.4. *Sean* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, $g\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ *y* $h\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ *tres homomorfismos de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras. Entonces:*

1. *Siendo* $\mathrm{id}_{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}, \mathrm{id}_A, \mathbf{A})$*, se cumple que* $\mathrm{id}_{\mathbf{A}}\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$*, el homomorfismo* identidad *de* $\mathbf{A}$*, es un endomorfismo de* $\mathbf{A}$.
2. *Siendo* $g \circ f = (\mathbf{A}, g \circ f, \mathbf{C})$*, se cumple que* $g \circ f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$*, el homomorfismo* composición *de* f *y* g*, es un homomorfismo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{C}$.
3. (Asociatividad)*. El diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] \arrow[drr, bend left=60, "(h \circ g) \circ f"] \arrow[drr, bend right=60, "h \circ (g \circ f)"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h \circ g"] & \\
& \mathbf{C} \arrow[r, "h"'] & \mathbf{D}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

4. (Neutros)*. Los diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbf{A}}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{A} \arrow[d, "f"] \\
& \mathbf{B}
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbf{B}}"] \\
& \mathbf{B}
\end{tikzcd}$$

conmutan.

Demostración.

1. Puesto que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{id}_A^n = \mathrm{id}_{A^n}$, tenemos que $\mathrm{id}_{\mathbf{A}}\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ es un homomorfismo, ya que entonces, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A^n \arrow[r, "\mathrm{id}_A^n"] \arrow[d, "F_\sigma^{\mathbf{A}}"'] & A^n \arrow[d, "F_\sigma^{\mathbf{A}}"] \\
A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"'] & A
\end{tikzcd}$$

conmuta.

2. Puesto que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $g^n \circ f^n = (g \circ f)^n$, y, por hipótesis, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
A^n \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "F_\sigma^{\mathbf{A}}"'] & B^n \arrow[d, "F_\sigma^{\mathbf{B}}"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
B^n \arrow[r, "g^n"] \arrow[d, "F_\sigma^{\mathbf{B}}"'] & C^n \arrow[d, "F_\sigma^{\mathbf{C}}"] \\
B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

conmutan, entonces también conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "(g\circ f)^n"] \arrow[d, "F_\sigma^{\mathbf{A}}"'] & C^n \arrow[d, "F_\sigma^{\mathbf{C}}"] \\ A \arrow[r, "g\circ f"'] & C \end{tikzcd}$$

luego $g\circ f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ es un homomorfismo. □

En lo que sigue, salvo indicación expresa de lo contrario, supondremos elegido un universo de Grothendieck $\boldsymbol{\mathcal{U}}$, arbitrario pero fijo, y que todos los conjuntos que consideremos son elementos del mismo.

Corolario 5.5. *Las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras $\mathbf{A}$ tales que $A \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, junto con los homomorfismos entre ellas constituyen una categoría, a la que denotamos por* $\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})$.

Definición 5.6.

1. Decimos que $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es un *monomorfismo* si, para cada $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{X}$ y cualesquiera homomorfismos $g, h\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A}$, si el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] \arrow[rr, bend left, "f\circ g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ h"'] & \mathbf{A} \arrow[r, "f"] & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $g = h$, i.e., si cuando $f\circ g = f\circ h$, entonces $g = h$; es por ello que a este tipo de homomorfismos también se los denomina *simplificables a la izquierda.* Denotamos al conjunto de los monomorfismos de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ por $\mathrm{Mono}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Convenimos entonces que $f\colon \mathbf{A} \rightarrowtail \mathbf{B}$ significa que el homomorfismo $f\colon \mathbf{A} \rightarrowtail \mathbf{B}$ es un monomorfismo.

2. Decimos que $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es un *epimorfismo* si, para cada $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{Y}$ y cualesquiera homomorfismos $g, h\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{Y}$, si el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] \arrow[rr, bend right, "h\circ f"'] & \mathbf{B} \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & \mathbf{Y} \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $g = h$, i.e., si cuando $g\circ f = h\circ f$, entonces $g = h$; es por ello que a este tipo de homomorfismos también se los denomina *simplificables a la derecha.* Convenimos entonces que $f\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$ significa que el homomorfismo $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es un epimorfismo, y denotamos al conjunto de los epimorfismos de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ por $\mathrm{Epi}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

3. Decimos que $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es un *isomorfismo* si existe un $g\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que $g\circ f = \mathrm{id}_{\mathbf{A}}$ y $f\circ g = \mathrm{id}_{\mathbf{B}}$. A los isomorfismos de un álgebra en sí misma los denominamos *automorfismos.*

Si un homomorfismo $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es inyectivo, resp., sobreyectivo, entonces es un monomorfismo, resp., epimorfismo.

Un homomorfismo $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es un isomorfismo precisamente si es un homomorfismo biyectivo.

5.2. Subálgebras.

> The concept of a subgroup is fundamental in the theory of groups. The entire content of group theory is more or less linked up with questions about the existence, in a group, of subgroups having one or another special property, about groups that can be embedded in a given group, about properties that characterise the mutual disposition of subgroups in a group, about methods of constructing a group from its subgroups, etc. The classification of various special types of groups also depends mainly on the concept of a subgroup.
>
> *Kurosh.*

Del mismo modo que para estudiar los conjuntos es imprescindible considerar los subconjuntos de los mismos, para el estudio de las álgebras hay que considerar las subálgebras de las mismas, y que son las partes que tienen la propiedad de estar cerradas bajo las operaciones estructurales de las que están dotadas las álgebras.

Definición 5.7. Sean $\mathbf{A} = (A, F^{\mathbf{A}})$ y X un subconjunto de A.

1. Si $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, decimos que X está *cerrado bajo la operación* $F^{\mathbf{A}}_\sigma \colon A^n \longrightarrow A$ si, para cada $a \in X^n$, $F^{\mathbf{A}}_\sigma(a) \in X$, i.e., si $F^{\mathbf{A}}_\sigma[X^n] \subseteq X$.
2. Decimos que X es un *cerrado* o una *subálgebra* de $\mathbf{A}$ si, para cada $\sigma \in \Sigma$ con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, y cada $a \in X^n$, $F^{\mathbf{A}}_\sigma(a) \in X$, i.e., si X está cerrado bajo cada una de las operaciones estructurales de $\mathbf{A}$. Al conjunto de los cerrados de $\mathbf{A}$ lo denotamos por $\mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.

Proposición 5.8. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra. Entonces existe una biyección, natural, entre el conjunto* $\mathrm{Cl}(\mathbf{A})$*, de los cerrados de* $\mathbf{A}$ *y el conjunto* $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$*, de las subálgebras de* $\mathbf{A}$*. Además, esa biyección se extiende hasta un isomorfismo, cuando los conjuntos* $\mathrm{Cl}(\mathbf{A})$ *y* $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ *se consideran ordenados por la inclusión.*

Demostración. En efecto, la aplicación de $\mathrm{Cl}(\mathbf{A})$ en $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ que a un cerrado X de $\mathbf{A} = (A, F^{\mathbf{A}})$ le asigna la subálgebra $\mathbf{X} = (X, (F^{\mathbf{A}}_\sigma{\restriction}X \mid \sigma \in \Sigma))$ de $\mathbf{A}$ es una biyección entre ambos conjuntos. □

No sólo es cierto que existe una biyección entre el conjunto de los cerrados de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ y el de las subálgebras de la misma, sino que además hay una biyección entre tales conjuntos y un cierto conjunto cociente del conjunto de las cotas inferiores mónicas de $\mathbf{A}$.

Definición 5.9. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Una *cota inferior mónica* de $\mathbf{A}$ es un par $(\mathbf{B}, f)$ en el que $\mathbf{B}$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y f un homomorfismo inyectivo de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$. Al conjunto de las cotas inferiores mónicas de $\mathbf{A}$ lo denotamos por $\mathrm{Mono}(\mathbf{A})$.

Observemos que $\mathrm{Mono}(\mathbf{A})$, para cada $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$, es un subconjunto del universo $\boldsymbol{\mathcal{U}}$. Vamos a definir sobre el conjunto $\mathrm{Mono}(\mathbf{A})$ una relación de equivalencia de modo que el conjunto cociente resultante, que seguirá siendo una parte del universo, sea isomorfo a un elemento del universo $\boldsymbol{\mathcal{U}}$, por lo tanto tal conjunto cociente será, en definitiva, un elemento de $\boldsymbol{\mathcal{U}}$.

Definición 5.10. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $(\mathbf{B}, f)$, $(\mathbf{C}, g)$ dos cotas inferiores mónicas de $\mathbf{A}$. Decimos que $(\mathbf{B}, f)$ *precede* a $(\mathbf{C}, g)$, y lo denotamos por $(\mathbf{B}, f) \leq (\mathbf{C}, g)$, si hay un morfismo $t\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ tal que $f = g \circ t$. Por último, decimos que $(\mathbf{B}, f)$ y $(\mathbf{C}, g)$ son *equivalentes*, y lo denotamos por $(\mathbf{B}, f) \equiv (\mathbf{C}, g)$, si $(\mathbf{B}, f)$ precede a $(\mathbf{C}, g)$ y $(\mathbf{C}, g)$ precede a $(\mathbf{B}, f)$.

Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $(\mathbf{B}, f)$, $(\mathbf{C}, g)$ dos cotas inferiores mónicas de $\mathbf{A}$. Entonces $(\mathbf{B}, f) \leq (\mathbf{C}, g)$ si y sólo si hay un único homomorfismo inyectivo $t\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ tal que $f = g \circ t$. Además, $(\mathbf{B}, f) \equiv (\mathbf{C}, g)$ precisamente si hay un único isomorfismo $t\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ tal que $f = g \circ t$.

Proposición 5.11. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra. Entonces la relación de precedencia sobre el conjunto de las cotas inferiores de* $\mathbf{A}$ *es un preorden y, por lo tanto, la de equivalencia sobre el mismo conjunto es una relación de equivalencia.*

Demostración. □

Proposición 5.12. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra. Entonces el conjunto* $\mathrm{Cl}(\mathbf{A})$ *es isomorfo al conjunto cociente* $\mathrm{Mono}(\mathbf{A})/\equiv$.

Demostración. □

Proposición 5.13. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo inyectivo y* $g\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{B}$. *Si* $\mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$, *entonces existe un único homomorfismo* $h\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{A}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{C} \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, "f"'] & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Por ser f un homomorfismo inyectivo, es evidente que hay a lo sumo un homomorfismo $h\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que $g = f \circ h$.

Por lo que respecta a la existencia, dado un $c \in C$, se cumple que $g(c) \in \mathrm{Im}(f)$, luego hay un $a \in A$ tal que $f(a) = g(c)$. Además tal elemento de A es único, porque f es un homomorfismo inyectivo. Por consiguiente hay un único $a \in A$ tal que $f(a) = g(c)$. Sea entonces $h\colon C \longrightarrow A$ la aplicación que a un $c \in C$ le asigna el único $a \in A$ tal que $f(a) = g(c)$.

Es evidente que al componer h con f obtenemos g. Veamos que h es un homomorfismo de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{A}$. Sea $\sigma \in \Sigma$ tal que su ariedad sea n y $(c_0, \ldots, c_{n-1}) \in C^n$. Entonces, siendo H_σ la operación estructural de $\mathbf{C}$ correspondiente a σ, tenemos que $h(H_\sigma(c_0, \ldots, c_{n-1}))$ es el único elemento a de A tal que $f(a) = g(H_\sigma(c_0, \ldots, c_{n-1}))$. Ahora bien, por una parte, por ser g homomorfismo, tenemos que $g(H_\sigma(c_0, \ldots, c_{n-1})) = G_\sigma(g(c_0), \ldots, g(c_{n-1}))$ y, por otra, por ser $F_\sigma(h(c_0), \ldots, h(c_{n-1}))$ un elemento de A tal que $f(F_\sigma(h(c_0), \ldots, h(c_{n-1}))) = G_\sigma(f(h(c_0)), \ldots, f(h(c_{n-1})))$, podemos afirmar que $f(F_\sigma(h(c_0), \ldots, h(c_{n-1}))) = G_\sigma(g(c_0), \ldots, g(c_{n-1}))$, de donde $h(H_\sigma(c_0, \ldots, c_{n-1})) = F_\sigma(h(c_0), \ldots, h(c_{n-1}))$. □

Proposición 5.14. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y* X *un cerrado de* $\mathbf{A}$. *Entonces hay una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{X}$, *la* subálgebra de $\mathbf{A}$ asociada a X, *y un homomorfismo inyectivo* $\mathrm{in}_{\mathbf{X}}\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A}$, *la* inclusión canónica *de* $\mathbf{X}$ *en* $\mathbf{A}$, *tal que:*

1. $\mathrm{Im}(\mathrm{in}_{\mathbf{X}}) = X$.
2. (Propiedad universal) *Para cada homomorfismo* $f\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$, *si* $\mathrm{Im}(f) \subseteq X$, *entonces existe un único homomorfismo* g *de* $\mathbf{B}$ *en* $\mathbf{X}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{B} \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "f"] \\ \mathbf{X} \arrow[r, "\mathrm{in}_{\mathbf{X}}"'] & \mathbf{A} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposición 5.15. *Si* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, *entonces* $\mathrm{Im}(f)$ *es un cerrado de* $\mathbf{B}$.

Demostración. $\square$

A partir de las dos proposiciones anteriores obtenemos la factorización de un homomorfismo a traves de su imagen.

Proposición 5.16 (Noether)**.** *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo. Entonces hay un único homomorfismo sobreyectivo* f^{s}*, el* sobreyectivizado *de* f*, de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{Im}(f)$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, two heads, "f^{\mathrm{s}}"'] & \mathbf{B} \\
& \mathbf{Im}(f) \arrow[u, tail, "\mathrm{in}_{\mathbf{Im}(f)}"']
\end{tikzcd}$$

conmuta. Esta es la factorización a través de la imagen *de un homomorfismo. Además, si* f *es inyectivo, entonces* f^{s} *es inyectivo, luego biyectivo.*

Por otra parte, se cumple que para cada $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{C}$*, cualquier homomorfismo* $g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ *y cualquier homomorfismo inyectivo* $h\colon \mathbf{C} \rightarrowtail \mathbf{B}$*, si el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbf{B} \\
& \mathbf{C} \arrow[u, tail, "h"']
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces existe un único monomorfismo $t\colon \mathbf{Im}(f) \rightarrowtail \mathbf{C}$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"] \arrow[ddr, two heads, "f^{s}"'] & & \mathbf{B} \\
& \mathbf{C} \arrow[ur, tail, "h"'] & \\
& \mathbf{Im}(f) \arrow[u, tail, "t"'] \arrow[uur, tail, "\mathrm{in}_{\mathbf{Im}(f)}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta. De modo que $\mathbf{Im}(f)$ *es, esencialmente, la mínima subálgebra de* $\mathbf{B}$ *a través del cual factoriza* f*.*

Proposición 5.17. *Sea* f *un homomorfismo inyectivo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{B}$*,* g *un homomorfismo de* $\mathbf{D}$ *en* $\mathbf{B}$ *y* h *un homomorfismo inyectivo de* $\mathbf{C}$ *en* $\mathbf{D}$*. Entonces:*

1. *Una condición necesaria y suficiente para que exista un homomorfismo* t *de* $\mathbf{C}$ *en* $\mathbf{A}$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "t"] \arrow[d, tail, "h"'] & \mathbf{A} \arrow[d, tail, "f"] \\
\mathbf{D} \arrow[r, "g"'] & \mathbf{B}
\end{tikzcd}$$

conmute, es que $\mathrm{Im}(g \circ h) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

2. *Si* $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ *y* $\mathbf{C} \leq \mathbf{D}$*, entonces una condición necesaria y suficiente para que exista un homomorfismo* t *de* $\mathbf{C}$ *en* $\mathbf{A}$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "t"] \arrow[d, hook, "\mathrm{in}_{\mathbf{C}}"'] & \mathbf{A} \arrow[d, hook, "\mathrm{in}_{\mathbf{A}}"] \\ \mathbf{D} \arrow[r, "g"'] & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

conmute, es que $g[C] \subseteq A$.

Además, tanto en el primero como en el segundo caso t *está unívocamente determinado y recibe el nombre de* birrestricción *de* g *a* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{A}$.

Demostración. □

Proposición 5.18. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra. Entonces el conjunto de los cerrados de* $\mathbf{A}$, $\mathrm{Cl}(\mathbf{A})$*, es un sistema de clausura algebraico sobre* A*, i.e., tiene las siguientes propiedades:*

1. $A \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.
2. *Si* $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$ *y* $\mathcal{C} \neq \varnothing$*, entonces* $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.
3. *Si* $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$, $\mathcal{C} \neq \varnothing$ *y si dados* $X, Y \in \mathcal{C}$*, hay un* $Z \in \mathcal{C}$ *tal que* $X \cup Y \subseteq Z$*, entonces* $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.

Demostración. Debido a que es evidente que A es un cerrado de $\mathbf{A}$, nos limitamos a demostrar las dos últimas propiedades.

2. Sea $\mathcal{C}$ un conjunto no vacío de cerrados de $\mathbf{A}$, $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$ y $a \in (\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C)^n$. Entonces, para cada $C \in \mathcal{C}$, se cumple que $F_\sigma^{\mathbf{A}}(a) \in C$, luego $F_\sigma^{\mathbf{A}}(a) \in \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$.

3. Sea $\mathcal{C}$ un conjunto no vacío de cerrados de $\mathbf{A}$ tal que dados $X, Y \in \mathcal{C}$, exista un $Z \in \mathcal{C}$ tal que $X \cup Y \subseteq Z$, $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$ y $a \in (\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C)^n$. Entonces, para cada $i \in n$, hay un $C_i \in \mathcal{C}$ tal que $a_i \in C_i$. Ahora bien, por estar la familia de cerrados $\mathcal{C}$ dirigida superiormente, hay un $C \in \mathcal{C}$ tal que, para cada $i \in n$, $C_i \subseteq C$, luego, para cada $i \in n$, $a_i \in C$, pero, por ser C un cerrado de $\mathbf{A}$, se cumple que $F_\sigma^{\mathbf{A}}(a) \in C$, por lo tanto que $F_\sigma^{\mathbf{A}}(a) \in \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$. □

Corolario 5.19. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra. Entonces la endoaplicación* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *del conjunto* $\mathrm{Sub}(A)$*, definida como:*

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(A) & \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \\ \quad X & \longmapsto \bigcap\{\, C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid X \subseteq C \,\} \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{Im}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}) \subseteq \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.
2. $\{\, X \in \mathrm{Sub}(A) \mid X = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \,\} = \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.
3. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es extensiva o inflacionaria, i.e., para cada* $X \in \mathrm{Sub}(A)$, $X \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.
4. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es isótona, i.e., para cada* $X, Y \in \mathrm{Sub}(A)$*, si* $X \subseteq Y$*, entonces se cumple que* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(Y)$.
5. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es idempotente, i.e., para cada* $X \in \mathrm{Sub}(A)$, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X))$.
6. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es algebraica, i.e., para cada* $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sub}(A)$*, si* $\mathcal{X} \neq \varnothing$ *y para cada* $X, Y \in \mathcal{X}$*, existe un* $Z \in \mathcal{X}$ *tal que* $X \cup Y \subseteq Z$*, entonces* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\bigcup \mathcal{X}) = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

Por consiguiente, para cada $X \subseteq A$, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ *es el mínimo cerrado de* $\mathbf{A}$ *que contiene a* X*, y lo denominamos el cerrado de* $\mathbf{A}$ generado *por* X*. Además, a la subálgebra de* $\mathbf{A}$ *canónicamente asociada a* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$*, la denotamos por* $\mathbf{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ *y la denominamos, también, la subálgebra de* $\mathbf{A}$ *generada por* X.

Demostración. Nos limitamos a demostrar las cuatro últimas propiedades, dejando las dos primeras como ejercicios.

3. Sea $X \in \mathrm{Sub}(A)$. Puesto que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, por definición, es $\bigcap\{\, C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid X \subseteq C \,\}$, es evidente que $X \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

4. Sean $X, Y \in \mathrm{Sub}(A)$ tales que $X \subseteq Y$. Entonces $\{\, C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid Y \subseteq C \,\}$ está incluido en $\{\, C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid X \subseteq C \,\}$, luego $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ lo está en $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(Y)$.

5. Sea $X \in \mathrm{Sub}(A)$. En virtud de la extensividad y de la isotonía, se cumple que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X))$. Recíprocamente, debido a que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X))$ es el mínimo cerrado de $\mathbf{A}$ que contiene a $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ y $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ es un cerrado de $\mathbf{A}$ que se contiene a sí mismo, se cumple que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

6. Sea $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sub}(A)$, tal que $\mathcal{X} \neq \varnothing$ y para cada $X, Y \in \mathcal{X}$, existe un $Z \in \mathcal{X}$ tal que $X \cup Y \subseteq Z$. Puesto que, para cada $X \in \mathcal{X}$, $X \subseteq \bigcup_{X \in \mathcal{X}} X$, podemos afirmar, en virtud de la isotonía, que, para cada $X \in \mathcal{X}$, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X)$, por lo tanto $\bigcup_{X \in \mathcal{X}} \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X)$. Recíprocamente, por ser la familia de conjuntos $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sub}(A)$ no vacía y estar dirigida superiormente, la familia de subálgebras de $\mathbf{A}$, $(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \mid X \in \mathcal{X})$ no es vacía y está dirigida superiormente, por lo tanto $\bigcup_{X \in \mathcal{X}} \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ es una subálgebra de $\mathbf{A}$ que, además, contiene a $\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X$, luego también contiene a $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X)$.

□

Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Entonces, para cada subconjunto X de A, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \bigcup_{K \subseteq_{\mathrm{fin}} X} \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(K)$. En general no se cumple que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \bigcup_{x \in X} \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x\})$.

Proposición 5.20. *Si* $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$ *y* $X \subseteq B$, *entonces* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(X) = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$

Demostración. □

La proposición anterior nos autoriza, para una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ y un subconjunto X de A, a escribir simplemente $\mathrm{Sg}(X)$ en lugar de $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

A continuación, introducimos unas nociones que nos permitirán obtener una descripción más *constructiva* de la subálgebra generada por un conjunto.

Definición 5.21. Sea $\mathbf{A} = (A, F)$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Entonces:

1. Denotamos por $\mathrm{E}_{\mathbf{A}}$ el operador sobre $\mathrm{Sub}(A)$, definido como:

$$\mathrm{E}_{\mathbf{A}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(A) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \\ \quad X \quad \longmapsto X \cup \Big(\bigcup_{\sigma \in \Sigma} F_{\sigma}[X^{\mathrm{ar}(\sigma)}] \Big). \end{cases}$$

2. Si $X \subseteq A$, entonces denotamos por $(\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X) \mid n \in \mathbb{N})$ la familia en $\mathrm{Sub}(A)$ definida por recursión como:

$$\mathrm{E}^{0}_{\mathbf{A}}(X) = X,$$
$$\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{E}_{\mathbf{A}}(\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X)),\ n \geq 0.$$

Además, convenimos que:

$$\mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X)$$

Proposición 5.22. *Si* $\mathbf{A}$ *es una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y* $X \subseteq A$, *entonces* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X)$.

Demostración. Demostramos en primer lugar que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X)$. Para ello, debido a que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ es el mínimo cerrado de $\mathbf{A}$ que contiene a X, es suficiente que demostremos que $\mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X)$ es un cerrado de $\mathbf{A}$ y que contiene a X. Ahora bien, $\mathrm{E}^{0}_{\mathbf{A}}(X) = X$, luego $X \subseteq \mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X)$. Por otra parte, si $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = m$ y $a \in (\mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X))^{m}$, entonces, para cada $\alpha \in m$, hay un $n_{\alpha} \in \mathbb{N}$ tal que $a_{\alpha} \in \mathrm{E}^{n_{\alpha}}_{\mathbf{A}}(X)$, pero la familia $(\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X) \mid n \in \mathbb{N})$ es una cadena ascendente, luego hay un $\beta \in m$ tal que, para cada $\alpha \in m$, $\mathrm{E}^{n_{\alpha}}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{E}^{n_{\beta}}_{\mathbf{A}}(X)$, por lo tanto, para cada $\alpha \in m$, $a_{\alpha} \in \mathrm{E}^{n_{\beta}}_{\mathbf{A}}(X)$, de donde $F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a) \in \mathrm{E}^{n_{\beta}+1}_{\mathbf{A}}(X)$, por consiguiente $F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a) \in \mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X)$.

Para demostrar que $\mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ procedemos por inducción finita. Puesto que $\mathrm{E}^{0}_{\mathbf{A}}(X) = X$ y $X \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, se cumple que $\mathrm{E}^{0}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$. Supongamos que, para $n \geq 0$, se cumpla que $\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$. Entonces, ya que $\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{E}_{\mathbf{A}}(\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X))$, para demostrar que $\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, es suficiente que demostremos que $\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ y que $\bigcup_{\sigma\in\Sigma} F_{\sigma}[(\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X))^{\mathrm{ar}(\sigma)}] \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$. Ahora bien, lo primero se cumple por la hipótesis de inducción. Sea pues $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = m$ y $a \in (\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X))^{m}$, entonces, para cada $\alpha \in m$, $a_{\alpha} \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, luego $F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a) \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, por lo tanto $F_{\sigma}[(\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X))^{m}] \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$. □

Proposición 5.23. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra,* X *un cerrado de* $\mathbf{A}$ *e* $Y \subseteq A$*. Entonces hay un cerrado* Z *de* $\mathbf{A}$ *tal que* $X \subseteq Z$ *y* $Z \cap Y = X \cap Y$ *y* Z *es maximal con dichas propiedades.*

Demostración. Sea $\mathcal{X}_{X,Y} = \{\, C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid X \subseteq C \text{ y } C \cap Y = X \cap Y \,\}$. El conjunto $\mathcal{X}_{X,Y}$ no es vacío, porque $X \in \mathcal{X}_{X,Y}$. Por otra parte, si $(C_i \mid i \in I)$ es una cadena no vacía en $(\mathcal{X}_{X,Y}, \subseteq)$, entonces $\bigcup_{i\in I} C_i$ es, obviamente, el supremo de $(C_i \mid i \in I)$ en $(\mathcal{X}_{X,Y}, \subseteq)$, luego, en virtud del lema de Zorn, en el conjunto ordenado $(\mathcal{X}_{X,Y}, \subseteq)$ hay un maximal Z. □

Definición 5.24. Sea $\mathbf{A}$ es una $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra y $X \subseteq A$. Decimos que X es un *conjunto de generadores* de $\mathbf{A}$, o que X *genera* $\mathbf{A}$, si $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = A$ y que es un *conjunto de generadores minimal* de $\mathbf{A}$ si es un conjunto de generadores y si ningún subconjunto estricto de X genera $\mathbf{A}$. Además, decimos que $\mathbf{A}$ está *finitamente generada*, o que es de *generación finita*, si hay un subconjunto X de A tal que $\mathrm{card}\, X < \aleph_0$ y X genera $\mathbf{A}$. En particular, decimos que $\mathbf{A}$ es *cíclica* si hay un $a \in A$ tal que $\{a\}$ genera $\mathbf{A}$.

En el estudio de las álgebras, como tendremos oportunidad de comprobar, e.g., al estudiar todo lo referente a las operaciones polinómicas sobre un álgebra, nos encontraremos ante situaciones en las que queremos demostrar que todos los elementos de la subálgebra generada por un subconjunto de un álgebra tiene una cierta propiedad. En tal caso, generalizando el principio de la demostración por inducción finita, procederemos mediante el principio de la demostración por *inducción algebraica*, que pasamos a establecer a continuación.

Proposición 5.25. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra,* $X \subseteq A$ *e* $Y \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$*. Una condición suficiente para que* $Y = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$*, es que* $X \subseteq Y$ *y que* Y *sea un cerrado de* $\mathbf{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ *(o, lo que es equivalente, un cerrado de* $\mathbf{A}$*). En particular, si* X *es un conjunto de generadores de* $\mathbf{A}$*, una condición suficiente para que* $Y = A$*, es que* $X \subseteq Y$ *y que* Y *sea un cerrado de* $\mathbf{A}$*.*

Demostración. Supongamos que $X \subseteq Y$ y que Y sea un cerrado de $\mathbf{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$. Entonces, en virtud de la isotonía, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(Y) = Y$, luego, ya que $Y \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, $Y = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$. □

Del mismo modo que en el caso del conjunto de los números naturales, considerado como un álgebra de Dedekind-Peano, en el estudio de las álgebras, también surge la necesidad de definir homomorfismos desde ciertas álgebras, concretamente las álgebras libres sobre los conjuntos, hasta otras álgebras, e.g., para determinar la conexión de Galois entre las álgebras y las ecuaciones, y, así como en el caso de los números naturales demostramos el principio de la definición por recursión finita, aquí, cuando estudiemos las álgebras libres, demostraremos el principio de la definición por recursión algebraica, que nos permitirá definir homomorfismos desde las álgebras libres, y que estará íntimamente ligado al principio de la demostración por inducción algebraica.

Proposición 5.26. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra finitamente generada y* X *un cerrado de* $\mathbf{A}$ *tal que* $X \neq A$*. Entonces hay un cerrado distinto de* A *que contiene a* X *y es maximal con dichas propiedades.*

Demostración. Sea $\mathcal{X}_X = \{\, C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid X \subseteq C \text{ y } C \neq A \,\}$. El conjunto $\mathcal{X}_X$ no es vacío, porque $X \in \mathcal{X}_X$. Por otra parte, si $(C_i \mid i \in I)$ es una cadena no vacía en $(\mathcal{X}_X, \subseteq)$, entonces $\bigcup_{i\in I} C_i$ es el supremo de $(C_i \mid i \in I)$ en $(\mathcal{X}_{X,Y}, \subseteq)$. En efecto, es evidente que el cerrado $\bigcup_{i\in I} C_i$ de $\mathbf{A}$ es tal que $X \subseteq \bigcup_{i\in I} C_i$ y que $\bigcup_{i\in I} C_i \neq A$, esto último debido a que si ocurriera que $\bigcup_{i\in I} C_i = A$, entonces, ya que $\mathbf{A}$ es una $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra finitamente generada, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(F) = A$, para una parte finita $F = \{\, a_\alpha \mid \alpha \in n \,\}$ de A, luego, para cada $\alpha \in n$, existiría un $i_\alpha \in I$ tal que $a_\alpha \in C_{i_\alpha}$, pero, por ser $(C_i \mid i \in I)$ una cadena, existiría un β tal que, para cada $\alpha \in n$, $a_\alpha \in C_{i_\beta}$, así que $F \subseteq C_{i_\beta}$, de donde $C_{i_\beta} = A$, que es una contradicción, luego $\bigcup_{i\in I} C_i \in \mathcal{X}_X$ y, evidentemente es el supremo de $(C_i \mid i \in I)$ en $(\mathcal{X}_{X,Y}, \subseteq)$. Por consiguiente, en virtud del lema de Zorn, en el conjunto ordenado $(\mathcal{X}_X, \subseteq)$ hay un maximal. □

Proposición 5.27. *Si* $\mathbf{A}$ *es una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra finitamente generada, entonces cualquier conjunto de generadores de* $\mathbf{A}$ *contiene un subconjunto finito que también genera* $\mathbf{A}$*. Además,* $\mathbf{A}$ *tiene un conjunto de generadores minimal.*

Demostración. Sea X un conjunto de generadores de $\mathbf{A}$ e $Y = \{\, y_\alpha \mid \alpha \in n \,\}$ un conjunto de generadores finito de $\mathbf{A}$. Entonces, ya que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \bigcup_{K \subseteq_{\mathrm{fin}} X} \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(K)$ y $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = A$, se cumple que, para cada $\alpha \in n$, hay un $K_\alpha \subseteq_{\mathrm{fin}} X$ tal que $y_\alpha \in K_\alpha$, luego $\bigcup_{\alpha\in n} K_\alpha \subseteq_{\mathrm{fin}} X$ y $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\bigcup_{\alpha\in n} K_\alpha) = A$.

Para demostrar que $\mathbf{A}$ tiene un conjunto de generadores minimal, es suficiente tomar en consideración que siendo el propio A un conjunto de generadores de $\mathbf{A}$, A contiene un subconjunto finito que también genera $\mathbf{A}$, luego el conjunto $\mathcal{G}_{\mathbf{A}} = \{\, K \subseteq_{\mathrm{fin}} A \mid \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(K) = A \,\} \neq \varnothing$, por lo tanto el conjunto $\{\, \mathrm{card}(K) \mid K \in \mathcal{G}_{\mathbf{A}} \,\}$, no siendo vacío, tiene un mínimo n, es suficiente entonces tomar un $K \in \mathcal{G}_{\mathbf{A}}$ tal que $\mathrm{card}(K) = n$ para obtener un conjunto de generadores minimal. □

Proposición 5.28. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra y* X *un conjunto de generadores minimal de* $\mathbf{A}$*. Si* X *es infinito, entonces cualquier conjunto de generadores de* $\mathbf{A}$ *es tal que su cardinal es al menos el cardinal de* X*. En particular,* $\mathbf{A}$ *no puede ser una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra finitamente generada y dos conjuntos de generadores minimales infinitos cualesquiera de* $\mathbf{A}$ *tienen el mismo cardinal.*

Demostración. Por ser X un conjunto de generadores de $\mathbf{A}$, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = A$ y, por ser $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ algebraico, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \bigcup_{F \subseteq_{\mathrm{fin}} X} \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(F)$, luego, para cada $y \in Y$, hay una parte finita F_y de X tal que $y \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(F_y)$. Por consiguiente $Y \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\bigcup_{y\in Y} F_y)$, pero $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(Y) = A$, luego $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\bigcup_{y\in Y} F_y)$, i.e., $\bigcup_{y\in Y} F_y$ es un conjunto de generadores de $\mathbf{A}$ y $\bigcup_{y\in Y} F_y \subseteq X$. Se cumple que $\bigcup_{y\in Y} F_y = X$, porque, en caso contrario, X no sería minimal. Además, Y es infinito, ya que, en caso contrario, X sería finito. Por otra parte, se cumple que

$$\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(\textstyle\bigcup_{y\in Y} F_y) \leq \sum_{y\in Y} F_y \leq \aleph_0 \cdot \mathrm{card}(Y) = \mathrm{card}(Y).$$

□

Si $\mathbf{A}$ es una $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra que está generada por un conjunto infinito numerable, entonces cualquier conjunto de generadores de $\mathbf{A}$ contiene un subconjunto numerable que también genera $\mathbf{A}$.

Proposición 5.29. *Si* $\mathbf{A}$ *es una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra, entonces una condición necesaria y suficiente para que toda* ω*-cadena ascendente de subálgebras de* $\mathbf{A}$ *sea estacionaria es que toda subálgebra de* $\mathbf{A}$ *esté finitamente generada.*

Demostración. La condición es suficiente. Supongamos que toda subálgebra de $\mathbf{A}$ esté finitamente generada y sea $(X_n \mid n \in \mathbb{N})$ una ω-cadena ascendente de subálgebras de $\mathbf{A}$. Entonces la subálgebra $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ tiene una parte finita $K = \{\, a_\alpha \mid \alpha \in n \,\}$ tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(K)$, luego, para cada $\alpha \in n$, hay un $n_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $a_\alpha \in X_{n_\alpha}$, pero, por ser $(X_n \mid n \in \mathbb{N})$ una cadena ascendente, hay un $\beta \in n$ tal que, para cada $\alpha \in n$, $X_{n_\alpha} \subseteq X_{n_\beta}$, así que $K \subseteq X_{n_\beta}$, de donde $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = X_{n_\beta}$ y, por lo tanto la cadena ascendente $(X_n \mid n \in \mathbb{N})$ es estacionaria.

La condición es necesaria. Supongamos que $\mathbf{A}$ tenga una subálgebra X que no esté finitamente generada, i.e., que sea tal que, para cada subconjunto finito K de X, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(K) \neq X$. Entonces, para $\varnothing$ se cumple que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\varnothing) \neq X$, luego podemos elegir un $x_0 \in X - \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\varnothing)$. Puesto que $\{x_0\}$ es un subconjunto finito de X, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x_0\}) \neq X$ y además $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\varnothing) \subset \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x_0\})$. Por ser $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x_0\}) \neq X$, podemos elegir un $x_1 \in X - \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x_0\})$. Puesto que $\{x_0, x_1\}$ es un subconjunto finito de X, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x_0, x_1\}) \neq X$ y además $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x_0\}) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x_0, x_1\})$. Procediendo de este modo obtenemos una familia $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ en X que da lugar a una ω-cadena estrictamente creciente

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\varnothing) \subset \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x_0\}) \subset \ldots \subset \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\{\, x_0, \ldots, x_{n-1} \,\}) \subset \ldots,$$

de subálgebras de $\mathbf{A}$.

La última parte de esta demostración se puede presentar de una manera más rigurosa tomando en consideración el axioma de las elecciones dependientes, que es estrictamente más débil que el axioma de elección. Recordemos que el axioma de las elecciones dependientes afirma que para cada conjunto C que no sea vacío y cada relación binaria Φ sobre C, si para cada $x \in C$ existe un $y \in C$ tal que $(x, y) \in \Phi$, entonces hay una ω-sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en C tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(c_n, c_{n+1}) \in \Phi$.

Para el conjunto $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(X)$ y la relación binaria Φ sobre este último conjunto definida, para dos subconjuntos finitos F, G de X, como:

$$(F, G) \in \Phi \text{ si y sólo si } F \subseteq G \text{ y } \exists x \in G \text{ tal que } x \notin \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(F),$$

se cumple que $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(X) \neq \varnothing$ y que, dado un subconjunto finito F de X, hay un subconjunto finito G de X tal que $(F, G) \in \Phi$, es suficiente tomar como G el conjunto $F \cup \{x\}$, siendo x cualquier elemento de $X - \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(F)$. Por lo tanto, en virtud del axioma de las elecciones dependientes, hay una ω-sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(X)$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $(F_n, F_{n+1}) \in \Phi$, de donde obtenemos la ω-cadena estrictamente creciente

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(F_0) \subset \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(F_1) \subset \ldots \subset \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(F_n) \subset \ldots,$$

de subálgebras de $\mathbf{A}$. □

Sabemos que, para cada signatura algebraica $\mathbf{\Sigma}$ y cada $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$, el operador $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ sobre el conjunto A es un operador clausura algebraico. Demostramos a continuación un teorema de Birkhoff-Frink, que establece el recíproco, i.e., que cualquier operador clausura algebraico sobre un conjunto se puede obtener, de al menos una forma, a partir de una signatura algebraica y una estructura algebraica para tal signatura, sobre el conjunto en cuestión.

Teorema 5.30 (Birkhoff-Frink)**.** *Si J es un operador clausura algebraico sobre un conjunto A, entonces hay una signatura algebraica $\mathbf{\Sigma}$ y una estructura de $\mathbf{\Sigma}$-álgebra F sobre A tal que J coincide con $\mathrm{Sg}_{(A,F)}$.*

Demostración. Dado un subconjunto finito $X = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ de A, con n elementos, y un $a \in J(X)$, sea $F_{X,a}$ la operación n-aria sobre A definida como:

$$F_{X,a}\begin{cases} A^n & \longrightarrow A \\ (a_0, \dots, a_{n-1}) & \longmapsto \begin{cases} a, & \text{si } \{a_0, \dots, a_{n-1}\} = X; \\ a_0, & \text{si } \{a_0, \dots, a_{n-1}\} \neq X. \end{cases} \end{cases}$$

Entonces, para la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A} = (A, (F_{X,a})_{X \subseteq_{\text{fin}} A, a \in J(X)})$ se cumple que $J = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$. Ahora bien, puesto que ambos, J y $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$, son algebraicos, será suficiente que demostremos, para cada subconjunto finito X de A, que $J(X) = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

Sea $X \subseteq_{\text{fin}} A$. Entonces $J(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, porque si $a \in J(X)$, ya que $X \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ es un cerrado de $\mathbf{A}$ y, si $X = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$, $F_{X,a}(x_0, \dots, x_{n-1}) = a$, entonces $a \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

Veamos que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq J(X)$. Puesto que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ es el mínimo cerrado de $\mathbf{A}$ que contiene a X, será suficiente que demostremos que $J(X)$ es un cerrado de $\mathbf{A}$ y que contiene a X. Puesto que lo último es evidente, pasamos a demostrar que $J(X)$ es un cerrado de $\mathbf{A}$. Sea $Y = \{y_0, \dots, y_{m-1}\}$ un subconjunto finito de A, con m elementos, $b \in J(Y)$ y $(a_0, \dots, a_{m-1}) \in J(X)^m$. Si $\{a_0, \dots, a_{m-1}\} = Y$, entonces $Y \subseteq J(X)$, luego $J(Y) \subseteq J(X)$, por lo tanto $b \in J(X)$. Si $\{a_0, \dots, a_{m-1}\} \neq Y$, entonces $F_{X,a}(a_0, \dots, a_{m-1}) = a_0$, pero también $a_0 \in J(X)$. Así que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq J(X)$. □

Proposición 5.31. *Sean $f, g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ dos homomorfismos y X un subconjunto de A. Si f y g coinciden en X, entonces también coinciden en* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

Demostración. Supongamos que, para cada $x \in X$, $f(x) = g(x)$. Puesto que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X)$, para demostrar que f y g coinciden en $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, será suficiente que procedamos por inducción finita. Para $n = 0$, se cumple que f y g coinciden en $\mathrm{E}^{0}_{\mathbf{A}}(X) = X$, por hipótesis. Supongamos que para $n \geq 0$, f y g coincidan en $\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X)$. Puesto que $\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{E}_{\mathbf{A}}(\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X))$, para demostrar que f y g coinciden en $\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X)$, será suficiente que demostremos que, dado un $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = m$ y un $a \in (\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X))^m$, entonces $f(F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a)) = g(F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a))$. Sean pues $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = m$ y $a \in (\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X))^m$. Por ser f y g homomorfismos, se cumple que

$$f(F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a)) = F^{\mathbf{B}}_{\sigma}(f^m(a)) \quad \text{y} \quad g(F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a)) = F^{\mathbf{B}}_{\sigma}(g^m(a)),$$

pero $f^m(a) = g^m(a)$, porque $a \in (\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X))^m$ y f y g coinciden, por hipótesis, en $\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X)$, luego $f(F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a)) = g(F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a))$, luego coinciden en $\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X)$. Por lo tanto f y g coinciden en $\mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X)$, i.e., en $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$. □

Proposición 5.32. *Sea f una aplicación de un subconjunto X de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ en el conjunto subyacente de otra $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{B}$. Entonces hay a lo sumo una extensión g de f que sea un homomorfismo de $\mathbf{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ en $\mathbf{B}$.*

Demostración. □

A continuación establecemos el llamado *principio de la prolongación de las identidades*, que es formalmente idéntico al principio del mismo nombre de la teoría de espacios métricos (dos aplicaciones contínuas entre dos espacios métricos que coincidan en una parte densa del dominio de las mismas, coinciden en todo el dominio).

Corolario 5.33. *Sean $f, g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ dos homomorfismos y X un subconjunto de A tal que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = A$. Si f y g coinciden en X, entonces $f = g$.*

Demostración. En virtud de la proposición 5.31, por coincidir f y g en X, coinciden en $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, pero $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = A$, luego coinciden en A. □

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras. Entonces hay a lo sumo un homomorfismo de $\mathbf{Sg}_{\mathbf{A}}(\varnothing)$ en $\mathbf{B}$. Además, si tal homomorfismo existe, tiene como imagen la subálgebra de $\mathbf{B}$ generada por $\varnothing$.

Proposición 5.34. *Sea f una biyección de un conjunto de generadores X de una $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ en un conjunto de generadores Y de otra $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{B}$. Si g y h son extensiones homomorfas de f y de la inversa f^{-1} hasta $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, resp., entonces g es un isomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$, cuyo inverso es h.*

Demostración. □

Corolario 5.35. *Sea $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo y X un subconjunto de A tal que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = A$. Entonces f es inyectivo precisamente si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *f es inyectiva sobre X, i.e., $f{\restriction}X$ es inyectiva.*
2. *$\mathrm{in}_X \circ (f{\restriction}X)^{-1}$ tiene una extensión homomorfa hasta $\mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(\mathrm{Im}(f{\restriction}X))$, i.e., hay un homomorfismo $g\colon \mathbf{Sg}_{\mathbf{B}}(\mathrm{Im}(f{\restriction}X)) \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Im}(f{\restriction}X) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\mathrm{Im}(f\restriction X)}"] \arrow[dr, "\mathrm{in}_X \circ (f\restriction X)^{-1}"'] & \mathbf{Sg}_{\mathbf{B}}(\mathrm{Im}(f{\restriction}X)) \arrow[d, "g"] \\
 & \mathbf{A}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Puesto que X un conjunto de generadores de $\mathbf{A}$, el conjunto $f[X]$ es un conjunto de generadores de $\mathrm{Im}(f)$. Luego $f{\restriction}X$, por ser inyectiva, establece una biyección entre el conjunto de generadores X de $\mathbf{A}$ y el conjunto de generadores $f[X]$ de $\mathrm{Im}(f)$, por lo tanto podemos aplicar la proposición anterior a esta situación. □

Proposición 5.36. *Sea $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras, X un cerrado de $\mathbf{A}$ e Y uno de $\mathbf{B}$. Entonces $f[X] \in \mathrm{Cl}(\mathbf{B})$ y $f^{-1}[Y] \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$. En particular, $\mathrm{Im}(f) \in \mathrm{Cl}(\mathbf{B})$.*

Demostración. □

La proposición que establecemos a continuación afirma, por comparación con la situación en topología, que los homomorfismos entre álgebras son además *cerrados*, i.e., conmutan con el operador de formación de subálgebras.

Proposición 5.37. *Sea $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras y $X \subseteq A$. Entonces $f[\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)] = \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$, i.e., el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sub}(A) \arrow[r, "f{[\cdot]}"] \arrow[d, "\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}"'] & \mathrm{Sub}(B) \arrow[d, "\mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}"] \\
\mathrm{Sub}(A) \arrow[r, "f{[\cdot]}"'] & \mathrm{Sub}(B)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Puesto que $X \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, $f[X] \subseteq f[\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)]$. Ahora bien, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$ es la mínima subálgebra de $\mathbf{B}$ que contiene a $f[X]$ y $f[\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)]$ es una subálgebra de $\mathbf{B}$ que contiene a $f[X]$, por lo tanto $\mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X]) \subseteq f[\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)]$.

Para demostrar la inversa, ya que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)$ y $f[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)]$, es suficiente que demostremos, por inducción finita, que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)] \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$.

Para $n = 0$, se cumple que $f[\mathrm{E}^0_{\mathbf{A}}(X)] \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$, porque $f[\mathrm{E}^0_{\mathbf{A}}(X)] = f[X]$. Supongamos que, para $n \geq 0$, se cumpla que $f[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)] \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$. Entonces, ya que $\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X) \cup \bigcup_{\sigma\in\Sigma} F^{\mathbf{A}}_{\sigma}[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)^{\mathrm{ar}(\sigma)}]$ y

$$f[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X) \cup \textstyle\bigcup_{\sigma\in\Sigma} F^{\mathbf{A}}_{\sigma}[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)^{\mathrm{ar}(\sigma)}]] = f[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)] \cup \textstyle\bigcup_{\sigma\in\Sigma} f[F^{\mathbf{A}}_{\sigma}[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)^{\mathrm{ar}(\sigma)}]]$$

para demostrar que $f[\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X)] \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$, es suficiente que demostremos que $f[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)] \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$ y que $\bigcup_{\sigma\in\Sigma} f[F^{\mathbf{A}}_{\sigma}[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)^{\mathrm{ar}(\sigma)}]] \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$. Ahora bien, lo primero se cumple por la hipótesis de inducción. Sea pues $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = m$ y $a \in (\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X))^m$, entonces, ya que $f(F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a)) = F^{\mathbf{B}}_{\sigma}(f^m(a))$, y $f^m(a) \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$, se cumple que $f(F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a)) \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$, por lo tanto $\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$. □

Proposición 5.38. *Sea $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras y X un subconjunto de A tal que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = A$. Entonces f es un homomorfismo sobreyectivo precisamente si $f[X]$ es un conjunto de generadores de $\mathbf{B}$.*

Demostración. □

5.3. Congruencias.

Definición 5.39. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y Φ una relación binaria en A. Decimos que Φ es una *congruencia* sobre $\mathbf{A}$ si Φ es una relación de equivalencia sobre A y si, para cada $n \in \mathbb{N} - 1$, cada $\sigma \in \Sigma_n$, y cada $(x_i \mid i \in n), (y_i \mid i \in n) \in A^n$, si, para cada $i \in n$, $x_i \equiv y_i \pmod{\Phi}$, entonces $F_\sigma(x_i \mid i \in n) \equiv F_\sigma(y_i \mid i \in n) \pmod{\Phi}$.

Denotamos por $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$ el conjunto de las congruencias sobre la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$.

El ejemplo de congruencia que consideramos a continuación lo usaremos más adelante, cuando tengamos que demostrar que las álgebras libres sobre dos conjuntos son isomorfas exactamente si tales conjuntos lo son.

Ejemplo. Si $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra, entonces la relación de equivalencia sobre A determinada por la partición $\{\, \{a\} \mid a \in A - \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \mathrm{Im}(F_\sigma) \,\} \cup \{\, \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \mathrm{Im}(F_\sigma) \,\}$, es una congruencia sobre $\mathbf{A}$. Observemos que dos elementos $x, y \in A$ están relacionados, mediante la relación de equivalencia anterior, precisamente si $x = y$ o hay $m, n \in \mathrm{N}$, hay un $\sigma \in \Sigma_m$, un $\tau \in \Sigma_n$, un $a \in A^m$ y un $b \in A^n$ tales que $x = F_\sigma(a)$ e $y = F_\tau(b)$.

Proposición 5.40. *Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Entonces el conjunto de las congruencias sobre $\mathbf{A}$, $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$, es un sistema de clausura algebraico sobre $A \times A$, i.e., tiene las siguientes propiedades:*

1. $A \times A \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$.
2. *Si $(\Phi_i \mid i \in I)$ es una familia no vacía en $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$, entonces $\bigcap_{i\in I} \Phi_i$ es una congruencia sobre $\mathbf{A}$.*
3. *Si $(\Phi_i \mid i \in I)$ es una familia no vacía en $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$ y si dados $i, j \in I$, hay un $k \in I$ tal que $\Phi_i \cup \Phi_j \subseteq \Phi_k$, entonces $\bigcup_{i\in I} \Phi_i$ es una congruencia sobre $\mathbf{A}$.*

Demostración. □

Corolario 5.41. *Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Entonces la endoaplicación $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}$ del conjunto $\mathrm{Sub}(A \times A)$, definida como:*

$$\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(A \times A) & \longrightarrow \mathrm{Sub}(A \times A) \\ \qquad \Phi & \longmapsto \bigcap\{\, \Psi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A}) \mid \Phi \subseteq \Psi \,\} \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{Im}(\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}) \subseteq \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$.
2. $\{\, \Phi \in \mathrm{Sub}(A \times A) \mid \Phi = \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi) \,\} = \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$.
3. $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}$ *es extensiva o inflacionaria, i.e., para cada* $\Phi \in \mathrm{Sub}(A \times A)$, $\Phi \subseteq \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$.
4. $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}$ *es isótona, i.e., para cada* $\Phi, \Psi \in \mathrm{Sub}(A \times A)$*, si* $\Phi \subseteq \Psi$*, entonces se cumple que* $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Psi) \subseteq \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Psi)$.
5. $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}$ *es idempotente, i.e., para cada* $\Phi \in \mathrm{Sub}(A\times A)$, $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi) = \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi))$.
6. $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}$ *es algebraica, i.e., para cada familia* $(\Phi_i \mid i \in I)$ *en* $\mathrm{Sub}(A \times A)$*, si* $I \neq \varnothing$ *y para cada* $i, j \in I$*, existe un* $k \in I$ *tal que* $\Phi_i \cup \Phi_j \subseteq \Phi_k$*, entonces se cumple que* $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\bigcup_{i\in I} \Phi_i) = \bigcup_{i\in I} \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi_i)$.

Por consiguiente, para cada $\Phi \subseteq A \times A$, $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$ *es la mínima congruencia sobre* $\mathbf{A}$ *que contiene a* Φ*, y la denominamos la congruencia sobre* $\mathbf{A}$ generada *por* Φ.

Demostración. Nos limitamos a demostrar las cuatro últimas propiedades, dejando las dos primeras como ejercicios.

3. Sea $\Phi \subseteq A \times A$. Puesto que $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$, por definición, es $\bigcap\{\, \Psi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A}) \mid \Phi \subseteq \Psi \,\}$, es evidente que $Phi \subseteq \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$.

4. Sean $\Phi, \Psi \subseteq A \times A$ tales que $\Phi \subseteq \Psi$. Entonces $\{\, \Theta \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A}) \mid \Psi \subseteq \Theta \,\}$ está incluido en $\{\, \Theta \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A}) \mid \Phi \subseteq \Theta \,\}$, luego $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$ lo está en $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Psi)$.

5. Sea $\Phi \subseteq A \times A$. En virtud de la extensividad y de la isotonía, se cumple que $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi) \subseteq \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi))$. Recíprocamente, debido a que $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi))$ es la mínima congruencia sobre $\mathbf{A}$ que contiene a $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$ y $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$ es una congruencia sobre $\mathbf{A}$ que se contiene a sí misma, se cumple que $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)) \subseteq \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$.

6. Sea $(\Phi_i \mid i \in I)$ una familia en $\mathrm{Sub}(A \times A)$, tal que $I \neq \varnothing$ y para cada $i, j \in I$, existe un $k \in I$ tal que $\Phi_i \cup \Phi_j \subseteq \Phi_k$. Puesto que, para cada $i \in I$, $\Phi_i \subseteq \bigcup_{i\in I} \Phi_i$, podemos afirmar, en virtud de la isotonía, que, para cada $i \in I$, $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi_i) \subseteq \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\bigcup_{i\in I} \Phi_i)$, por lo tanto $\bigcup_{i\in I} \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi_i) \subseteq \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\bigcup_{i\in I} \Phi_i)$. Recíprocamente, por ser la familia de relaciones $(\Phi_i \mid i \in I)$ no vacía y estar dirigida superiormente, la familia de congruencias de $\mathbf{A}$, $(\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi_i) \mid i \in I)$ no es vacía y está dirigida superiormente, por lo tanto $\bigcup_{i\in I} \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi_i)$ es una congruencia sobre $\mathbf{A}$ que, además, contiene a $\bigcup_{i\in I} \Phi_i$, luego también contiene a $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\bigcup_{i\in I} \Phi_i)$. □

Proposición 5.42. *El conjunto* $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$ *de las congruencias sobre un álgebra* $\mathbf{A}$ *es un subretículo completo del retículo* $\mathbf{Eqv}(A)$ *de las equivalencias sobre* A.

Demostración. La proposición significa que si $(\Phi_i \mid i \in I)$ es una familia de congruencias sobre $\mathbf{A}$, entonces el ínfimo y el supremo de tal familia en $\mathbf{Eqv}(A)$, son de hecho congruencias sobre $\mathbf{A}$.

Nos limitamos a demostrar el caso del supremo, dejando el del ínfimo como ejercicio. Sea $n \in \mathbb{N} - 1$, $\sigma \in \Sigma_n$ y $(x_\alpha \mid \alpha \in n)$, $(y_\alpha \mid \alpha \in n) \in A^n$ tales que, para cada $\alpha \in n$, $x_\alpha \equiv y_\alpha \pmod{\bigvee_{i\in I} \Phi_i}$. Entonces, ya que en $\mathbf{Eqv}(A)$ se cumple que

$$\bigvee\nolimits_{i\in I} \Phi_i = \left\{ (x,y) \in A^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists k \in \mathbb{N} - 1\, \exists (a_\alpha)_{\alpha\in k+1} \in A^{k+1}\, \exists (i_\alpha)_{\alpha\in k} \in I^k \\ \text{tal que } x = a_0,\, y = a_k \text{ y } \forall \alpha \in k\, (a_\alpha, a_{\alpha+1}) \in \Phi_{i_\alpha} \end{array} \right\},$$

podemos afirmar que hay sucesiones finitas de elementos de A y congruencias de la familia $(\Phi_i \mid i \in I)$ tales que

$$\begin{array}{rcr} x_0 = z_{0,0}\Phi_{i_{0,0}} z_{0,1} & \cdots & z_{0,k_0-1}\Phi_{i_{0,k_0-1}} z_{0,k_0} = y_0 \\ x_1 = z_{1,0}\Phi_{i_{1,0}} z_{1,1} & \cdots & z_{1,k_1-1}\Phi_{i_{1,k_1-1}} z_{1,k_1} = y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} = z_{n-1,0}\Phi_{i_{n-1,0}} z_{n-1,1} & \cdots & z_{n-1,k_{n-1}-1}\Phi_{i_{n-1,k_{n-1}-1}} z_{n-1,k_{n-1}} = y_{n-1} \end{array}$$

Luego tenemos que

$$
\begin{aligned}
F_\sigma(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) &\equiv F_\sigma(y_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \pmod{\textstyle\bigvee_{\beta\in k_0} \Phi_{i_{0,\beta}}}\\
F_\sigma(y_0, x_1, \dots, x_{n-1}) &\equiv F_\sigma(y_0, y_1 \dots, x_{n-1}) \pmod{\textstyle\bigvee_{\beta\in k_1} \Phi_{i_{1,\beta}}}\\
&\dots\dots\dots\dots\\
F_\sigma(y_0, y_1, \dots, y_{n-2}, x_{n-1}) &\equiv F_\sigma(y_0, y_1, \dots, y_{n-2}, y_{n-1}) \pmod{\textstyle\bigvee_{\beta\in k_{n-1}} \Phi_{i_{n-1,\beta}}}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$F_\sigma(x_0, \dots, x_{n-1}) \equiv F_\sigma(y_0, \dots, y_{n-1}) \pmod{\bigvee_{\alpha\in n} \bigvee_{\beta\in k_\alpha} \Phi_{i_{\alpha,\beta}}}.$$

Así que podemos afirmar que

$$F_\sigma(x_0, \dots, x_{n-1}) \equiv F_\sigma(y_0, \dots, y_{n-1}) \pmod{\bigvee_{i\in I} \Phi_i},$$

lo cual demuestra que $\bigvee_{i\in I} \Phi_i$ es una congruencia sobre $\mathbf{A}$.

□

Antes de pasar a demostrar que el retículo de las congruencias sobre un álgebra $\mathbf{A}$ es algebraico, convenimos que, para una parte X de A, $\mathrm{Cg}(X)$ denota la congruencia sobre $\mathbf{A}$ generada por X^2. En particular, para $X = \{ a, b \}$, usamos $\mathrm{Cg}(a, b)$, en lugar de $\mathrm{Cg}(\{ a, b \})$.

Proposición 5.43. *El retículo* $\mathbf{Cgr}(\mathbf{A})$ *de las congruencias sobre un álgebra* $\mathbf{A}$*, es algebraico.*

Demostración. Demostramos en primer lugar que, para cada congruencia Φ sobre $\mathbf{A}$ se cumple que:

$$\Phi = \bigvee_{(a,b)\in\Phi} \mathrm{Cg}(a, b).$$

Es evidente que $\Phi \subseteq \bigvee_{(a,b)\in\Phi} \mathrm{Cg}(a, b)$. Recíprocamente, si $(x, y) \in \bigvee_{(a,b)\in\Phi} \mathrm{Cg}(a, b)$, entonces hay un $n \in \mathbb{N} - 1$, una familia $(c_\alpha \mid \alpha \in n + 1) \in A^{n+1}$ y una familia $((a_\alpha, b_\alpha) \mid \alpha \in n) \in \Phi^n$ tales que $x = c_0$, $y = c_n$ y, para cada $\alpha \in n$, $c_\alpha \equiv c_{\alpha+1}$ $(\text{mód } \mathrm{Cg}(a_\alpha, b_\alpha))$. Luego, para cada $\alpha \in n$, $\mathrm{Cg}(a_\alpha, b_\alpha) \subseteq \Phi$, porque $(a_\alpha, b_\alpha) \in \Phi$, por lo tanto, para cada $\alpha \in n$, $c_\alpha \equiv c_{\alpha+1} \pmod{\Phi}$. De donde $x \equiv y \pmod{\Phi}$ y por lo tanto $\bigvee_{(a,b)\in\Phi} \mathrm{Cg}(a, b) \subseteq \Phi$.

Demostramos ahora que, para cada $(a, b) \in A^2$, $\mathrm{Cg}(a, b)$ es compacta en $\mathbf{Cgr}(\mathbf{A})$. Sea $(\Phi_i \mid i \in I)$ una familia de congruencias sobre $\mathbf{A}$ tal que $\mathrm{Cg}(a, b) \subseteq \bigvee_{i\in I} \Phi_i$. Entonces $(a, b) \in \bigvee_{i\in I} \Phi_i$, luego hay un $n \in \mathbb{N} - 1$, una familia $(c_\alpha \mid \alpha \in n + 1) \in A^{n+1}$ y una familia $(i_\alpha \mid \alpha \in n) \in I^n$ tales que $a = c_0$, $b = c_n$ y, para cada $\alpha \in n$, $c_\alpha \equiv c_{\alpha+1} \pmod{\Phi_{i_\alpha}}$. Por lo tanto $a \equiv b \pmod{\bigvee_{\alpha\in n} \Phi_{i_\alpha}}$. luego $\mathrm{Cg}(a, b) \subseteq \bigvee_{\alpha\in n} \Phi_{i_\alpha}$. Por consiguiente $\mathrm{Cg}(a, b)$ es compacta.

□

Proposición 5.44. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* Φ *una relación binaria en* A *y* Ψ *una congruencia sobre* $\mathbf{A}$*. Entonces hay una congruencia* Θ *sobre* $\mathbf{A}$ *tal que* $\Psi \subseteq \Theta$ *y* $\Theta \cap \Phi = \Psi \cap \Phi$ *y* Θ *es maximal con dichas propiedades.*

Demostración. □

La proposición anterior se usa, sobre todo, cuando la relación binaria Φ consta de un único par (a, b) en el que $a \neq b$ y la congruencia Ψ sobre $\mathbf{A}$ es la diagonal. Entonces hay una congruencia Θ sobre $\mathbf{A}$ tal que $\Theta \cap \Phi = \varnothing$, i.e., $(a, b) \notin \Theta$, y Θ es maximal con dicha propiedad.

Teorema 5.45 (Grätzer-Schmidt)**.** *Si* $\mathbf{L}$ *es un retículo algebraico, entonces hay una signatura algebraica* $\mathbf{\Sigma}$ *y una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra álgebra* $\mathbf{A}$ *tal que* $\mathbf{L}$ *es isomorfo al retículo algebraico* $\mathbf{Cgr}(\mathbf{A})$*.*

Demostración. □

Proposición 5.46. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras. Entonces el* núcleo *de* f*, i.e.,* $\mathrm{Ker}(f) = \{\, (x,y) \in A \times A \mid f(x) = f(y) \,\}$*, es una congruencia sobre* $\mathbf{A}$*.*

Demostración. □

Proposición 5.47. *Si* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *es un monomorfismo, entonces es un homomorfismo inyectivo.*

Demostración. □

Proposición 5.48. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y* $\Phi \in \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}$*. Entonces hay una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{A}/\Phi$*, la* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* cociente de $\mathbf{A}$ entre Φ*, y un homomorfismo* $\mathrm{pr}_{\Phi}\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}/\Phi$*, la* proyección canónica *de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{A}/\Phi$*, tal que:*

1. $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_{\Phi}) = \Phi$.
2. (Propiedad universal) *Para cada homomorfismo* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$*, si* $\Phi \subseteq \mathrm{Ker}(f)$*, entonces hay un único homomorfismo* $g\colon \mathbf{A}/\Phi \longrightarrow \mathbf{B}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\Phi}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{A}/\Phi \arrow[d, "g"] \\ & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

La siguiente proposición establece que toda imagen homomorfa de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra es isomorfa a un álgebra cociente de la misma.

Proposición 5.49. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo sobreyectivo de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras. Entonces* $\mathbf{A}/\mathrm{Ker}(f)$ *es isomorfa a* $\mathbf{B}$*.*

Demostración. □

A continuación establecemos la factorización de un homomorfismo a traves de su núcleo.

Proposición 5.50 (Noether)**.** *Sea* f *un homomorfismo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{B}$*. Entonces hay un único homomorfismo inyectivo* f^{i}*, el* inyectivizado *de* f*, de* $\mathbf{A}/\mathrm{Ker}(f)$*, la* coimagen *de* f*, en* $\mathbf{B}$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, twoheadrightarrow, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}(f)}"'] & \mathbf{B} \\ & \mathbf{A}/\mathrm{Ker}(f) \arrow[u, tail, "f^{\mathrm{i}}"'] \end{tikzcd}$$

conmuta. Esta es la factorización canónica a través de la coimagen *de un homomorfismo. Además, si* f *es sobreyectivo, entonces* f^{i} *es sobreyectivo, luego biyectivo.*

Por otra parte, se cumple que para cada $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{C}$*, cualquier homomorfismo sobreyectivo* $g\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{C}$ *y cualquier homomorfismo* $h\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{B}$*, si el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, twoheadrightarrow, "g"'] & \mathbf{B} \\ & \mathbf{C} \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces existe un único homomorfismo sobreyectivo $t\colon \mathbf{C} \twoheadrightarrow \mathbf{A}/\mathrm{Ker}(f)$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}(f)}"] \arrow[ddr, "g"'] & & \mathbf{B} \\
& \mathbf{A}/\mathrm{Ker}(f) \arrow[ur, "f^{\mathrm{i}}"'] & \\
& \mathbf{C} \arrow[u, "t"'] \arrow[uur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposición 5.51. *Sea* f *un homomorfismo sobreyectivo de* $\mathbf{B}$ *en* $\mathbf{A}$*,* h *un homomorfismo sobreyectivo de* $\mathbf{D}$ *en* $\mathbf{C}$ *y* g *un homomorfismo de* $\mathbf{B}$ *en* $\mathbf{D}$*. Entonces:*

1. *Una condición necesaria y suficiente para que exista un homomorfismo* t *de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{C}$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B} \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, "g"'] & \mathbf{A} \arrow[d, "t"] \\
\mathbf{D} \arrow[r, two heads, "h"'] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

   conmute, es que $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(h \circ g)$*.*
2. *Si* Φ *es una congruencia sobre* $\mathbf{B}$ *y* Ψ *una congruencia sobre* $\mathbf{D}$*, entonces una condición necesaria y suficiente para que exista un homomorfismo* t *de* $\mathbf{B}/\Phi$ *en* $\mathbf{D}/\Psi$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B} \arrow[r, two heads, "\mathrm{pr}_{\Phi}"] \arrow[d, "g"'] & \mathbf{B}/\Phi \arrow[d, "t"] \\
\mathbf{D} \arrow[r, two heads, "\mathrm{pr}_{\Psi}"'] & \mathbf{D}/\Psi
\end{tikzcd}$$

   conmute, es que, para cada $x, y \in B$*, si* $(x, y) \in \Phi$*, entonces* $(g(x), g(y)) \in \Psi$

Además, tanto en el primero como en el segundo caso t *está unívocamente determinada.*

Demostración. □

Proposición 5.52. *Sean* $\Phi, \Psi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$ *y* $\Phi \subseteq \Psi$*. Entonces se cumple:*

1. Ψ/Φ *es una congruencia sobre* $\mathbf{A}/\Phi$*.*
2. *Existe un único homomorfismo* $\mathrm{p}_{\Phi,\Psi}$ *de* $\mathbf{A}/\Phi$ *en* $\mathbf{A}/\Psi$ *tal que* $\mathrm{p}_{\Phi,\Psi} \circ \mathrm{pr}_{\Phi} = \mathrm{pr}_{\Psi}$*, i.e., el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{A} \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{\Phi}"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{\Psi}"] & \\
\mathbf{A}/\Phi \arrow[rr, "\mathrm{p}_{\Phi,\Psi}"'] & & \mathbf{A}/\Psi
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, $\mathrm{p}_{\Phi,\Psi}$ *es sobreyectivo.*

3. $(\mathbf{A}/\Phi)/(\Psi/\Phi)$ *es isomorfa a* $\mathbf{A}/\Psi$.
4. $\Psi/\Phi = \mathrm{Ker}(\mathrm{p}_{\Phi,\Psi})$.

Demostración. □

En la proposición que sigue demostramos que un homomorfismo factoriza a traves de su núcleo y de su imagen.

Proposición 5.53. *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *dos* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras y* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo. Entonces el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}(f)}"'] & \mathbf{B} \\
\mathbf{A}/\mathrm{Ker}\,(f) \arrow[r, "f^b"'] & \mathbf{Im}(f) \arrow[u, "\mathrm{in}_{\mathbf{Im}(f)}"']
\end{tikzcd}$$

conmuta, siendo f^b *la* biyectivizada *de* f. *Además, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}(f)}"] \arrow[d, "f^{\mathrm{s}}"'] & \mathbf{A}/\mathrm{Ker}(f) \arrow[d, "f^{\mathrm{i}}"] \arrow[dl, "f^{\mathrm{b}}"'] \\
\mathbf{Im}(f) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\mathbf{Im}(f)}"'] & \mathbf{B}
\end{tikzcd}$$

Proposición 5.54. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras. Si* $\Phi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{B})$ *entonces la imagen inversa de* Φ *mediante* f^2 *es una congruencia sobre* $\mathbf{A}$*, i.e.,* $(f^2)^{-1}[\Phi] \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$.

Proposición 5.55. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* $X \in \mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ *y* $\Phi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$. *Entonces se cumple que:*

1. $\mathrm{Sat}_\Phi(X) \in \mathrm{Sub}(\mathbf{A})$.
2. $\Phi \upharpoonright \mathrm{Sat}_\Phi(X)$ *es una congruencia sobre* $\mathrm{Sat}_\Phi(X)$.
3. $\mathbf{X}/(\Phi \upharpoonright \mathbf{X})$ *y* $\mathrm{Sat}_\Phi(X)/(\Phi \upharpoonright \mathrm{Sat}_\Phi(X))$ *son isomorfas.*

□

Demostración. □

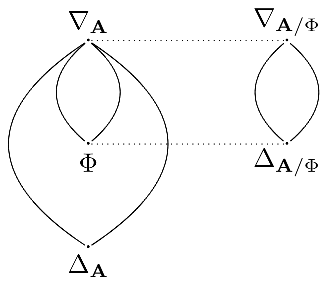
Proposición 5.56. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y* $\Phi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$. *Entonces se cumple que los retículos* $(\Uparrow \Phi, \subseteq)$ *y* $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A}/\Phi)$ *son isomorfos.*

Demostración. El isomorfismo viene dado por la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \Uparrow \Phi & \longrightarrow & \mathrm{Cgr}(\mathbf{A}/\Phi) \\ \Psi & \longmapsto & \Psi/\Phi \end{array}$$

□

La proposición anterior se puede ilustrar con la siguiente figura:



Proposición 5.57. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo sobreyectivo de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras. Si* $\Phi \subseteq A^2$*, entonces*

$$f^2[\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)] = \mathrm{Cg}_{\mathbf{B}}(f^2[\Phi]).$$

Demostración. $(f^2)^{-1}[\mathrm{Cg}_{\mathbf{B}}(f^2[\Phi])]$ es una congruencia sobre $\mathbf{A}$ que contiene a $\Phi \cup \mathrm{Ker}(f)$, luego contiene a $\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$, asi que, por ser f sobreyectiva, $\mathrm{Cg}_{\mathbf{B}}(f^2[\Phi])$ contiene a $f^2[\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)]$.

Por otra parte, al ser f un homomorfismo sobreyectivo, hay un isomorfismo entre los conjuntos ordenados $(\Uparrow \mathrm{Ker}(f), \subseteq)$ y $\mathrm{Cgr}(\mathbf{B})$. Pero $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$ así que corresponde a una congruencia $f^2[\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)]$ que contiene a $f^2[\Phi]$, luego $f^2[\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)]$ contiene a $\mathrm{Cg}_{\mathbf{B}}(f^2[\Phi])$. □

5.4. Extensión de una signatura por un conjunto. Para un conjunto X y una signatura algebraica $\mathbf{\Sigma} = (\Sigma, \mathrm{ar})$, denotamos por $\Sigma \coprod X$, el coproducto de Σ y X, i.e., el conjunto $(\Sigma \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$, por in_Σ la inclusión canónica de Σ en $\Sigma \coprod X$, i.e., la aplicación de Σ en $\Sigma \coprod X$ que a un $\sigma \in \Sigma$ le asigna $(\sigma, 0)$, y por in_X la inclusión canónica de X en $\Sigma \coprod X$, i.e., la aplicación de X en $\Sigma \coprod X$ que a un $x \in X$ le asigna $(x, 1)$. Además, convenimos, para abreviar, en denotar por (σ) el valor de la aplicación $\eta_{\Sigma \coprod X} \circ \mathrm{in}_\Sigma$ de Σ en $\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$, en $\sigma \in \Sigma$, y por (x) el valor de la aplicación $\eta_{\Sigma \coprod X} \circ \mathrm{in}_X$ de X en $\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$, en $x \in X$. Obsérvese que si no hiciéramos tales convenios notacionales, deberíamos escribir $((\sigma, 0))$ en lugar de (σ), y $((x, 1))$ en lugar de (x).

Proposición 5.58. *Sea* $\mathbf{\Sigma} = (\Sigma, \mathrm{ar})$ *una signatura algebraica,* X *un conjunto y* κ_0 *la aplicación de* X *en* $\mathbb{N}$ *que a cada* $x \in X$ *le asigna como valor* 0*. Entonces hay una única aplicación* $\mathrm{ar}[X]$ *de* $\Sigma \coprod X$ *en* $\mathbb{N}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[r, "\mathrm{in}_\Sigma"] \arrow[dr, "\mathrm{ar}"'] & \Sigma \coprod X \arrow[d, "\mathrm{ar}[X]"] & X \arrow[l, "\mathrm{in}_X"'] \arrow[dl, "\kappa_0"] \\
& \mathbb{N} &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Es suficiente tomar como aplicación $\mathrm{ar}[X]$ de $\Sigma \coprod X$ en $\mathbb{N}$, la que asigna a $(\sigma, 0)$, con $\sigma \in \Sigma$, como valor $\mathrm{ar}(\sigma)$, y a $(x, 1)$, con $x \in X$, como valor 0. □

La proposición anterior afirma simplemente que una signatura algebraica $\mathbf{\Sigma} = (\Sigma, \mathrm{ar})$ y un conjunto de variables X, determinan, unívocamente, otra signatura algebraica $\mathbf{\Sigma}[X] = (\Sigma \coprod X, \mathrm{ar}[X])$, la *extensión de* $\mathbf{\Sigma}$ *por* X, cuyo conjunto de símbolos de operación, se obtiene agregando, de manera disjunta, al conjunto de símbolos de operación dado Σ, el conjunto de las variables X, pero consideradas, ahora, como símbolos de operación 0-arios.

Proposición 5.59. *Sea* $\mathbf{\Sigma}$ *una signatura algebraica,* X *un conjunto y* $\mathrm{ar}[X]$ *la única aplicación de* $\Sigma \coprod X$ *en* $\mathbb{N}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[r, "\mathrm{in}_\Sigma"] \arrow[dr, "\mathrm{ar}"'] & \Sigma \coprod X \arrow[d, "\mathrm{ar}[X]"] & X \arrow[l, "\mathrm{in}_X"'] \arrow[dl, "\kappa_0"] \\ & \mathbb{N} & \end{tikzcd}$$

conmuta. Entonces hay un único morfismo $\mathrm{ar}[X]^\sharp\colon \mathbf{Ml}(\Sigma \coprod X) \longrightarrow (\mathbb{N}, +, 0)$ *que extiende a la aplicación* $\mathrm{ar}[X]$*, i.e.,* $\mathrm{ar}[X]^\sharp$ *es el único morfismo del monoide* $\mathbf{Ml}(\Sigma \coprod X)$ *en el monoide* $(\mathbb{N}, +, 0)$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \Sigma \coprod X \arrow[r, "\eta_{\Sigma \coprod X}"] \arrow[dr, "\mathrm{ar}[X]"'] & \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X) \arrow[d, "\mathrm{ar}[X]^\sharp"] \\ & \mathbb{N} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposición 5.60. *Sea* $\mathbf{\Sigma}$ *una signatura algebraica,* X *un conjunto y* κ_1 *la aplicación de* $\Sigma \coprod X$ *en* $\mathbb{N}$ *que a cada miembro de* $\Sigma \coprod X$ *le asigna como valor* 1*. Entonces hay un único morfismo* $|\cdot|\colon \mathbf{Ml}(\Sigma \coprod X) \longrightarrow (\mathbb{N}, +, 0)$ *que extiende a la aplicación* κ_1 *de* $\Sigma \coprod X$ *en* $\mathbb{N}$*, i.e.,* $|\cdot|$ *es el único morfismo del monoide* $\mathbf{Ml}(\Sigma \coprod X)$ *en el monoide* $(\mathbb{N}, +, 0)$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \Sigma \coprod X \arrow[r, "\eta_{\Sigma \coprod X}"] \arrow[dr, "\kappa_1"'] & \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X) \arrow[d, "|\cdot|"] \\ & \mathbb{N} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

5.5. Existencia del álgebra libre sobre un conjunto. Nos proponemos demostrar, en lo que sigue, que dada una signatura algebraica $\mathbf{\Sigma}$ y un conjunto X, existe una $\mathbf{\Sigma}$-algebra $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, la $\mathbf{\Sigma}$-algebra *absolutamente libre* sobre X, y una aplicación η_X de X en $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, la *inclusión de los generadores*, tal que para cada $\mathbf{\Sigma}$-algebra $\mathbf{A}$ y cada aplicación $f\colon X \longrightarrow A$, hay un único $\mathbf{\Sigma}$-homomorfismo $f^\sharp$ de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ en $\mathbf{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[d, "f^\sharp"] \\ & A \end{tikzcd}$$

conmuta.

Para obtener la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra absolutamente libre sobre un conjunto X, definimos en primer lugar, explícitamente, una $\mathbf{\Sigma}$-algebra $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, la $\mathbf{\Sigma}$-algebra de las *palabras sobre* X, cuyo conjunto subyacente estará formado por todas las palabras sobre el alfabeto $\Sigma \coprod X$.

Definición 5.61. Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y X un conjunto. Denotamos por $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ la $\mathbf{\Sigma}$-algebra cuyo conjunto subyacente, $\mathrm{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, es el conjunto $\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$, formado por todas las palabras sobre el alfabeto $\Sigma \coprod X$, y cuyas operaciones estructurales, F_σ, para cada $\sigma \in \Sigma$, son las definidas como:

$$F_\sigma \begin{cases} (\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X))^{\mathrm{ar}(\sigma)} & \longrightarrow \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X) \\ (P_j \mid j \in \mathrm{ar}(\sigma)) & \longmapsto (\sigma) \curlywedge \curlywedge (P_j \mid j \in \mathrm{ar}(\sigma)) \end{cases},$$

i.e., como la concatenación de la palabra (σ) y de las palabras P_j, con $j \in \mathrm{ar}(\sigma)$.

A la $\mathbf{\Sigma}$-algebra $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ la denominamos la $\mathbf{\Sigma}$-algebra de las *palabras sobre* X. Además, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, y con el fin de abreviar, denotaremos la acción de F_σ sobre la familia finita de palabras $(P_j \mid j \in n)$ como $(\sigma)P_0 \cdots P_{n-1}$.

En lo anterior, las operaciones estructurales, F_σ, se han podido definir, de cierta manera canónica, esencialmente, porque $\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$ además de ser un conjunto, está dotado de una estructura de monoide, gracias, en particular, a la operación de concatenación de palabras. Es por ello, entre otras razones, por lo que el concepto de monoide es tan importante.

Ahora que disponemos de la $\mathbf{\Sigma}$-algebra $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, así como del concepto de subálgebra de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra, definimos la $\mathbf{\Sigma}$-algebra absolutamente libre sobre un conjunto.

Definición 5.62. Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y X un conjunto. Entonces la $\mathbf{\Sigma}$-algebra *absolutamente libre* sobre X, denotada por $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, es la subálgebra de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ canónicamente asociada a $\mathrm{Sg}_{\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)}(\{ (x) \mid x \in X \})$, i.e., al cerrado de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ generado por $\{ (x) \mid x \in X \}$. A los miembros del conjunto $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, subyacente de la $\mathbf{\Sigma}$-algebra $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, los denominamos *símbolos de operación polinómica* o *términos con variables en* X.

En virtud de la definición, sabemos que $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ es la subálgebra de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ canónicamente asociada al cerrado de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ generado por $\{ (x) \mid x \in X \}$, pero desconocemos, en principio, si los términos o símbolos de operación polinómica con variables en X, admiten alguna representación canónica. Vamos a demostrar, siguiendo a Bourbaki, que, de hecho, los términos sí tienen una representación canónica. Pero antes de ello, introducimos el concepto de *sucesión de formación* de una palabra, relativa a una signatura algebraica y a un conjunto de variables, mediante el cual daremos otra caracterización del conjunto $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, que no será, esencialmente, mas que otra versión del hecho de que $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) = \mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)}(\{ (x) \mid x \in X \})$.

Definición 5.63. Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica, X un conjunto y $P \in \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$. Una *sucesión de formación* para P, relativa a $\mathbf{\Sigma}$ y X, es una familia finita no vacía $(P_i \mid i \in n)$ en $\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$, i.e., un miembro de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}-1} \mathrm{Fnc}(n, \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X))$ que tiene las siguientes propiedades:

1. $P = P_{n-1}$.
2. $\forall i \in n$, $\exists x \in X$ tal que $P_i = (x)$, o $\exists \sigma \in \Sigma_0$ tal que $P_i = (\sigma)$, o $\exists p \in \mathbb{N} - 1$, $\exists \sigma \in \Sigma_p$ y $\exists (i_\alpha \mid \alpha \in p) \in i^p$ tal que $P_i = (\sigma)P_{i_0} \cdots P_{i_{p-1}}$.

Denotamos por $\mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ el conjunto de todas las palabras $P \in \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$ para las que existe alguna sucesión de formación, i.e., $\mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ es el subconjunto de $\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$ que consta precisamente de las palabras $P \in \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$ para las que $\exists n \in \mathbb{N} - 1$, $\exists (P_i \mid i \in n) \in \mathrm{Fnc}(n, \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X))$ tal que $P = P_{n-1}$ y $\forall i \in n$, $\exists x \in X$ tal que $P_i = (x)$, o $\exists \sigma \in \Sigma_0$ tal que $P_i = (\sigma)$, o $\exists p \in \mathbb{N} - 1$, $\exists \sigma \in \Sigma_p$ y $\exists (i_\alpha \mid \alpha \in p) \in i^p$ tal que $P_i = (\sigma)P_{i_0} \cdots P_{i_{p-1}}$.

Proposición 5.64. *Sea* $\mathbf{\Sigma}$ *una signatura algebraica y* X *un conjunto. Entonces se cumple que* $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) = \mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$.

Demostración. Puesto que $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ es el mínimo cerrado de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ que contiene a $\{\,(x) \mid x \in X\,\}$, para demostrar que $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \subseteq \mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, será suficiente que demostremos que $\mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ es un cerrado de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ y que contiene a $\{\,(x) \mid x \in X\,\}$.

Se cumple que $\{\,(x) \mid x \in X\,\} \subseteq \mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, porque, dado un $x \in X$, la familia $(P_i \mid i \in 1)$ con $P_0 = (x)$, es una sucesión de formación para (x). Además, dado un $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = p$, y una familia $(Q_j \mid j \in p)$ en $\mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, en virtud de la definición de $\mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, tenemos que, para cada $j \in p$, $\exists n_j \in \mathbb{N} - 1$, $\exists (P_{j,i} \mid i \in n_j) \in \mathrm{Fnc}(n_j, \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X))$ tal que $Q_j = P_{j,n_j-1}$ y $\forall i \in n_j$, $\exists x \in X$ tal que $P_{j,i} = (x)$, o $\exists \sigma \in \Sigma_0$ tal que $P_{j,i} = (\sigma)$, o $\exists q \in \mathbb{N} - 1$, $\exists \tau \in \Sigma_q$ y $\exists (k_\alpha \mid \alpha \in q) \in i^q$ tal que $P_{j,i} = (\tau) P_{j,k_0} \cdots P_{j,k_{q-1}}$. Situación que resumimos, parcialmente, mediante la matriz:

$$\begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & \dots & P_{0,n_0-1} = Q_0 \\ P_{1,0} & P_{1,1} & \dots & P_{1,n_1-1} = Q_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{p-1,0} & P_{p-1,1} & \dots & P_{p-1,n_{p-1}-1} = Q_{p-1} \end{pmatrix}$$

Luego para $n = \left(\sum_{j\in p} n_j\right) + 1$ y tomando como $(P_i \mid i \in n)$ la familia cuyo último término es $(\sigma)Q_0 \cdots Q_{p-1}$ y siendo los otros términos los formado por los de la matriz, recorridos de izquierda a derecha y de arriba abajo, se cumple que $(P_i \mid i \in n)$ es una sucesión de formación para $(\sigma)Q_0 \cdots Q_{p-1}$, luego $(\sigma)Q_0 \cdots Q_{p-1} \in \mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Por consiguiente $\mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ es un cerrado de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. De todo ello concluimos que $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \subseteq \mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$.

Demostramos ahora que $\mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \subseteq \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Sea $P \in \mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Entonces, por definición, $P \in \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$ para el que $\exists n \in \mathbb{N} - 1$, $\exists (P_i \mid i \in n) \in \mathrm{Fnc}(n, \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X))$ tal que $P = P_{n-1}$ y $\forall i \in n$, $\exists x \in X$ tal que $P_i = (x)$, o $\exists \sigma \in \Sigma_0$ tal que $P_i = (\sigma)$, o $\exists p \in \mathbb{N} - 1$, $\exists \sigma \in \Sigma_p$ y $\exists (i_\alpha \mid \alpha \in p) \in i^p$ tal que $P_i = (\sigma) P_{i_0} \cdots P_{i_{p-1}}$. Demostramos que $P = P_{n-1} \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, por inducción sobre $i \in n$. Para $i = 0$, $P_0 \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, porque, en este caso, P_0 o bien es de la forma (x), para algún $x \in X$, y entonces $P_0 \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, porque $\{\,(x) \mid x \in X\,\} \subseteq \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, o bien es de la forma (σ), para algún $\sigma \in \Sigma_0$, y entonces $P_0 \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, porque $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ es un cerrado de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Sea $k \in n$ y supongamos que $\forall i \in k$, $P_i \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Entonces, por definición, $\exists x \in X$ tal que $P_k = (x)$, o $\exists \sigma \in \Sigma_0$ tal que $P_k = (\sigma)$, o $\exists p \in \mathbb{N} - 1$, $\exists \sigma \in \Sigma_p$ y $\exists (i_\alpha \mid \alpha \in p) \in i^p$ tal que $P_k = (\sigma) P_{i_0} \cdots P_{i_{p-1}}$. Es evidente que en los dos primeros casos $P_k \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. En el último caso también $P_k \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, porque al ser, por hipótesis, $P_0, \dots, P_{k-1} \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, también $P_{i_0}, \dots, P_{i_{p-1}} \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, luego, ya que $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ es un cerrado de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, $P_k = (\sigma) P_{i_0} \cdots P_{i_{p-1}} \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Así que, para cada $k \in n$, $P_k \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, luego, para $k = n - 1$, $P = P_{n-1} \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Por lo tanto $\mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \subseteq \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. $\square$

Antes de demostrar que los símbolos de operación polinómica tienen una representación canónica, introducimos unas nociones auxiliares de la teoría de monoides, y unas propiedades especiales del monoide libre sobre un conjunto, que nos serán de utilidad para alcanzar el objetivo mencionado.

Definición 5.65. Sea A un conjunto y $P, Q \in \mathrm{Ml}(A)$.

1. Decimos que Q un *segmento* de P si hay dos palabras $X, Y \in \mathrm{Ml}(A)$ tales que $P = X \curlywedge Q \curlywedge Y$. Además, si $|X| = k$, entonces decimos que la palabra Q empieza en el $k+1$-ésimo lugar.
2. Decimos que Q un *segmento inicial* de P, y lo denotamos por $Q \leq_{\mathrm{pre}} P$, si hay una palabra $Y \in \mathrm{Ml}(A)$ tal que $P = Q \curlywedge Y$, y que es un *segmento inicial estricto* de P, y lo denotamos por $Q <_{\mathrm{pre}} P$, si es un segmento inicial de P y si $Q \neq P$.

Proposición 5.66. *Sea A un conjunto. Entonces* $\mathbf{Ml}(A)$ *es* regular *o* cancelativo, *i.e., el monoide libre sobre A tiene las siguientes propiedades:*

1. $\forall X, P, Q \in \mathrm{Ml}(A)\,((X \curlywedge P = X \curlywedge Q) \to P = Q)$.
2. $\forall X, P, Q \in \mathrm{Ml}(A)\,((P \curlywedge X = Q \curlywedge X) \to P = Q)$.

Demostración. □

Proposición 5.67. *Sea A un conjunto, $P \in \mathrm{Ml}(A)$ y X e Y dos segmentos iniciales de P. Entonces X es un segmento inicial de Y, o Y es un segmento inicial de X.*

Demostración. □

Definición 5.68. Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica, X un conjunto y $P \in \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$. Decimos que P es una *palabra equilibrada*, relativa a $\mathbf{\Sigma}$ y X, si cumple las siguientes condiciones:

1. $|P| = \mathrm{ar}[X]^\sharp(P) + 1$.
2. Para cada segmento inicial estricto Q de P, $|Q| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(Q)$

Denotamos por $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ el conjunto de todas las palabras equilibradas, relativas a $\mathbf{\Sigma}$ y X.

Proposición 5.69. *Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y X un conjunto. Entonces se cumple que* $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \subseteq \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$.

Demostración. Puesto que $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ es el mínimo cerrado de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ que contiene a $\{\,(x) \mid x \in X\,\}$, para demostrar que $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \subseteq \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, será suficiente que demostremos que $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ es un cerrado de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ y que contiene a $\{\,(x) \mid x \in X\,\}$.

Se cumple que $\{\,(x) \mid x \in X\,\} \subseteq \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, porque, para cada $x \in X$, la palabra (x) es equilibrada, ya que, por una parte, al ser $|(x)| = 1$ y $\mathrm{ar}[X]^\sharp((x)) = 0$, tenemos que $|(x)| = \mathrm{ar}[X]^\sharp((x)) + 1$, y, por otra, si Q es un segmento inicial propio de (x), entonces, necesariamente, $Q = \lambda$, y para la palabra vacía tenemos que $|\lambda| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(\lambda)$, ya que $0 \leq 0$.

Demostramos a continuación que, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = p$, y cada familia $(P_j \mid j \in p)$ en $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, la palabra $(\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$ es equilibrada.

Si $p = 0$, entonces la palabra (σ) es equilibrada ya que, por una parte, al ser $|(\sigma)| = 1$ y $\mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) = 0$, tenemos que $|(\sigma)| = \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) + 1$, y, por otra, si Q es un segmento inicial propio de (σ), entonces, necesariamente, $Q = \lambda$, y para la palabra vacía tenemos que $|\lambda| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(\lambda)$, ya que $0 \leq 0$.

Si $p \neq 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
|(\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}| &= |(\sigma)| + \textstyle\sum_{j \in p} |P_j| && \text{(porque } |\cdot| \text{ es morfismo)}\\
&= 1 + \textstyle\sum_{j \in p} |P_j| \\
&= 1 + \textstyle\sum_{j \in p} (\mathrm{ar}[X]^\sharp(P_j) + 1) && \text{(porque } P_j \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X))\\
&= 1 + p + \textstyle\sum_{j \in p} \mathrm{ar}[X]^\sharp(P_j) \\
&= 1 + \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) + \textstyle\sum_{j \in p} \mathrm{ar}[X]^\sharp(P_j) && \text{(porque } \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) = p)\\
&= 1 + \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}) && \text{(porque } \mathrm{ar}[X]^\sharp \text{ es morfismo).}
\end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple, para la palabra $(\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$, la primera condición definitoria del concepto de palabra equilibrada.

Sea Q un segmento inicial estricto de $(\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$. Entonces, o bien hay un $i \in p-1$ para el cual la palabra P_i es un segmento de Q, o bien no es ése el caso.

Si no hay ningún $i \in p-1$ para el cual P_i sea un segmento de Q, entonces, o bien $Q = \lambda$, o bien $Q = (\sigma)$, o bien $Q = (\sigma)R$, siendo R un segmento inicial estricto de P_0. Si $Q = \lambda$, entonces $|\lambda| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(\lambda)$; si $Q = (\sigma)$, entonces $|(\sigma)| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma))$, ya que $|(\sigma)| = 1$, $\mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) = p$ y, por hipótesis $1 \leq p$; si $Q = (\sigma)R$, siendo R un segmento inicial estricto de P_0, entonces

$$\begin{aligned}
|Q| &= |(\sigma)| + |R| && \text{(porque } |\cdot| \text{ es morfismo)}\\
&\leq 1 + \mathrm{ar}[X]^\sharp(R) && \text{(porque } P_0 \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \text{ y } R <_{\mathrm{pre}} P_0)\\
&\leq p + \mathrm{ar}[X]^\sharp(R)\\
&= \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) + \mathrm{ar}[X]^\sharp(R)\\
&= \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)R)\\
&= \mathrm{ar}[X]^\sharp(Q).
\end{aligned}$$

De modo que si Q un segmento inicial estricto de $(\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$ y no hay ningún $i \in p-1$ para el cual P_i sea un segmento de Q, entonces $|Q| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(Q)$.

Bajo la misma hipótesis de que Q sea un segmento inicial estricto de $(\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$, supongamos que exista un $i \in p-1$ para el cual P_i sea un segmento de Q. Sea entonces q el máximo de entre los $i \in p-1$ para los cuales se cumple que la palabra P_i sea un segmento de Q. Entonces $Q = (\sigma)P_0 \cdots P_q R$, siendo R un segmento inicial estricto de P_{q+1} (ya que si R no fuera un segmento inicial estricto de P_{q+1}, q no sería el máximo con la propiedad indicada), y tenemos que:

$$\begin{aligned}
|Q| &= |(\sigma)| + \left(\textstyle\sum_{j\in q+1} |P_j|\right) + |R| && \text{(porque } |\cdot| \text{ es morfismo)}\\
&= 1 + \left(\textstyle\sum_{j\in q+1} (\mathrm{ar}[X]^\sharp(P_j) + 1)\right) + |R|\\
&= 1 + (q+1) + \left(\textstyle\sum_{j\in q+1} \mathrm{ar}[X]^\sharp(P_j)\right) + |R|\\
&\leq p + \left(\textstyle\sum_{j\in q+1} \mathrm{ar}[X]^\sharp(P_j)\right) + \mathrm{ar}[X]^\sharp(R) && \text{(porque } q \leq p-2 \text{ y } R <_{\mathrm{pre}} P_{q+1})\\
&= \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)P_0 \cdots P_q R) && \text{(porque } \mathrm{ar}[X]^\sharp \text{ es morfismo)}\\
&= \mathrm{ar}[X]^\sharp(Q).
\end{aligned}$$

De modo que si Q un segmento inicial estricto de $(\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$ y hay un $i \in p-1$ para el cual P_i sea un segmento de Q, entonces $|Q| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(Q)$.

Por consiguiente, para cada segmento inicial estricto Q de $(\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$, se cumple que $|Q| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(Q)$. Luego $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ es un cerrado de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, y por lo tanto $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ está incluido en $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. □

Antes de demostrar, por inducción sobre la longitud, que $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ está incluido en $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, demostramos que para cada palabra equilibrada P, o bien hay un único $x \in X$ tal que $P = (x)$, o bien hay un único $\sigma \in \Sigma_0$ tal que $P = (\sigma)$, o bien hay un único $p \in \mathbb{N} - 1$, un único $\sigma \in \Sigma_p$ y una única familia $(P_j \mid j \in p)$ en $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ tal que $P = (\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$. Para ello demostramos los lemas que siguen.

Lema 5.70. *Si $P \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, entonces ningún segmento inicial estricto de P es una palabra equilibrada.*

Demostración. Sea $P \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ y Q un segmento inicial estricto de P. Entonces $|Q| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(Q)$. Ahora bien, $\mathrm{ar}[X]^\sharp(Q) < \mathrm{ar}[X]^\sharp(Q)+1$, luego $|Q| < \mathrm{ar}[X]^\sharp(Q)+1$, por lo tanto no puede ser $|Q| = \mathrm{ar}[X]^\sharp(Q) + 1$. □

Lema 5.71. *Si $P \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ y $k \in |P|$, entonces existe un único segmento equilibrado Q de P que empieza en el $k+1$-ésimo lugar, i.e., hay un triplo ordenado (U, Q, V) en $\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X) \times \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \times \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$ tal que $P = U \curlywedge Q \curlywedge V$, $|U| = k$ y, para cada $(Q', V') \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \times \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$, si $P = U \curlywedge Q' \curlywedge V'$, entonces $Q' = Q$.*

Demostración. Unicidad. Supongamos que para un triplo (U, Q, V) en $\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X) \times \mathrm{Bal}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X) \times \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$ se cumpla que $P = U \curlywedge Q \curlywedge V$ y que $|U| = k$, y sea $(Q', V') \in \mathrm{Bal}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X) \times \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$ tal que $P = U \curlywedge Q' \curlywedge V'$. Entonces de la ecuación $U \curlywedge Q \curlywedge V = U \curlywedge Q' \curlywedge V'$ obtenemos que $Q \curlywedge V = Q' \curlywedge V'$, porque los monoides libres son cancelativos, luego, por la prop. 5.67, o bien Q es un segmento inicial estricto de Q', o bien Q' es un segmento inicial estricto de Q, o bien $Q = Q'$. Pero, en virtud del lema 5.70, no puede ocurrir ni que Q sea un segmento inicial estricto de Q' ni que Q' lo sea de Q, así que $Q = Q'$

Existencia. Sea $P \in \mathrm{Bal}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$, $k \in |P|$ y $P = B \curlywedge C$, siendo $B \in \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$ tal que $|B| = k$ (así que B es un segmento inicial estricto de P). Para cada $i \in |C| + 1$, sea C_i el segmento inicial de C cuya longitud es precisamente i (en particular, C_0 es la palabra vacía, y $C_{|C|}$ es la propia palabra C).

Para el segmento inicial $C_{|C|}$ de la palabra C, que es la propia C, se cumple que:

$$
\begin{aligned}
|C_{|C|}| &= |P| - |B| && (\text{porque } P = B \curlywedge C)\\
&= (\mathrm{ar}[X]^\sharp(P) + 1) - |B|\\
&\geq (\mathrm{ar}[X]^\sharp(P) + 1) - \mathrm{ar}[X]^\sharp(R) && (\text{porque } B <_{\mathrm{pre}} P).
\end{aligned}
$$

Pero debido a que $\mathrm{ar}[X]^\sharp(P) = \mathrm{ar}[X]^\sharp(B) + \mathrm{ar}[X]^\sharp(C)$, también $(\mathrm{ar}[X]^\sharp(P) + 1) - \mathrm{ar}[X]^\sharp(B) = \mathrm{ar}[X]^\sharp(C) + 1$, luego $|C_{|C|}| \geq \mathrm{ar}[X]^\sharp(C_{|C|}) + 1$. Así que la palabra C tiene al menos un segmento inicial T, e.g., ella misma, para el que $|T| \geq \mathrm{ar}[X]^\sharp(T) + 1$.

Por otra parte, hay al menos un $j \in |C|$ para el que se cumple que, para cada $h \leq j$, $|C_h| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(C_h)$, e.g., para $j = 0$, se cumple que, para cada $h \leq 0$, $|C_h| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(C_h)$. Sea i el máximo del conjunto

$$
\{\, j \in |C| \mid \forall h \leq j\, (|C_h| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(C_h)) \,\}.
$$

Entonces $|C_i| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(C_i)$ y $|C_{i+1}| \geq \mathrm{ar}[X]^\sharp(C_{i+1}) + 1$. La palabra C_{i+1} es una palabra equilibrada. En efecto, tenemos que $|C_{i+1}| \geq \mathrm{ar}[X]^\sharp(C_{i+1}) + 1$, pero también:

$$
\begin{aligned}
|C_{i+1}| &= |C_i| + 1\\
&\leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(C_i) + 1\\
&\leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(C_{i+1}) + 1,
\end{aligned}
$$

así que $|C_{i+1}| = \mathrm{ar}[X]^\sharp(C_{i+1}) + 1$. Además, si D es un segmento inicial estricto de C_{i+1}, entonces $D = C_j$, para algún $j \in i + 1$, luego $|D| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(D)$.

De modo que C_{i+1} es una palabra equilibrada que empieza en el $k + 1$-ésimo lugar. □

Lema 5.72. *Si $P \in \mathrm{Bal}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$, entonces $P = (x)$, para un $x \in X$, o $P = (\sigma)$, para un $\sigma \in \Sigma_0$, o $P = (\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$, para un $p \in \mathbb{N} - 1$, un $\sigma \in \Sigma_p$ y una familia $(P_j \mid j \in p)$ en $\mathrm{Bal}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$.*

Demostración. Por ser $P \in \mathrm{Bal}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$, se cumple que $|P| = \mathrm{ar}[X]^\sharp(P) + 1$, luego $|P| \geq 1$, i.e., P no es la palabra vacía.

Si $|P| = 1$, entonces $\mathrm{ar}[X]^\sharp(P) = 0$, luego $P = (x)$, para un $x \in X$, o $P = (\sigma)$, para un $\sigma \in \Sigma_0$.

Supongamos que $|P| \geq 2$ y sea σ la primera letra de la palabra P. Para $k = 1$, en virtud del lema anterior, hay un único segmento equilibrado P_0 de P que empieza en el $k + 1$-ésimo lugar, i.e., en este caso, en el segundo lugar. Por lo tanto, o bien $|(\sigma)| + |P_0| = |P|$, o bien $|(\sigma)| + |P_0| < |P|$. Si lo primero, entonces $P = (\sigma) \curlywedge P_0$, y tenemos que:

$$\begin{aligned}1+|P_0| &= |P|\\ &= \mathrm{ar}[X]^\sharp(P)+1\\ &= \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma))+\mathrm{ar}[X]^\sharp(P_0)+1\\ &= \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma))+(|P_0|-1)+1\\ &= \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma))+|P_0|,\end{aligned}$$

luego $\mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma))=1$, así que $\sigma\in\Sigma_1$. Si lo segundo, entonces, para $k=1+|P_0|$, en virtud del lema anterior, hay un único segmento equilibrado P_1 de P que empieza en el $k+1$-ésimo lugar, i.e., en este caso, en el $(1+|P_0|)+1$-ésimo lugar. Por lo tanto, o bien $|(\sigma)|+|P_0|+|P_1|=|P|$, o bien $|(\sigma)|+|P_0|+|P_1|<|P|$. Si lo primero, entonces $P=(\sigma)\curlywedge P_0\curlywedge P_1$, y tenemos que $\mathrm{ar}[X]^\sharp((\xi))=2$, así que $\sigma\in\Sigma_2$. Si lo segundo, entonces se prosigue del mismo modo, hasta que para un $p\in\mathbb{N}-1$ y una familia $(P_j\mid j\in p)$ en $\mathrm{Bal}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$, $P=(\sigma)P_0\cdots P_{p-1}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}1+\textstyle\sum_{j\in p}|P_j| &= |P|\\ &= \mathrm{ar}[X]^\sharp(P)+1\\ &= \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma))+\Big(\textstyle\sum_{j\in p}\mathrm{ar}[X]^\sharp(P_j)\Big)+1\\ &= \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma))+\Big(\textstyle\sum_{j\in p}(|P_j|-1)\Big)+1\\ &= \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma))+\Big(\textstyle\sum_{j\in p}|P_j|\Big)+(1-p),\end{aligned}$$

luego $\mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma))=p$, así que $\sigma\in\Sigma_p$. □

Corolario 5.73. *Si $P\in\mathrm{Bal}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$, entonces $P=(x)$, para un único $x\in X$, o $P=(\sigma)$, para un único $\sigma\in\Sigma_0$, o $P=(\sigma)P_0\cdots P_{p-1}$, para un único $p\in\mathbb{N}-1$, un único $\sigma\in\Sigma_p$ y una única familia $(P_j\mid j\in p)$ en $\mathrm{Bal}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$.*

Proposición 5.74. *Sea $\boldsymbol{\Sigma}$ una signatura algebraica y X un conjunto. Entonces se cumple que $\mathrm{Bal}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)\subseteq\mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre la longitud de las palabras. Sea $P\in\mathrm{Bal}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$ tal que $|P|=1$. Entonces $\mathrm{ar}[X]^\sharp(P)=0$, luego $P=(x)$, para un único $x\in X$, o $P=(\sigma)$, para un único $\sigma\in\Sigma_0$; en cualquiera de los dos casos $P\in\mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$.

Supongamos que todas las palabras equilibradas cuya longitud sea a lo sumo n, con $n\geq 1$, pertenezcan a $\mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$. Sea $P\in\mathrm{Bal}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$ tal que $|P|=n+1$. Entonces $P=(\sigma)P_0\cdots P_{p-1}$, para un único $p\in\mathbb{N}-1$, un único $\sigma\in\Sigma_p$ y una única familia $(P_j\mid j\in p)$ en $\mathrm{Bal}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$. Ahora bien, $|P|=|(\sigma)|+\sum_{j\in p}|P_j|=1+\sum_{j\in p}|P_j|$, por lo tanto, para cada $j\in p$, $|P_j|<|P|=n+1$, luego, por la hipótesis de inducción, para cada $j\in p$, $P_j\in\mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$, así que $P=(\sigma)P_0\cdots P_{p-1}\in\mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$. Queda demostrado que todas las palabras equilibradas cuya longitud sea $n+1$, son miembros de $\mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$. Por consiguiente $\mathrm{Bal}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)\subseteq\mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$. □

Corolario 5.75 (Menger-Hall-Schröter)**.** *Sea $\boldsymbol{\Sigma}$ una signatura algebraica y X un conjunto. Entonces se cumple que $\mathrm{Bal}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)=\mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$.*

Proposición 5.76. *Sea $\boldsymbol{\Sigma}$ una signatura algebraica y X un conjunto. Entonces el par ordenado $(\eta_X,\mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X))$ en el que η_X es la única aplicación de X en $\mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$ tal* *que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "\mathrm{in}_X"] \arrow[ddl, "\eta_X"'] \\
 & \Sigma \coprod X \arrow[d, "\eta_{\Sigma \coprod X}"] \\
\mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)}"'] & \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)
\end{tikzcd}$$

conmuta, tiene la propiedad de que, para cada $\boldsymbol{\Sigma}$*-algebra* $\mathbf{A}$ *y cada aplicación* $f\colon X \longrightarrow A$*, existe un único homomorfismo* $f^\sharp$ *de* $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$ *en* $\mathbf{A}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X) \arrow[d, "f^\sharp"] \\
 & A
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Procedemos por inducción sobre la longitud de las palabras equilibradas. Sea $P \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$ tal que $|P| = 1$. Entonces $P = (x)$, para un único $x \in X$, o $P = (\sigma)$, para un único $\sigma \in \Sigma_0$. Si $P = (x)$, entonces definimos la acción de $f^\sharp$ sobre (x) como:

$$f^\sharp((x)) = f(x).$$

Si $P = (\sigma)$, entonces definimos la acción de $f^\sharp$ sobre (σ) como:

$$f^\sharp((\sigma)) = \sigma^{\mathbf{A}}.$$

Supongamos $f^\sharp$ definida para todas las palabras equilibradas cuya longitud sea a lo sumo n, con $n \geq 1$, y sea $P \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$ tal que $|P| = n + 1$. Entonces $P = (\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$, para un único $p \in \mathbb{N} - 1$, un único $\sigma \in \Sigma_p$ y una única familia $(P_j \mid j \in p)$ en $\mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$. Ahora bien, para cada $j \in p$, $|P_j| < |P| = n + 1$, luego, por la hipótesis de inducción, para cada $j \in p$, $f^\sharp$ está definida sobre P_j. Entonces definimos la acción de $f^\sharp$ sobre $P = (\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$ como:

$$f^\sharp((\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}) = F_\sigma^{\mathbf{A}}(f^\sharp(P_0), \dots, f^\sharp(P_{p-1})).$$

Así definido, $f^\sharp$, cumple todas las condiciones de la proposición. □

Corolario 5.77. *Sea* $\boldsymbol{\Sigma}$ *una signatura algebraica y* X *un conjunto. Entonces el par ordenado* $(\eta_X, \mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X))$ *es único salvo un único isomorfismo.*

Demostración. □

Corolario 5.78. *Sea* $\boldsymbol{\Sigma}$ *una signatura algebraica y* $f\colon X \longrightarrow Y$*. Entonces hay un único homomorfismo* $\mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(f)\colon \mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X) \longrightarrow \mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(Y)$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X) \arrow[d, "\mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(f)"] \\
Y \arrow[r, "\eta_Y"'] & \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(Y)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposición 5.79. *Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y X e Y dos conjunhtos. Una condición necesaria y suficiente para que X e Y sean isomorfos es que $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ y $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(Y)$ lo sean.*

Demostración. □

Como una aplicación del concepto de álgebra libre, mostramos a continuación cómo obtener, de forma canónica, el conjunto de las diferentes variables que ocurren en un término.

Definición 5.80. Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y X un conjunto. Entonces denotamos por Var el único homomorfismo de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ en $\mathbf{Fin}(X)$ tal que, para cada $x \in X$, $\mathrm{Var}((x)) = \{x\}$, siendo $\mathbf{Fin}(X)$ la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra cuyo conjunto subyacente es $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(X)$ y en la que, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, F_σ, la operación estructural de $\mathbf{Fin}(X)$ asociada a σ, asigna a una familia $(X_i \mid i \in n)$ en $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(X)$, $\bigcup_{i\in n} X_i$.

Recordemos que para los conjuntos definimos el concepto de conjunto proyectivo y que, de hecho, todos los conjuntos tienen la propiedad de ser proyectivos. Tal concepto también puede definirse para las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras, pero, a diferencia de lo que ocurre con los conjuntos, no toda $\mathbf{\Sigma}$-álgebra es proyectiva, pero se cumple que toda $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre es proyectiva.

Definición 5.81. Una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{P}$ es *proyectiva* si dado un homomorfismo sobreyectivo $f\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$ y un homomorfismo$g\colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{B}$, hay un homomorfismo $t\colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{P} \arrow[dl, "t"'] \arrow[d, "g"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, two heads, "f"'] & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Proposición 5.82. *Toda $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre es proyectiva.*

Demostración. Sea $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre sobre el conjunto X, $f\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo sobreyectivo y $g\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo. Entonces, por ser X un conjunto proyectivo, hay una aplicación $t\colon X \longrightarrow A$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "t"'] \arrow[d, "g \circ \eta_X"] \\ A \arrow[r, two heads, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta. Luego, por ser $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ libre sobre el conjunto X, existe un único homomorfismo $t^\sharp$ de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ en $\mathbf{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "t"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[d, "t^\sharp"] \\ & A \end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto, ya que $f \circ t^\sharp \circ \eta_X = g \circ \eta_X$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[dl, "t^\sharp"'] \arrow[d, "g"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, tail, "f"'] & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

conmuta. □

Proposición 5.83. *Si X es un conjunto no vacío, entonces $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ es un separador, i.e., dadas dos $\mathbf{\Sigma}$-álgebras $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y dos homomorfismos distintos f y g de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$, existe un homomorfismo h de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ en $\mathbf{A}$ tal que $f \circ h \neq g \circ h$.*

Demostración. □

Corolario 5.84. *La categoría $\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})$ tiene separadores proyectivos.*

Proposición 5.85. *Cada $\mathbf{\Sigma}$-álgebra es isomorfa a un cociente de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre sobre un conjunto.*

Demostración. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Puesto que $\mathbf{A}$ tiene un conjunto de generadores, sea X uno de ellos. Entonces, para la inclusión canónica in_X de X en A, en virtud de la propiedad universal del álgebra libre sobre X, existe un único homomorfismo $\mathrm{in}_X^\sharp$ de $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ en $\mathbf{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "\mathrm{in}_X"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[d, "\mathrm{in}_X^\sharp"] \\ & A \end{tikzcd}$$

conmuta. Ahora bien, por ser X un conjunto de generadores de $\mathbf{A}$ y estar X contenido en la imagen de $\mathrm{in}_X^\sharp$, el homomorfismo $\mathrm{in}_X^\sharp$ es sobreyectivo. Por lo tanto $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Ker}(\mathrm{in}_X^\sharp) \cong \mathbf{A}$ □

Proposición 5.86. *Si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B} \arrow[r, "p_{\mathbf{B}}"] \arrow[d, "p_{\mathbf{A}}"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "g"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, "f"'] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado y f es un epimorfismo, entonces $p_{\mathbf{B}}$ es un epimorfismo.

Demostración. Sean $u, v \colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{Z}$ dos homomorfismos tales que $u \neq v$. Entonces, siendo $\mathbf{P}$ un separador proyectivo, arbitrario, pero fijo, hay un homomorfismo $w \colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{B}$ tal que $u \circ w \neq v \circ w$; luego hay un homomorfismo $t \colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{P} \arrow[dl, "t"'] \arrow[d, "g \circ w"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, tail, "f"'] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto hay un único homomorfismo $h\colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$ tal que los dos triángulos del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P} \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, bend left, "w"] \arrow[ddr, bend right, "t"'] & & & \\
& \mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B} \arrow[r, "p_{\mathbf{B}}"] \arrow[d, "p_{\mathbf{A}}"'] & \mathbf{B} \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] \arrow[d, "g"] & \mathbf{Z} \\
& \mathbf{A} \arrow[r, "f"'] & \mathbf{C} &
\end{tikzcd}$$

conmutan. Luego $u \circ p_{\mathbf{B}} \neq v \circ p_{\mathbf{B}}$, ya que si $u \circ p_{\mathbf{B}} = v \circ p_{\mathbf{B}}$, entonces $u \circ p_{\mathbf{B}} \circ h = v \circ p_{\mathbf{B}} \circ h$, i.e., $u \circ w = v \circ w$, lo cual es absurdo. □

Definimos ahora la relación de precedencia algebraica sobre las $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras. En general, tal relación no tiene propiedades especialmente interesantes en las álgebras arbitrarias, pero, como demostraremos, en las álgebras absolutamente libres tales relaciones están bien fundamentadas.

Definición 5.87. Sea $\mathbf{A}$ una $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra. Entonces denotamos por $\mathrm{P}_{\mathbf{A}}$ la relación de *precedencia algebraica* sobre A definida como:

$$\mathrm{P}_{\mathbf{A}} = \left\{ (a,b) \in A^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists n \geq 1\, \exists \sigma \in \Sigma_n\, \exists (x_j \mid j \in n) \in A^n \\ \text{tal que } b = F_\sigma(x_j \mid i \in n) \text{ y } \exists k \in n\, (x_k = a) \end{array} \right\}$$

Si $a\mathrm{P}_{\mathbf{A}}b$, entonces decimos que a es un *predecesor algebraico* de b, o que b es un *sucesor algebraico* de a.

Para una $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra arbitraria $\mathbf{A}$, si $\mathrm{P}^{\mathrm{t}}_{\mathbf{A}}$, el cierre transitivo de $\mathrm{P}_{\mathbf{A}}$, es irreflexivo, decimos que $\mathrm{P}_{\mathbf{A}}$ es el *orden natural* de $\mathbf{A}$ y lo denotamos por $<_{\mathbf{A}}$; mientras que si $\mathrm{P}_{\mathbf{A}}$ está bien fundamentada, entonces $\mathrm{P}^{\mathrm{t}}_{\mathbf{A}}$ es un orden (parcial irreflexivo) bien fundamentado, y decimos que $\mathbf{A}$ es una $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra *bien fundamentada*.

Sea $\mathbf{A}$ una $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra, $\mathbf{A}_0 = A - \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \mathrm{Im}(F_\sigma)$, $\mathbf{A}_{\mathrm{c}} = \{\, \sigma^{\mathbf{A}} \mid \sigma \in \Sigma \,\}$ y $\mathrm{Min}(A, \mathrm{P}_{\mathbf{A}})$ el conjunto de los minimales de $(A, \mathrm{P}_{\mathbf{A}})$. Entonces:

1. $\mathbf{A}_0 \subseteq \mathrm{Min}(A, \mathrm{P}_{\mathbf{A}}) \subseteq \mathbf{A}_0 \cup \mathbf{A}_{\mathrm{c}}$.
2. $\mathrm{Min}(A, \mathrm{P}_{\mathbf{A}}) = \mathbf{A}_0 \cup \mathbf{A}_{\mathrm{c}}$ si y sólo si $\mathbf{A}_{\mathrm{c}} \cap \bigcup_{\sigma \in \Sigma - \Sigma_0} \mathrm{Im}(F_\sigma) = \varnothing$.

Proposición 5.88. *Si $\mathbf{A}$ es una $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra bien fundamentada, entonces también está bien fundamentada cualquier subálgebra de $\mathbf{A}$.*

Demostración. □

Proposición 5.89. *Cualquier homomorfismo $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ preserva la relación de precedencia algebraica y por lo tanto el orden natural.*

Demostración. □

Proposición 5.90. *Sea $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo. Si $\mathrm{P}_{\mathbf{B}} \restriction f[A]$ está bien fundamentada, entonces también lo está $\mathrm{P}_{\mathbf{A}}$*

Demostración. □

Corolario 5.91. *Sea $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia no vacía de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras. Si al menos una de las $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras de la familia está bien fundamentada, también lo está el producto cartesiano de las mismas.*

Demostración. □

5.6. Algebras de Dedekind-Peano.

Definición 5.92. Una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A} = (A, (F_\sigma \mid \sigma \in \Sigma))$ es un álgebra de *Dedekind-Peano*, si cumple las siguientes condiciones:

DP1. Para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, $F_\sigma\colon A^n \rightarrowtail A$ es inyectiva.
DP2. Para cada $\sigma, \tau \in \Sigma$, si $\sigma \neq \tau$, entonces $\mathrm{Im}(F_\sigma) \cap \mathrm{Im}(F_\tau) = \varnothing$.
DP3. El conjunto $\mathbf{A}_0 = A - \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \mathrm{Im}(F_\sigma)$ es un conjunto de generadores de $\mathbf{A}$.

Proposición 5.93. *Una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ es un álgebra de Dedekind-Peano precisamente si es libre.*

A continuación, siguiendo la exposición de Diener en [**?**], demostramos que el conjunto de las álgebras de Dedekind-Peano, formado por aquellas cuyos conjuntos subyacentes sean miembros del universo de Grothendieck, está cerrado bajo subálgebras y productos no triviales. Las demostracines se fundamentarán en que, para las álgebras de Dedekind-Peano, el orden natural sobre las mismas está bien fundamentado.

Proposición 5.94. *Cualquier subálgebra de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra que cumpla la condición DP1 o DP2, cumple también DP1, resp., DP2.*

Demostración. □

Proposición 5.95. *Sea $f\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo sobreyectivo. Si $\mathbf{B}$ cumple la condición DP2, entonces también $\mathbf{A}$ la cumple.*

Demostración. □

Corolario 5.96. *Sea $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia no vacía de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras. Si al menos una de las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras de la familia cumple la condición DP2, también la cumple el producto cartesiano de las mismas.*

Demostración. □

La condición DP1 es hereditaria, pero no es preservada ni bajo homomorfismos ni bajo imágenes homomorfas inversas.

Teorema 5.97. *Sea $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia no vacía de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras. Entonces $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ cumple la condición DP1 precisamente si todas las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras $\mathbf{A}_i$ la cumplen o $\prod_{i\in I} A_i = \varnothing$.*

Demostración. □

Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Si $\mathbf{A}$ cumple la condición DP3, entonces

$$\mathbf{A}_0 = \bigcap\{\, X \subseteq A \mid \mathrm{Sg}(X) = A \,\}.$$

Proposición 5.98.

1. *Si $f\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$, entonces $\mathbf{B}_0 \subseteq f[\mathbf{A}_0]$.*
2. *Si $\mathbf{B}$ es una subálgebra de $\mathbf{A}$, entonces, para cada $b \in B$, $b \in \mathbf{B}_0$ precisamente si, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, y cada $x \in A^n$, si $b = F_\sigma(x)$, entonces hay un $i \in n$ tal que $x_i \notin B$.*
3. *Si*

Demostración. □

Proposición 5.99. *Si $\mathbf{A}$ está bien fundamentada, entonces cumple la condición DP3.*

Demostración. Demostramos por $\mathrm{P}_{\mathbf{A}}$-inducción sobre x, que si $x \in A$, entonces $x \in \mathrm{Sg}(\mathbf{A}_0)$. Si $x \in \mathbf{A}_0$, entonces es evidente que $x \in \mathrm{Sg}(\mathbf{A}_0)$. Si $x \in A - \mathbf{A}_0$, entonces $x = F_\sigma(a)$, para algún $n \in \mathbb{N}$, algún $\sigma \in \Sigma_n$ y algún $a \in A^n$. Por la hipótesis de inducción, $\mathrm{Im}(a) \subseteq \downarrow_{\mathrm{P}_{\mathbf{A}}} x \subseteq \mathrm{Sg}(\mathbf{A}_0)$. Pero entonces $x = F_\sigma(a) \in \mathrm{Sg}(\mathbf{A}_0)$. □

Corolario 5.100. *Cualquier subálgebra de un álgebra bien fundamentada cumple la condición DP3.*

Corolario 5.101. *Sea $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familiua no vacía de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras. Si al menos una de las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras está bien fundamentada, entonces $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ cumple la condición DP3.*

Teorema 5.102. *Cualquier álgebra de Dedekind-Peano está bien fundamentada.*

Demostración. En virtud de la proposición **??** es suficiente que demostremos que la relación de precedencia algebraica $\mathrm{P}_{\mathbf{A}}$ está bien fundamentada sobre cualquier $\mathrm{P}_{\mathbf{A}}$-sección inicial principal $\mathrm{C}_{\mathrm{P}_{\mathbf{A}}}(x)$, y para ello, procedemos por inducción algebraica sobre x. Si $x \in \mathbf{A}_0$, el resultado es obvio, ya que $\mathrm{C}_{\mathrm{P}_{\mathbf{A}}}(x) = \{x\}$ y $\downarrow_{\mathrm{P}_{\mathbf{A}}} x = \varnothing$. Sea $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \Sigma_n$ y $(a_i \mid i \in n) \in A^n$ y supongamos que $\mathrm{P}_{\mathbf{A}}$ esté bien fundamentada sobre cualquier $\mathrm{C}_{\mathrm{P}_{\mathbf{A}}}(a_i)$. Entonces, para $x = F_\sigma(a_i \mid i \in n)$, tenemos que

$$\mathrm{C}_{\mathrm{P}_{\mathbf{A}}}(x) = \{x\} \cup \textstyle\bigcup_{i\in n} \mathrm{C}_{\mathrm{P}_{\mathbf{A}}}(a_i).$$

Sea Y un subconjunto no vacío de $\mathrm{C}_{\mathrm{P}_{\mathbf{A}}}(x)$. Si $Y \cap \bigcup_{i\in n} \mathrm{C}_{\mathrm{P}_{\mathbf{A}}}(a_i) \neq \varnothing$, entonces hay un $j \in n$ tal que $Z = Y \cap \mathrm{C}_{\mathrm{P}_{\mathbf{A}}}(a_j) \neq \varnothing$. Por la hipótesis de inducción, Z tiene un $\mathrm{P}_{\mathbf{A}}$-minimal z_0, que es también un $\mathrm{P}_{\mathbf{A}}$-minimal de Y, porque si $(y, z_0) \in \mathrm{P}_{\mathbf{A}}$, con $y \in Y$, entonces $y \in Y \cap \mathrm{C}_{\mathrm{P}_{\mathbf{A}}}(a_j)$, que es una contradicción. □

Corolario 5.103. *Una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ es de Dedekind-Peano precisamente si cumple las condiciones DP1, DP2 y está bien fundamentada.*

Proposición 5.104. *Cualquier subálgebra de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra de Dedekind-Peano, es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra de Dedekind-Peano.*

Demostración. □

Corolario 5.105. *Sea $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familiua no vacía de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras de Dedekind-Peano. Entonces el producto cartesiano de las mismas es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra de Dedekind-Peano.*

Demostración. □

5.7. Operaciones polinómicas. Ahora nos ocupamos del estudio de las operaciones polinómicas sobre las álgebras y de algunas de sus propiedades. Además, establecemos las relaciones entre las álgebras libres y las álgebras de operaciones polinómicas sobre las álgebras, así como otra manera de obtener la subálgebra generada por una parte de un álgebra, a través de las operaciones polinómicas sobre el álgebra en cuestión. Pero antes demostramos que en la categoría $\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})$ existen las potencias de las álgebras para cualesquiera conjuntos.

Proposición 5.106. *Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y X un conjunto. Entonces hay una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}^X$, la* potencia *de $\mathbf{A}$ para X, y una familia de homomorfismos $(\mathrm{pr}_x)_{x\in X}$, con $\mathrm{pr}_x\colon \mathbf{A}^X \longrightarrow \mathbf{A}$, para cada $x \in X$, tal que, para cada $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{B}$ y cada familia de homomorfismos $(f_x)_{x\in X}$, con $f_x\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$, para cada $x \in X$, existe un único homomorfismo $\langle f_x \mid x \in X\rangle : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}^X$ tal que, para cada $x \in X$, el* *diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B} \arrow[d, "\langle f_x \mid x \in X\rangle"'] \arrow[dr, "f_x"] & \\ \mathbf{A}^X \arrow[r, "\mathrm{pr}_x"'] & \mathbf{A} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Sea $\mathbf{A}^X$ la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra cuyo conjunto subyacente es el producto cartesiano de la familia de conjuntos $(A \mid x \in X)$, i.e., el conjunto, A^X, de las funciones de X en A, y en la que, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, la operación estructural F_σ, correspondiente a σ, es la aplicación de $(A^X)^n$ en A^X definida como:

$$F_\sigma \begin{cases} (A^X)^n & \longrightarrow A^X \\ (a_\alpha \mid \alpha \in n) & \longmapsto (F_\sigma(a_\alpha(x) \mid \alpha \in n) \mid x \in X), \end{cases}$$

siendo F_σ la operación estructural de $\mathbf{A}_i$ correspondiente a σ; y, para cada $x \in X$, sea pr_x el triplo ordenado $(\mathbf{A}^X, \mathrm{pr}_x, \mathbf{A})$, denotado por $\mathrm{pr}_x\colon \mathbf{A}^X \longrightarrow \mathbf{A}$, en el que pr_x es la aplicación de A^X en A definida como:

$$\mathrm{pr}_x \begin{cases} A^X & \longrightarrow A \\ a & \longmapsto a_x. \end{cases}$$

Entonces se cumple que, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} (A^X)^n \arrow[r, "\mathrm{pr}_x^n"] \arrow[d, "F_\sigma"'] & A^n \arrow[d, "F_\sigma"] \\ A^X \arrow[r, "\mathrm{pr}_x"'] & A \end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., que pr_x es un homomorfismo de $\mathbf{A}^X$ en $\mathbf{A}$.

Por otra parte, dado un par ordenado $(\mathbf{B}, (f_x \mid x \in X))$, en el que $\mathbf{B}$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y, para cada $x \in X$, $f_x\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ un homomorfismo, sea $\langle f_x \mid x \in X\rangle$ la aplicación de B en A^X definida como:

$$\langle f_x \mid x \in X\rangle \begin{cases} B & \longrightarrow A^X \\ b & \longmapsto (f_x(b) \mid x \in X). \end{cases}$$

Es evidente que, para cada $x \in X$, $\mathrm{pr}_x \circ \langle f_x \mid x \in X\rangle = f_x$ y que $\langle f_x \mid x \in X\rangle$ es un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}^X$. Con ello queda demostrada la existencia de al menos un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}^X$ con la propiedad indicada. Dejamos, como ejercicio, la demostración de la unicidad. $\square$

Definición 5.107 (McKinsey-Tarski)**.** Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})$ es la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra determinada por el cerrado de $\mathbf{A}^{A^n}$ generado por las n proyecciones canónicas de A^n en A, i.e., por $\{\,\mathrm{pr}_{n,i} \mid i \in n\,\}$ y la denominamos la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra de las *operaciones polinómicas n-arias* sobre $\mathbf{A}$. Además, $\mathbf{Pol}_\omega(\mathbf{A})$ es la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra determinada por el cerrado de $\mathbf{A}^{A^{\mathbb{N}}}$ generado por las proyecciones canónicas de $A^{\mathbb{N}}$ en A, i.e., por $\{\,\mathrm{pr}_{\mathbb{N},i} \mid i \in \mathbb{N}\,\}$ y la denominamos la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra de las *operaciones polinómicas finitarias* sobre $\mathbf{A}$.

Demostramos a continuación que cada operación polinómica n-aria sobre una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra se puede obtener a partir de, al menos, un símbolo de operación polinómica con n variables.

Proposición 5.108. *Sea* $V = \{ v_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ *un conjunto infinito numerable,* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra. Entonces hay un único homomorfismo* $\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}$ *de* $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n)$ *en* $\mathbf{A}^{A^n}$ *tal que, para cada* $i \in n$, $\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}((v_i)) = \mathrm{pr}_{n,i}$*, i.e., tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\downarrow v_n \arrow[r, "\eta_{\downarrow v_n}"] \arrow[dr, "(\mathrm{pr}_{n,i} \mid i \in n)"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n) \arrow[d, "\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}"] \\
 & A^{A^n}
\end{tikzcd}$$

conmuta, y $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A}) = \mathbf{Im}(\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}})$*, i.e., cada operación polinómica* n*-aria sobre la* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{A}$ *se puede obtener a partir de, al menos, un símbolo de operación polinómica con* n *variables. Por consiguiente, la* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})$ *es isomorfa a* $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n)/\mathrm{Ker}(\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}})$*. Además, hay un único homomorfismo* $\mathrm{Pd}_{\omega,\mathbf{A}}$ *de* $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$ *en* $\mathbf{A}^{A^{\mathbb{N}}}$ *tal que, para cada* $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Pd}_{\omega,\mathbf{A}}((v_n)) = \mathrm{pr}_{\mathbb{N},n}$*, i.e., tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[dr, "(\mathrm{pr}_{\mathbb{N},n} \mid n \in \mathbb{N})"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \arrow[d, "\mathrm{Pd}_{\omega,\mathbf{A}}"] \\
 & A^{A^{\mathbb{N}}}
\end{tikzcd}$$

conmuta, y $\mathbf{Pol}_\omega(\mathbf{A}) = \mathbf{Im}(\mathrm{Pd}_{\omega,\mathbf{A}})$*, i.e., cada operación polinómica* ω*-aria sobre la* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{A}$ *se puede obtener a partir de, al menos, un símbolo de operación polinómica finitaria. Por consiguiente, la* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{Pol}_\omega(\mathbf{A})$ *es isomorfa a* $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)/\mathrm{Ker}(\mathrm{Pd}_{\omega,\mathbf{A}})$.

Si $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n)$*, denotamos por* $P^{\mathbf{A}}$ *la imagen bajo* $\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}$ *de* P*, y lo mismo si* $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$*, y lo denominamos el* polinomio determinado por *(el símbolo de operación polinómica)* P en $\mathbf{A}$.

Demostración. Se cumple que $\mathrm{Pol}_n(\mathbf{A}) \subseteq \mathrm{Im}(\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}})$, porque $\mathrm{Im}(\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}})$ es un cerrado de $\mathbf{A}^{A^n}$ que contiene al conjunto $\{ \mathrm{pr}_{n,i} \mid i \in n \}$ y $\mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$ es el mínimo cerrado de $\mathbf{A}^{A^n}$ con dicha propiedad.

Para demostrar que $\mathrm{Im}(\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}) \subseteq \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$, i.e., que si $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n)$, entonces $P^{\mathbf{A}} \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$, procedemos por inducción algebraica. Para cada $i \in n$, $(v_i)^{\mathbf{A}} = \mathrm{pr}_{n,i}$, luego $(v_i)^{\mathbf{A}} \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$. Para cada símbolo de operación 0-ario σ, $(\sigma)^{\mathbf{A}} = \sigma^{\mathbf{A}^{A^n}}$, luego $(\sigma)^{\mathbf{A}} \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$. Por último, para cada $m \in \mathbb{N} - \{0\}$, cada $\sigma \in \Sigma_m$ y cada familia $(P_i)_{i \in m}$ en $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n)$, si, para cada $i \in m$, $P_i^{\mathbf{A}} \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$, entonces, ya que $((\sigma)P_0 \cdots P_{m-1})^{\mathbf{A}} = F_\sigma \circ \langle P_i \mid i \in m \rangle$, y $\mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$ es un cerrado de $\mathbf{A}^{A^n}$, $((\sigma)P_0 \cdots P_{m-1})^{\mathbf{A}} \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$. Por consiguiente, $\mathrm{Im}(\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}) \subseteq \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$. □

Convenimos en denotar por el mismo símbolo la correstricción de $\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}$ a $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})$, y lo mismo para $\mathrm{Pd}_{\omega,\mathbf{A}}$.

A continuación demostramos que la conducta de los homomorfismos respecto de las operaciones polinómicas de las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras es la misma que tienen respecto de las operaciones estructurales.

Proposición 5.109. *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *dos* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras,* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, $n \in \mathbb{N}$ *y* $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n)$*. Entonces el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "P^{\mathbf{A}}"'] & B^n \arrow[d, "P^{\mathbf{B}}"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta. Además, si $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$*, entonces el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A^{\mathbb{N}} \arrow[r, "f^{\mathbb{N}}"] \arrow[d, "P^{\mathbf{A}}"'] & B^{\mathbb{N}} \arrow[d, "P^{\mathbf{B}}"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposición 5.110. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra. Entonces se cumple que:*

1. *Si* $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in A^n$, $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n)$, $\mathrm{Var}(P) = \{\, v_{i_\alpha} \mid \alpha \in p \,\}$ *y, para cada* $\alpha \in p$, $x(i_\alpha) = y(i_\alpha)$*, entonces* $P^{\mathbf{A}}(x) = P^{\mathbf{A}}(y)$.
2. *Si* $x, y \in A^{\mathbb{N}}$, $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$ $\mathrm{Var}(P) = \{\, v_{n_\alpha} \mid \alpha \in p \,\}$ *y, para cada* $\alpha \in p$, $x(n_\alpha) = y(n_\alpha)$*, entonces* $P^{\mathbf{A}}(x) = P^{\mathbf{A}}(y)$.

Demostración. □

Proposición 5.111. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra. Entonces, para cada* $\sigma \in \Sigma$*, con* $\mathrm{ar}(\sigma) = n$*, se cumple que* $F_\sigma \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$.

Demostración. □

Proposición 5.112. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* $m, n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathrm{Pol}_m(\mathbf{A})$ *y* $(Q_j \mid j \in m) \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})^m$*. Entonces* $P \circ \langle Q_j \mid j \in m \rangle \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ el subconjunto de A^{A^m} definido como:

$$\mathcal{F} = \{\, P \in A^{A^m} \mid \forall (Q_j \mid j \in m) \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})^m \,(\, P \circ \langle Q_j \mid j \in m \rangle \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A}) \,)\,\}.$$

Vamos a demostrar que $\mathrm{Pol}_m(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{F}$. Para lo cual será suficiente, en virtud de la definición de $\mathbf{Pol}_m(\mathbf{A})$, que demostremos que:

1. Para cada $j \in m$, $\mathrm{pr}_{m,j} \in \mathcal{F}$.
2. Para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = q$ y cada $(P_k \mid k \in q) \in \mathcal{F}^q$, $F_\sigma(P_k \mid k \in q) \in \mathcal{F}$.

Dado un $i \in m$ y una familia $(Q_j \mid j \in m) \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})^m$, ya que $\mathrm{pr}_{m,j} \circ \langle Q_j \mid j \in m \rangle = Q_j \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A}))$, se cumple que $\mathrm{pr}_{m,j} \in \mathcal{F}$.

Por otra parte, dado un $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = q$ y una familia $(P_k \mid k \in q) \in \mathcal{F}^q$, tenemos, para cada $k \in q$ y cada familia $(Q_j \mid j \in m) \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})^m$, que $P_k \circ \langle Q_j \mid j \in m \rangle \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$, luego, dada una familia $(Q_j \mid j \in m) \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})^m$, ya que

$$\begin{aligned}F_\sigma(P_k \mid k\in q)\circ\langle Q_j \mid j\in m\rangle &= (F_\sigma^{\mathbf{A}}\circ\langle P_k \mid k\in q\rangle)\circ\langle Q_j \mid j\in m\rangle\\ &= F_\sigma^{\mathbf{A}}\circ(\langle P_k \mid k\in q\rangle\circ\langle Q_j \mid j\in m\rangle)\\ &= F_\sigma^{\mathbf{A}}\circ\langle P_k\circ\langle Q_j \mid j\in m\rangle \mid k\in q\rangle\\ &= F_\sigma^{\mathbf{A}}(P_k\circ\langle Q_j \mid j\in m\rangle \mid k\in q),\end{aligned}$$

se cumple que $F_\sigma(P_k \mid k\in q)\in\mathcal{F}$. □

Proposición 5.113. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* $m,n\in\mathbb{N}$ *y* $\xi\colon m\longrightarrow n$*. Entonces hay un único homomorfismo* $\mathrm{Pol}_\xi(\mathbf{A})$ *de* $\mathbf{Pol}_m(\mathbf{A})$ *en* $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_m) \arrow[r, "\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\xi)"] \arrow[d, "\mathrm{Pd}_{m,\mathbf{A}}"'] & \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n) \arrow[d, "\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}"] \\ \mathbf{Pol}_m(\mathbf{A}) \arrow[r, "\mathrm{Pol}_\xi(\mathbf{A})"'] & \mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. En efecto, $\mathrm{Pol}_\xi(\mathbf{A})$ definido como

$$\mathrm{Pol}_\xi(\mathbf{A})\begin{cases}\mathbf{Pol}_m(\mathbf{A}) & \longrightarrow\ \mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})\\ \quad P & \longmapsto\ (P(x\circ\xi)\mid x\in A^n)\end{cases}$$

es un homomorfismo de □

Proposición 5.114. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra. Entonces:*

1. *Para cada* $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{Pol}_{\mathrm{id}_n}(\mathbf{A})=\mathrm{id}_{\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})}$.
2. *Para cada* $\varphi\colon m\longrightarrow n$ *y* $\psi\colon n\longrightarrow p$, $\mathrm{Pol}_{\psi\circ\varphi}(\mathbf{A})=\mathrm{Pol}_\psi(\mathbf{A})\circ\mathrm{Pol}_\varphi(\mathbf{A})$.

Demostración. □

Proposición 5.115. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* $0<m<n\in\mathbb{N}$*,* $P\colon A^m\longrightarrow A$ *y* $Q\colon A^n\longrightarrow A$*. Si, para cada* $x\in A^n$*,* $Q(x)=P(x\restriction m)$*, entonces* $P\in\mathrm{Pol}_m(\mathbf{A})$ *precisamente si* $Q\in\mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$

Demostración. □

Como aplicación de los conceptos que acabamos de introducir, damos una caracterización de la subálgebra generada por una parte de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra.

Proposición 5.116. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra. Entonces:*

1. *Para cada* $n\in\mathbb{N}$ *y cada* $x\in A^n$*, se cumple que*
$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x))=\{\,P(x)\mid P\in\mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})\,\}.$$
2. *Para cada* $X\subseteq A$*, se cumple que*
$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)=\{\,P(x)\mid n\in\mathbb{N}, P\in\mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})\ \text{y}\ x\in X^n\,\}.$$

Demostración. Se cumple que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x))\subseteq\{\,P(x)\mid P\in\mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})\,\}$, porque el conjunto $\{\,P(x)\mid P\in\mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})\,\}$ es un cerrado de $\mathbf{A}$ que contiene al conjunto $\mathrm{Im}(x)$ y $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x))$ es el mínimo cerrado de $\mathbf{A}$ con dicha propiedad.

Para demostrar que $\{\,P(x)\mid P\in\mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})\,\}\subseteq\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x))$, i.e., que si $P\in\mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$, entonces $P(x)\in\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x))$, procedemos por inducción algebraica. Para cada $i\in n$, $\mathrm{pr}_{n,i}(x)=x_i$, luego $\mathrm{pr}_{n,i}(x)\in\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x))$. Para cada $m\in\mathbb{N}$, cada $\sigma\in\Sigma_m$ y cada familia $(P_i)_{i\in m}$ en $\mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$, si, para cada $i\in m$, $P_i(x)\in\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x))$, entonces, ya que $(F_\sigma\circ\langle P_i\mid i\in m\rangle)(x)=F_\sigma(P_0(x),\dots,P_{m-1}(x))$, y $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x))$ es un cerrado de $\mathbf{A}$, $(F_\sigma \circ \langle P_i \mid i \in m\rangle)(x) \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x))$. Por consiguiente, $\{\, P(x) \mid P \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A}) \,\} \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x))$.

La demostración de que, para cada $X \subseteq A$, se cumple que

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \{\, P(x) \mid n \in \mathbb{N}, P \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A}) \text{ y } x \in X^n \,\},$$

se deduce de la primera parte y del hecho de que el operador $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ es algebraico. □

Proposición 5.117. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* X *un cerrado de* $\mathbf{A}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *y* $P \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$*. Entonces, para cada* $x \in X^n$*,* $P(x) \in X$*.*

Demostración. □

Proposición 5.118. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* Φ *una congruencia sobre* $\mathbf{A}$*,* $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ *y* $P \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$*. Entonces, para cada* $x, y \in A^n$*, si, para cada* $i \in n$*,* $x_i \equiv y_i \pmod{\Phi}$*, entonces* $P(x) \equiv P(y) \pmod{\Phi}$*.*

Demostración. Procedemos por inducción algebraica. Para cada $i \in n$, $\mathrm{pr}_{n,i}(x) = x_i$ y $\mathrm{pr}_{n,i}(y) = y_i$, luego $\mathrm{pr}_{n,i}(x) \equiv \mathrm{pr}_{n,i}(y) \pmod{\Phi}$. Sea $m \in \mathbb{N} - \{0\}$, $\sigma \in \Sigma_m$ y $(P_i)_{i\in m}$ una familia de operaciones polinómicas n-arias sobre $\mathbf{A}$ tal que, para cada $i \in m$, se cumpla que $P_i(x) \equiv P_i(y) \pmod{\Phi}$. Entonces, ya que $(F_\sigma \circ \langle P_i \mid i \in m\rangle)(x) = F_\sigma(P_0(x), \ldots, P_{m-1}(x))$ y $(F_\sigma \circ \langle P_i \mid i \in m\rangle)(y) = F_\sigma(P_0(y), \ldots, P_{m-1}(y))$ y Φ es una congruencia sobre $\mathbf{A}$, $(F_\sigma \circ \langle P_i \mid i \in m\rangle)(x) \equiv (F_\sigma \circ \langle P_i \mid i \in m\rangle)(y) \pmod{\Phi}$. Por consiguiente, para cada $P \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$, $P(x) \equiv P(y) \pmod{\Phi}$.

□

Definición 5.119 (McKinsey-Tarski)**.** Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathbf{Alg}_n(\mathbf{A})$ es la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra determinada por el cerrado de $\mathbf{A}^{A^n}$ generado por

$$\{\, \mathrm{pr}_{n,i} \mid i \in n \,\} \cup \{\, \kappa_{n,a} \mid a \in A \,\},$$

siendo $\kappa_{n,a}$ la aplicación constante de A^n en A cuya imagen es $\{a\}$, y la denominamos la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra de las *operaciones algebraicas n-arias* sobre $\mathbf{A}$. Además, $\mathbf{Alg}_\omega(\mathbf{A})$ es la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra determinada por el cerrado de $\mathbf{A}^{A^{\mathbb{N}}}$ generado por

$$\{\, \mathrm{pr}_{\mathbb{N},i} \mid i \in \mathbb{N} \,\} \cup \{\, \kappa_{\mathbb{N},a} \mid a \in A \,\},$$

siendo $\kappa_{\mathbb{N},a}$ la aplicación constante de $A^{\mathbb{N}}$ en A cuya imagen es $\{a\}$, y la denominamos la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra de las *operaciones algebraicas finitarias* sobre $\mathbf{A}$.

Proposición 5.120. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* $m, n \in \mathbb{N}$*,* $P \in \mathrm{Alg}_m(\mathbf{A})$ *y* $(Q_j \mid j \in m) \in \mathrm{Alg}_n(\mathbf{A})^m$*. Entonces* $P \circ \langle Q_j \mid j \in m\rangle \in \mathrm{Alg}_n(\mathbf{A})$*.*

Demostración. Dada la situación descrita por el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A^n \arrow[d, "\langle Q_j \mid j \in m\rangle"'] \arrow[dr, "Q_j"] & \\
A^m \arrow[r, "\mathrm{pr}_{m,j}"'] \arrow[d, "P"'] & A \\
A &
\end{tikzcd}$$

□

Proposición 5.121. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* $m, n \in \mathbb{N}$ *y* $\xi\colon m \longrightarrow n$*. Entonces*

$$\mathrm{Alg}_\xi(\mathbf{A}) \begin{cases} \mathbf{Alg}_m(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathbf{Alg}_n(\mathbf{A}) \\ \quad P \quad\longmapsto (P(x \circ \xi) \mid x \in A^n) \end{cases}$$

es un homomorfismo de $\mathbf{Alg}_m(\mathbf{A})$ *en* $\mathbf{Alg}_n(\mathbf{A})$*.*

Demostración. □

Proposición 5.122. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra. Entonces:*

1. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Alg}_{\mathrm{id}_n}(\mathbf{A}) = \mathrm{id}_{\mathbf{Alg}_n(\mathbf{A})}$.
2. *Para cada* $\varphi\colon m \longrightarrow n$ *y* $\psi\colon n \longrightarrow p$, $\mathrm{Alg}_{\psi\circ\varphi}(\mathbf{A}) = \mathrm{Alg}_{\psi}(\mathbf{A}) \circ \mathrm{Alg}_{\varphi}(\mathbf{A})$.

Demostración. □

Proposición 5.123. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* $0 < m < n \in \mathbb{N}$, $P\colon A^m \longrightarrow A$ *y* $Q\colon A^n \longrightarrow A$. *Si, para cada* $x \in A^n$, $Q(x) = P(x{\restriction}m)$, *entonces* $P \in \mathrm{Alg}_m(\mathbf{A})$ *precisamente si* $Q \in \mathrm{Alg}_n(\mathbf{A})$

Demostración. □

Proposición 5.124. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* $n \in \mathbb{N}$ *y* $P\colon A^n \longrightarrow A$. *Entonces una condición necesaria y suficiente para que* $P \in \mathrm{Alg}_n(\mathbf{A})$ *es que exista un* $m \in \mathbb{N}$, *un* $Q \in \mathrm{Pol}_{n+m}(\mathbf{A})$ *y un* $a \in A^m$ *tal que, para cada* $x \in A^n$, $P(x) = Q(x \curlywedge a)$.

Demostración. □

Como una aplicación del concepto de operación algebraica, caracterizamos a continuación las congruencias sobre las álgebras a través de las operaciones algebraicas unarias.

Proposición 5.125. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y* $\Phi \subseteq A^2$. *Si* Φ *tiene la propiedad de substitución respecto de las operaciones estructurales de* $\mathbf{A}$, *i.e., si* Φ *es tal que, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *cada* $\sigma \in \Sigma_n$, *y cada* $(x_i \mid i \in n)$, $(y_i \mid i \in n) \in A^n$, *si, para cada* $i \in n$, $x_i \equiv y_i \pmod{\Phi}$, *entonces* $F_\sigma(x_i \mid i \in n) \equiv F_\sigma(y_i \mid i \in n) \pmod{\Phi}$, *entonces* Φ *tiene la propiedad de substitución respecto de todas las operaciones polinómicas de* $\mathbf{A}$. *Si además* $\Delta_A \subseteq \Phi$, *entonces* Φ *tiene la propiedad de substitución respecto de todas las operaciones algebraicas de* $\mathbf{A}$.

Demostración. □

Corolario 5.126. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra. Entonces cualquier congruencia sobre* $\mathbf{A}$ *tiene la propiedad de substitución respecto de todas las operaciones algebraicas de* $\mathbf{A}$. *Recíprocamente, cualquier relación de equivalencia sobre* A *que tenga la propiedad de substitución respecto de todas las operaciones algebraicas de* $\mathrm{Alg}_1(\mathbf{A})$ *es una congruencia sobre* $\mathbf{A}$.

Proposición 5.127. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y* $\varnothing \neq \Phi \subseteq A^2$. *Entonces* $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$ *coincide con*

$$\left\{ (x,y) \in A^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists n \in \mathbb{N}\, \exists (P_i \mid i \in n+1) \in \mathrm{Alg}_1(\mathbf{A})^{n+1} \\ \text{y } \exists ((x_i,y_i) \mid i \in n+1) \in (\Phi \cup \Phi^{-1})^{n+1} \text{ tal que} \\ x = P_0(x_0), y = P_n(y_n) \text{ y }, \forall i \in n, P_i(y_i) = P_{i+1}(x_{i+1}) \end{array} \right\}$$

Demostración. □

Las noción de operación polinómica se generaliza a conjuntos y aplicaciones entre conjuntos.

Definición 5.128. Una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ es *funcionalmente completa* si es finita, no es final y, además, para cada $n \in \mathbb{N}$, toda operación n-aria sobre A es una operación algebraica n-aria sobre $\mathbf{A}$.

Proposición 5.129. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$. *Entonces hay un único homomorfismo sobreyectivo* $\mathrm{Pol}_n(f)$ *de* $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})$ *en* $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{B})$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n) \arrow[dl, "\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}"'] \arrow[dr, "\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{B}}"] & \\ \mathbf{Pol}_n(\mathbf{A}) \arrow[rr, "\mathrm{Pol}_n(f)"'] & & \mathbf{Pol}_n(\mathbf{B}) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

La proposición que sigue afirma simplemente que tenemos un functor

$$\mathrm{Pd}\colon \mathbf{Ens}_{\mathbb{N}} \times \mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})_{\mathrm{epi}} \longrightarrow \mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})^{\to}.$$

Proposición 5.130. *Sea* $\xi\colon m \longrightarrow n$ *y* $f\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$. *Entonces, siendo* $\mathrm{Pol}_\xi(f)$ *la diagonal del diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Pol}_m(\mathbf{A}) \arrow[r, "\mathrm{Pol}_m(f)"] \arrow[d, "\mathrm{Pol}_\xi(\mathbf{A})"'] \arrow[dr, "\mathrm{Pol}_\xi(f)"] & \mathbf{Pol}_m(\mathbf{B}) \arrow[d, "\mathrm{Pol}_\xi(\mathbf{B})"] \\ \mathbf{Pol}_n(\mathbf{A}) \arrow[r, "\mathrm{Pol}_n(f)"'] & \mathbf{Pol}_n(\mathbf{B}) \end{tikzcd}$$

se cumple que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_m) \arrow[r, "\mathrm{Pd}_{m,\mathbf{A}}"] \arrow[d, "\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\xi)"'] & \mathbf{Pol}_m(\mathbf{A}) \arrow[d, "\mathrm{Pol}_\xi(f)"] \\ \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n) \arrow[r, "\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{B}}"'] & \mathbf{Pol}_n(\mathbf{B}) \end{tikzcd}$$

conmuta. Además, para los homomorfismos del tipo $\mathrm{Pol}_\xi(f)$ *tenemos que:*

1. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y cada* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{A}$,

$$\mathrm{Pol}_{\mathrm{id}_n}(\mathrm{id}_{\mathbf{A}}) = \mathrm{id}_{\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})}.$$

2. *Para cada* $\varphi\colon m \longrightarrow n$, $\psi\colon n \longrightarrow p$, $f\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$ *y* $g\colon \mathbf{B} \twoheadrightarrow \mathbf{C}$,

$$\mathrm{Pol}_{\psi\circ\varphi}(g \circ f) = \mathrm{Pol}_\psi(g) \circ \mathrm{Pol}_\varphi(f).$$

Demostración. La definición de $\mathrm{Pol}_\xi(f)$ como la diagonal del primer diagrama de la proposición es correcta, ya que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Pol}_m(\mathbf{A}) \arrow[rr, "\mathrm{Pol}_m(f)"] \arrow[ddd, "\mathrm{Pol}_\xi(\mathbf{A})"'] & & \mathbf{Pol}_m(\mathbf{B}) \arrow[ddd, "\mathrm{Pol}_\xi(\mathbf{B})"] \\
& \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_m) \arrow[ul, "\mathrm{Pd}_{m,\mathbf{A}}"] \arrow[ur, "\mathrm{Pd}_{m,\mathbf{B}}"'] \arrow[d, "\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\xi)"] & \\
& \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n) \arrow[dl, "\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}"'] \arrow[dr, "\mathrm{Pd}_{m,\mathbf{B}}"] & \\
\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A}) \arrow[rr, "\mathrm{Pol}_n(f)"'] & & \mathbf{Pol}_n(\mathbf{B})
\end{tikzcd}$$

conmuta □

Proposición 5.131. *Sea* $f\colon \mathbf{B} \mathrel{+\!\!\!\longrightarrow} \mathbf{A}$. *Entonces hay un único homomorfismo sobreyectivo* $\mathrm{Pol}_n(f)$ *de* $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})$ *en* $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{B})$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n) \arrow[dl, "\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}"'] \arrow[dr, "\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{B}}"] & \\
\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A}) \arrow[rr, "\mathrm{Pol}_n(f)"'] & & \mathbf{Pol}_n(\mathbf{B})
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

La proposición que sigue afirma simplemente que tenemos un functor

$$\mathrm{Pd}\colon \mathbf{Ens}_{\mathbb{N}} \times (\mathbf{Alg}(\sigma)_{\mathrm{mon}})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})^{\rightarrow}.$$

Proposición 5.132. *Sea* $\xi\colon m \longrightarrow n$ *y* $f\colon \mathbf{B} \mathrel{+\!\!\!\longrightarrow} \mathbf{A}$. *Entonces el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_m) \arrow[r, "\mathrm{Pd}_{m,\mathbf{A}}"] \arrow[d, "\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\xi)"'] & \mathbf{Pol}_m(\mathbf{A}) \arrow[d, "\mathrm{Pol}_\xi(f)"] \\
\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n) \arrow[r, "\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{B}}"'] & \mathbf{Pol}_n(\mathbf{B})
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, para los homomorfismos del tipo $\mathrm{Pol}_\xi(f)$ *tenemos que:*

1. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y cada* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{A}$,
$$\mathrm{Pol}_{\mathrm{id}_n}(\mathrm{id}_{\mathbf{A}}) = \mathrm{id}_{\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})}.$$
2. *Para cada* $\varphi\colon m \longrightarrow n$, $\psi\colon n \longrightarrow p$, $f\colon \mathbf{B} \mathrel{+\!\!\!\longrightarrow} \mathbf{A}$ *y* $g\colon \mathbf{C} \mathrel{+\!\!\!\longrightarrow} \mathbf{B}$,
$$\mathrm{Pol}_{\psi\circ\varphi}(f \circ g) = \mathrm{Pol}_\psi(g) \circ \mathrm{Pol}_\varphi(f).$$

Demostración. □

5.8. Signaturas de primer orden y sistemas algebraicos.

Definición 5.133. Una *signatura de primer orden* es un par $((\Sigma, \mathrm{ar}), (\Pi, \mathrm{rk}))$, abreviado como $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$ en el que Σ, el conjunto de los *símbolos de operación*, es un conjunto, ar, la *ariedad*, una aplicación de Σ en $\mathbb{N}$, Π, el conjunto de los *símbolos de relación*, es un conjunto, rk, el *rango*, una aplicación de Π en $\mathbb{N} - 1$. Si $\sigma \in \Sigma$ y $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, entonces decimos que σ es un símbolo de operación n-ario, y, para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por Σ_n el conjunto de todos los símbolos de operación n-arios. Del mismo modo, si $\pi \in \Pi$ y $\mathrm{rk}(\pi) = n$, entonces decimos que π es un símbolo de relación n-ario, y, para cada $n \in \mathbb{N} - 1$, denotamos por Π_n el conjunto de todos los símbolos de relación n-arios.

La ariedad de un símbolo de operación σ, indica el número de los argumentos que tendrá cualquier realización de σ como una operación sobre un conjunto. Por otra parte, el rango de un símbolo de relación π, indica el número de los argumentos que tendrá cualquier realización de π como una relación sobre un conjunto.

Definición 5.134. Sea $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$ una signatura de primer orden y A un conjunto. Una $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$-*estructura* sobre el conjunto A es un par (F, R) en el que F es una aplicación de Σ en $\bigcup_{\sigma\in\Sigma} \mathrm{Hom}(A^{\mathrm{ar}(\sigma)}, A)$ tal que, para cada $\sigma \in \Sigma$, $F_\sigma \in \mathrm{Hom}(A^{\mathrm{ar}(\sigma)}, A)$ y R una aplicación de Π en $\bigcup_{\pi\in\Pi} \mathrm{Sub}(A^{\mathrm{rk}(\pi)})$ tal que, para cada $\pi \in \Pi$, $R_\pi \in \mathrm{Sub}(A^{\mathrm{rk}(\pi)})$.

En algunos casos, para evitar equivocaciones, denotaremos la $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$-estructura que estemos considerando sobre un conjunto A por $(F^{\mathbf{A}}, R^{\mathbf{A}})$, a las operaciones que la componen por $F^{\mathbf{A}}_\sigma$, con $\sigma \in \Sigma$ y a las relaciones por $R^{\mathbf{A}}_\pi$. Además, cuando $\mathrm{ar}(\sigma) = 0$, denotaremos por $\sigma^{\mathbf{A}}$ el valor de $F^{\mathbf{A}}_\sigma \colon 1 \longrightarrow A$ en el único miembro de 1.

Un $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$-*sistema algebraico* o, para abreviar, un *sistema algebraico* es un triplo ordenado $\mathbf{A} = (A, F, R)$, en el que A es un conjunto y (F, R) una $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$-estructura sobre A.

Si $\Sigma = \varnothing$, entonces a los $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$-sistemas algebraicos los denominamos $\mathbf{\Pi}$-*sistemas relacionales*. Además, si $\mathbf{A} = (A, F, R)$ es un $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$-sistema algebraico, el par (A, F) es la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra subyacente del mismo y, del mismo modo, el par (A, R), el $\mathbf{\Pi}$-sistema relacional subyacente de dicho sistema algebraico.

5.9. Homomorfismos de sistemas algebraicos. Una vez definido el concepto de $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$-sistema algebraico, definimos los homomorfismos entre los mismos, la composición de los homomorfismos y establecemos las propiedades básicas de la composición.

Definición 5.135. Sean $\mathbf{A} = (A, F, R)$ y $\mathbf{B} = (B, G, T)$ dos $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$-sistemas algebraicos. Un $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$-*homomorfismo* o, simplemente, un *homomorfismo* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ es un triplo ordenado $(\mathbf{A}, f, \mathbf{B})$, abreviado como f y denotado por $f \colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, en el que f es una aplicación de A en B, tal que:

1. Para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "F_\sigma"'] & B^n \arrow[d, "G_\sigma"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

   conmuta, i.e., para cada $x \in A^n$, $f(F_\sigma(x)) = G_\sigma(f^n(x))$.
2. Para cada $\pi \in \Pi$, con $\mathrm{rk}(\pi) = n$, $f^n[R_\pi] \subseteq T_\pi$ i.e., para cada $x \in A^n$, si $x \in R_\pi$ $f^n(x) \in T_\pi$.

Proposición 5.136. *Sean* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, $g\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ *y* $h\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ *tres homomorfismos. Entonces:*

1. *Siendo* $\mathrm{id}_{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}, \mathrm{id}_A, \mathbf{A})$, *se cumple que* $\mathrm{id}_{\mathbf{A}}\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$, *el* $(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Pi})$*-homomorfismo* identidad *de* $\mathbf{A}$, *es un endomorfismo de* $\mathbf{A}$.
2. *Siendo* $g \circ f = (\mathbf{A}, g \circ f, \mathbf{C})$, *se cumple que* $g \circ f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$, *el* $(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Pi})$*-homomorfismo* composición *de* f *y* g, *es un* $(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Pi})$*-homomorfismo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{C}$.
3. (Asociatividad). *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] \arrow[drr, bend left=60, "(h \circ g) \circ f"] \arrow[drr, bend right=60, "h \circ (g \circ f)"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h \circ g"] & \\
& \mathbf{C} \arrow[r, "h"'] & \mathbf{D}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

4. (Neutros). *Los diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbf{A}}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{A} \arrow[d, "f"] \\
& \mathbf{B}
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbf{B}}"] \\
& \mathbf{B}
\end{tikzcd}$$

conmutan.

Demostración. □

Las propiedades que acabamos de establecer acerca de los homomorfismos, nos permiten afirmar que los $(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Pi})$-sistemas algebraicos cuyos conjuntos subyacentes pertenezcan a un universo de Grothendieck, U, arbitrario pero fijo, junto con los homomorfismos entre tales $(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Pi})$-sistemas algebraicos, constituyen una categoría.

Proposición 5.137. *Sea* U *un universo de Grothendieck. Entonces los* $(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Pi})$*-sistemas algebraicos* $\mathbf{A}$ *tales que* $A \in U$, *junto con los homomorfismos entre ellos constituyen una categoría:* $\mathbf{SAlg}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Pi})$.

Demostración. □

Antes de proseguir con el estudio de los conceptos de subsistema algebraico y cociente de un sistema algebraico y debido a que nos será de utilidad cuando definamos los conceptos de encajamiento y de homomorfismo fuerte, demostramos que podemos inducir familias de relaciones, de manera optimal, sobre el dominio común de una familia de aplicaciones cuando los codominios de las mismas estén dotados de familias de relaciones, y, dualmente, que podemos inducir familias de relaciones, de manera cooptimal, sobre el codominio común de una familia de aplicaciones cuando los dominios de las mismas estén dotados de familias de relaciones.

Lema 5.138. *Sea* (A, F) *una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra,* $(\mathbf{B}_i \mid i \in I)$ *una familia de* $(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Pi})$*-sistemas algebraicos, siendo, para cada* $i \in I$, $\mathbf{B}_i = (B_i, G^i, T^i)$ *y* $f = (f_i \mid i \in I)$

una familia de $\mathbf{\Sigma}$-homomorfismos, en la que, para cada $i \in I$, $f_i\colon (A,F) \longrightarrow (B_i,G^i)$. Entonces hay una única familia de relaciones $R = (R_\pi \mid \pi \in \Pi)$ en A, en la que, para cada $\pi \in \Pi$, con $\mathrm{rk}(\pi) = n$, $R_\pi \subseteq A^n$, a la que denotamos por $\mathrm{L}^f(\mathbf{B}_i \mid i \in I)$, y denominamos el levantamiento optimal de $(\mathbf{B}_i \mid i \in I)$ a través de f, *tal que:*

1. *Para cada $i \in I$, $f_i\colon (A,F,\mathrm{L}^f(\mathbf{B}_i \mid i \in I)) \longrightarrow \mathbf{B}_i$.*
2. *Para cada $(\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Pi})$-sistema algebraico $\mathbf{C} = (C,H,U)$ y cada $\mathbf{\Sigma}$-homomorfismo $g\colon (C,H) \longrightarrow (A,F)$, si, para cada $i \in I$, $f_i \circ g\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{B}_i$, entonces $g\colon \mathbf{C} \longrightarrow (A,F,\mathrm{L}^f(\mathbf{B}_i \mid i \in I))$.*

Además, se cumple que:

1. *Para cada familia de relaciones $R = (R_\pi \mid \pi \in \Pi)$ en A:*
$$\mathrm{L}^{\mathrm{id}_A}(A,F,R) = R.$$
2. *Si, para cada $i \in I$, $(\mathbf{C}_{i,j} \mid j \in J_i)$ es una familia de $(\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Pi})$-sistemas algebraicos, $g_i = (g_{i,j} \mid j \in J_i)$ una familia de $\mathbf{\Sigma}$-homomorfismos, en la que, para cada $j \in J_i$, $g_{i,j}\colon (B_i,G^i) \longrightarrow (C_{i,j},H^{i,j})$ y $T^i = \mathrm{L}^{g_i}(\mathbf{C}_{i,j} \mid j \in J_i)$, entonces*
$$\mathrm{L}^{(g_i \circ f \mid i \in I)}(\mathbf{C}_{i,j} \mid (i,j) \in \textstyle\coprod_{i\in I} J_i) = \mathrm{L}^f((B_i, \mathrm{L}^{g_i}(\mathbf{C}_{i,j} \mid j \in J_i)) \mid i \in I).$$

Demostración. Es suficiente que tomemos la familia $R = (R_\pi \mid \pi \in \Pi)$ en A, en la que, para cada $\pi \in \Pi$, R_π es la relación definida como:
$$R_\pi = \textstyle\bigcap_{i\in I} (f_i^n)^{-1}[T_\pi^i]$$
□

Dada una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra (A,F), el levantamiento optimal de $(\mathbf{B}_i \mid i \in \varnothing)$ a través de $f = (f_i \mid i \in \varnothing)$ es $(A^{\mathrm{rk}(\pi)} \mid \pi \in \Pi)$.

Definición 5.139. Sea $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo de $(\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Pi})$-sistemas algebraicos. Decimos que f es un homomorfismo *optimal* si, para cada $(\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Pi})$-sistema algebraico $\mathbf{C} = (C,H,U)$ y cada $\mathbf{\Sigma}$-homomorfismo $g\colon (C,H) \longrightarrow (A,F)$, si $f \circ g\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{B}$, entonces $g\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{A}$.

Proposición 5.140. *Sea $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo de $(\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Pi})$-sistemas algebraicos. Una condición necesaria y suficiente para que f sea un homomorfismo optimal es que $R = \mathrm{L}^f(\mathbf{B})$.*

Demostración. □

Proposición 5.141. *Si $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ y $g\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ son homomorfismos optimales, entonces $g \circ f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ es un homomorfismo optimal. Además, si $g \circ f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ es un homomorfismo optimal, entonces $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es optimal.*

Demostración. □

Proposición 5.142. *Sea (A,F) una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Entonces el sistema algebraico $(A,F,(A^{\mathrm{rk}(\pi)} \mid \pi \in \Pi))$ es tal que, para cada sistema algebraico $\mathbf{B}$ y cada homomorfismo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras f de $(B,F^{\mathbf{B}})$ en (A,F), hay un único homomorfismo de sistemas algebraicos g de $\mathbf{B}$ en $(A,F,(A^{\mathrm{rk}(\pi)} \mid \pi \in \Pi))$ tal que $\mathrm{id}_{(A,F)} \circ g = f$.*

Demostración. □

Lema 5.143. *Sea (A,F) una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra, $(\mathbf{B}_i \mid i \in I)$ una familia de $(\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Pi})$-sistemas algebraicos, siendo, para cada $i \in I$, $\mathbf{B}_i = (B_i,G^i,T^i)$ y $f = (f_i \mid i \in I)$ una familia de $\mathbf{\Sigma}$-homomorfismos, en la que, para cada $i \in I$, $f_i\colon (B_i,G^i) \longrightarrow (A,F)$. Entonces hay una única familia de relaciones $(R_\pi \mid \pi \in \Pi)$ en A, en la que, para cada $\pi \in \Pi$, con $\mathrm{rk}(\pi) = n$, $R_\pi \subseteq A^n$, a la que denotamos por $\mathrm{L}_f(\mathbf{B}_i \mid i \in I)$, y denominamos el* levantamiento cooptimal de $(\mathbf{B}_i \mid i \in I)$ a través de f, *tal que:*

1. *Para cada* $i \in I$, $f_i \colon \mathbf{B}_i \longrightarrow (A, F, \mathrm{L}_f(\mathbf{B}_i \mid i \in I))$.
2. *Para cada* $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$*-sistema algebraico* $\mathbf{C} = (C, H, U)$ *y cada* $\mathbf{\Sigma}$*-homomorfismo* $g \colon (A, F) \longrightarrow (C, H)$*, si, para cada* $i \in I$, $g \circ f_i \colon \mathbf{B}_i \longrightarrow \mathbf{C}$*, entonces* $g \colon (A, F, \mathrm{L}_f(\mathbf{B}_i \mid i \in I)) \longrightarrow \mathbf{C}$.

Además, se cumple que:

1. *Para cada familia de relaciones* $R = (R_\pi \mid \pi \in \Pi)$ *en* A*:*
$$\mathrm{L}_{\mathrm{id}_A}(A, F, R) = R.$$
2. *Si, para cada* $i \in I$, $(\mathbf{C}_{i,j} \mid j \in J_i)$ *es una familia de* $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$*-sistemas algebraicos,* $g_i = (g_{i,j} \mid j \in J_i)$ *una familia de* $\mathbf{\Sigma}$*-homomorfismos, en la que, para cada* $j \in J_i$, $g_{i,j} \colon (C_{i,j}, H^{i,j}) \longrightarrow (B_i, G^i)$ *y* $T^i = \mathrm{L}_{g_i}(\mathbf{C}_{i,j} \mid j \in J_i)$*, entonces*
$$\mathrm{L}_{(f \circ g_i \mid i \in I)}(\mathbf{C}_{i,j} \mid (i,j) \in \textstyle\coprod_{i \in I} J_i) = \mathrm{L}_f((B_i, \mathrm{L}_{g_i}(\mathbf{C}_{i,j} \mid j \in J_i)) \mid i \in I).$$

Demostración. Es suficiente que tomemos la familia $R = (R_\pi \mid \pi \in \Pi)$ en A, en la que, para cada $\pi \in \Pi$, R_π es la relación definida como:
$$R_\pi = \textstyle\bigcup_{i \in I} f_i^n[T_\pi^i]$$
□

Dada una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra (A, F), el levantamiento cooptimal de $(\mathbf{B}_i \mid i \in \varnothing)$ a través de $f = (f_i \mid i \in \varnothing)$ es $(\varnothing \mid \pi \in \Pi)$.

Definición 5.144. Sea $f \colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo de $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$-sistemas algebraicos. Decimos que f es un homomorfismo *cooptimal* si, para cada $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$-sistema algebraico $\mathbf{C} = (C, H, U)$ y cada $\mathbf{\Sigma}$-homomorfismo $g \colon (B, G) \longrightarrow (C, H)$, si $g \circ f \colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$, entonces $g \colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$.

Proposición 5.145. *Sea* $f \colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo de* $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$*-sistemas algebraicos. Una condición necesaria y suficiente para que* f *sea un homomorfismo cooptimal es que* $T = \mathrm{L}_f(\mathbf{A})$.

Demostración. □

Proposición 5.146. *Si* $f \colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *y* $g \colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ *son homomorfismos cooptimales, entonces* $g \circ f \colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ *es un homomorfismo cooptimal. Además, si* $g \circ f \colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ *es un homomorfismo optimal, entonces* $g \colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ *es cooptimal.*

Demostración. □

Proposición 5.147. *Sea* (A, F) *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra. Entonces el sistema algebraico* $(A, F, (\varnothing \mid \pi \in \Pi))$ *es tal que, para cada sistema algebraico* $\mathbf{B}$ *y cada homomorfismo de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras* f *de* (A, F) *en* $(B, F^{\mathbf{B}})$*, hay un único homomorfismo de sistemas algebraicos* g *de* $(A, F, (\varnothing \mid \pi \in \Pi))$ *en* $\mathbf{B}$ *tal que* $g \circ \mathrm{id}_{(A,F)} = f$.

Demostración. □

Definición 5.148. Sean $\mathbf{A} = (A, F, R)$ y $\mathbf{B} = (B, G, T)$ dos $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$-sistemas algebraicos.

1. Un *encajamiento* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ es un homomorfismo optimal inyectivo f de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$, i.e., un homomorfismo inyectivo tal que $R = \mathrm{L}^f(\mathbf{B})$.
2. Un *homomorfismo fuerte* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ es un homomorfismo cooptimal sobreyectivo f de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$, i.e., un homomorfismo sobreyectivo tal que $T = \mathrm{L}_f(\mathbf{A})$.

Proposición 5.149. *Si* $f \colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *es un homomorfismo optimal sobreyectivo, entonces es un homomorfismo fuerte.*

Demostración. □

Proposición 5.150. *Si* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *y* $g\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ *son encajamientos, resp., homomorfismos fuertes, entonces* $g \circ f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ *es un encajamiento, resp., un homomorfismo fuerte.*

Demostración. □

Proposición 5.151. *Si* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *y* $g\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ *son homomorfismos y* $g \circ f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ *es un encajamiento, entonces* f *es un encajamiento.*

Demostración. □

Proposición 5.152. *Si* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *y* $g\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ *son homomorfismos y* $g \circ f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ *es un homomorfismo fuerte, entonces* g *es un homomorfismo fuerte.*

Demostración. □

Proposición 5.153. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo. Una condición necesaria y suficiente para que* f *sea un isomorfismo es que sea un homomorfismo fuerte inyectivo.*

Demostración. □

Una condición necesaria y suficiente para que un homomorfismo $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ sea un isomorfismo es que sea un homomorfismo optimal biyectivo, o que sea un homomorfismo cooptimal biyectivo.

5.10. Subsistemas algebraicos.

Definición 5.154. Sean $\mathbf{A} = (A, F, R)$ y $\mathbf{B} = (B, G, T)$ dos $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$-sistemas algebraicos y X un subconjunto de A.

1. Si $\sigma \in \Sigma$, con $\operatorname{ar}(\sigma) = n$, decimos que X está *cerrado bajo la operación* $F_\sigma\colon A^n \longrightarrow A$ si, para cada $a \in X^n$, $F_\sigma(a) \in X$, i.e., si $F_\sigma[X^n] \subseteq X$.
2. Decimos que X es un *cerrado* de $\mathbf{A}$ si, para cada $\sigma \in \Sigma$ con $\operatorname{ar}(\sigma) = n$, y cada $a \in X^n$, $F_\sigma(a) \in X$, i.e., si X está cerrado bajo cada una de las operaciones estructurales de $\mathbf{A}$. Al conjunto de los cerrados de $\mathbf{A}$ lo denotamos por $\mathrm{S}(\mathbf{A})$.
3. Decimos que $\mathbf{B}$ es un *subsistema algebraico* de $\mathbf{A}$, y lo denotamos por $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$, si $B \subseteq A$ y si la inclusión canónica, $\mathrm{in}_{\mathbf{B}} = (\mathbf{B}, \mathrm{in}_B, \mathbf{A})$, de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$ es un encajamiento de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$. Si además $B \neq A$, decimos que $\mathbf{B}$ es un *subsistema algebraico estricto* de A. Denotamos por $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ el conjunto de los subsistemas algebraicos de A.

Si $\mathbf{B} = (B, G, T)$ es un subsistema algebraico de $\mathbf{A} = (A, F, R)$, entonces se cumple que $G = F{\restriction}B$ y que, para cada $\pi \in \Pi$, con $\operatorname{rk}(\pi) = n$, $T_\pi = R_\pi \cap B^n$.

Proposición 5.155. *Sea* $\mathbf{A}$ *un* $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$*-sistema algebraico. Entonces existe una biyección, natural, entre el conjunto* $\mathrm{S}(\mathbf{A})$*, de los cerrados de* $\mathbf{A}$ *y el conjunto* $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$*, de los subsistemas algebraicos de* $\mathbf{A}$*. Además, esa biyección se extiende hasta un isomorfismo, cuando los conjuntos* $\mathrm{S}(\mathbf{A})$ *y* $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ *se consideran ordenados por la inclusión.*

Demostración. □

Proposición 5.156. *Sea* $\mathbf{A}$ *un sistema algebraico y* X *un cerrado de* $\mathbf{A}$*. Entonces hay un sistema algebraico* $\mathbf{X}$*, el* subsistema algebraico de $\mathbf{A}$ asociado a X*, y un encajamiento* $\mathrm{in}_{\mathbf{X}}\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A}$*, la* inclusión canónica *de* $\mathbf{X}$ *en* $\mathbf{A}$*, tal que:*

1. $\mathrm{Im}(\mathrm{in}_{\mathbf{X}}) = X$.

2. (Propiedad universal) *Para cada sistema algebraico* $\mathbf{B}$ *y cada homomorfismo* $f\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$*, si* $\mathrm{Im}(f) \subseteq X$*, entonces existe un único homomorfismo* g *de* $\mathbf{B}$ *en* $\mathbf{X}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{B} \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "f"] \\ \mathbf{X} \arrow[r, "\mathrm{in}_{\mathbf{X}}"'] & \mathbf{A} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

La proposición que sigue afirma que todo homomorfismo entre sistemas algebraicos admite una (epi, regular mono)-factorización.

Proposición 5.157. *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *dos* $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$*-sistemas algebraicos y* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo. Entonces: El diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f^{\mathrm{s}}"'] & & \mathbf{B} \\ & (\mathrm{Im}(f), G\restriction \mathrm{Im}(f), \mathrm{L}^{\mathrm{in}_{\mathrm{Im}(f)}}(\mathbf{B})) \arrow[ur, "\mathrm{in}_{\mathrm{Im}(f)}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, y es una (epi,regular mono)-factorización de f*.*

Demostración. □

Proposición 5.158. *Sea* $\mathbf{A}$ *un sistema algebraico. Entonces el conjunto de los cerrados de* $\mathbf{A}$*,* $\mathrm{S}(\mathbf{A})$*, es un sistema de clausura algebraico sobre* A*, i.e., tiene las siguientes propiedades:*

1. $A \in \mathrm{S}(\mathbf{A})$.
2. *Si* $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{S}(\mathbf{A})$ *y* $\mathcal{C} \neq \varnothing$*, entonces* $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C \in \mathrm{S}(\mathbf{A})$.
3. *Si* $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{S}(\mathbf{A})$*,* $\mathcal{C} \neq \varnothing$ *y si dados* $X, Y \in \mathcal{C}$*, hay un* $Z \in \mathcal{C}$ *tal que* $X \cup Y \subseteq Z$*, entonces* $\bigcup_{C\in\mathcal{C}} C \in \mathrm{S}(\mathbf{A})$.

Demostración. □

Corolario 5.159. *Sea* $\mathbf{A}$ *un sistema algebraico. Entonces la endoaplicación* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *del conjunto* $\mathrm{Sub}(A)$*, definida como:*

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(A) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \\ \quad X \quad \longmapsto \bigcap\{\, C \in \mathrm{S}(\mathbf{A}) \mid X \subseteq C \,\} \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{Im}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}) \subseteq \mathrm{S}(\mathbf{A})$.
2. $\{\, X \in \mathrm{Sub}(A) \mid X = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \,\} = \mathrm{S}(\mathbf{A})$.
3. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es extensiva o inflacionaria, i.e., para cada* $X \in \mathrm{Sub}(A)$,
$$X \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X).$$
4. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es isótona, i.e., para cada* $X, Y \in \mathrm{Sub}(A)$*, si* $X \subseteq Y$*, entonces*
$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(Y).$$
5. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es idempotente, i.e., para cada* $X \in \mathrm{Sub}(A)$,
$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)).$$

6. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es algebraica, i.e., para cada* $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sub}(A)$*, si* $\mathcal{X} \neq \varnothing$ *y para cada* $X, Y \in \mathcal{X}$*, existe un* $Z \in \mathcal{X}$ *tal que* $X \cup Y \subseteq Z$*, entonces*
$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\bigcup \mathcal{X}) = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X).$$

Por consiguiente, para cada $X \subseteq A$*,* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ *es el mínimo cerrado de* $\mathbf{A}$ *que contiene a* X*, y lo denominamos el cerrado de* $\mathbf{A}$ generado *por* X*. Además, al subsistema algebraico de* $\mathbf{A}$ *canónicamente asociado a* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$*, lo denotamos por* $\mathbf{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ *y lo denominamos, también, el subsistema algebraico de* $\mathbf{A}$ *generado por* X*.*

Demostración. □

A continuación, introducimos unas nociones que nos permitirán obtener una descripción más *constructiva* del subsistema algebraico generado por un conjunto.

Definición 5.160. Sea $\mathbf{A} = (A, F, R)$ un sistema algebraico. Entonces:

1. Denotamos por $\mathrm{E}_{\mathbf{A}}$ el operador sobre $\mathrm{Sub}(A)$, definido como:
$$\mathrm{E}_{\mathbf{A}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(A) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \\ \quad X \quad \longmapsto X \cup \Big(\bigcup_{\sigma \in \Sigma} F_\sigma[X^{\mathrm{ar}(\sigma)}] \Big). \end{cases}$$
2. Si $X \subseteq A$, entonces denotamos por $(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X) \mid n \in \mathbb{N})$ la familia en $\mathrm{Sub}(A)$ definida por recursión como:
$$\mathrm{E}^0_{\mathbf{A}}(X) = X,$$
$$\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{E}_{\mathbf{A}}(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)),\ n \geq 0.$$

   Además, convenimos que:
$$\mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)$$

Proposición 5.161. *Si* $\mathbf{A}$ *es un sistema algebraico y* $X \subseteq A$*, entonces* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X)$*.*

Demostración. □

Definición 5.162. Sea $\mathbf{A}$ un sistema algebraico y $X \subseteq A$. Decimos que X es un *conjunto de generadores* de $\mathbf{A}$, o que X *genera* $\mathbf{A}$, si $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = A$. Si $\mathfrak{m}$ es un cardinal, decimos que $\mathbf{A}$ está $\mathfrak{m}$-*generado* si hay un subconjunto X de A tal que $\mathrm{card}(X) = \mathfrak{m}$ y $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = A$. Además, diremos que $\mathbf{A}$ está *finitamente generado*, o que es de *generación finita*, si hay un subconjunto X de A tal que $\mathrm{card}\, X < \aleph_0$ y X genera $\mathbf{A}$.

Proposición 5.163. *Si* $\mathbf{A}$ *es un sistema algebraico que está finitamente generado, entonces cualquier conjunto de generadores de* $\mathbf{A}$ *contiene un subconjunto finito que también genera* $\mathbf{A}$

Demostración. □

Proposición 5.164. *Si* $\mathbf{A}$ *es un sistema algebraico, entonces una condición necesaria y suficiente para que toda* ω*-cadena ascendente de subsistemas algebraicos de* $\mathbf{A}$ *sea estacionaria es que todo subsistema algebraico de* $\mathbf{A}$ *esté finitamente generado.*

Demostración. □

Proposición 5.165. *Si* $\mathbf{A}$ *es un sistema algebraico que está finitamente generado e* Y *es un subsistema algebraico de* $\mathbf{A}$ *tal que* $Y \neq A$*, entonces hay un subsistema algebraico de* $\mathbf{A}$ *distinto de* A *que contiene a* Y *y es maximal con esas propiedades.*

Demostración. □

Proposición 5.166. *Sean* $f, g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *dos homomorfismos y* X *un subconjunto de* A. *Si* f *y* g *coinciden en* X, *entonces también coinciden en* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

Demostración. □

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos sistemas algebraicos. Entonces hay a lo sumo un homomorfismo de $\mathbf{Sg_A}(\varnothing)$ en $\mathbf{B}$. Además, si tal homomorfismo existe, tiene como imagen el subsistema algebraico de $\mathbf{B}$ generado por $\varnothing$.

Proposición 5.167. *Sea* f *una biyección de un conjunto de generadores* X *de un sistema algebraico* $\mathbf{A}$ *en un conjunto de generadores* Y *de otro sistema algebraico* $\mathbf{B}$. *Si* g *y* h *son extensiones homomorfas de* f *y de la inversa* f^{-1} *hasta* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$, *resp., entonces* g *es un isomorfismo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{B}$, *cuyo inverso es* h.

Demostración. □

Proposición 5.168. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo de sistemas algebraicos,* $X \in \mathrm{S}(\mathbf{A})$ *e* $Y \in \mathrm{S}(\mathbf{B})$. *Entonces* $f[X] \in \mathrm{S}(\mathbf{B})$ *y* $f^{-1}[Y] \in \mathrm{S}(\mathbf{A})$. *En particular,* $\mathrm{Im}(f) \in \mathrm{S}(\mathbf{B})$

Demostración. □

Proposición 5.169. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo de sistemas algebraicos y* $X \subseteq A$. *Entonces* $f[\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)] = \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$.

Demostración. □

Proposición 5.170. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo de sistemas algebraicos y* X *un subconjunto de* A *tal que* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = A$. *Entonces* f *es un homomorfismo sobreyectivo precisamente si* $f[X]$ *es un conjunto de generadores de* $\mathbf{B}$

Demostración. □

5.11. Congruencias sobre los sistemas algebraicos.

Definición 5.171. Sea $\mathbf{A}$ un sistema algebraico y Φ una ralación binaria en A. Decimos que Φ es una *congruencia* sobre $\mathbf{A}$ si Φ es una relación de equivalencia sobre A y si, para cada $n \in \mathbb{N}-1$, cada $\sigma \in \Sigma_n$, y cada $(x_i \mid i \in n), (y_i \mid i \in n) \in A^n$, si, para cada $i \in n$, $x_i \equiv y_i \pmod{\Phi}$, entonces $F_\sigma(x_i \mid i \in n) \equiv F_\sigma(y_i \mid i \in n) \pmod{\Phi}$.

Denotamos por $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$ el conjunto de las congruencias sobre la $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$.

Proposición 5.172. *Sea* $\mathbf{A}$ *un sistema algebraico. Entonces el conjunto de las congruencias sobre* $\mathbf{A}$, $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$, *es un sistema de clausura algebraico sobre* $A \times A$, *i.e., tiene las siguientes propiedades:*

1. $A \times A \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$.
2. *Si* $(\Phi_i \mid i \in I)$ *es una familia no vacía en* $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$, *entonces* $\bigcap_{i \in I} \Phi_i$ *es una congruencia sobre* $\mathbf{A}$.
3. *Si* $(\Phi_i \mid i \in I)$ *es una familia no vacía en* $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$ *y si dados* $i, j \in I$, *hay un* $k \in I$ *tal que* $\Phi_i \cup \Phi_j \subseteq \Phi_k$, *entonces* $\bigcup_{i \in I} \Phi_i$ *es una congruencia sobre* $\mathbf{A}$.

Demostración. □

Corolario 5.173. *Sea* $\mathbf{A}$ *un sistema algebraico. Entonces la endoaplicación* $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}$ *del conjunto* $\mathrm{Sub}(A \times A)$, *definida como:*

$$\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(A \times A) & \longrightarrow \mathrm{Sub}(A \times A) \\ \quad\Phi & \longmapsto \bigcap\{\, \Psi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A}) \mid \Phi \subseteq \Psi \,\} \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. $\operatorname{Im}(\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}) \subseteq \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$.
2. $\{\, \Phi \in \mathrm{Sub}(A \times A) \mid \Phi = \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi) \,\} = \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$.
3. $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}$ *es extensiva o inflacionaria, i.e., para cada* $\Phi \in \mathrm{Sub}(A \times A)$,
$$\Phi \subseteq \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi).$$
4. $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}$ *es isótona, i.e., para cada* $\Phi, \Psi \in \mathrm{Sub}(A \times A)$, *si* $\Phi \subseteq \Psi$, *entonces*
$$\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Psi) \subseteq \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Psi).$$
5. $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}$ *es idempotente, i.e., para cada* $\Phi \in \mathrm{Sub}(A \times A)$,
$$\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi) = \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)).$$
6. $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}$ *es algebraica, i.e., para cada familia no vacía dirigida superiormente* $(\Phi_i \mid i \in I)$ *en* $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$ *se cumple que*
$$\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\textstyle\bigcup_{i\in I}\Phi_i) = \bigcup_{i\in I}\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi_i).$$

Por consiguiente, para cada $\Phi \subseteq A \times A$, $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$ *es la mínima congruencia sobre* $\mathbf{A}$ *que contiene a* Φ, *y la denominamos la congruencia sobre* $\mathbf{A}$ generada *por* Φ.

Demostración. □

Proposición 5.174. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo de sistemas algebraicos. Entonces el* núcleo *de* f, *i.e.,* $\mathrm{Ker}(f) = \{\, (x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y) \,\}$, *es una congruencia sobre* $\mathbf{A}$.

Demostración. □

Proposición 5.175. *Sea* $\mathbf{A}$ *un sistema algebraico y* $\Phi \in \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}$. *Entonces hay un sistema algebraico* $\mathbf{A}/\Phi$, *el sistema algebraico* cociente de $\mathbf{A}$ entre Φ, *y un homomorfismo fuerte* $\mathrm{pr}_{\Phi}\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}/\Phi$, *la* proyección canónica *de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{A}/\Phi$, *tal que:*

1. $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_{\Phi}) = \Phi$.
2. (Propiedad universal) *Para cada sistema algebraico* $\mathbf{B}$ *y cada homomorfismo* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, *si* $\Phi \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, *entonces hay un único homomorfismo* $g\colon \mathbf{A}/\Phi \longrightarrow \mathbf{B}$ *tal que el diagrama:*
$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\Phi}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{A}/\Phi \arrow[d, "g"] \\ & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$
conmuta.

Demostración. □

La siguiente proposición establece que toda imagen homomorfa fuerte es isomorfa a un cociente.

Proposición 5.176. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo fuerte de sistemas algebraicos. Entonces* $\mathbf{A}/\mathrm{Ker}(f)$ *es isomorfa a* $\mathbf{B}$.

Demostración. □

De hecho, determinar, salvo isomorfismo, todas las imágenes homomorfas fuertes de un sistema algebraico $\mathbf{A}$ equivale a determinar todas las congruencias sobre $\mathbf{A}$. Además, determinar, salvo isomorfismo, todos los homomorfismos optimales sobreyectivos desde un sistema algebraico $\mathbf{A}$ equivale a determinar todas las equivalencias Φ sobre A que cumplen las siguientes propiedades:

1. Para cada $n \in \mathbb{N} - 1$, cada $\sigma \in \Sigma_n$, y cada $(x_i \mid i \in n)$, $(y_i \mid i \in n) \in A^n$, si, para cada $i \in n$, $x_i \equiv y_i \pmod{\Phi}$, entonces $F_\sigma(x_i \mid i \in n) \equiv F_\sigma(y_i \mid i \in n) \pmod{\Phi}$.
2. Para cada $n \in \mathbb{N} - 1$, cada $\pi \in \Pi_n$, y cada $(x_i \mid i \in n)$, $(y_i \mid i \in n) \in A^n$, si, para cada $i \in n$, $x_i \equiv y_i \pmod{\Phi}$ y $(x_i \mid i \in n) \in R_\pi$, entonces $(y_i \mid i \in n) \in R_\pi$

Este último tipo de equivalencias lo usaremos cuando consideremos los productos reducidos de sistemas algebraicos.

La proposición que sigue afirma que todo homomorfismo entre sistemas algebraicos admite una (regular epi, mono)-factorización.

Proposición 5.177. *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *dos* $(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Pi})$*-sistemas algebraicos y* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo. Entonces el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}(f)}"'] & & \mathbf{B} \\ & (A/\mathrm{Ker}\,(f), F/\mathrm{Ker}\,(f), \mathrm{L}_{\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}(f)}}(\mathbf{A})) \arrow[ur, "f^{\mathrm{i}}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, y es una (regular epi, mono)-factorización de f.

Demostración. □

En la proposición que sigue demostramos que un homomorfismo factoriza a traves de su núcleo y de su imagen.

Proposición 5.178. *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *dos sistemas algebraicos y* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo. Entonces el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}(f)}"'] & \mathbf{B} \\ \mathbf{A}/\mathrm{Ker}\,(f) \arrow[r, "f^{\mathrm{b}}"'] & \mathbf{Im}(f) \arrow[u, "\mathrm{in}_{\mathbf{Im}(f)}"'] \end{tikzcd}$$

conmuta. Además, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}(f)}"] \arrow[d, "f^{\mathrm{s}}"'] & \mathbf{A}/\mathrm{Ker}(f) \arrow[dl, "f^{\mathrm{b}}"'] \arrow[d, "f^{\mathrm{i}}"] \\ \mathbf{Im}(f) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\mathbf{Im}(f)}"'] & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

El homomorfismo biyectivo f^{b}*, en general, no es un isomorfismo.*

Proposición 5.179. *Sean* $\Phi, \Psi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$ *y* $\Phi \subseteq \Psi$*. Entonces se cumple:*

1. Ψ/Φ *es una congruencia sobre* $\mathbf{A}/\Phi$.

2. *Existe un único homomorfismo* $\mathrm{p}_{\Phi,\Psi}$ *de* $\mathbf{A}/\Phi$ *en* $\mathbf{A}/\Psi$ *tal que* $\mathrm{p}_{\Phi,\Psi} \circ \mathrm{pr}_\Phi = \mathrm{pr}_\Psi$*, i.e., el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{A} \arrow[dl, "\mathrm{pr}_\Phi"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_\Psi"] & \\ \mathbf{A}/\Phi \arrow[rr, "\mathrm{p}_{\Phi,\Psi}"'] & & \mathbf{A}/\Psi \end{tikzcd}$$

   conmuta. Además, $\mathrm{p}_{\Phi,\Psi}$ *es un homomorfismo fuerte.*
3. $(\mathbf{A}/\Phi)/(\Psi/\Phi)$ *es isomorfo a* $\mathbf{A}/\Psi$.
4. $\Psi/\Phi = \mathrm{Ker}(\mathrm{p}_{\Phi,\Psi})$.

Demostración. □

Proposición 5.180. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo de sistemas algebraicos. Si* $\Phi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{B})$ *entonces la imagen inversa de* Φ *mediante* f^2 *es una congruencia sobre* $\mathbf{A}$*, i.e.,* $(f^2)^{-1}[\Phi] \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$.

Proposición 5.181. *Sea* $\mathbf{A}$ *un sistema algebraico,* $X \in \mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ *y* $\Phi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$*. Entonces se cumple que:*

1. $\mathrm{Sat}_\Phi(X) \in \mathrm{Sub}(\mathbf{A})$.
2. $\Phi \restriction \mathrm{Sat}_\Phi(X)$ *es una congruencia sobre* $\mathrm{Sat}_\Phi(X)$.
3. $\mathbf{X}/(\Phi{\restriction}\mathbf{X})$ *y* $\mathrm{Sat}_\Phi(X)/(\Phi{\restriction}\mathrm{Sat}_\Phi(X))$ *son isomorfos.*

Demostración. □

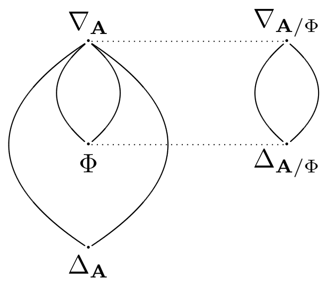
Proposición 5.182. *Sea* $\mathbf{A}$ *un sistema algebraico y* $\Phi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$*. Entonces se cumple que los retículos* $(\Uparrow \Phi, \subseteq)$ *y* $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A}/\Phi)$ *son isomorfos.*

Demostración. El isomorfismo viene dado por la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \Uparrow \Phi & \longrightarrow & \mathrm{Cgr}(\mathbf{A}/\Phi) \\ \Psi & \longmapsto & \Psi/\Phi \end{array}$$

□

La proposición anterior se puede ilustrar con la siguiente figura:



Proposición 5.183. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo fuerte de sistemas algebraicos. Si* $\Phi \subseteq A^2$*, entonces*

$$f^2[\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)] = \mathrm{Cg}_{\mathbf{B}}(f^2[\Phi]).$$

Demostración. $(f^2)^{-1}[\mathrm{Cg}_{\mathbf{B}}(f^2[\Phi])]$ es una congruencia sobre $\mathbf{A}$ que contiene a $\Phi \cup \mathrm{Ker}(f)$, luego contiene a $\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$, asi que, por ser f sobreyectiva, $\mathrm{Cg}_{\mathbf{B}}(f^2[\Phi])$ contiene a $f^2[\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)]$.

Por otra parte, al ser f un homomorfismo fuerte, hay un isomorfismo entre los conjuntos ordenados $(\Uparrow \mathrm{Ker}(f), \subseteq)$ y $\mathrm{Cgr}(\mathbf{B})$. Pero $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$ así que corresponde a una congruencia $f^2[\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)]$ que contiene a $f^2[\Phi]$, luego $f^2[\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)]$ contiene a $\mathrm{Cg}_{\mathbf{B}}(f^2[\Phi])$. □

5.12. Lenguajes de primer orden.

Definimos la noción de término y la relación de precedencia algebraica entre términos. Además, definimos los términos cerrados como los elementos de álgebras iniciales. Por otra parte, definimos el concepto de fórmula y la relación de precedencia algebraica entre fórmulas y, basándonos en ella, las nociones de ocurrencia libre y ligada de una variable en una fórmula, la de sentencia o fórmula cerrada y la de fórmula abierta.

Definición 5.184. Un *lenguaje de primer orden* es un cuádruplo

$$\mathcal{L} = (V, \mathbf{\Lambda}, (\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi}), =),$$

en el que $V = \{\, v_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ es un conjunto infinito numerable, arbitrario pero fijo, $\mathbf{\Lambda}$ una signatura algebraica, a la que denominamos la signatura *lógica*, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, los conjuntos Λ_n, de símbolos de operación lógicos, están definidos como:

1. $\Lambda_1 = \{\neg\} \cup \{\, \forall v_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$.
2. $\Lambda_2 = \{\, \wedge, \vee, \rightarrow \,\}$.
3. $\Lambda_n = \varnothing$, si $n \neq 1, 2$,

$(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$ una signatura de primer orden y $=$ el símbolo de la igualdad.

Definición 5.185. El conjunto $\mathrm{Tm}(\mathcal{L})$, de los $\mathcal{L}$-*términos* es:

$$\mathrm{Tm}(\mathcal{L}) = \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V),$$

i.e., el conjunto subyacente de la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre sobre el conjunto de las variables V.

Los miembros de $\mathrm{Tm}(\mathcal{L})$, i.e., los símbolos de operación polinómica, o términos, denotan operaciones, esencialmente, finitarias, que se realizan como tales sobre conjuntos que estén dotados de una estructura de $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Además, para un término $P \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})$, tenemos que $P = (v_n)$, para un único $n \in \mathbb{N}$, o $P = (\sigma)$, para un único $\sigma \in \Sigma_0$, o $P = (\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$, para un único $p \in \mathbb{N} - 1$, un único $\sigma \in \Sigma_p$ y una única familia $(P_j \mid j \in p)$ en $\mathrm{Tm}(\mathcal{L})$.

En virtud de la definición del conjunto de los $\mathcal{L}$-términos, como el conjunto subyacente de la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre sobre el conjunto de las variables V, disponemos de un principio de demostración por inducción algebraica y de un principio de definición por recursión algebraica sobre los $\mathcal{L}$-términos.

Antes de establecer ambos principios, recordamos que $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$ es la $\mathbf{\Sigma}$-algebra cuyo conjunto subyacente, $\mathrm{W}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$, es el conjunto $\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod V)$, formado por todas las palabras sobre el alfabeto $\Sigma \coprod V$, y cuyas operaciones estructurales, F_σ, para cada $\sigma \in \Sigma$, son las definidas como:

$$F_\sigma \begin{cases} (\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod V))^{\mathrm{ar}(\sigma)} & \longrightarrow \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod V) \\ (P_j \mid j \in \mathrm{ar}(\sigma)) & \longmapsto (\sigma) \curlywedge \bigcurlywedge(P_j \mid j \in \mathrm{ar}(\sigma)), \end{cases}$$

i.e., como la concatenación de la palabra (σ) y de las palabras P_j, con $j \in \mathrm{ar}(\sigma)$.

Corolario 5.186. *Sea* $T \subseteq \mathrm{W}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$. *Si* T *es un cerrado de la* $\mathbf{\Sigma}$-*álgebra* $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$ *y* T *contiene al conjunto* $\{\, (v_n) \mid n \in \mathbb{N} \,\}$, *entonces* $\mathrm{Tm}(\mathcal{L}) \subseteq T$.

Corolario 5.187. *El par ordenado* $(\eta_V, \mathbf{Tm}(\mathcal{L}))$ *en el que* η_V *es la única aplicación de* V *en* $\mathrm{Tm}(\mathcal{L})$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[d, "\mathrm{in}_V"] \arrow[ddl, "\eta_V"'] \\ & \Sigma\coprod V \arrow[d, "\eta_{\Sigma\coprod V}"] \\ \mathrm{Tm}(\mathcal{L}) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\mathrm{Tm}(\mathcal{L})}"'] & \mathrm{Ml}(\Sigma\coprod V) \end{tikzcd}$$

conmuta, tiene la propiedad de que, para cada $\mathbf{\Sigma}$*-algebra* $\mathbf{A}$ *y cada aplicación* $f\colon V \longrightarrow A$*, existe un único homomorfismo* $f^\sharp$ *de* $\mathbf{Tm}(\mathcal{L})$ *en* $\mathbf{A}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Tm}(\mathcal{L}) \arrow[d, "f^\sharp"] \\ & A \end{tikzcd}$$

conmuta.

Definición 5.188. Denotamos por Var el único homomorfismo de $\mathbf{Tm}(\mathcal{L})$ en $\mathbf{Fin}(V)$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Var}((v_n)) = \{v_n\}$, siendo $\mathbf{Fin}(V)$ la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra cuyo conjunto subyacente es $\mathrm{Sub_{fin}}(V)$ y en la que, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, F_σ, la operación estructural de $\mathbf{Fin}(V)$ asociada a σ, asigna a una familia $(X_i \mid i \in n)$ en $\mathrm{Sub_{fin}}(V)$, $\bigcup_{i\in n} X_i$.

Definición 5.189. El conjunto de los $\mathcal{L}$-*términos cerrados*, denotado por $\mathrm{ClTm}(\mathcal{L})$, es:

$$\mathrm{ClTm}(\mathcal{L}) = \{\, P \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L}) \mid \mathrm{Var}(P) = \varnothing \,\}.$$

El conjunto $\mathrm{ClTm}(\mathcal{L})$ es, esencialmente, el conjunto subyacente de la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre sobre el conjunto vacío.

Definición 5.190. El conjunto de las $\mathcal{L}$-*fórmulas atómicas* es el conjunto definido (explícitamente, y no por recursión) como:

$$\mathrm{At}(\mathcal{L}) = (\{=\} \times \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^2) \cup \textstyle\bigcup_{\pi\in\Pi}\{\pi\} \times \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^{\mathrm{rk}(\pi)}.$$

De modo que una $\mathcal{L}$-fórmula atómica es o bien un par ordenado de la forma $(=, (P_i \mid i \in 2))$, para algún $(P_i \mid i \in 2) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^2$, o bien un par ordenado de la forma $(\pi, (P_i \mid i \in n))$, para algún $n \in \mathbb{N} - 1$, algún $\pi \in \Pi_n$ y alguna familia $(P_i \mid i \in n) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^n$. Para simplificar la escritura, convenimos en denotar a las $\mathcal{L}$-fórmulas atómicas del primer tipo por $P_0 = P_1$ y a las del segundo por $\pi(P_i \mid i \in n)$ o por $\pi(P_0, \ldots, P_{n-1})$.

Definimos a continuación el conjunto de las variables de las $\mathcal{L}$-fórmulas atómicas. Tal definición será explícita, i.e., no recursiva, ya que la definición de las $\mathcal{L}$-fórmulas atómicas es explícita.

Definición 5.191. Sea $n \in \mathbb{N} - 1$, $\pi \in \Pi_n$, $(P_i \mid i \in n) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^n$ y $(P_i \mid i \in 2) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^2$. Entonces:

$$\mathrm{Var}_{\mathrm{At}(\mathcal{L})}(P_0 = P_1) = \mathrm{Var}(P_0) \cup \mathrm{Var}(P_1).$$
$$\mathrm{Var}_{\mathrm{At}(\mathcal{L})}(\pi(P_0, \ldots, P_{n-1})) = \textstyle\bigcup_{i\in n}\mathrm{Var}(P_i).$$

Definición 5.192. El conjunto $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, de las $\mathcal{L}$-*fórmulas* es:

$$\mathrm{Fm}(\mathcal{L}) = \mathrm{T}_{\mathbf{\Lambda}}(\mathrm{At}(\mathcal{L})),$$

i.e., el conjunto subyacente de la $\mathbf{\Lambda}$-álgebra libre sobre el conjunto $\mathrm{At}(\mathcal{L})$, de las $\mathcal{L}$-fórmulas atómicas.

De modo que para cada $\mathcal{L}$-fórmula φ o bien $\varphi = (P_0 = P_1)$, para un único par $(P_i \mid i \in 2) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^2$, o bien $\varphi = (\pi(P_0, \ldots P_{n-1}))$, para un único $n \in \mathbb{N} - 1$, un único $\pi \in \Pi_n$ y una única familia $(P_i \mid i \in n) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^n$, o bien $\varphi = (\neg)\psi$, para una única fórmula ψ, o bien $\varphi = (\wedge)\psi\xi$, para un único par de fórmulas ψ y ξ, o bien $\varphi = (\vee)\psi\xi$, para un único par de fórmulas ψ y ξ, o bien $\varphi = (\rightarrow)\psi\xi$, para un único par de fórmulas ψ y ξ, o bien $\varphi = (\forall v_n)\psi$, para un único $n \in \mathbb{N}$ y una única fórmula ψ.

Para abreviar, convenimos en denotar $(P_0 = P_1)$, resp., $(\pi(P_0, \ldots P_{n-1}))$, $(\neg)\psi$, $(\wedge)\psi\xi$, $(\vee)\psi\xi$, $(\rightarrow)\psi\xi$ y $(\forall v_n)\psi$ por $P_0 = P_1$, resp., $\pi(P_0, \ldots P_{n-1})$, $\neg\psi$, $\psi \wedge \xi$, $\psi \vee \xi$, $\psi \rightarrow \xi$ y $\forall v_n \psi$.

Los miembros de $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, y en particular los de $\mathrm{At}(\mathcal{L})$, i.e., tanto las fórmulas, como las fórmulas atómicas, denotan relaciones, esencialmente, finitarias, que se realizan como tales sobre conjuntos que estén dotados de una estructura de $\mathbf{\Lambda}$-álgebra.

En virtud de la definición del conjunto de las $\mathcal{L}$-fórmulas, como el conjunto subyacente de la $\mathbf{\Lambda}$-álgebra libre sobre el conjunto $\mathrm{At}(\mathcal{L})$, disponemos de un principio de demostración por inducción algebraica y de un principio de definición por recursión algebraica sobre las $\mathcal{L}$-fórmulas.

Corolario 5.193. *Sea* $F \subseteq \mathrm{W}_{\mathbf{\Lambda}}(\mathrm{At}(\mathcal{L}))$. *Si* F *es un cerrado de la* $\mathbf{\Lambda}$-*álgebra* $\mathbf{W}_{\mathbf{\Lambda}}(\mathrm{At}(\mathcal{L}))$ *y además* $\{\, (\varphi) \mid \varphi \in \mathrm{At}(\mathcal{L})\} \subseteq F$, *entonces* $\mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \subseteq F$.

Corolario 5.194. *El par ordenado* $(\eta_{\mathrm{At}(\mathcal{L})}, \mathbf{Fm}(\mathcal{L}))$ *en el que* $\eta_{\mathrm{At}(\mathcal{L})}$ *es la única aplicación de* $\mathrm{At}(\mathcal{L})$ *en* $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{At}(\mathcal{L}) \arrow[ddl, "\eta_{\mathrm{At}(\mathcal{L})}"'] \arrow[d, "\mathrm{in}_{\mathrm{At}(\mathcal{L})}"] \\
 & \Lambda \coprod \mathrm{At}(\mathcal{L}) \arrow[d, "\eta_{\Lambda \coprod \mathrm{At}(\mathcal{L})}"] \\
\mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}"'] & \mathrm{Ml}(\Lambda \coprod \mathrm{At}(\mathcal{L}))
\end{tikzcd}$$

conmuta, tiene la propiedad de que, para cada $\mathbf{\Lambda}$-*algebra* $\mathbf{A}$ *y cada aplicación* $f\colon \mathrm{At}(\mathcal{L}) \longrightarrow A$, *existe un único homomorfismo* $f^\sharp$ *de* $\mathbf{Fm}(\mathcal{L})$ *en* $\mathbf{A}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{At}(\mathcal{L}) \arrow[r, "\eta_{\mathrm{At}(\mathcal{L})}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \arrow[d, "f^\sharp"] \\
 & A
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Definición 5.195. Denotamos por $\mathrm{Var}_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}$ el único homomorfismo de $\mathbf{Fm}(\mathcal{L})$ en $\mathbf{Fin}_{\mathbf{\Lambda}}(V)$ tal que, para cada $\varphi \in \mathrm{At}(\mathcal{L})$, $\mathrm{Var}_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}((\varphi)) = \mathrm{Var}_{\mathrm{At}(\mathcal{L})}(\varphi)$, siendo $\mathbf{Fin}_{\mathbf{\Lambda}}(V)$ la $\mathbf{\Lambda}$-álgebra cuyo conjunto subyacente es $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(V)$ y en la que las operaciones estructurales son:

1. $F_{\neg} = \mathrm{id}_{\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(V)}$.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_{\forall v_n} = \cup \circ \langle \kappa_{\{v_n\}}, \mathrm{id}_{\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(V)} \rangle$.
3. $F_\vee = F_\wedge = F_\rightarrow = \cup$.

A continuación vamos a dotar al conjunto $2 = \{0, 1\}$ de una estructura de $\mathbf{\Lambda}$-álgebra que nos permitirá, en última instancia, definir el conjunto de las variables libres de una fórmula, conjunto del cual haremos uso cuando definamos la relación en un sistema algebraico asociada a la misma.

Definición 5.196. Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces denotamos por $\mathbf{2}_{v_n}$ la $\mathbf{\Lambda}$-álgebra cuyo conjunto subyacente es 2 y en la que las operaciones estructurales son:

1. $F_\neg = \mathrm{id}_2$.
2. Para cada $m \in \mathbb{N} - \{n\}$, $F_{\forall v_m} = \mathrm{id}_2$.
3. $F_{\forall v_n} = \kappa_0$.
4. $F_\vee = F_\wedge = F_\rightarrow = \text{máx}$.

Entonces denotamos por Foc_{v_n} el único homomorfismo de $\mathbf{Fm}(\mathcal{L})$ en $\mathbf{2}_{v_n}$ tal que, para cada $\mathcal{L}$-fórmula atómica $\varphi \in \mathrm{At}(\mathcal{L})$, $\mathrm{Foc}_{v_n}((\varphi)) = 1$ precisamente si $v_n \in \mathrm{Var}_{\mathrm{At}(\mathcal{L})}(\varphi)$. Además, denotamos por Foc el subconjunto de $V \times \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ definido como:

$$\mathrm{Foc} = \{ (v_n, \varphi) \in V \times \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \mid \mathrm{Foc}_{v_n}(\varphi) = 1 \}.$$

Si entre la variable individual v_n y la $\mathcal{L}$-fórmula φ se da la relación Foc, entonces decimos que la variable individual v_n *ocurre libre* en la $\mathcal{L}$-fórmula φ.

Definición 5.197. Denotamos por $\mathrm{Fvar}_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}$ la aplicación de $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ en $\mathrm{Fin}_{\mathbf{\Lambda}}(V)$ que a una fórmula φ le asigna:

$$\mathrm{Fvar}_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}(\varphi) = \{ v_n \in \mathrm{Var}_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}(\varphi) \mid (v_n, \varphi) \in \mathrm{Foc} \}.$$

A los elementos del conjunto $\mathrm{Fvar}_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}(\varphi)$ los denominamos las variables *libres* de la fórmula φ.

Definición 5.198. El conjunto de las *$\mathcal{L}$-fórmulas cerradas*, denotado por $\mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, es:

$$\mathrm{Sent}(\mathcal{L}) = \{ \varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \mid \mathrm{Fvar}_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}(\varphi) = \varnothing \}.$$

5.13. El concepto de verdad de Tarski. Para una signatura de primer orden $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$ y un sistema algebraico $\mathbf{A} = (A, F, R)$, una vez dotado el conjunto $\mathrm{Sub}(A^{\mathbb{N}})$ de una estructura de $\mathbf{\Lambda}$-álgebra, definimos, haciendo uso del principio de la definición por recursión algebraica, la relación, de rango $\mathbb{N}$, en A asociada a una fórmula. Entonces, una vez definida la relación ternaria de satisfacibilidad entre sistemas algebraicos, fórmulas y valoraciones de las variables, definimos la relación binaria de validez entre sistemas algebraicos y fórmulas, obteniendo de este modo una conexión de Galois contravariante para la lógica de predicados de primer orden con igualdad. También definimos la noción de diagrama de un sistema algebraico y demostramos que los modelos del diagrama de un sistema algebraico, son los sistemas algebraicos en los que tal sistema algebraico se puede encajar. Por último, demostramos que toda fórmula es semánticamente equivalente a una fórmula prenexa.

Definición 5.199. Sea A un conjunto, $a \in A$, $n \in \mathbb{N}$ y $x\colon \mathbb{N} \longrightarrow A$. Entonces $x^{(n|a)}$ denota la aplicación de $\mathbb{N}$ en A definida como:

$$x^{(n|a)} \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow A \\ m \longmapsto x^{(n|a)}(m) = \begin{cases} x(m), & \text{si } m \in \mathbb{N} - \{n\}; \\ a, & \text{si } m = n. \end{cases} \end{cases}$$

Así pues, la aplicación $x^{(n|a)}$ coincide con x en $\mathbb{N} - \{n\}$ y en n toma como valor a.

Definición 5.200. Sea $\mathbf{A} = (A, F, R)$ un sistema algebraico y $P \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})$. Entonces denotamos por $P^{\mathbf{A}}$ la imagen bajo $\mathrm{Pd}_{\omega,\mathbf{A}}$ de P, y lo denominamos el *polinomio determinado* por (el símbolo de operación polinómica) P en $\mathbf{A}$, siendo $\mathrm{Pd}_{\omega,\mathbf{A}}$ el único homomorfismo de la $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{Tm}(\mathcal{L})$ en la $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra $(A, F)^{A^{\mathbb{N}}}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Pd}_{\omega,\mathbf{A}}((v_n)) = \mathrm{pr}_{\mathbb{N},n}$, i.e., tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[dr, "(\mathrm{pr}_{\mathbb{N},n})_{n\in\mathbb{N}}"'] & \mathrm{Tm}(\mathcal{L}) \arrow[d, "\mathrm{Pd}_{\omega,\mathbf{A}}"] \\ & A^{A^{\mathbb{N}}} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Proposición 5.201. *Sea* $\mathbf{A}$ *un sistema algebraico ,* $x, y \in A^{\mathbb{N}}$*,* $P \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})$ *y* $\mathrm{Var}(P) = \{\, v_{n_\alpha} \mid \alpha \in p \,\}$*. Si, para cada* $\alpha \in p$*,* $x(n_\alpha) = y(n_\alpha)$*, entonces* $P^{\mathbf{A}}(x) = P^{\mathbf{A}}(y)$*.*

Demostración. □

Definición 5.202. Sea $\mathbf{A}$ un sistema algebraico, $P \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(V)$ y $n(P) = \min\{\, n \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Var}(P) \subseteq \downarrow v_n \,\}$. Entonces $P^{n(P),\mathbf{A}}$ denota la operación $n(P)$-aria sobre A que a un $x \in A^{n(P)}$ le asigna $P^{n(P),\mathbf{A}}(x) = P^{\mathbf{A}}(y)$, siendo y cualquier miembro de $A^{\mathbb{N}}$ tal que $y{\restriction}n(P) = x$.

Definición 5.203 (Tarski)**.** Sea $\mathbf{A}$ un sistema algebraico. Entonces

1. Denotamos por $\mathbf{Sub}_{\boldsymbol{\Lambda}}(A^{\mathbb{N}})$ la $\boldsymbol{\Lambda}$-álgebra cuyas operaciones estructurales están definidas como:
   a)
   $$F_{\neg}\begin{cases} \mathrm{Sub}(A^{\mathbb{N}}) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A^{\mathbb{N}}) \\ \quad \mathcal{X} \quad\longmapsto F_{\neg}(\mathcal{X}) = A^{\mathbb{N}} - \mathcal{X}. \end{cases}$$
   b)
   $$F_{\forall v_n}\begin{cases} \mathrm{Sub}(A^{\mathbb{N}}) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A^{\mathbb{N}}) \\ \quad \mathcal{X} \quad\longmapsto F_{\forall v_n}(\mathcal{X}) = \{\, y \in A^{\mathbb{N}} \mid \forall a \in A\, (y^{(n|a)} \in \mathcal{X}) \,\}. \end{cases}$$
   c)
   $$F_{\wedge}\begin{cases} \mathrm{Sub}(A^{\mathbb{N}})^2 \longrightarrow \mathrm{Sub}(A^{\mathbb{N}}) \\ \quad \mathcal{X} \quad\longmapsto F_{\wedge}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}. \end{cases}$$
   d)
   $$F_{\vee}\begin{cases} \mathrm{Sub}(A^{\mathbb{N}})^2 \longrightarrow \mathrm{Sub}(A^{\mathbb{N}}) \\ \quad \mathcal{X} \quad\longmapsto F_{\vee}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}. \end{cases}$$
   e)
   $$F_{\rightarrow}\begin{cases} \mathrm{Sub}(A^{\mathbb{N}})^2 \longrightarrow \mathrm{Sub}(A^{\mathbb{N}}) \\ \quad \mathcal{X} \quad\longmapsto F_{\rightarrow}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = (A^{\mathbb{N}} - \mathcal{X}) \cup \mathcal{Y}. \end{cases}$$
2. Denotamos por $\mathrm{Rd}_{\omega,\mathbf{A}}$ el único homomorfismo de la $\boldsymbol{\Lambda}$-álgebra libre $\mathbf{Fm}(\mathcal{L})$ en la $\boldsymbol{\Lambda}$-álgebra $\mathbf{Sub}_{\boldsymbol{\Lambda}}(A^{\mathbb{N}})$ tal que a cada $\mathcal{L}$-fórmula atómica de la forma $P = Q$, con $P, Q \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})$, le asigna
   $$\mathrm{Rd}_{\omega,\mathbf{A}}(P = Q) = \mathrm{Eq}(P^{\mathbf{A}}, Q^{\mathbf{A}})$$
   y a cada $\mathcal{L}$-fórmula atómica de la forma $\pi(P_i \mid i \in n)$, siendo $\pi \in \Pi$ tal que $\mathrm{rk}(\pi) = n$ y $(P_i \mid i \in n) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^n$, le asigna
   $$\mathrm{Rd}_{\omega,\mathbf{A}}(\pi(P_i \mid i \in n)) = \{\, x \in A^{\mathbb{N}} \mid (P_i^{\mathbf{A}}(x) \mid i \in n) \in R_\pi \,\}.$$

Al valor de $\mathrm{Rd}_{\omega,\mathbf{A}}$ en una $\mathcal{L}$-fórmula φ, que es un subconjunto de $A^{\mathbb{N}}$, lo denominamos la *relación determinada* por φ en $\mathbf{A}$ y lo denotamos por $\varphi^{\mathbf{A}}$.

A partir del homomorfismo $\mathrm{Rd}_{\omega,\mathbf{A}}$ de la $\mathbf{\Lambda}$-álgebra libre $\mathbf{Fm}(\mathcal{L})$ en la $\mathbf{\Lambda}$-álgebra $\mathbf{Sub}_{\mathbf{\Lambda}}(A^{\mathbb{N}})$ definimos la relación ternaria de satisfacibilidad entre sistemas algebraicos, fórmulas y valoraciones de las variables.

Definición 5.204 (Tarski)**.** Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Entonces la relación de *satisfacibilidad* entre sistemas algebraicos, fórmulas y valoraciones de las variables, a la que denotamos por $\cdot \models_{\mathcal{L}} \cdot[\cdot]$, es la definida como:

$$\cdot \models_{\mathcal{L}} \cdot[\cdot] = \{\, (\mathbf{A}, \varphi, x) \in \textstyle\bigcup_{\mathbf{A}\in\mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Pi})}\{\mathbf{A}\} \times \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \times A^{\mathbb{N}} \mid x \in \varphi^{\mathbf{A}} \,\}.$$

Convenimos que $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x]$ significa que el triplo $(\mathbf{A}, \varphi, x) \in \bigcup_{\mathbf{A}\in\mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Pi})}\{\mathbf{A}\} \times \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \times A^{\mathbb{N}}$ está en $\cdot \models_{\mathcal{L}} \cdot[\cdot]$, y decimos, en ese caso, que la valoración x satisface a φ en $\mathbf{A}$.

Definición 5.205 (Tarski)**.** Sea $\mathbf{A}$ un sistema algebraico, $x \in A^{\mathbb{N}}$ y $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$.

1. Decimos que la fórmula φ es *satisfacible* en $\mathbf{A}$ si existe un $x \in A^{\mathbb{N}}$ tal que $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x]$, i.e., si $\varphi^{\mathbf{A}} \neq \varnothing$.
2. La fórmula φ es *satisfacible* si existe un sistema algebraico $\mathbf{A}$ tal que φ es satisfacible en $\mathbf{A}$.
3. Un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas Φ es *satisfacible* si existe un sistema algebraico $\mathbf{A}$ y un $x \in A^{\mathbb{N}}$ tal que, para cada $\varphi \in \Phi$, $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x]$.

Sea $\mathbf{A}$ un sistema algebraico, $P, Q \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})$, $\varphi, \psi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, $n \in \mathbb{N}$ y $x \in A^{\mathbb{N}}$. Entonces:

1. $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} P = Q[x]$ precisamente si $x \in \mathrm{Eq}(P^{\mathbf{A}}, Q^{\mathbf{A}})$.
2. $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \pi(P_i \mid i \in n)[x]$ precisamente si $(P_i^{\mathbf{A}}(x) \mid i \in n) \in R_\pi$.
3. $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \neg\varphi[x]$ si y sólo si no ocurre que $\mathbf{A} \models_{\mathcal{S}} \varphi[x]$.
4. $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi \wedge \psi[x]$ si y sólo si $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x]$ y $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \psi[x]$.
5. $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi \vee \psi[x]$ si y sólo si $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x]$ o $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \psi[x]$.
6. $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi[x]$ si y sólo si no es el caso que $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x]$ o $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \psi[x]$.
7. $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \forall v_n\varphi[x]$ exactamente si, para cada $a \in A$, $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x^{(n|a)}]$.
8. $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\varphi[x]$ exactamente si, existe un $a \in A$ tal que $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x^{(n|a)}]$.

Proposición 5.206. *Sea* $\mathbf{A}$ *un sistema algebraico,* $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$*,* $x, y \in A^{\mathbb{N}}$ *y* $\mathrm{Fvar}(\varphi) = \{\, v_{n_\alpha} \mid \alpha \in p \,\}$*. Si, para cada* $\alpha \in p$*,* $x(n_\alpha) = y(n_\alpha)$*, entonces* $x \in \varphi^{\mathbf{A}}$ *si y sólo si* $y \in \varphi^{\mathbf{A}}$*, i.e.,* $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x]$ *precisamente si* $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[y]$*. En particular, si* $\varphi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$*, entonces o bien* $\varphi^{\mathbf{A}} = A^{\mathbb{N}}$ *o bien* $\varphi^{\mathbf{A}} = \varnothing$*, i.e., o bien, para cada* $x \in A^{\mathbb{N}}$*,* $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x]$ *o bien, para cada* $x \in A^{\mathbb{N}}$*,* $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \neg\varphi[x]$*.*

Demostración. □

Definición 5.207. Sea $\mathbf{A}$ un sistema algebraico, $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ y $n(\varphi) = \min\{\, n \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Fvar}(\varphi) \subseteq \downarrow v_n \,\}$. Entonces $\varphi^{n(\varphi),\mathbf{A}}$ denota la relación $n(P)$-aria sobre A definida como:

$$\varphi^{n(\varphi),\mathbf{A}} = \{\, x \in A^{n(\varphi)} \mid \exists y \in A^{\mathbb{N}}\ (y{\restriction}n(\varphi) = x \ \ \&\ \ y \in \varphi^{\mathbf{A}}) \,\}.$$

Si $x \in \varphi^{n(\varphi),\mathbf{A}}$, decimos que x *satisface* a φ en $\mathbf{A}$ y lo denotamos por $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[[x]]$.

Definición 5.208. Sea $\mathbf{A}$ un sistema algebraico, $n \in \mathbb{N} - 1$ y $R \subseteq A^n$. Decimos que R es *definible* en $\mathbf{A}$ si hay una fórmula φ tal que $\mathrm{Fvar}(\varphi) \subseteq \downarrow v_n$ y $\varphi^{n(\varphi),\mathbf{A}} = R$.

Proposición 5.209. *Sea* $n \in \mathbb{N} - 1$ *y* $\mathbf{A}$ *un sistema algebraico. Entonces el conjunto* $\mathrm{Def}_n(\mathbf{A})$ *de las relaciones de rango* n *definibles en* $\mathbf{A}$ *está cerrado bajo la unión binaria, intersección binaria y complementación. Además,* $\varnothing$ *y* $A^n \in \mathrm{Def}_n(\mathbf{A})$*. Por lo tanto* $\mathbf{Def}_n(\mathbf{A}) = (\mathrm{Def}_n(\mathbf{A}), \cup, \cap, \complement, \varnothing, A^n)$ *es un álgebra booleana.*

Demostración. □

Definición 5.210. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Entonces la relación de *validez* entre sistemas algebraicos y fórmulas, a la que denotamos por $\models_{\mathcal{L}}$, es la definida como:

$$\models_{\mathcal{L}} = \{\, (\mathbf{A}, \varphi) \in \mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi}) \times \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \mid \forall x \in A^{\mathbb{N}}\, (\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x]) \,\}.$$

Convenimos que $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi$ significa que el par $(\mathbf{A}, \varphi) \in \mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi}) \times \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ está en $\models_{\mathcal{L}}$, y decimos, en ese caso, que la fórmula φ es *verdadera* en $\mathbf{A}$ o que $\mathbf{A}$ es un *modelo* de φ; además, decimos que una fórmula φ es *universalmente válida* si, para cada sistema algebraico $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi$. Entonces el triplo ordenado $(\mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi}), \mathrm{Fm}(\mathcal{L}), \models_{\mathcal{L}})$ es el *contexto de Galois de la $\mathcal{L}$-lógica de predicados de primer orden con igualdad* y a la situación de Galois contravariante $(\mathbf{Sub}(\mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})), \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}, \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}, \mathbf{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L})))$, asociada al anterior contexto de Galois, la denominamos la *situación de Galois contravariante de la $\mathcal{L}$-lógica de predicados de primer orden con igualdad.*

La aplicación $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}$ asigna a cada conjunto A de sistemas algebraicos, el conjunto de fórmulas $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$ definido como:

$$\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(\mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L})) \\ \qquad \mathsf{A} \qquad\qquad \longmapsto \{\, \varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \mid \forall \mathbf{A} \in \mathsf{A}\, (\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi) \,\}, \end{cases}$$

de modo que $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$ es el conjunto de las fórmulas válidas, o verdaderas, en A. A cualquier fórmula *cerrada* de $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$ la denominamos un *teorema* de A y al conjunto de los teoremas de A, i.e., a $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}) \cap \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, lo denotamos por $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$.

La aplicación $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}$ asigna a cada conjunto Φ de fórmulas, el conjunto de sistemas algebraicos $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)$ definido como:

$$\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L})) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})) \\ \qquad \oplus \qquad\quad \longmapsto \{\, \mathbf{A} \in \mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi}) \mid \forall \varphi \in \Phi\, (\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi) \,\}. \end{cases}$$

A cualquier sistema algebraico de $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)$ lo denominamos *modelo* de Φ.

Decimos que un conjunto A de sistemas algebraicos es *axiomatizable* si hay un conjunto de *fórmulas cerradas* Φ tal que $\mathsf{A} = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)$, en cuyo caso decimos que Φ es un conjunto de *axiomas* de $\mathcal{A}$. Si Φ es finito, entonces decimos que A es *finitamente axiomatizable.* Decimos que un conjunto de fórmulas Φ está *modelísticamente cerrado* si hay un conjunto de sistemas algebraicos A tal que $\Phi = \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$.

Proposición 5.211. *Para el contexto de Galois* $(\mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi}), \mathrm{Fm}(\mathcal{L}), \models_{\mathcal{L}})$*, dados* $\mathsf{A}, \mathsf{A}' \subseteq \mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$*, una familia no vacía* $(\mathsf{A}_i \mid i \in I)$ *de subconjuntos de* $\mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$*,* $\Phi, \Phi' \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ *y una familia no vacía* $(\Phi_i \mid i \in I)$ *de subconjuntos de* $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ *se cumple que:*

1. $\mathsf{A} \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}))$.
2. $\Phi \subseteq \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))$.
3. *Si* $\mathsf{A} \subseteq \mathsf{A}'$*, entonces* $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}') \subseteq \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$.
4. *Si* $\Phi \subseteq \Phi'$*, entonces* $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi') \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)$.
5. $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}) = \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})))$.
6. $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi')))$.
7. $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}\big(\bigcup_{i \in I} \mathsf{A}_i\big) = \bigcap_{i \in I} \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}_i)$.
8. $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}\big(\bigcup_{i \in I} \Phi_i\big) = \bigcap_{i \in I} \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi_i)$.

Demostración. □

Definición 5.212. Sea $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tal que $\mathrm{Fvar}(\varphi) = \{\, v_{n_\alpha} \mid \alpha \in p \,\}$. Una *clausura universal* de φ es cualquier fórmula de la forma $\forall v_{n_{\sigma(0)}} \ldots v_{n_{\sigma(p-1)}} \varphi$, para alguna permutación $(\sigma(\alpha) \mid \alpha \in p)$ de p. A cualquiera de ellas la denotamos por $\mathrm{cl}_{\forall}(\varphi)$.

Proposición 5.213. *Sea* $\mathbf{A}$ *un sistema algebraico y* $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ *tal que* $\mathrm{Fvar}(\varphi) = \{ v_{n_\alpha} \mid \alpha \in p \}$*. Entonces* $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi$ *si y sólo si* $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \mathrm{cl}_\forall(\varphi)$*.*

Demostración. □

Lema 5.214. *Para cada* $\mathsf{A} \subseteq \mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$*, se cumple que*

$$\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}) = \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}))).$$

Demostración. Puesto que $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$ está incluido en $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$, ya que, por definición, $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}) = \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}) \cap \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, y por ser $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}$ antítona, tenemos que

$$\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})) \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})),$$

luego, por ser $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}$ antítona, se cumple que

$$\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}))) \subseteq \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}))),$$

pero $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}) = \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})))$, por lo tanto

$$\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}))) \subseteq \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}).$$

Demostramos por último que $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})))$. Sea $\varphi \in \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$. Para demostrar que $\varphi \in \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})))$ hemos de establecer que, para cada $\mathbf{B} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}))$, $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \varphi$. Sea pues $\mathbf{B} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}))$ i.e., $\mathbf{B}$ cumple que

$$\forall \psi \,((\psi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L}) \;\;\&\;\; (\forall \mathbf{A} \in \mathcal{A}\,(\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \psi))) \to \mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \psi),$$

entonces, ya que $\mathrm{cl}_\forall(\varphi) \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$ y, para cada $\mathbf{A} \in \mathsf{A}$, $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \mathrm{cl}_\forall(\varphi)$, porque $\varphi \in \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$ y en virtud de la proposición 5.213, tenemos que $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \mathrm{cl}_\forall(\varphi)$, luego, por la misma proposición, $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \varphi$. Por lo tanto

$$\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}) \subseteq \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}))).$$

□

Lema 5.215. *Para cada* $\Phi \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$*, se cumple que*

$$\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))).$$

Demostración. Puesto que $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))$ está incluido en $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))$, ya que, por definición $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)) = \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)) \cap \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, y por ser $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}$ antítona, tenemos que

$$\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))) \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))),$$

pero $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)))$, por lo tanto

$$\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))).$$

Demostramos por último que $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))) \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)$. Sea pues $\mathbf{A}$ un modelo de $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))$ i.e., $\mathbf{A}$ cumple que

$$\forall \psi \,((\psi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L}) \;\;\&\;\; (\forall \mathbf{C} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)\,(\mathbf{C} \models_{\mathcal{L}} \psi))) \to \mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \psi),$$

entonces, dado un $\varphi \in \Phi$, ya que $\mathrm{cl}_\forall(\varphi) \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$ y, para cada $\mathbf{C} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)$, se cumple, en virtud de la proposición 5.213, que $\mathbf{C} \models_{\mathcal{L}} \mathrm{cl}_\forall(\varphi)$, tenemos que $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \mathrm{cl}_\forall(\varphi)$, luego, por la misma proposición, $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi$. Por lo tanto

$$\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))) \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi).$$

□

Proposición 5.216. *El conjunto*

$$\mathrm{Im}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}) = \{\, \Phi \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \mid \exists \mathsf{A} \subseteq \mathbf{SAlg}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Pi})\, (\Phi = \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}))\,\},$$

de todos los conjuntos de fórmulas modelísticamente cerrados, es un sistema de clausura y es isomorfo al conjunto

$$\mathrm{Im}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}{\restriction}\mathrm{Sub}(\mathrm{Sent}(\mathcal{L}))) = \{\, \mathsf{A} \subseteq \mathbf{SAlg}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Pi}) \mid \exists \Phi \subseteq \mathrm{Sent}(\mathcal{L})\, (\mathsf{A} = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))\,\},$$

de todos los conjuntos de sistemas algebraicos axiomatizables.

Demostración. Veamos que el conjunto $\mathrm{Im}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}})$ es un sistema de clausura sobre $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$. Se cumple que $\mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \in \mathrm{Im}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}})$ porque, para $\mathsf{A} = \varnothing$, $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\varnothing) = \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$. Además, si $(\Phi_i \mid i \in I)$ es una familia no vacía en $\mathrm{Im}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}})$, entonces $\bigcap_{i\in I} \Phi_i \in \mathrm{Im}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}})$, porque, para cada $i \in I$, existe un subconjunto A_i de $\mathbf{SAlg}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Pi})$ tal que $\Phi_i = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}_i)$ y $\bigcap_{i\in I} \Phi_i = \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\bigcup_{i\in I} \mathsf{A}_i)$.

Para establecer que el conjunto de todos los conjuntos de fórmulas modelísticamente cerrados es isomorfo al conjunto de todos los conjuntos de sistemas algebraicos axiomatizables, es suficiente tomar en consideración que las aplicaciones:

$$\mathrm{M}_{\mathcal{L}} \begin{cases} \mathrm{Im}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}) & \longrightarrow \mathrm{Im}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}{\restriction}\mathrm{Sub}(\mathrm{Sent}(\mathcal{L}))) \\ \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}) & \longmapsto \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})) \end{cases}$$

y

$$\mathrm{V}_{\mathcal{L}} \begin{cases} \mathrm{Im}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}{\restriction}\mathrm{Sub}(\mathrm{Sent}(\mathcal{L}))) & \longrightarrow \mathrm{Im}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}) \\ \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) & \longmapsto \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)) \end{cases}$$

son inversas una de otra, debido a los lemas 5.214 y 5.215. □

En la próxima sección, cuando dispongamos del teorema de Łoś, demostraremos que $\mathrm{Im}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}})$, y por lo tanto $\mathrm{Im}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}{\restriction}\mathrm{Sub}(\mathrm{Sent}(\mathcal{L})))$, es un sistema de clausura algebraico.

Tal como señala Cohn en [**?**], la anterior conexión de Galois se puede usar, bien para estudiar las fórmulas a través de sus modelos, bien para estudiar los sistemas algebraicos mediante sus teoremas. Sin embargo, este método tiene ciertas limitaciones; porque no nos permite distinguir entre dos fórmulas que tengan los mismos modelos, ni entre dos sistemas algebraicos que tengan los mismos teoremas.

Esto conduce a definir dos relaciones de equivalencia, una sobre el conjunto de las fórmulas y otra sobre el conjunto de los sistemas algebraicos. Nos ocupamos ahora de la primera relación de equivalencia, y para ello, pero no sólo para ello, definimos la relación de consecuencia semántica entre conjuntos de fórmulas y fórmulas.

Definición 5.217. La *relación de consecuencia semántica* entre los conjuntos de fórmulas y las fórmulas, denotada por $\Vdash_{\mathcal{L}}$, es el subconjunto de $\mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L}))\times\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ que consta de los pares (Γ, φ) tales que, para cada sistema algebraico $\mathbf{A}$ y cada $x \in A^{\mathbb{N}}$, si, para cada $\gamma \in \Gamma$, $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \gamma[x]$, entonces $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x]$.

Si $\Gamma \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, decimos que φ es *consecuencia semántica* de Γ. En particular, si $\{\psi\} \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, denotado simplemente por $\psi \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, entonces decimos que φ es *consecuencia semántica* de ψ y si tanto $\psi \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ como $\varphi \Vdash_{\mathcal{L}} \psi$, situación que denotamos por $\varphi \approx_{\mathcal{L}} \psi$, que φ y ψ son *semánticamente equivalentes.*

Si $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, entonces

$$\Gamma \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi \,\text{si y sólo si}\, \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Gamma) \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\varphi).$$

Proposición 5.218. *La endoaplicación* $\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}$ *de* $\mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L}))$ *definida como*

$$\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L})) & \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L})) \\ \Gamma & \longmapsto \{\, \varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \mid \Gamma \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi \,\}, \end{cases}$$

es un operador clausura sobre $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$.

Demostración. □

Si $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, entonces

$$\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma) \cap \mathrm{Sent}(\mathcal{L}) = \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Gamma)).$$

Definición 5.219. Una *$\mathcal{L}$-teoría* o también, para abreviar, una *teoría*, es un subconjunto Γ de $\mathrm{Sent}(\mathcal{L})$ tal que, para cada $\varphi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, si $\Gamma \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, entonces $\varphi \in \Gamma$

Si $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, entonces Γ es una teoría precisamente si $\Gamma = \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma)$.

Proposición 5.220. *Para cada conjunto de sistemas algebraicos* A*,* $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$ *es una teoría. En particular, para cada sistema algebraico* $\mathbf{A}$*,* $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A})$ *es una teoría.*

Demostración. □

Teorema 5.221 (Herbrand-Tarski)**.** *Sea* $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ *y* $\varphi, \psi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$*. Entonces* $\Gamma \cup \{\varphi\} \Vdash_{\mathcal{L}} \psi$ *exactamente si* $\Gamma \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi \rightarrow \psi$

Demostración. □

Proposición 5.222. *Una condición necesaria y suficiente para que dos fórmulas cerradas* φ *y* ψ *sean semánticamente equivalentes es que* $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\varphi) = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\psi)$*. Por lo tanto* $\approx_{\mathcal{L}}$*, es una relación de equivalencia sobre* $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$*. Además, la relación* $\approx_{\mathcal{L}}$ *retringida al subconjunto* $\mathrm{Sent}(\mathcal{L})$ *de* $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ *es compatible con los operadores booleanos y el conjunto cociente* $\mathrm{Sent}(\mathcal{L})/\approx_{\mathcal{L}}$ *está dotado de una estructura de álgebra booleana, a la que denotamos por* $\mathbf{LT}(\mathcal{L})$ *y denominamos el álgebra de* Lindenbaum-Tarski *de la lógica de predicados de primer orden. Por último, cada elemento de* $\mathrm{LT}(\mathcal{L})$ *determina un conjunto finitamente axiomatizable, siendo tal asociación inyectiva.*

Demostración. □

5.14. Extensiones y equivalencias elementales.

> The "objects" of model theory are the structures. The "maps" of first order model theory are not the monomorphisms, which preserve merely the atomic structural properties, but rather the elementary monomorphisms, which preserve all first order properties.
>
> *G. Sacks.*

Definimos la relación de equivalencia elemental y la de encajamiento elemental entre sistemas algebraicos y estudiamos tanto las propiedades de las mismas, como las relaciones que subsisten entre ellas y la relación de isomorfía. Además, demostramos el teorema de Tarski-Vaught sobre la clausura del conjunto de los sistemas algebraicos, relativos a una signatura de primer orden, arbitraria pero fija, respecto de la unión de cadenas ascendentes de sistemas algebraicos, en las que cada término de la cadena es un subsistema elemental de su sucesor, el teorema de Tarski-Vaught sobre la caracterización de los subsistemas elementales, el teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente y ascendente, el teorema de Łoś y el teorema de compacidad. Además, dotamos al conjunto de los conjuntos axiomatizables minimales de una estructura de espacio topológico compacto, Hausdorff y cero-dimensional y demostramos un teorema de Taimanov que caracteriza el operador clausura, en el espacio topológico mencionado, mediante la noción de ultraproducto.

Definición 5.223 (Tarski)**.** Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos sistemas algebraicos. Decimos que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son *elementalmente equivalentes*, y lo denotamos por $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$, si, para cada $\varphi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, si $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi$, entonces $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \varphi$.

La definición de equivalencia elemental entre dos sistemas algebraicos puede parecer asimétrica, pero no es ése el caso, como pone de manifiesto el siguiente corolario.

Corolario 5.224. *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *dos sistemas algebraicos. Entonces* $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ *precisamente si, para cada* $\varphi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi$, *si y sólo si* $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \varphi$ *o, lo que es equivalente, exactamente si* $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A}) = \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{B})$. *Por consiguiente, la relación binaria* $\equiv$ *en* $\mathsf{SAlg}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Pi})$ *es simétrica. Además,* $\equiv$ *es reflexiva y transitiva, por lo tanto, es una relación de equivalencia sobre* $\mathsf{SAlg}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Pi})$ *y es menos fina que la relación de isomorfía* $\cong$ *sobre el mismo conjunto, i.e.,* $\cong \subseteq \equiv$.

Demostración. □

Definición 5.225. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos sistemas algebraicos. Un *encajamiento elemental* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ es un triplo ordenado $(\mathbf{A}, f, \mathbf{B})$, abreviado como f y denotado por $f\colon \mathbf{A} \rightarrowtail \mathbf{B}$, en el que f es una aplicación de A en B tal que, para cada fórmula φ y cada $x \in A^{\mathbb{N}}$, $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x]$ exactamente si $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \varphi[f \circ x]$, i.e., $x \in \varphi^{\mathbf{A}}$ sí y sólo si $f \circ x \in \varphi^{\mathbf{B}}$.

Proposición 5.226. *Si* $f\colon \mathbf{A} \rightarrowtail \mathbf{B}$ *es un encajamiento elemental, entonces* f *es un encajamiento de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{B}$.

Demostración. □

Proposición 5.227.

1. *Si* $f\colon \mathbf{A} \rightarrowtail \mathbf{B}$ *y* $g\colon \mathbf{B} \rightarrowtail \mathbf{C}$ *son encajamientos elementales, entonces también lo es* $g \circ f\colon \mathbf{A} \rightarrowtail \mathbf{C}$.
2. *Si* $g \circ f\colon \mathbf{A} \rightarrowtail \mathbf{C}$ *y* $g\colon \mathbf{B} \rightarrowtail \mathbf{C}$ *son encajamientos elementales, entonces también lo es* $f\colon \mathbf{A} \rightarrowtail \mathbf{B}$.
3. $\mathrm{id}_{\mathbf{A}}$ *es un encajamiento elemental.*
4. *Si* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *es un isomorfismo, entonces también es un encajamiento elemental.*
5. *Si* $f\colon \mathbf{A} \rightarrowtail \mathbf{B}$ *es un encajamiento elemental, entonces* $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

Demostración. □

Definición 5.228 (Tarski)**.** Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos sistemas algebraicos. Decimos que $\mathbf{A}$ es un *subsistema elemental* de $\mathbf{B}$, y lo denotamos por $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{B}$, si $A \subseteq B$ y si $\mathrm{in}_{\mathbf{A}}$ es un encajamiento elemental de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$.

Proposición 5.229. *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *dos sistemas algebraicos. Si* $\mathbf{A}$ *es un subsistema elemental de* $\mathbf{B}$, *entonces* $\mathbf{A}$ *es un subsistema de* $\mathbf{B}$ *y* $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

Demostración. □

Los grupos $\mathbf{Z} = (Z, +, -, 0)$ y $\mathbf{P} = (P, +, -, 0)$, siendo P el conjunto de los números enteros pares, son isomorfos, luego son elementalmente equivalentes; pero $\mathbf{P}$, que es un subgrupo de $\mathbf{Z}$, *no es un subsistema elemental* de $\mathbf{Z}$ (esto no entra en contradicción con el que todo isomorfismo sea un encajamiento elemental, porque las inclusiones son distintas de los isomorfismos). De hecho, el único subsistema elemental de $\mathbf{Z}$ es él mismo.

Teorema 5.230. *Sea* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *un sistema inductivo de sistemas algebraicos. Si los homomorfismos de transición* $a_{s,s'}\colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \mathbf{A}_{s'}$ *son encajamientos elementales, entonces, para cada* $s \in S$, a_s, *la inclusión canónica* s*-ésima, es un encajamiento elemental de* $\mathbf{A}_s$ *en* $\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$. *Además, si* $\Phi\colon (\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ *es un morfismo inductivo, en el que* $\Phi = (\varphi, f)$, *con* $\varphi\colon \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{T}$ *y* $f = (f_s \mid s \in S)$, *siendo, para cada* $s \in S$, $f_s\colon \mathbf{A}_s \rightarrowtail \mathbf{B}_{\varphi(s)}$, *entonces se cumple que* $\varinjlim \Phi\colon \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \rightarrowtail \varinjlim(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$.

Demostración. □

Corolario 5.231 (Tarski-Vaught). *Sea I un conjunto no vacío y $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia de sistemas algebraicos tal que, para cada $i, j \in I$ exista un $k \in I$ tal que $\mathbf{A}_i \preccurlyeq \mathbf{A}_k$ y $\mathbf{A}_j \preccurlyeq \mathbf{A}_k$. Entonces, para cada $i \in I$, $\mathbf{A}_i \preccurlyeq \bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i$.*

Demostración. Antes de proceder a demostrar el teorema recordamos que para una familia de sistemas algebraicos dirigida superiormente $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$, el sistema algebraico $\bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i$ es el definido como:

1. El conjunto subyacente de $\bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i$ es $\bigcup_{i\in I} A_i$.
2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $\sigma \in \Sigma$, la operación estructural F_σ es la aplicación definida como:
$$F_\sigma \begin{cases} (\bigcup_{i\in I} A_i)^n & \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \\ (x_\alpha \mid \alpha \in n) & \longmapsto F_\sigma^{\mathbf{A}_i}(x_\alpha \mid \alpha \in n), \end{cases}$$
siendo i un índice tal que, para cada $\alpha \in n$, $x_\alpha \in A_i$.
3. Para cada $n \in \mathbb{N} - 1$ y cada $\pi \in \Pi$, la relación estructural R_π es $\bigcup_{i\in I} R_\pi^{\mathbf{A}_i}$.

Es evidente que, para cada $i \in I$, $\mathbf{A}_i$ es un subsistema de $\bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i$.

La demostración del teorema es por inducción algebraica. Concretamente, vamos a demostrar que el conjunto de fórmulas Φ definido como:
$$\Phi = \{ \varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \mid \forall i \in I\, \forall x \in A_i^{\mathbb{N}}\, (\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \varphi[x] \leftrightarrow \textstyle\bigcup_{i\in I}\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \varphi[\mathrm{in}_i \circ x]) \},$$
contiene al conjunto $\mathrm{At}(\mathcal{L})$ de las fórmulas atómicas y está cerrado bajo las operaciones estructurales definidas sobre $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$.

Sabemos que las $\mathcal{L}$-fórmulas atómicas, o bien son de la forma $P_0 = P_1$, para algún $(P_i \mid i \in 2) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^2$, o bien de la forma $\pi(P_i \mid i \in n)$, para algún $n \in \mathbb{N} - 1$, algún $\pi \in \Pi_n$ y alguna familia $(P_i \mid i \in n) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^n$.

Sea $i \in I$ y $x \in A_i^{\mathbb{N}}$. Vamos a demostrar que $\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} P_0 = P_1[x]$ precisamente si $\bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} P_0 = P_1[\mathrm{in}_i \circ x]$, i.e., que $x \in \mathrm{Eq}(P_0^{\mathbf{A}_i}, P_1^{\mathbf{A}_i})$ si y sólo si $\mathrm{in}_i \circ x \in \mathrm{Eq}(P_0^{\bigcup_{i\in I}\mathbf{A}_i}, P_1^{\bigcup_{i\in I}\mathbf{A}_i})$, o lo que es equivalente, que $P_0^{\mathbf{A}_i}(x) = P_1^{\mathbf{A}_i}(x)$ si y sólo si $P_0^{\bigcup_{i\in I}\mathbf{A}_i}(\mathrm{in}_i \circ x) = P_1^{\bigcup_{i\in I}\mathbf{A}_i}(\mathrm{in}_i \circ x)$. Ahora bien, para $\alpha \in 2$ el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A_i^{\mathbb{N}} \arrow[r, "\mathrm{in}_i^{\mathbb{N}}"] \arrow[d, "P_\alpha^{\mathbf{A}_i}"'] & (\bigcup_{i\in I} A_i)^{\mathbb{N}} \arrow[d, "P_\alpha^{\bigcup_{i\in I}\mathbf{A}_i}"] \\ A_i \arrow[r, "\mathrm{in}_i"'] & \bigcup_{i\in I} A_i \end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto, para $\alpha \in 2$, $\mathrm{in}_i(P_\alpha^{\mathbf{A}_i}(x)) = P_\alpha^{\bigcup_{i\in I}\mathbf{A}_i}(\mathrm{in}_i^{\mathbb{N}}(x))$.

De manera que si $P_0^{\mathbf{A}_i}(x) = P_1^{\mathbf{A}_i}(x)$, entonces $\mathrm{in}_i(P_0^{\mathbf{A}_i}(x)) = \mathrm{in}_i(P_1^{\mathbf{A}_i}(x))$, i.e., $P_0^{\bigcup_{i\in I}\mathbf{A}_i}(\mathrm{in}_i^{\mathbb{N}}(x)) = P_1^{\bigcup_{i\in I}\mathbf{A}_i}(\mathrm{in}_i^{\mathbb{N}}(x))$.

Por otra parte, si $P_0^{\bigcup_{i\in I}\mathbf{A}_i}(\mathrm{in}_i^{\mathbb{N}}(x)) = P_1^{\bigcup_{i\in I}\mathbf{A}_i}(\mathrm{in}_i^{\mathbb{N}}(x))$, entonces $\mathrm{in}_i(P_0^{\mathbf{A}_i}(x)) = \mathrm{in}_i(P_1^{\mathbf{A}_i}(x))$, luego, ya que in_i es inyectiva, $P_0^{\mathbf{A}_i}(x) = P_1^{\mathbf{A}_i}(x)$. Para las fórmulas atómicas de la forma $\pi(P_i \mid i \in n)$ se procede del mismo modo y lo dejamos como ejercicio.

Veamos que Φ esta cerrado bajo los operadores lógicos.

Sea $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tal que $\varphi \in \Phi$. Vamos a demostrar que $\neg\varphi \in \Phi$, i.e., que para cada $i \in I$ y cada $x \in A_i^{\mathbb{N}}$, $\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \neg\varphi[x]$ precisamente si $\bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \neg\varphi[\mathrm{in}_i \circ x]$. Sea $i \in I$ y $x \in A_i^{\mathbb{N}}$. Supongamos que $\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \neg\varphi[x]$, entonces $x \in (\neg\varphi)^{\mathbf{A}_i} = \complement\varphi^{\mathbf{A}_i}$, luego $x \notin \varphi^{\mathbf{A}_i}$, i.e., no es el caso que $\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \varphi[x]$, luego, por la hipótesis, no es el caso que $\bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \varphi[\mathrm{in}_i \circ x]$, por lo tanto $\bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \neg\varphi[\mathrm{in}_i \circ x]$. Del mismo modo se demuestra la recíproca.

Sea $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tal que $\varphi \in \Phi$. Vamos a demostrar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\exists v_n\varphi \in \Phi$, i.e., que para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que, para cada $i \in I$ y cada $x \in A_i^{\mathbb{N}}$, $\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\varphi[x]$ precisamente si $\bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\varphi[\mathrm{in}_i \circ x]$. Sea $n \in \mathbb{N}$, $i \in I$ y $x \in A_i^{\mathbb{N}}$. Supongamos que $\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\varphi[x]$, entonces hay un $a \in A_i$ tal que $\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \varphi[x^{(n|a)}]$, luego, por la hipótesis, $\bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \varphi[(\mathrm{in}_i \circ x)^{(n|a)}]$, así que $\bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\varphi[\mathrm{in}_i \circ x]$. Recíprocamente, si $\bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\varphi[\mathrm{in}_i \circ x]$, entonces hay un $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$ tal que $\bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \varphi[(\mathrm{in}_i \circ x)^{(n|a)}]$. Por lo tanto para un $j \in I$ tenemos que $a \in A_j$, luego hay un $k \in I$ tal que $\mathbf{A}_i \preccurlyeq \mathbf{A}_k$ y $\mathbf{A}_j \preccurlyeq \mathbf{A}_k$, entonces, por la hipótesis de inducción algebraica, $\mathbf{A}_k \models_{\mathcal{L}} \varphi[x^{(n|a)}]$, i.e., $\mathbf{A}_k \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\varphi[x]$, luego $\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\varphi[x]$, porque $\mathbf{A}_i \preccurlyeq \mathbf{A}_k$.

Dejamos como ejercicio la demostración de que Φ está cerrado para el resto de los operadores lógicos.

□

Presentamos a continuación un teorema de Tarski-Vaught de caracterización de las extensiones elementales.

Teorema 5.232 (Tarski-Vaught)**.** *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *dos sistemas algebraicos. Entonces las dos condiciones*

1. $\mathbf{A}$ *es un subsistema de* $\mathbf{B}$.
2. *Para cada* $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$*, cada* $n \in \mathbb{N}$*, cada* $x \in A^{\mathbb{N}}$*, si* $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\varphi[x]$*, entonces existe un* $a \in A$ *tal que* $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x^{(n|a)}]$.

son necesarias y suficientes para que $\mathbf{A}$ *sea un subsistema elemental de* $\mathbf{B}$.

Demostración. Necesidad. Si $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{B}$, entonces es obvio que $\mathbf{A}$ es un subsistema de $\mathbf{B}$. Veamos que se cumple 2. Sea $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in A^{\mathbb{N}}$ y supongamos que $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\varphi[x]$. Entonces, en virtud de la definición de $\preccurlyeq$, $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\varphi[x]$, luego, por la definición de la relación $\models_{\mathcal{L}}$, hay un $a \in A$ tal que $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x^{(n|a)}]$, por lo tanto, por la definición de $\preccurlyeq$, $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x^{(n|a)}]$.

Suficiencia. Es obvio que de 1 se deduce que $A \subseteq B$. Para demostrar que, para cada $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ y cada $x \in A^{\mathbb{N}}$, $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x]$ precisamente si $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x]$, procedemos por inducción algebraica. Concretamente, vamos a demostrar que el conjunto de fórmulas Φ definido como:

$$\Phi = \{\, \varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \mid \forall x \in A^{\mathbb{N}}\, (\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x] \leftrightarrow \mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x])\,\},$$

contiene al conjunto $\mathrm{At}(\mathcal{L})$ de las fórmulas atómicas y está cerrado bajo las operaciones estructurales definidas sobre $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$. Es evidente, en virtud de 1, que $\mathrm{At}(\mathcal{L}) \subseteq \Phi$.

Sea $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tal que $\varphi \in \Phi$. Vamos a demostrar que $\neg\varphi \in \Phi$, i.e., que para cada $x \in A^{\mathbb{N}}$, $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \neg\varphi[x]$ precisamente si $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \neg\varphi[x]$. Sea $x \in A^{\mathbb{N}}$ y supongamos que $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \neg\varphi[x]$, entonces no es el caso que $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x]$, luego, por la hipótesis, no es el caso que $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x]$, por lo tanto $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \neg\varphi[x]$. Del mismo modo se demuestra la recíproca.

Sea $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tal que $\varphi \in \Phi$. Vamos a demostrar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\exists v_n\varphi \in \Phi$, i.e., que para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que, para cada $x \in A^{\mathbb{N}}$, $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\varphi[x]$ precisamente si $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\varphi[\mathrm{in}_i \circ x]$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $x \in A^{\mathbb{N}}$. Supongamos que $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\varphi[x]$, entonces hay un $a \in A$ tal que $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x^{(n|a)}]$, luego, por la hipótesis, $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x^{(n|a)}]$, así que $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\varphi[x]$. Recíprocamente, si $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\varphi[x]$, entonces, por 2, hay un $a \in A$ tal que $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x^{(n|a)}]$,luego, por la hipótesis de inducción, $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x^{(n|a)}]$, por lo tanto $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\varphi[x]$.

Dejamos como ejercicio la demostración de que Φ está cerrado para el resto de los operadores lógicos. □

Teorema 5.233 (Löwenheim-Skolem-Tarski descendente)**.** *Sea* $\mathcal{L}$ *un lenguaje de primer orden,* $\mathbf{B} = (B, F^{\mathbf{B}}, R^{\mathbf{B}})$ *un* $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$*-sistema algebraico,* $X \subseteq B$ *y* $\mathfrak{m}$ *un* *cardinal infinito tal que* $\mathrm{card}(X) \leq \mathfrak{m} \leq \mathrm{card}(B)$ *y* $\mathrm{card}(\Sigma \coprod \Pi) \leq \mathfrak{m}$*. Entonces* $\mathbf{B}$ *tiene un subsistema elemental* $\mathbf{A} = (A, F^{\mathbf{A}}, R^{\mathbf{A}})$ *tal que* $X \subseteq A$ *y* $\mathrm{card}(A) = \mathfrak{m}$*.*

Demostración. Puesto que una $\mathcal{L}$-fórmula es una sucesión finita de símbolos de operación lógicos, variables, símbolos de operación y símbolos de relación, el número de fórmulas es a lo sumo $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}$. Sea Y un subconjunto de B tal que $X \subseteq Y$ y $\mathrm{card}(Y) = \mathfrak{m}$. Por otra parte, sea f una función de elección para los subconjuntos no vacíos de B. Vamos a asociar a cada par $(\varphi, i) \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \times \mathbb{N}$ una operación finitaria $G_{\varphi,i}$ sobre B, la *operación de Skolem* para (φ, i). Sea m el primer número natural tal que las variables libres de φ estén incluidas en $\downarrow v_{m+1} = \{ v_0, \dots, v_m \}$ e $i \leq m$. Entonces $G_{\varphi,i}$ es la operación $m + 1$-aria sobre B definida como:

$$G_{\varphi,i} \begin{cases} B^{m+1} \longrightarrow B \\ \quad b \quad \longmapsto \begin{cases} f(\{ u \in B \mid \mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \varphi[b^{(i|u)}] \}), & \text{si } \{ u \in B \mid \mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \varphi[b^{(i|u)}] \} \neq \varnothing; \\ f(B), & \text{en caso contrario.} \end{cases} \end{cases}$$

Sea A el cerrado de $(B, (G_{\varphi,i} \mid (\varphi, i) \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \times \mathbb{N}))$ generado por Y. El conjunto A es tal que $\mathrm{card}(A) = \mathfrak{m}$. Ahora vamos a dotar al conjunto A de una estructura de $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$-sistema algebraico. Para un símbolo de relación π de rango m convenimos que $R^{\mathbf{A}} = R^{\mathbf{B}} \cap A^m$. Por otra parte, para un símbolo de operación σ de ariedad m, vamos a ver que A está cerrado bajo la operación $F^{\mathbf{B}}_{\sigma}$. Sea φ la fórmula $\sigma(v_0, \dots, v_{m-1}) = v_m$ y $a_0, \dots, a_{m-1} \in A$, entonces

$$G_{\varphi,m}(a_0, \dots, a_{m-1}, a_0) = F^{\mathbf{B}}_{\sigma}(a_0, \dots, a_{m-1}),$$

porque $F^{\mathbf{B}}_{\sigma}(a_0, \dots, a_{m-1})$ es el único elemento u de B tal que, tomando como $a = (a_0, \dots, a_{m-1}, a_0)$, $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \varphi[a^{(m|u)}]$. Luego definimos

$$F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a_0, \dots, a_{m-1}) = F^{\mathbf{B}}_{\sigma}(a_0, \dots, a_{m-1}).$$

Obviamente se cumple que $\mathbf{A} = (A, F^{\mathbf{A}}, R^{\mathbf{A}})$ es un subsistema de $\mathbf{B} = (B, F^{\mathbf{B}}, R^{\mathbf{B}})$. Para demostrar que $\mathbf{A} = (A, F^{\mathbf{A}}, R^{\mathbf{A}})$ es un subsistema elemental de $\mathbf{B} = (B, F^{\mathbf{B}}, R^{\mathbf{B}})$ aplicamos el teorema 5.232. Sea $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in A^{\mathbb{N}}$ y supongamos que $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n \varphi[x]$. Sea m un número natural tal que las variables libres de φ estén incluidas en $\downarrow v_{m+1} = \{ v_0, \dots, v_m \}$ y $n \leq m$. Entonces para $u = G_{\varphi,n}(a_0, \dots, a_m)$ se cumple que $u \in A$, porque A está cerrado bajo las operaciones $G_{\varphi,n}$. Además, por la definición de $G_{\varphi,n}$, tenemos que $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \varphi[(x{\restriction}m+1)^{(n|u)}]$, luego $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x^{(n|u)}]$. □

Teorema 5.234 (Łoś)**.** *Sea* I *un conjunto,* $\mathcal{F}$ *un ultrafiltro sobre* I *y* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *una familia de sistemas algebraicos. Entonces, para cada* $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ *y cada* $x \in \left(\prod_{i\in I} A_i\right)^{\mathbb{N}}$*, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \varphi[\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x]$*, siendo* $\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}}$ *la proyección canónica de* $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ *en* $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}}$*.*
2. *El conjunto* $\{ i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \varphi[\mathrm{pr}_i \circ x] \} \in \mathcal{F}$*.*

Demostración. Para la demostración conviene que tengamos presente el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x"] & \\ \prod_{i\in I} A_i \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}}"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_i"'] & \prod_{i\in I} A_i/\equiv_{\mathcal{F}} \\ A_i & \end{tikzcd}$$

Para demostrar que, para cada $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ y cada $x \in \left(\prod_{i\in I} A_i\right)^{\mathbb{N}}$, $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \varphi[\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x]$ precisamente si $\{\, i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \varphi[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\} \in \mathcal{F}$, procedemos por inducción algebraica. Concretamente, vamos a demostrar que el conjunto de fórmulas Φ definido como:

$$\Phi = \left\{ \varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \;\middle|\; \forall x \in \left(\textstyle\prod_{i\in I} A_i\right)^{\mathbb{N}} \begin{pmatrix} \prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \varphi[\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x] \text{ si y sólo} \\ \text{si } \{\, i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \varphi[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\} \in \mathcal{F} \end{pmatrix} \right\},$$

contiene al conjunto $\mathrm{At}(\mathcal{L})$ de las fórmulas atómicas y está cerrado bajo las operaciones estructurales definidas sobre $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$.

Sabemos que las $\mathcal{L}$-fórmulas atómicas, o bien son de la forma $P_0 = P_1$, para algún $(P_i \mid i \in 2) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^2$, o bien de la forma $\pi(P_i \mid i \in n)$, para algún $n \in \mathbb{N} - 1$, algún $\pi \in \Pi_n$ y alguna familia $(P_i \mid i \in n) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^n$.

Sea $x \in \left(\prod_{i\in I} A_i\right)^{\mathbb{N}}$. Vamos a demostrar que $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} P_0 = P_1[\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x]$ precisamente si $\{\, i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} P_0 = P_1[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\} \in \mathcal{F}$. Si $\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x$ satisface a $P_0 = P_1$ en $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}}$, entonces $\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x$ pertenece al igualador de $P_0^{\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}}}$ y $P_1^{\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}}}$. Ahora bien, para $\alpha \in 2$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\left(\prod_{i\in I} A_i\right)^{\mathbb{N}} \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}}^{\mathbb{N}}"] \arrow[d, "P_\alpha^{\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i}"'] & \left(\prod_{i\in I} A_i/\equiv_{\mathcal{F}}\right)^{\mathbb{N}} \arrow[d, "P_\alpha^{\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}}}"] \\
\prod_{i\in I} A_i \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}}"'] & \prod_{i\in I} A_i/\equiv_{\mathcal{F}}
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto, para $\alpha \in 2$, $P_\alpha^{\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}}}(\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x) = \mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}}(P_\alpha^{\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i}(x))$.

Luego $\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}}(P_0^{\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i}(x)) = \mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}}(P_1^{\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i}(x))$, por consiguiente el conjunto $\{\, i \in I \mid \mathrm{pr}_i(P_0^{\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i}(x)) = \mathrm{pr}_i(P_1^{\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i}(x)) \,\} \in \mathcal{F}$.

Ahora bien, para $\alpha \in 2$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\left(\prod_{i\in I} A_i\right)^{\mathbb{N}} \arrow[r, "\mathrm{pr}_i^{\mathbb{N}}"] \arrow[d, "P_\alpha^{\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i}"'] & A_i^{\mathbb{N}} \arrow[d, "P_\alpha^{\mathbf{A}_i}"] \\
\prod_{i\in I} A_i \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"'] & A_i
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto, para $\alpha \in 2$, $\mathrm{pr}_i(P_\alpha^{\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i}(x)) = P_\alpha^{\mathbf{A}_i}(\mathrm{pr}_i \circ x))$

Luego, $\{\, i \in I \mid P_0^{\mathbf{A}_i}(\mathrm{pr}_i \circ x) = P_1^{\mathbf{A}_i}(\mathrm{pr}_i \circ x) \,\} \in \mathcal{F}$, pero $\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} P_0 = P_1[\mathrm{pr}_i \circ x]$ precisamente si $P_0^{\mathbf{A}_i}(\mathrm{pr}_i \circ x) = P_1^{\mathbf{A}_i}(\mathrm{pr}_i \circ x)$, así que $\{\, i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} P_0 = P_1[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\} \in \mathcal{F}$. La recíproca es similar.

Dejamos como ejercicio la demostración del caso en el que la fórmula atómica sea de la forma $\pi(P_i \mid i \in n)$, para algún $n \in \mathbb{N} - 1$, algún $\pi \in \Pi_n$ y alguna familia $(P_i \mid i \in n) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^n$.

Sea $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tal que $\varphi \in \Phi$. Vamos a demostrar que $\neg\varphi \in \Phi$, i.e., que para cada $x \in \left(\prod_{i\in I} A_i\right)^{\mathbb{N}}$, $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \neg\varphi[\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x]$ precisamente si $\{\, i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \neg\varphi[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\} \in \mathcal{F}$.

Sea $x \in \left(\prod_{i\in I} A_i\right)^{\mathbb{N}}$ y supongamos que $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \neg\varphi[\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x]$, entonces no es el caso que $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \varphi[\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x]$, luego, por la hipótesis, $\{\, i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \varphi[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\} \notin \mathcal{F}$. Pero, por ser $\mathcal{F}$ un ultrafiltro, entonces $I - \{\, i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}}$

$\varphi[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\} \in \mathcal{F}$. Ahora bien, este último conjunto es $\{\, j \in I \mid \mathbf{A}_j \models_{\mathcal{L}} \neg\varphi[\mathrm{pr}_j \circ x] \,\}$, luego $\{\, j \in I \mid \mathbf{A}_j \models_{\mathcal{L}} \neg\varphi[\mathrm{pr}_j \circ x] \,\} \in \mathcal{F}$. La recíproca es obvia.

Sea $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tal que $\varphi \in \Phi$. Vamos a demostrar que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\exists v_k \varphi \in \Phi$. Sea $k \in \mathbb{N}$ y $x \in \left(\prod_{i\in I} A_i\right)^{\mathbb{N}}$. Supongamos que $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \exists v_k \varphi[\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x]$, entonces hay un $y \in \prod_{i\in I} A_i$ tal que $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \varphi[(\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x)^{(k|[y]_{\equiv_{\mathcal{F}}})}]$. Ahora bien, puesto que $\varphi \in \Phi$, obtenemos que $\{\, i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \varphi[\mathrm{pr}_i \circ x^{(k|\mathrm{pr}_i(y))}] \,\} \in \mathcal{F}$. Pero se cumple que este último conjunto está incluido en $\{\, i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_k \varphi[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\}$, porque si $i \in I$ es tal que $\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \varphi[\mathrm{pr}_i \circ x^{(k|\mathrm{pr}_i(y))}]$, entonces, para $a = y(i)$, tenemos que $\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \varphi[(\mathrm{pr}_i \circ x)^{(k|y(i))}]$, porque $(\mathrm{pr}_i \circ x)^{(k|y(i))} = \mathrm{pr}_i \circ x^{(k|\mathrm{pr}_i(y))}$, luego $\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_k \varphi[\mathrm{pr}_i \circ x]$. Por lo tanto $\{\, i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_k \varphi[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\} \in \mathcal{F}$. Recíprocamente, si $J = \{\, i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_k \varphi[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\} \in \mathcal{F}$, entonces, para cada $j \in J$, hay un $a_j \in A_j$ tal que $\mathbf{A}_j \models_{\mathcal{L}} \exists v_k \varphi[\mathrm{pr}_j \circ x]$. Sea y la función de elección para $(A_i \mid i \in I)$ cuya coordenada j-ésima, con $j \in J$, es a_j, y cuya coordenada i-ésima, con $i \in I - J$, es un $b_i \in A_i$, arbitrario, pero fijo. Se cumple que $\{\, i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_k \varphi[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\}$ está incluido en $\{\, i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \varphi[\mathrm{pr}_i \circ x^{(k|y)}] \,\}$. Por lo tanto $\{\, i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \varphi[\mathrm{pr}_i \circ x^{(k|y)}] \,\} \in \mathcal{F}$, luego, ya que $\varphi \in \mathcal{F}$, $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \varphi[(\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x)^{(k|[y]_{\equiv_{\mathcal{F}}})}]$. Por consiguiente $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \exists v_k \varphi[\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x]$. Dejamos como ejercicio la demostración de que Φ está cerrado para el resto de los operadores lógicos. □

Corolario 5.235. *Sea I un conjunto, $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre I, $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia de sistemas algebraicos y $\varphi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$. Entonces $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \varphi$ si y sólo si el conjunto $\{\, i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \varphi \,\} \in \mathcal{F}$.*

Corolario 5.236. *Sea I un conjunto, $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre I, $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia de sistemas algebraicos y $\varphi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$. Si, para cada $i \in I$, $\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \varphi$ entonces $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \varphi$.*

Corolario 5.237 (Teorema de compacidad)**.** *Sea Φ un conjunto infinito de sentencias. Si cada subconjunto finito de Φ tiene un modelo, entonces Φ tiene un modelo.*

Demostración. Sea $I = \{\, \Delta \subseteq \Phi \mid \mathrm{card}(\Delta) < \aleph_0 \,\}$. Entonces, dada una parte finita Δ de Φ, hay un sistema algebraico $\mathbf{A}_\Delta$ tal que, para cada $\delta \in \Delta$, $\mathbf{A}_\Delta \models_{\mathcal{L}} \delta$. Por otra parte, para cada $\Delta \in I$, sea $G_\Delta = \{\, \Theta \in I \mid \Delta \subseteq \Theta \,\}$. Entonces el subconjunto $\mathcal{G} = \{\, G_\Delta \mid \Delta \in I \,\}$ de $\mathrm{Sub}(I)$, es una subbase de filtro sobre I, i.e., se cumple que:

1. $\mathcal{G} \neq \varnothing$.
2. $\varnothing \notin \mathcal{G}$.
3. Para cada $n \in \mathbb{N} - 1$ y cada $(\Delta_j \mid j \in n) \in I^n$, $\bigcap_{j\in n} G_{\Delta_j} \neq \varnothing$.

En efecto, el conjunto $\mathcal{G} \neq \varnothing$, porque $I \neq \varnothing$. El conjunto vacío no pertenece a $\mathcal{G}$ porque, dado un $\Delta \in I$, $\Delta \in G_\Delta$. Por último, dado un $n \in \mathbb{N} - 1$ y una familia $(\Delta_j \mid j \in n) \in I^n$, $\bigcap_{j\in n} G_{\Delta_j} \neq \varnothing$, porque $\bigcap_{j\in n} G_{\Delta_j} = G_{\bigcup_{j\in n} \Delta_j}$ y se cumple que $\bigcup_{j\in n} \Delta_j \in I$. Por lo tanto, en virtud del axioma de elección, hay un ultrafiltro $\mathcal{F}$ sobre I tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, i.e., tal que, para cada $\Delta \in I$, $, G_\Delta \in \mathcal{F}$. Veamos que, para cada $\varphi \in \Phi$, $\prod_{\Delta\in I} \mathbf{A}_\Delta/\equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \varphi$. Para ello es suficiente que demostremos, en virtud del corolario 5.235 que, para cada $\varphi \in \Phi$, $\{\, \Delta \in I \mid \mathbf{A}_\Delta \models_{\mathcal{L}} \varphi \,\} \in \mathcal{F}$. Ahora bien, dado un $\varphi \in \Phi$, el conjunto $\{\, \Delta \in I \mid \mathbf{A}_\Delta \models_{\mathcal{L}} \varphi \,\}$ pertenece a $\mathcal{F}$, porque contiene al conjunto $G_{\{\varphi\}} \in \mathcal{F}$. □

Proposición 5.238. *El teorema de compacidad equivale a que, para cada $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, si $\Gamma \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, entonces hay un subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.*

Demostración. Supongamos el teorema de compacidad y sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$ tal que $\Gamma \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$. Si, contrariamente a lo enunciado, para cada subconjunto finito Δ de Γ, existiera un sistema algebraico $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Delta)$ pero $\mathbf{A} \notin \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\varphi)$, entonces, para cada subconjunto finito Δ de Γ, existiría un sistema algebraico $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Delta)$ y $\mathbf{A} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\neg\varphi)$. Por lo tanto, para el conjunto de fórmulas cerradas $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, tendríamos que, para cada subconjunto finito Θ de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Theta) \neq \varnothing$, pero $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Gamma \cup \{\neg\varphi\}) = \varnothing$, ya que en caso contrario, i.e., si existiera un sistema algebraico $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Gamma \cup \{\neg\varphi\})$, entonces $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi$ y $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \neg\varphi$, lo cual es absurdo. De modo que hay un subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.

Ahora supongamos que, para cada $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, si $\Gamma \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, entonces hay un subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$. Si no se cumpliera el teorema de compacidad, i.e., si existiera un $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$ tal que, para cada subconjunto finito Δ de Γ, $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Delta) \neq \varnothing$ pero $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Gamma) = \varnothing$, entonces, para la fórmula cerrada $\exists x\,(x \neq x)$, tendríamos que $\Gamma \Vdash_{\mathcal{L}} \exists x\,(x \neq x)$, porque $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Gamma) = \varnothing$, y, para cada subconjunto finito Δ de Γ, $\Delta \nVdash_{\mathcal{L}} \exists x\,(x \neq x)$, porque $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Delta) \neq \varnothing$ pero $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\exists x\,(x \neq x)) = \varnothing$. □

Corolario 5.239. *Tanto los functores de formación de ultraproductos como los de formación de ultrapotencias preservan encajamientos elementales. Además, las componentes de las transformaciones naturales del functor identidad en los functores de ultrapotencia, son encajamientos elementales.*

Corolario 5.240. *Cualquier sistema algebraico se puede encajar en un ultraproducto de sus subsistemas finitamente generados.*

Demostración. □

Proposición 5.241. *Sea A un conjunto infinito y $\mathfrak{m}$ un cardinal transfinito. Entonces hay un conjunto I tal que* $\mathrm{card}(I) = \mathfrak{m}$ *y un ultrafiltro $\mathcal{F}$ sobre I tal que* $2^{\mathfrak{m}} \leq \mathrm{card}(A^I/\equiv_{\mathcal{F}})$.

Demostración. Sea $I = \{\, X \subseteq \mathfrak{m} \mid \mathrm{card}(X) < \aleph_0 \,\}$. Para cada $X \in I$, sea $G_X = \{\, Y \in I \mid X \subseteq Y \,\}$. Entonces el subconjunto $\mathcal{G} = \{\, G_X \mid X \in I \,\}$ de $\mathrm{Sub}(I)$, es una subbase de filtro sobre I, i.e., se cumple que:

1. $\mathcal{G} \neq \varnothing$.
2. $\varnothing \notin \mathcal{G}$.
3. Para cada $n \in \mathbb{N} - 1$ y cada $(X_j \mid j \in n) \in I^n$, $\bigcap_{j\in n} G_{X_j} \neq \varnothing$.

En efecto, el conjunto $\mathcal{G} \neq \varnothing$, porque $I \neq \varnothing$. El conjunto vacío no pertenece a $\mathcal{G}$ porque, dado un $X \in I$, $X \in G_X$. Por último, dado un $n \in \mathbb{N} - 1$ y una familia $(X_j \mid j \in n) \in I^n$, $\bigcap_{j\in n} G_{X_j} \neq \varnothing$, porque $\bigcap_{j\in n} G_{X_j} = G_{\bigcup_{j\in n} X_j}$ y se cumple que $\bigcup_{j\in n} X_j \in I$. Por lo tanto, en virtud del axioma de elección, hay un ultrafiltro $\mathcal{F}$ sobre I tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, i.e., tal que, para cada $X \in I$, $, G_X \in \mathcal{F}$. Ahora vamos a demostrar que existe una aplicación inyectiva de $\mathrm{Sub}(\mathfrak{m})$ en $A^I/\equiv_{\mathcal{F}}$. Para ello, una vez elegida una familia $f = (f_X \mid X \in I)$ en $\prod_{X\in I} \mathrm{Mono}(\mathrm{Sub}(X), A)$, definimos la aplicación H_f de $\mathrm{Sub}(\mathfrak{m})$ en A^I como:

$$H_f \begin{cases} \mathrm{Sub}(\mathfrak{m}) \longrightarrow A^I \\ \quad Y \quad\ \longmapsto (f_X(Y \cap X) \mid X \in I). \end{cases}$$

Entonces la aplicación H de $\mathrm{Sub}(\mathfrak{m})$ en $A^I/\equiv_{\mathcal{F}}$ definida como:

$$H \begin{cases} \mathrm{Sub}(\mathfrak{m}) \longrightarrow A^I/\equiv_{\mathcal{F}} \\ \quad Y \quad\ \longmapsto [H_f(Y)]_{\equiv_{\mathcal{F}}}, \end{cases}$$

es inyectiva. En efecto, dados dos subconjuntos distintos Y y Z de $\mathfrak{m}$, si $\alpha \in Y \oplus Z$, entonces, ya que $G_{\{\alpha\}} \subseteq \{\, X \in I \mid f_X(Y \cap X) \neq f_X(Z \cap X) \,\}$ y $G_{\{\alpha\}} \in \mathcal{F}$, se cumple que $\{\, X \in I \mid f_X(Y \cap X) \neq f_X(Z \cap X) \,\} \in \mathcal{F}$, luego $H(Y) \neq H(Z)$.

□

Teorema 5.242 (Löwenheim-Skolem-Tarski ascendente)**.** *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden,* $\mathbf{A}$ *un* $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$*-sistema algebraico y* $\mathfrak{m}$ *un cardinal infinito tal que* $\mathrm{card}(A) \leq \mathfrak{m}$ *y* $\mathrm{card}(\Sigma \coprod \Pi) \leq \mathfrak{m}$*. Entonces* $\mathbf{A}$ *tiene una extensión elemental* $\mathbf{B}$ *diferente de* $\mathbf{A}$ *y tal que* $\mathrm{card}(B) = \mathfrak{m}$*.*

Demostración. Sea $\mathbf{C}$ una extensión elemental de $\mathbf{A}$ tal que $\mathrm{card}(C) \geq 2^{\mathfrak{m}}$ y $c \in C - A$. Entonces, en virtud del teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente, sea $\mathbf{B}$ un subsistema elemental de $\mathbf{C}$ tal que $\mathrm{card}(B) = \mathfrak{m}$ y $A \cup \{c\} \subseteq B$. Es evidente que $\mathbf{B}$ cumple las condiciones del teorema. □

La ruptura con la tradición, que arrancó con Aristóteles, en virtud de la cual para el despliegue de cualquier ciencia deductiva es imprescindible que sus conceptos deban ser significativos, se produjo a partir de 1882, por obra del geómetra Pasch. Según este autor el proceso deductivo debe ser independiente del significado de los conceptos y sólo debe retenerse como básico las relaciones que subsistan entre los mismos, expresadas mediante axiomas.

Como Hilbert le comunica a Frege el 29 de Diciembre de 1899:

> Naturalmente, cada teoría es sólo un andamiaje o esquema de conceptos con sus necesarias relaciones mutuas, y los elementos básicos pueden pensarse como se quiera. Si pienso que mis puntos son cualquier sistema de cosas, vgr., el sistema *amor*, *ley*, *deshollinador*, ..., con que luego sólo postule la totalidad de mis axiomas como relaciones entre estas cosas, mis teoremas –el de Pitágoras, por ejemplo– valen también para ellas. En otras palabras: cada teoría puede siempre aplicarse a infinitos sistemas de elementos básicos. Basta aplicar una transformación unívoca inversible y estipular que los axiomas homólogos valen para las transformadas

Definición 5.243. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Decimos que una teoría T es *completa* si, para cada $\varphi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, o bien $\varphi \in T$ o bien $\neg\varphi \in T$; que T es *consistente* si $\mathrm{Mod}(T) \neq \varnothing$; por último, siendo $\mathfrak{m}$ un cardinal, decimos que T es una teoría $\mathfrak{m}$-*categórica* si, salvo isomorfismo, tiene exactamente un modelo de cardinal $\mathfrak{m}$, i.e., si, para cada $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{Mod}(T)$, si la cardinalidad de A y B es $\mathfrak{m}$, entonces $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$, y que es *categórica* si dos modelos cualesquiera de T son isomorfos.

La teoría de grupos, Grp, no es una teoría completa, porque para la sentencia $\varphi = \forall x, y\, (x \cdot y = y \cdot x)$, se cumple que ni $\mathsf{Grp} \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ ni $\mathsf{Grp} \Vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$, i.e., que tanto $\mathsf{Grp} \cup \{\neg\varphi\}$ como $\mathsf{Grp} \cup \{\varphi\}$ son consistentes. Sin embargo la teoría de grupos triviales, $\mathsf{Grp} \cup \{\forall x\, (x = 1)\}$, es completa. Porque, por una parte, salvo isomorfismo, el grupo trivial es el único modelo de $\mathsf{Grp} \cup \{\forall x\, (x = 1)\}$ y, por otra, si fuera incompleta, entonces ....

Proposición 5.244. *Una teoría T es completa si y sólo si dos modelos cualesquiera de T son elementalmente equivalentes.*

Demostración. Supongamos que dos modelos cualesquiera de T son elementalmente equivalentes. Si T no fuera completa, existiría un $\varphi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$ tal que ni $T \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ ni $T \Vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$. Luego $T \cup \{\neg\varphi\}$ y $T \cup \{\varphi\}$ serían teorías consistentes. Por lo tanto, para cada $\mathbf{A} \in \mathrm{Mod}(T \cup \{\neg\varphi\})$ y cada $\mathbf{B} \in \mathrm{Mod}(T \cup \{\varphi\})$, tendríamos que $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{Mod}(T)$, luego, por la hipótesis, $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$. Pero éso es absurdo, porque $\mathbf{A} \in \mathrm{Mod}(\{\neg\varphi\})$ y $\mathbf{B} \in \mathrm{Mod}(\{\varphi\})$. De modo que T es completa. Recíprocamente, si T es completa y $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ son dos modelos de T, entonces dada $\varphi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$ tal que $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi$, se cumple que $\varphi \in T$, ya que en caso contrario, por ser T completa, $\neg\varphi \in T$, luego $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \neg\varphi$, que sería una contradicción. Por lo tanto $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \varphi$. De modo que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son elementalmente equivalentes. □

Corolario 5.245. *Cualquier teoría categórica es completa.*

Proposición 5.246. *Si una teoría completa tiene un modelo finito, entonces es categórica.*

El test de Łoś-Vaught es otro método para establecer la completud de las teorías.

Teorema 5.247 (Test de Łoś-Vaught)**.** *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden tal que* $\mathrm{card}(\Sigma \coprod \Pi) = \mathfrak{m}$ *y* $\mathfrak{n}$ *un cardinal infinito tal que* $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$*. Si una teoría consistente* T *es tal que todos sus modelos son infinitos y es* $\mathfrak{n}$*-categórica, entonces* T *es completa.*

Demostración. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos modelos de T. Entonces ambos modelos son infinitos y entonces, en virtud de los teoremas de Löwenheim-Skolem-Tarski, existen modelos $\mathbf{A}'$ y $\mathbf{B}'$ de T tales que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}'$, así como $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}'$, son elementalmenta equivalentes y, además, A' y B' tienen cardinalidad $\mathfrak{n}$. Por lo tanto, al ser T $\mathfrak{n}$-categórica, $\mathbf{A}'$ y $\mathbf{B}'$ son isomorfos, luego $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son elementalmente equivalentes. □

Usando el test de Łoś-Vaught demostramos que la teoría de los órdenes lineales densos y sin máximo ni mínimo, Dlone, es completa. En primer lugar, cualquier modelo de Dlone es infinito (demuéstrese). Además, en virtud de un teorema de Cantor, Dlone es $\aleph_0$-categórica. Por lo tanto es completa.

Otro modo de demostrar la completud de la teoría Dlone es: Si Dlone no fuera completa, existiría una sentencia φ tal que ni $\mathsf{Dlone} \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ ni $\mathsf{Dlone} \Vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$. Luego $\mathsf{Dlone} \cup \{\neg\varphi\}$ y $\mathsf{Dlone} \cup \{\varphi\}$ serían teorías consistentes. Por lo tanto, puesto que el conjunto de los símbolos no lógicos, que es $\{\leq\}$, es numerable, en virtud del teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente, existiría un $\mathbf{A} \in \mathrm{Mod}(T \cup \{\neg\varphi\})$ infinito numerable y un $\mathbf{B} \in \mathrm{Mod}(T \cup \{\varphi\})$ infinito numerable. Ahora bien, puesto que Dlone, en virtud de un teorema de Cantor, es $\aleph_0$-categórica, $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$. Pero éso es absurdo, porque $\mathbf{A} \in \mathrm{Mod}(\{\neg\varphi\})$ y $\mathbf{B} \in \mathrm{Mod}(\{\varphi\})$.

La teoría de los órdenes lineales densos y sin máximo ni mínimo, como acabamos de ver, es completa pero no es categórica, en el sentido de que dos modelos cualesquiera de tal teoría sean isomorfos. Porque tanto $(Q, \leq)$ como $(R, \leq)$ son modelos de Dlone y, obviamente, $(Q, \leq) \not\cong (R, \leq)$.

El conjunto linealmente ordenado $(R, \leq)$ es Dedekind-completo, pero el conjunto linealmente ordenado $(Q, \leq)$, como es bien sabido, no es Dedekind-completo. Esto significa que la Dedekind-completud es una propiedad que distingue a los conjuntos linealmente ordenados $(R, \leq)$ y $(Q, \leq)$. Pero tanto $(R, \leq)$ como $(Q, \leq)$ son modelos de Dlone, y Dlone es una teoría completa, por lo tanto $(R, \leq)$ y $(Q, \leq)$ satisfacen a las mismas sentencias, i.e., son elementalmente equivalentes. En particular, cualquier sentencia, del lenguaje de ambos sistemas relacionales, que exprese la Dedekind-completud debe ser verdadera en los dos modelos o falsa en los dos. De este modo, aparentemente, parece que hemos llegado a una situación contradictoria, porque los conjuntos linealmente ordenados $(R, \leq)$ y $(Q, \leq)$ satisfacen a las mismas sentencias, pero la Dedekind-completud es una propiedad que los distingue. De hecho no hay ninguna contradicción, simplemente porque no hay ninguna sentencia, del lenguaje de ambos sistemas relacionales, que exprese la Dedekind-completud (esta última es una sentencia de segundo orden, no de primer orden).

El test de Łoś-Vaught también puede usarse para demostrar la completud de la teoría de los grupos abelianos divisibles sin torsión y no triviales. Pero antes recordemos algunos de los términos acabados de mencionar.

Definición 5.248. Sea $\mathbf{A}$ un grupo abeliano. Decimos que $\mathbf{A}$ es *divisible* si, para cada $n \in \mathbb{N} - 1$, se cumple que:

$$\forall x \in A \, \exists y \in A \, (\, ny = x \,).$$

Obsérvese que la definición del concepto de divisibilidad, para los grupos abelianos, consta de una infinidad numerable de axiomas, uno por cada número natural no nulo.

Definición 5.249. Sea $\mathbf{A}$ un grupo abeliano. Decimos que $\mathbf{A}$ es *aperiódico* o *sin torsión* si, para cada $n \in \mathbb{N} - 1$, se cumple que:

$$\forall x \in A\,(\,nx = 0 \to x = 0\,).$$

Lo mismo que en el caso anterior, el concepto de carencia de torsión viene determinado por una infinidad numerable de axiomas.

Conviene señalar que los grupos abelianos *periódicos* no se definen como los que no son aperiódicos, i.e., aquellos $\mathbf{A}$ para los que se cumple que, para al menos un número natural no nulo n, existe un $x \in A$ tal que $x \neq 0$ pero $nx = 0$, sino como los que tienen la propiedad de que, para cada $x \in A$, existe un $n \in \mathbb{N} - 1$ tal que $nx = 0$.

Proposición 5.250. *El grupo abeliano subyacente de cualquier espacio vectorial no trivial sobre el cuerpo de los racionales es divisible y sin torsión. Además, cualquier grupo abeliano divisible sin torsión no trivial es el grupo abeliano subyacente de un espacio vectorial sobre el cuerpo* $\mathbf{Q}$.

Demostración. Sea $\mathbf{A} = (A, +, -, 0)$ un grupo abeliano divisible sin torsión no trivial. Vamos a definir una acción de $\mathbf{Q}$ sobre $\mathbf{A}$, de modo que dote al grupo abeliano $\mathbf{A}$ de una estructura de $\mathbf{Q}$-espacio vectorial. Sea $a \in A$ y $q = m/n \in \mathrm{Q}$, con $m \in \mathrm{Z}$ y $n > 0$. Entonces $ma \in A$, por ser $\mathbf{A}$ grupo abeliano, luego para $n > 0$, por ser $\mathbf{A}$ divisible, hay un $b \in A$ tal que $nb = ma$. Además, si $c \in A$ fuera tal que $nc = ma$, entonces $n(b - c) = 0$, luego, ya que $n > 0$, por ser $\mathbf{A}$ sin torsión, $b - c = 0$, i.e., $b = c$. Podemos afirmar, por lo tanto, que hay un único $b \in A$ tal que $nb = ma$. Definimos, en consecuencia, la acción de $q = m/n$ sobre a, como el único $b \in A$ tal que $nb = ma$. Dejamos como ejercicio la demostración de que tal acción dota al grupo abeliano $\mathbf{A}$ de una estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbf{Q}$. □

Demuéstrese que los grupos abelianos $\mathbf{R} = (R, +, -, 0)$ y $\mathbf{Q} = (Q, +, -, 0)$, de los reales y los racionales, resp., son grupos abelianos divisibles sin torsión (y no triviales).

Evidentemente, todos los grupos abelianos divisibles sin torsión y no triviales son infinitos. Además, para cada cardinal $\mathfrak{n}$ tal que $\aleph_0 < \mathfrak{n}$, la teoría de los grupos abelianos divisibles sin torsión y no triviales es $\mathfrak{n}$-categórica. En efecto, si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos grupos abelianos divisibles sin torsión y no triviales de cardinal $\mathfrak{n}$, con $\aleph_0 < \mathfrak{n}$, entonces, en tanto que $\mathbf{Q}$-espacios vectoriales, tienen bases infinitas X e Y, resp. Si $\mathrm{card}(X) = \mathfrak{m}$, entonces, por una parte, $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$, y, por otra $\mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}\aleph_0 = \mathfrak{m}$, luego $\mathfrak{n} = \mathrm{card}(X)$. Del mismo modo obtenemos que $\mathfrak{n} = \mathrm{card}(Y)$. Por lo tanto, en tanto que $\mathbf{Q}$-espacios vectoriales, son isomorfos. De donde, en virtud del test de Łoś-Vaught, podemos afirmar la completud de la teoría de los grupos abelianos divisibles sin torsión y no triviales.

Observemos que entonces los grupos abelianos $\mathbf{R} = (R, +, -, 0)$ y $\mathbf{Q} = (Q, +, -, 0)$, por ser grupos abelianos divisibles sin torsión y no triviales, son elementalmente equivalentes, pero no isomorfos.

Por otra parte, la teoría de los grupos abelianos divisibles sin torsión no triviales, no es $\aleph_0$-categórica, debido a que tal teoría tiene (una infinidad de) modelos infinito numerables, que no son isomorfos, por ejemplo, las potencias finitas de $\mathbf{Q} = (Q, +, -, 0)$, considerado como $\mathbf{Q}$-espacio vectorial.

Haciendo uso del test de Łoś-Vaught, también se puede demostrar que la teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados de característica p, siendo $p = 0$ o un número primo, es completa.

Definición 5.251. Decimos que un cuerpo $\mathbf{K}$ es algebraicamente cerrados si, para cada $n \in \mathbb{N} - 1$, se cumple que:

$$\forall x_0, \dots, x_n \in K \,(\, x_n \neq 0 \rightarrow \exists y \in K \,(x_n y^n + \cdots + x_1 y + x_0 = 0)).$$

Una vez más, observemos que la propiedad de un cuerpo de estar algebraicamente cerrado, viene determinado por una infinidad numerable de axiomas.

Veamos que la teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados de característica p, es para cada cardinal $\mathfrak{n}$ tal que $\aleph_0 < \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}$-categórica.

Lema 5.252. *Sea* $\mathbf{A}$ *un sistema algebraico y* Φ *un conjunto de fórmulas cerradas tal que* $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) \subseteq [\mathbf{A}]_{\equiv}$. *Entonces*

1. $[\mathbf{A}]_{\equiv} = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A}))$.
2. $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A}) \subseteq \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))$.

Demostración. □

Proposición 5.253. *Las clases de equivalencia* $[\mathbf{A}]_{\equiv} \in \mathsf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})/\equiv$ *son los conjuntos (de sistemas algebraicos) axiomatizables minimales.*

Demostración. Puesto que, por el lema 5.252, $[\mathbf{A}]_{\equiv} = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A}))$, podemos afirmar que $[\mathbf{A}]_{\equiv}$ es axiomatizable.

Veamos que $[\mathbf{A}]_{\equiv}$ es minimal. Sea Φ un conjunto de fórmulas cerradas tal que $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) \subseteq [\mathbf{A}]_{\equiv}$. Sea $\mathbf{B}$ un sistema algebraico tal que $\mathbf{B} \in [\mathbf{A}]_{\equiv}$, i.e., tal que $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{B}) = \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A})$ y supongamos que $\mathbf{B} \notin \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)$. Entonces hay una fórmula cerrada $\varphi \in \Phi$ tal que $\varphi \notin \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{B})$, por lo tanto $\varphi \notin \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A})$, luego $\neg\varphi \in \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A})$ (porque $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A})$ es completa). Pero, ya que $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) \subseteq [\mathbf{A}]_{\equiv}$, por el lema 5.252, se cumple que

$$\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A}) \subseteq \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)),$$

luego $\neg\varphi \in \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))$, por lo tanto todo modelo de Φ, que, en particular, lo será de φ, es modelo de $\neg\varphi$, lo cual es absurdo. De modo que $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) = [\mathbf{A}]_{\equiv}$. □

Proposición 5.254. *El subconjunto* $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ *de* $\mathrm{Sub}(\mathsf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi}))/\equiv)$ *definido como:*

$$\mathcal{B}_{\mathcal{L}} = \{\, \mathrm{B}_{\varphi} \mid \varphi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L}) \,\},$$

siendo, para cada $\varphi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, B_{φ} *el conjunto definido como:*

$$\mathrm{B}_{\varphi} = \{\, [\mathbf{A}]_{\equiv} \in \mathsf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})/\equiv \mid \mathbf{A} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\varphi) \,\},$$

es una base para una topología sobre $\mathsf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})/\equiv$.

Demostración. Es evidente que $\bigcup_{\varphi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})} \mathrm{B}_{\varphi} \subseteq \mathsf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})/\equiv$. Por otra parte, si $[\mathbf{A}]_{\equiv} \in \mathsf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})/\equiv$, entonces $[\mathbf{A}]_{\equiv} \in \mathrm{B}_{\varphi}$, siendo φ cualquier fórmula cerrada de $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A})$.

Por último, si $[\mathbf{A}]_{\equiv} \in \mathrm{B}_{\varphi} \cap \mathrm{B}_{\psi}$, entonces $[\mathbf{A}]_{\equiv} \in \mathrm{B}_{\varphi \wedge \psi} \subseteq \mathrm{B}_{\varphi} \cap \mathrm{B}_{\psi}$. □

Proposición 5.255. *El espacio topológico* $(\mathsf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})/\equiv, \mathrm{Tg}_X(\mathcal{B}_{\mathcal{L}}))$ *es Hausdorff, compacto y cero-dimensional, luego* totalmente desconectado*, i.e., las componentes conexas son puntuales, y normal.*

Demostración. □

Demuéstrese que los cerrados de $(\mathsf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})/\equiv, \mathrm{Tg}_X(\mathcal{B}_{\mathcal{L}}))$ son precisamente los subconjuntos de $\mathsf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})/\equiv$ que se pueden representar, para algún conjunto de fórmulas cerradas Φ, como $\mathrm{B}_{\Phi} = \{\, [\mathbf{A}]_{\equiv} \mid \mathbf{A} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) \,\}$.

Ahora establecemos un teorema de Taimanov([**?**]) de caracterización del operador clausura del espacio topológico $(\mathsf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})/\equiv, \mathrm{Tg}_X(\mathcal{B}_{\mathcal{L}}))$, mediante el concepto de ultraproducto.

Teorema 5.256 (Taimanov). *Sea* $\mathbf{A}$ *un sistema algebraico y* $\{\,[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda\in\Lambda\,\}$ *un subconjunto de* $\mathsf{SAlg}(\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Pi})/\equiv$. *Entonces* $[\mathbf{A}]_\equiv \in \overline{\{\,[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda\in\Lambda\,\}}$ *precisamente si hay un conjunto* I*, una familia* $(\mathbf{A}_i \mid i\in I)$ *de sistemas algebraicos en* $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv$ *y un ultrafiltro* $\mathcal{F}$ *sobre* I *tal que* $\mathbf{A}\equiv\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}}$.

Demostración. Veamos en primer lugar que $[\mathbf{A}]_\equiv \in \overline{\{\,[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda\in\Lambda\,\}}$ exactamente si, para cada $\varphi\in\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv)$, $\mathbf{A}\models_{\mathcal{L}}\varphi$ o, lo que es equivalente, si, para cada $\varphi\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A}_\lambda)$, $\mathbf{A}\models_{\mathcal{L}}\varphi$, ya que se cumple que

$$\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\textstyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A}_\lambda).$$

Supongamos que, para cada $\varphi\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A}_\lambda)$, $\mathbf{A}\models_{\mathcal{L}}\varphi$. Entonces, para cualquier conjunto de fórmulas cerradas Φ, si $\{\,[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda\in\Lambda\,\}\subseteq \mathrm{B}_\Phi$, tenemos que, para cada $\lambda\in\Lambda$, $[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv\in\mathrm{B}_\Phi$, luego, para cada $\lambda\in\Lambda$, $\mathbf{A}_\lambda\models_{\mathcal{L}}\Phi$, así que, para cada $\lambda\in\Lambda$, $\Phi\subseteq\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A}_\lambda)$, i.e., $\Phi\subseteq\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A}_\lambda)$, por consiguiente $\mathbf{A}\models_{\mathcal{L}}\Phi$, de modo que $[\mathbf{A}]_\equiv\in\mathrm{B}_\Phi$ y, por lo tanto, $[\mathbf{A}]_\equiv \in \overline{\{\,[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda\in\Lambda\,\}}$. Recíprocamente, supongamos que $[\mathbf{A}]_\equiv$ esté en la clausura de $\{\,[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda\in\Lambda\,\}$. Si existiera un $\varphi\in\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv)$ tal que $\mathbf{A}\notin\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\varphi)$, entonces $[\mathbf{A}]_\equiv$ no estaría en la clausura de $\{\,[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda\in\Lambda\,\}$, porque, para el cerrado B_φ se cumpliría que $[\mathbf{A}]_\equiv\notin\mathrm{B}_\varphi$, pero que $\{\,[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda\in\Lambda\,\}\subseteq\mathrm{B}_\varphi$. Por lo tanto, para cada $\varphi\in\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv)$, $\mathbf{A}\models_{\mathcal{L}}\varphi$.

Ahora que ya sabemos que $[\mathbf{A}]_\equiv \in \overline{\{\,[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda\in\Lambda\,\}}$ si y sólo si para cada $\varphi\in\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv)$, $\mathbf{A}\models_{\mathcal{L}}\varphi$, si existiera un conjunto I, una familia $(\mathbf{A}_i \mid i\in I)$ de sistemas algebraicos en $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv$ y un ultrafiltro $\mathcal{F}$ sobre I tal que $\mathbf{A}\equiv\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}}$, entonces, en virtud del teorema de Łoś, $[\mathbf{A}]_\equiv \in \overline{\{\,[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda\in\Lambda\,\}}$.

Recíprocamente, sea $[\mathbf{A}]_\equiv \in \overline{\{\,[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda\in\Lambda\,\}}$ y elijamos un sistema algebraico $\mathbf{A}_\lambda$ en cada clase de equivalencia de $\{\,[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda\in\Lambda\,\}$. Puesto que para cada $\varphi\in\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv)$, $\mathbf{A}\models_{\mathcal{L}}\varphi$, para cualquier fórmula cerrada ψ válida en $\mathbf{A}$, existe un $\mathbf{B}\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv$ tal que $\mathbf{B}\models_{\mathcal{L}}\psi$ (porque sino, i.e., si existiera una fórmula cerrada ψ tal que $\mathbf{A}\models_{\mathcal{L}}\psi$ pero, para cada $\mathbf{B}\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv$, $\mathbf{B}\not\models_{\mathcal{L}}\psi$, entonces, para cada $\mathbf{B}\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv$, $\mathbf{B}\models_{\mathcal{L}}\neg\varphi$, luego $\mathbf{A}\models_{\mathcal{L}}\neg\varphi$, absurdo). Para cada $[\psi]_\approx\in\mathrm{LT}(\mathcal{L})$ tal que $\mathbf{A}\models_{\mathcal{L}}\psi$, sea $E_{[\psi]_\approx}=\{\,\lambda\in\Lambda \mid \mathbf{A}_\lambda\models_{\mathcal{L}}\psi\,\}$. Entonces $E_{[\psi]_\approx}\neq\varnothing$, porque para cualquier fórmula cerrada ψ válida en $\mathbf{A}$, existe un $\mathbf{B}\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv$ tal que $\mathbf{B}\models_{\mathcal{L}}\psi$; y $E_{[\psi]_\approx}\cap E_{[\xi]_\approx}=E_{[\psi\wedge\xi]_\approx}$. Por lo tanto hay un ultrafiltro $\mathcal{F}$ sobre Λ que contiene a todos los conjuntos de la forma $E_{[\psi]_\approx}$, cuando ψ recorre el conjunto de las fórmulas cerradas. Se cumple que $\mathbf{A}\equiv\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}}$ □

6. Completud.

En esta sección desarrollamos la teoría de la deducción para la lógica de predicados de primer orden y establecemos el teorema de completud de Gödel-Mal'cev, que afirma la coincidencia entre la relación de consecuencia semántica y la relación de consecuencia sintáctica. La parte del teorema de completud que afirma que si $\Gamma\vdash_{\mathcal{L}}\varphi$, entonces $\Gamma\models_{\mathcal{L}}\varphi$, se conoce con el nombre de teorema de corrección; mientras que la parte que afirma que si $\Gamma\models_{\mathcal{L}}\varphi$, entonces $\Gamma\vdash_{\mathcal{L}}\varphi$, recibe el nombre de teorema de adecuación.

Para demostrar el teorema de corrección hemos de introducir el concepto, sintáctico, de demostración de una fórmula a partir de un conjunto de fórmulas. Ello se logra estableciendo un sistema de axiomas y reglas de inferencia, i.e., definiendo un álgebra nodeterminista, no libre, y considerando el operador clausura algebraico inducido por tal sistema de axiomas y reglas de inferencia. Entonces se demuestra que los axiomas son universalmente válidos y que las reglas de inferencia son universalmente válidas, i.e., preservan la verdad, en el sentido de que si las premisas de la regla son verdaderas, también lo es la conclusión de la misma.

1. Tautologías.

2. $\forall x\, \varphi \to (\,{}^{x}_{P}\,)\, \varphi$ (Proyecciones.)
   El término P ha de estar libre para x en φ.
3. $(\,{}^{x}_{P}\,)\, \varphi \to \exists x\, \varphi$ (Inclusiones.)
   El término P ha de estar libre para x en φ.
4. $\frac{\varphi,\ \varphi\to\psi}{\psi}$ (Modus ponens.)
5. $\frac{\psi\to\varphi(x)}{\psi\to\forall x\, \varphi(x)}$ (Propiedad universal de la proyección.)
   En la fórmula ψ la variable x no ha de ocurrir libre.
6. $\frac{\varphi(x)\to\psi}{\exists x\, \varphi(x)\to\psi}$ (Propiedad universal de la inclusión.)
   En la fórmula ψ la variable x no ha de ocurrir libre.

El motivo por el cual se exige que en la regla de inferencia $\frac{\psi\to\varphi(x)}{\psi\to\forall x\, \varphi(x)}$, en la fórmula ψ la variable x no ocurra libre, reside en que si, e.g., π es una relación formal de rango 1, $\varphi = \pi(x)$ y $\psi = \pi(x)$, entonces la fórmula $\pi(x) \to \pi(x)$ es universalmente válida, mientras que la fórmula $\pi(x) \to \forall x\, \pi(x)$ no siempre es universalmente válida, e.g., si π se realiza en N como significando el conjunto de los números pares, es evidente que del hecho que un número natural determinado sea par, no se puede concluir que todos los números naturales sean pares.

En la regla de inferencia $\frac{\varphi(x)\to\psi}{\exists x\, \varphi(x)\to\psi}$ también se exige que en la fórmula ψ la variable x no ocurra libre. Si no se exigiera tal condición, como para el caso anterior, de $\pi(x) \to \pi(x)$, concluiríamos $\exists x\, \pi(x) \to \pi(x)$, luego, ya que x no ocurre libre en $\exists x\, \pi(x)$, también $\exists x\, \pi(x) \to \forall x\, \pi(x)$, pero, es evidente, que, en general, del hecho que exista una entidad que tenga una cierta propiedad, no se concluye que toda entidad la tenga, e.g., de que un número natural sea primo, no se concluye que todos los números naturales sean primos.

El motivo por el cual se exige que en el axioma $\forall x\, \varphi \to (\,{}^{x}_{P}\,)\, \varphi$, el término P esté libre para x en φ, reside en que si, e.g., π es una relación formal de rango 2, $\varphi = \exists y\, \neg\pi(x, y)$ y $P = y$, entonces la fórmula $(\,{}^{x}_{P}\,)\, \varphi = \exists y\, \neg\pi(y, y)$ y, por lo tanto $\forall x\, \varphi \to (\,{}^{x}_{P}\,)\, \varphi = [\forall x\, \exists y\, \neg\pi(x, y)] \to [\exists y\, \neg\pi(y, y)]$. Pero si en un conjunto A, con al menos dos elementos, interpretamos π como la diagonal, entonces la fórmula $[\forall x\, \exists y\, \neg\pi(x, y)] \to [\exists y\, \neg\pi(y, y)]$ es falsa en (A, Δ_A).

El motivo por el cual se exige que en el axioma $(\,{}^{x}_{P}\,)\, \varphi \to \exists x\, \varphi$ (Inclusiones.) el término P esté libre para x en φ, reside en que si, e.g., π es una relación formal de rango 2, $\varphi = \forall y\, \pi(x, y)$ y $P = y$, entonces la fórmula $(\,{}^{x}_{P}\,)\, \varphi = \forall y\, \pi(y, y)$ y, por lo tanto $(\,{}^{x}_{P}\,)\, \varphi \to \exists x\, \varphi = [\forall y\, \pi(y, y)] \to [\exists x\, \forall y\, \pi(x, y)]$. Pero si en N interpretamos π como $\geq$, entonces la fórmula $[\forall y\, \pi(y, y)] \to [\exists x\, \forall y\, \pi(x, y)]$ es falsa en $(\mathrm{N}, \geq)$.

Otro ejemplo con $\varphi = \forall y\, (x = y)$ y $P = y$.

Definición 6.1. Sea $n > 0$. Una regla de inferencia de orden n es una aplicación R de $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})^n$ en $\mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L}))$.

1. La regla de inferencia R es universalmente válida si, para cada $(\varphi_i)_{i\in n} \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})^n$, cada $\varphi \in R(\varphi_i \mid i \in n)$ y cada sistema algebraico $\mathbf{A}$, si, para cada $i \in n$, $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi_i$, entonces $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi$.
2. La regla de inferencia R es derivada si, para cada $(\varphi_i)_{i\in n} \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})^n$, cada $\varphi \in R(\varphi_i \mid i \in n)$ y cada conjunto de sentencias Γ, si, para cada $i \in n$, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_i$, entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.

Si R es derivada, entonces es universalmente válida.

Proposición 6.2. *Los axiomas y las reglas de inferencia son universalmente válidas.*

para demostrar el teorema de adecuación procedemos, siguiendo a Henkin, a construir un modelo de cada conjunto de fórmulas consistente.

Referencias

[1] D. Barnes and J. Mack, *An algebraic introduction to mathematical logic*, Springer-Verlag, 1975 (Hay traducción al castellano).
[2] S. Burris and H. Sankappanavar, *A course in universal algebra*, Springer-Verlag, 1981.
[3] P. Halmos, *Lectures on Boolean algebras*, D. Van Nostrand, 1963.
[4] A. Hamilton, *Logic for mathematicians*, Cambridge University Press, 1978 (Hay traducción al castellano).
[5] J. Donald Monk, *Mathematical Logic*, Springer-Verlag, 1976.

Universidad de Valencia, Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia, Apt. 22.109 E-46071 Valencia, Spain
E-mail address: Juan.B.Climent@uv.es