TEORÍA DE LA RECURSIÓN Y EL PRIMER TEOREMA DE INCOMPLETUD DE GÖDEL

J. CLIMENT VIDAL

RESUMEN. Demostramos el primer teorema de incompletud de Gödel, según el cual una teoría *recursiva* y *consistente* que contenga a un fragmento de la *aritmética de Peano-Dedekind*, es *incompleta*. Para ello, una vez demostrada la existencia de un álgebra de Dedekind-Peano, haciendo uso del axioma del conjunto infinito, presentamos, por una parte, las nociones fundamentales de la teoría de la recursión, utilizando como instrumento el álgebra heterogénea, tales como las de aplicación recursiva primitiva, recursiva general y parcial recursiva, así como las de relación recursiva primitiva, recursivamente enumerable y recursiva, y, por otra, las de la teoría de modelos, tales como las de lenguaje de primer orden, término, fórmula, las realizaciones de los términos y las fórmulas en los sistemas algebraicos y la relación de satisfacibilidad entre fórmulas y sistemas algebraicos. Además, enunciamos los axiomas de Peano-Dedekind, definimos las relaciones y aplicaciones representables y el proceso de la aritmetización de Gödel.

ÍNDICE

Date: 24 de febrero de 2008.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary: ; Secondary:

1. Introducción.

A principios del siglo pasado, entre los años 1907 y 1921, Brouwer y Weyl criticaron la fundamentación conjuntista Cantoriana del análisis matemático, en lo que concierne al uso, en las matemáticas, del principio del tercio excluso y de las demostraciones por reducción al absurdo de enunciados existenciales, así como del principio de Eudoxo-Arquímedes de la existencia del supremo de cualquier conjunto de números reales no vacío que esté acotado superiormente, en el que está involucrado el asunto de la legitimidad, en las matemáticas, de las definiciones impredicativas, que son aquellas en las que el objeto definido ocurre en la definición.

Frente a esto Hilbert se propuso demostrar la consistencia de las matemáticas, legitimando tanto los modos tradicionales de demostración, como los nuevos basados en el principio de la demostración por inducción transfinita, la definición por recursión transfinita y el axioma de elección. Razones para poder esperar llevar a cabo tal proeza no le faltaban, dada su extraordinaria capacidad para resolver profundos problemas matemáticos, puesta a prueba en múltiples ocasiones. Ahora bien, debido a que, en el año 1899, había demostrado que su axiomatización de la geometría Euclídea era tan consistente como pudiera serlo una teoría de los números reales, el problema se reducía a demostrar la consistencia de una de estas, concretamente a demostrar que hay al menos una fórmula cerrada, i.e., sin variables libres, que no se puede deducir a partir de los axiomas de la teoría en cuestión. Además, tal demostración de consistencia, para ser aceptable, desde el punto de vista de Hilbert, debía llevarse a cabo haciendo sólo uso de procedimientos puramente "finitista", y, puesto que el concepto de número real se fundamenta sobre el de número natural, en virtud del trabajo de Dedekind, era suficiente demostrar la consistencia de la teoría de este último.

Los resultados obtenidos por Gödel, relativos a la incompletud de ciertos sistemas formales, esencialmente la teoría de tipos simple de Ramsey-Russell más la aritmética de Peano-Dedekind, supusieron la destrucción del programa Hilbertiano de eliminar del mundo y de una vez por todas la cuestión de los fundamentos de las matemáticas, al poner de manifiesto el abismo infranqueable entre *verdad* y *demostrabilidad*, así como el que hay entre las teorías matemáticas y su representación formal.

2. Algebras heterogéneas relativas a un conjunto de tipos.

En esta sección presentamos, para un conjunto de tipos S, arbitrario pero fijo, los conceptos de S-conjunto heterogéneo y S-aplicación heterogénea entre S-conjuntos heterogéneos, poniendo de relieve que tales entidades constituyen no sólo una categoría, sino un topos, i.e., un lugar matemático, lo suficientemente semejante al mundo conjuntista Cantoriano clásico, como para que en el se pueda desarrollar con toda naturalidad el pensamiento matemático, pero sujeto a la lógica interna del topos. Además, presentamos las nociones y construcciones imprescindibles del álgebra heterogénea que usaremos para definir las diferentes clases de aplicaciones y relaciones recursivas. Las aplicaciones y relaciones mencionadas se pueden definir de multitud de maneras diferentes, desde las máquinas de Turing hasta los algoritmos de Markoff, pasando por el λ-cálculo de Church o la lógica combinatoria de Curry, pero hemos adoptado una presentación algebraica de las mismas por su sencillez y claridad, al menos eso es así para el autor de estas notas.

2.1. La categoría $\mathbf{Set}^S$ de S-conjuntos.

Para empezar definimos, para un conjunto de tipos, arbitrario, pero fijo, el concepto de conjunto heterogéneo, las deltas de Kronecker, la relación de inclusión entre conjuntos heterogéneos, el producto, el coproducto y la unión de una familia de conjuntos heterogéneos, la intersection de una familia no vacía de conjuntos heterogéneos, y las relaciones, funciones y aplicaciones heterogéneas entre conjuntos heterogéneos.

Definición 2.1. Sea S un conjunto de tipos arbitrario, pero fijo.

1. Una palabra sobre S es una aplicación $w\colon n \longrightarrow S$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Denotamos por $S^\star$ el conjunto de todas las palabras sobre S, i.e., $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S^n$. Además, llamamos a la única aplicación $\lambda\colon \varnothing \longrightarrow S$, la palabra vacía sobre S. La longitud de w, $|w|$, es el dominio de la aplicación w.
2. Un S-conjunto es una aplicación $A = (A_s)_{s\in S}$ de S en $\boldsymbol{\mathcal{U}}$, siendo $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ un universo de Grothendieck arbitrario, pero fijo. Si A y B son S-conjuntos, entonces $A \subseteq B$ si, para cada $s \in S$, $A_s \subseteq B_s$. El conjunto de los sub-S-conjuntos de A se denota por $\mathrm{Sub}(A)$ y cuando se le considera ordenado por $\subseteq$ como $\mathbf{Sub}(A)$. Además, dado un conjunto de índices I y una I-familia $(A^i)_{i\in I}$ de S-conjuntos, denotamos por $\prod_{i\in I} A^i$ el S-conjunto tal que, para cada $s \in S$,
$$(\textstyle\prod_{i\in I} A^i)_s = \prod_{i\in I} A^i_s,$$
por $\coprod_{i\in I} A^i$ el S-conjunto tal que, para cada $s \in S$,
$$(\textstyle\coprod_{i\in I} A^i)_s = \coprod_{i\in I} A^i_s,$$
por $\bigcup_{i\in I} A^i$ el S-conjunto tal que, para cada $s \in S$,
$$(\textstyle\bigcup_{i\in I} A^i)_s = \bigcup_{i\in I} A^i_s,$$
y si I no es vacío, por $\bigcap_{i\in I} A^i$ el S-conjunto tal que, para cada $s \in S$,
$$(\textstyle\bigcap_{i\in I} A^i)_s = \bigcap_{i\in I} A^i_s.$$
3. Una S-relación de un S-conjunto A en otro B es un sub-S-conjunto Φ de $A\times B$. Al conjunto de las S-relaciones de A en B lo denotamos por $\mathrm{Rel}(A, B)$. Si $A = B$, entonces $\mathrm{Rel}(A, B)$ se denota como $\mathrm{Rel}(A)$. La diagonal de A, Δ_A, es la S-relación en A cuya coordenada s-ésima es Δ_{A_s}, i.e., la diagonal

de A_s. La composición de S-relaciones se realiza coordenada a coordenada, i.e., si Φ es una S-relación de A en B y Ψ lo es de B en C, la composición de Φ y Ψ, $\Psi \circ \Phi$, se define como $\Psi \circ \Phi = (\Psi_s \circ \Phi_s)_{s \in S}$.

4. Una S-función de un S-conjunto A en otro B es una S-relación funcional F de A en B, i.e., una S-relación F de A en B tal que para cada $s \in S$, F_s es una función de A_s en B_s. Al conjunto de las S-funciones de A en B lo denotamos por $\mathrm{Fnc}(A, B)$. La composición de S-funciones, que es un caso particular de la composición de S-relaciones, es una S-función.
5. Una S-aplicación de un S-conjunto A en otro B es un triplo $f = (A, F, B)$ en el que F es una S-función de A en B. Al *conjunto* de las S-aplicaciones de A en B lo denotamos por $\mathrm{Hom}(A, B)$ o por B_A. Las expresiones $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ y $f\colon A \longrightarrow B$ las consideramos sinónimas. La composición de S-aplicaciones es una S-aplicación, como también lo es la identidad.
6. Si $w \in S^\star$ y A en un S-conjunto, entonces A_w es $\prod_{i \in |w|} A_{w_i}$.
7. Dado un tipo $t \in S$ llamamos delta de Kronecker en t, al S-conjunto $\delta^t = (\delta^t_s)_{s \in S}$ definido, para cada $s \in S$, como:

$$\delta^t_s = \begin{cases} 1, & \text{if } s = t; \\ \varnothing, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Para $t \in S$ y un conjunto A, denotamos por $\delta^{t,A}$ el S-conjunto definido, para cada $s \in S$, como:

$$\delta^{t,A}_s = \begin{cases} A, & \text{if } s = t; \\ \varnothing, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

En alguna ocasión, abusando del lenguaje, denotaremos por $\delta^{t,a}$ lo que deberíamos denotar por $\delta^{t,\{a\}}$.

En los conjuntos ordinarios, las aplicaciones de un conjunto A en otro B son, a su vez, un conjunto que coincide con el objeto exponencial de la categoría de conjuntos. En cambio, para un conjunto de tipos S no unitario, las S-aplicaciones de un S-conjunto A en otro B no determinan un S-conjunto sino un conjunto ordinario al que hemos denotado por B_A. Reservamos la notación B^A para cuando introduzcamos el objeto exponencial de la categoría de conjuntos heterogéneos.

Las S-aplicaciones pueden clasificarse con respecto a sus propiedades locales, i.e., su comportamiento en cada coordenada del conjunto de tipos.

Definición 2.2. Sea S un conjunto de tipos, A un S-conjunto y P una propiedad de los conjuntos. Entonces A es localmente P si, para cada $s \in S$, A_s es P. De igual modo, si $f\colon A \longrightarrow B$ es una S-aplicación y P una propiedad de las aplicaciones, entonces f es localmente P si, para cada $s \in S$, f_s es P. En particular, un S-conjunto es localmente finito si, para cada $s \in S$, A_s es finito y una S-aplicación es localmente inyectiva (resp., sobreyectiva, biyectiva) cuando la S-función subyacente es, para cada $s \in S$, inyectiva (resp., sobreyectiva, biyectiva).

Los operadores de imagen directa e imagen inversa asociados a una S-aplicación f se definen, igualmente, coordenada a coordenada.

Definición 2.3. Sea $f\colon A \longrightarrow B$ una S-aplicación:

1. La f-imagen directa (o imagen directa a través de f), es la aplicación definida como:

$$f[\cdot] \begin{cases} \mathrm{Sub}(A) & \longrightarrow & \mathrm{Sub}(B) \\ X & \longmapsto & (f_s[X_s])_{s \in S} \end{cases}$$

2. La f-imagen inversa(o imagen inversa través de f), es la S-aplicación definida como:
$$f^{\text{-}1}[\cdot]\begin{cases}\mathrm{Sub}(B) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A)\\ \quad Y \quad\longmapsto (f_s^{-1}[Y_s])_{s\in S}\end{cases}$$

Proposición 2.4. *Sea $f\colon A \longrightarrow B$ una S-aplicación. Entonces*

1. $f^{-1}[\cdot]$ *preserva el orden y conmuta con los operadores $\bigcap$ y $\bigcup$, y también con la diferencia.*
2. $f[\cdot]$ *preserva el orden y conmuta con $\bigcup$ (pero no en general con $\bigcap$, para el que únicamente es cierto, en general, que $f[\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F] \subseteq_S \bigcap_{F\in\mathcal{F}} f[F]$.*

A partir de una S-aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ se obtiene un functor
$$f^{-1}[\cdot]\begin{cases}\mathbf{Sub}(B) \longrightarrow \mathbf{Sub}(A)\\ \quad Y \quad\longmapsto (\{a\in A_s \mid f_s(a)\in Y_s)\})_{s\in S}\end{cases}$$
la f-imagen inversa, que tiene un adjunto por la izquierda
$$f[\cdot]\begin{cases}\mathbf{Sub}(A) \longrightarrow \mathbf{Sub}(B)\\ \quad X \quad\longmapsto (\{b\in B_s \mid \exists x\in X_s\,(f_s(x)=b)\})_{s\in S}\end{cases}$$
la f-imagen directa o existencial, y un adjunto por la derecha
$$f_!\begin{cases}\mathbf{Sub}(A) \longrightarrow \mathbf{Sub}(B)\\ \quad X \quad\longmapsto (\{b\in B_s \mid f_s^{-1}[\{b\}]\subseteq X_s\})_{s\in S}\end{cases}$$
la f-imagen universal.

Esto significa que $\forall X\subseteq A$, $\forall Y\subseteq B$
$$f[X]\subseteq Y \text{ exactamente si } X\subseteq f^{-1}[Y] \text{ y}$$
$$f^{-1}[Y]\subseteq X \text{ exactamente si } Y\subseteq f_!(X)$$

Definición 2.5. Sea S un conjunto de tipos.

1. Una S-relación Φ en un S-conjunto A es una S-relación de equivalencia sobre A, si, para cada $s\in S$, Φ_s es una relación de equivalencia sobre A_s. Si $(a,b)\in\Phi_s$, se escribe también $a\equiv b\,(\text{mód.}\,\Phi_s)$ o $a\equiv_{\Phi_s} b$.

   Al conjunto de las S-relaciones de equivalencias sobre un S-conjunto A lo denotamos por $\mathrm{Eqv}(A)$ y por $\mathbf{Eqv}(A)$ cuando lo consideremos ordenado por la S-inclusión. Lo mismo que en el caso homogéneo, $\mathbf{Eqv}(A)$ es un retículo algebraico y al operador clausura algebraico asociado lo denotamos por Eg_A. Observemos que el operador equivalencia generada se obtiene localmente a través de los operadores equivalencia generada homogéneos, puesto que, para cada S-conjunto A, se cumple que $\mathrm{Eg}_A(\Phi)=(\mathrm{Eq}_{A_s}(\Phi_s))_{s\in S}$.
2. Si $\Phi,\Psi\in\mathrm{Eqv}(A)$ con $\Phi\subseteq_S\Psi$. Entonces el cociente de Ψ entre Φ, Ψ/Φ, es la S-relación de equivalencia $(\Psi_s/\Phi_s)_{s\in S}$ sobre A/Φ cuya coordenada s-ésima es
$$\Psi_s/\Phi_s=\{([a]_{\Phi_s},[b]_{\Phi_s})\in(A_s/\Phi_s)\mid (a,b)\in\Psi_s\}$$
3. Sea $X\subseteq_S A$ y $\Phi\in\mathrm{Eqv}(A)$. La Φ-saturación de X, $\mathrm{Sat}_\Phi(X)$, es el S-conjunto cuya coordenada s-ésima es
$$\mathrm{Sat}_\Phi(X)_s=\{a\in A_s\mid X_s\cap[a]_{\Phi_s}\neq\emptyset\}=\textstyle\bigcup_{x\in X_s}[x]_{\Phi_s}$$

Los núcleos e imágenes de las S-aplicaciones se definen localmente. La factorización clásica de las aplicaciones es válida también para las S-aplicaciones.

Definición 2.6. Si $f\colon A\longrightarrow B$ es una S-aplicación, el núcleo de f, $\mathrm{Ker}(f)$, es la S-relación de equivalencia sobre A determinada por los núcleos de las aplicaciones subyacentes, i.e., $\mathrm{Ker}(f)=(\mathrm{Ker}(f_s))_{s\in S}$. La imagen de f, $\mathrm{Im}(f)$, es el S-conjunto $(\mathrm{Im}(f_s))_{s\in S}$.

Proposición 2.7. *Si $f\colon A \longrightarrow B$ es una S-aplicación, entonces f se puede factorizar como*

$$\begin{tikzcd}
 & A/\operatorname{Ker}(f) \arrow[dr, "f^{\mathrm{i}}"] \arrow[dd, "f^{\mathrm{b}}"] & \\
A \arrow[ur, "\mathrm{pr}_{\operatorname{Ker}(f)}"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f^{\mathrm{sb}}"'] & & B \\
 & \operatorname{Im}(f) \arrow[ur, "\mathrm{in}_{\operatorname{Im}(f)}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde todas la S-aplicaciones se definen a partir de las correspondientes en cada coordenada, i.e., para cada $s \in S$, pr_s es la proyección canónica de A_s en $A_s/\operatorname{Ker}(f_s)$, f_s^{b} es el isomorfismo canónico entre $A_s/\operatorname{Ker}(f_s)$ y $\operatorname{Im}(f_s)$, in_s es la inclusión canónica en B_s, f_s^{sb} es la correstricción de f_s a $\operatorname{Im}(f_s)$ y f_s^{i} es la aplicación que a $[a]$ le asigna $f_s(a)$.

La existencia de coordenadas vacías en un S-conjunto es relevante para muchas de las nociones y construcciones que tienen que ver con el álgebra heterogénea (y la teoría de modelos heterogénea). Es por ello que introducimos a continuación la noción de *soporte* de un S-conjunto.

Definición 2.8. Sea A un S-conjunto. El soporte de A, $\operatorname{supp}(A)$, es el conjunto de los $s \in S$ tales que A_s no es vacío, i.e., $\operatorname{supp}(A) = \{s \in S \mid A_s \neq \varnothing\}$.

Para cada conjunto S, el soporte es una función $\operatorname{supp}\colon \boldsymbol{\mathcal{U}}^S \longrightarrow \operatorname{Sub}(S)$. Algunas propiedades de esta se detallan en la siguiente proposición.

Proposición 2.9. *Sea S un conjunto de tipos, A, B dos S-conjuntos, $(A^i)_{i\in I}$ una familia de S-conjuntos, y Φ una S-relación de equivalencia sobre A, i.e., $\Phi = (\Phi_s)_{s\in S}$, donde, para cada $s \in S$, Φ_s es una relación de equivalencia sobre A_s. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\operatorname{Hom}(A, B)$, *i.e., el conjunto de todas las S-aplicaciones de A en B, no es vacío si, y sólo si* $\operatorname{supp}(A) \subseteq \operatorname{supp}(B)$. *Por lo tanto, si $A \subseteq B$, i.e., si, para cada $s \in S$, $A_s \subseteq B_s$, entonces* $\operatorname{supp}(A) \subseteq \operatorname{supp}(B)$.
2. *Si de A en B existe una S-aplicación sobreyectiva, entonces* $\operatorname{supp}(A) = \operatorname{supp}(B)$. *Por lo tanto,* $\operatorname{supp}(A) = \operatorname{supp}(A/\Phi)$, *donde, para cada $s \in S$, $(A/\Phi)_s = A_s/\Phi_s$.*
3. $\operatorname{supp}((\varnothing)_{s\in S}) = \varnothing$, *donde $(\varnothing)_{s\in S}$ es el S-conjunto cuyas coordenadas son todas vacías.*
4. $\operatorname{supp}((1)_{s\in S}) = S$, *donde $(1)_{s\in S}$ es el S-conjunto cuyas coordenadas son todas el conjunto $1 = \{\varnothing\}$.*
5. $\operatorname{supp}(\bigcup_{i\in I} A^i) = \bigcup_{i\in I} \operatorname{supp}(A^i)$, *donde, para cada $s \in S$, $(\bigcup_{i\in I} A^i)_s = \bigcup_{i\in I} A^i_s$.*
6. $\operatorname{supp}(\coprod_{i\in I} A^i) = \bigcup_{i\in I} \operatorname{supp}(A^i)$, *donde, para cada $s \in S$, $(\coprod_{i\in I} A^i)_s = \coprod_{i\in I} A^i_s$.*
7. *Si I no es vacío,* $\operatorname{supp}(\bigcap_{i\in I} A^i) = \bigcap_{i\in I} \operatorname{supp}(A^i)$, *donde, para cada $s \in S$, $(\bigcap_{i\in I} A^i)_s = \bigcap_{i\in I} A^i_s$.*
8. $\operatorname{supp}(\prod_{i\in I} A^i) = \bigcap_{i\in I} \operatorname{supp}(A_i)$, *donde, para cada $s \in S$, $(\prod_{i\in I} A^i)_s = \prod_{i\in I} A^i_s$.*
9. $\operatorname{supp}(A) - \operatorname{supp}(B) \subseteq \operatorname{supp}(A - B)$, *donde, para cada $s \in S$, $(A - B)_s = A_s - B_s$.*

Para los S-conjuntos, la noción de cardinal puede definirse globalmente o relativa a cada coordenada. Desde un punto de vista *interno* a las categorías de S-conjuntos la noción adecuada es la de S-cardinal, entendiendo por tal un S-conjunto en el que todas sus coordenadas son cardinales. Externamente, la cardinalidad del coproducto de un S-conjunto es, a veces, más importante, como cuando se consideran algebras heterogéneas con operaciones finitarias.

Definición 2.10. Sea A un S-conjunto.

1. El S-cardinal de A es el S-conjunto $\mathrm{card}_S(A) = (\mathrm{card}(A_s))_{s\in S}$. Si $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{n}$ son S-cardinales entonces $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ si, para cada $s \in S$, $\mathfrak{m}_s < \mathfrak{n}_s$. El cardinal de A, $\mathrm{card}(A)$, es el cardinal del conjunto $\coprod A$.
2. A es S-finito (resp., S-infinito, S-infinito numerable, S-numerable), si, para cada $s \in S$, $\mathrm{card}(A_s)$ es finito (resp., infinito, infinito numerable, numerable).
3. A es finito (resp., infinito, infinito numerable, numerable), si $\mathrm{card}(A)$ es finito (resp., infinito, infinito numerable, numerable).

Obsérvese que si A es S-infinito y B es finito, B se puede encajar en A. De hecho, los S-conjuntos S-infinito numerables son los S-conjuntos más pequeños en los que todos los S-conjuntos finitos se pueden encajar.

Si A es un S-conjunto, denotamos mediante $\mathrm{Sub}_{\mathrm{f}}(A)$ el conjunto de los sub-S-conjuntos finitos de A, y, para un cardinal $\mathfrak{m}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sub}_{\mathfrak{m}}(A) &= \{X \subseteq_S A \mid \mathrm{card}(\textstyle\coprod X) = \mathfrak{m}\}\\
\mathrm{Sub}_{<\mathfrak{m}}(A) &= \{X \subseteq_S A \mid \mathrm{card}(\textstyle\coprod X) < \mathfrak{m}\}\\
\mathrm{Sub}_{\leq\mathfrak{m}}(A) &= \{X \subseteq_S A \mid \mathrm{card}(\textstyle\coprod X) \leq \mathfrak{m}\}
\end{aligned}$$

Los conjuntos heterogéneos y sus aplicaciones determinan, para un conjunto de tipos fijo, una categoría que, aunque hereda muchas de sus propiedades de la categoría de conjuntos ordinarios, difiere de ésta en aspectos esenciales.

Proposición 2.11. *Los S-conjuntos y las S-aplicaciones, junto con la composición y las identidades, determinan una categoría,* $\mathbf{Set}^S$*, que es, esencialmente, la categoría de functores y transformaciones naturales de S (como categoría discreta) en* $\mathbf{Set}$.

Muchas nociones categoriales en $\mathbf{Set}^S$ pueden obtenerse a partir de las correspondientes en $\mathbf{Set}$. Por ejemplo, el objeto final en $\mathbf{Set}^S$ es el S-conjunto $1^S = (1)_{s\in S}$, que en cada coordenada es el objeto final de $\mathbf{Set}$. Si A es un S-conjunto, la única S-aplicación de A en 1^S, $!_A$, se obtiene a partir de las únicas aplicaciones de A_s en el objeto final de $\mathbf{Set}$. De hecho, la construcción de límites proyectivos e inductivos en $\mathbf{Set}^S$ es un caso del teorema de los límites con parámetros de [6], tal como pone de manifiesto la siguiente proposición.

Proposición 2.12. *La categoría* $\mathbf{Set}^S$ *es completa y cocompleta.*

Demostración. Sea $\mathbf{J}$ una categoría pequeña y $F\colon \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{Set}^S$. Para cada $s \in S$, sea Pr_s el functor de $\mathbf{Set}^S$ en $\mathbf{Set}$ que a S-conjuntos A y S-aplicaciones f les asigna sus coordenadas s-ésimas A_s, f_s. Sea F_s la composición de F con Pr_s. Como $\mathbf{Set}$ es completa F_s tiene un límite proyectivo (L_s, τ_s) con L_s un conjunto y τ_s un cono proyectivo de L_s en F_s. Sea $L = (L_s)_{s\in S}$ y τ el cono proyectivo de L en F definido, para cada objeto $j \in \mathbf{J}$ y cada $s \in S$ como $\tau(j)_s = \tau_s(j)$.

Veamos que el par (L,τ) es un límite proyectivo para F. Sea $u\colon j \longrightarrow k$ un morfismo en $\mathbf{J}$. El triángulo

$$
\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "\tau_j"'] \arrow[dr, "\tau_k"] & \\
F(j) \arrow[rr, "F(u)"'] & & F(k)
\end{tikzcd}
$$

conmuta, puesto que, para cada $s \in S$, los triángulos correspondientes conmutan, ya que las τ_s son transformaciones naturales. Es un cono proyectivo límite ya que si (M,v) es otro cono proyectivo, entonces, para cada $s \in S$, hay un único morfismo $\gamma_s\colon M_s \longrightarrow L_s$, porque L_s es un límite proyectivo para cada s. Entonces $\gamma = (\gamma_s)_{s\in S}$ es el único morfismo de M en L que hace conmutativo el triángulo correspondiente.

La existencia de límites inductivos se demuestra del mismo modo. □

Las nociones de morfismos *inyectivos* y *sobreyectivos* en $\mathbf{Set}^S$, definidas a través de los miembros globales, no coinciden, en general, con las nociones *locales* de ambos conceptos. Además, a diferencia de lo que ocurre en $\mathbf{Set}$, no todos los morfismos inyectivos son monomorfismos, ni todos los sobreyectivos son epimorfismos.

Definición 2.13. Sea $f\colon A \longrightarrow B$ un morfismo de $\mathbf{Set}^S$. Decimos que f es inyectivo si, para cada $x, y\colon 1^S \longrightarrow A$, si $f \circ x = f \circ y$, entonces $x = y$. Por otra parte, decimos que f es sobreyectivo si, para cada $y\colon 1^S \longrightarrow B$, existe un $x\colon 1^S \longrightarrow A$ tal que $f \circ x = y$.

Proposición 2.14. *Sea S un conjunto de tipos. Entonces, en la categoría $\mathbf{Set}^S$, se cumple que*

1. *Sección = loc. sección $\subset$ mónica = loc. mónica = loc. inyectiva $\subset$ inyectiva.*
2. *Retracción = loc. retracción = loc. épica = loc. sobreyectiva = épica $\subset$ sobreyectiva.*

Demostración. Sea $f\colon A \longrightarrow B$ una S aplicación.

1. Puesto que la composición de S-aplicaciones se realiza coordenada a coordenada, f es una sección exactamente si f es localmente una sección.

Si f es mónica entonces, para cada $s \in S$ y cada par de aplicaciones $g, h\colon C \longrightarrow A_s$ se tiene que las únicas S-aplicaciones $\overline{g}, \overline{h}\colon \delta^s(C) \longrightarrow A$, que coinciden en la coordenada s-ésima con g y h son tales que $f \circ \overline{g} = f \circ \overline{h}$, luego $\overline{g} = \overline{h}$ y $g = h$, por lo que f es localmente mónica. Recíprocamente, si f es localmente mónica entonces f es mónica.

Toda sección es mónica pero, al igual que en $\mathbf{Set}$ existen mónicas que no son secciones, e.g., las S-aplicaciones con dominio $0^S = (\emptyset)_{s\in S}$.

Puesto que ser mónica y ser inyectiva coinciden en $\mathbf{Set}$, ser localmente mónica y ser localmente inyectiva coinciden en $\mathbf{Set}^S$.

La inyectividad local implica claramente la inyectividad. Sin embargo, la inyectividad no implica la inyectividad local, puesto que cualquier S-aplicación cuyo dominio tenga alguna coordenada vacía es vacuamente inyectivo, aunque no necesariamente localmente inyectivo.

2. Las retracciones coinciden en $\mathbf{Set}^S$ con las S-aplicaciones que son localmente retracciones y por tanto, con las localmente épicas y las localmente sobreyectivas.

Si f es localmente épica, entonces f es épica. Recíprocamente, si f es épica entonces, para cada $s \in S$ y cada par de aplicaciones $g, h\colon B_s \longrightarrow C$, existe un único par de aplicaciones $\overline{g}$ y $\overline{h}$ de B en $\overline{C}$, con $\overline{C}$ el S-conjunto que es 1 en cada coordenada excepto la s-ésima en la que $\overline{C}$ es C, que coinciden, respectivamente, en la coordenada s-ésima, con g y h. Además, $\overline{g} \circ f = \overline{h} \circ f$ y por tanto, $\overline{g} = \overline{h}$ y $g = h$, por lo que f es localmente épica.

Si f es localmente sobreyectiva entonces es sobreyectiva. Sin embargo, existen S-aplicaciones sobreyectivas que no lo son localmente, e.g., si $S = 2$, la 2-aplicación $(0, !) \colon (1, \emptyset) \longrightarrow (2, \emptyset)$ es vacuamente sobreyectiva, puesto que $(2, \emptyset)$ no tiene miembros globales, aunque no localmente sobreyectivo puesto que su coordenada 0-ésima no es sobreyectiva. □

Puesto que en $\mathbf{Set}^S$ las nociones de épica y retracción coinciden, el axioma de elección es válido en ella.

La categoría de S-conjuntos y S-aplicaciones es un topos, i.e., una categoría cartesiana cerrada con un clasificador de monomorfismos, en tanto que es una categoría de functores sobre un topos. Su estructura es *localmente* como la de conjuntos ordinarios y la proposición 2.12 establece que los límites y colímites se calculan coordenada a coordenada. Esto es cierto también para el cálculo de los exponenciales y el objeto de verdad de $\mathbf{Set}^S$.

En algunos trabajos se definen los S-conjuntos excluyendo la posibilidad de que alguna coordenada sea vacía. Una consecuencia que tal exigencia es que destruye, obviamente, la estructura de topos de las categorías de S-conjuntos, que entonces no son, ni siquiera, categorías finito cocompletas.

Proposición 2.15. *La categoría* $\mathbf{Set}^S$ *es un topos, i.e., es una categoría cartesiana cerrada con un clasificador de monomorfismos.*

Demostración. $\mathbf{Set}$ es un topos, por lo que $\mathbf{Set}^S$, siendo (isomorfa a) una categoría de functores en $\mathbf{Set}$, es también un topos (v. [**?**]). □

El exponencial de dos S-conjuntos A y B se denota mediante B^A y es el S-conjunto $(B_s^{A_s})_{s\in S}$, i.e., $(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A_s, B_s))_{s\in S}$. La función de evaluación, $\mathrm{ev}_{A,B} \colon A \times B^A \longrightarrow A$, es la S-aplicación que en la coordenada s-ésima es la función de evaluación para A_s, B_s en $\mathbf{Set}$, i.e., $\mathrm{ev}_{(A,B)_s} = \mathrm{ev}_{A_s,B_s} \colon A_s \times B_s^{A_s} \longrightarrow B_s$.

Si A y B son S-conjuntos, el producto de su exponencial, $\prod_{s\in S} B_s^{A_s}$, es isomorfo al conjunto B_A de las S-aplicaciones de A en B. Este isomorfismo es natural, como pone de manifiesto la siguiente proposición.

Proposición 2.16. *Sea S un conjunto de tipos y* Exp *el functor de* exponenciación *definido como*

$$
\begin{array}{ccc}
(\mathbf{Set}^S)^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Set}^S & \xrightarrow{\mathrm{Exp}} & \mathbf{Set}^S \\
(A,B) & & (B_s^{A_s})_{s\in S} \\
{\scriptstyle (f,g)}\Big\downarrow & \longmapsto & \Big\downarrow{\scriptstyle (g_s \circ \cdot \circ f_s)_{s\in S}} \\
(C,D) & & (D_s^{C_s})_{s\in S}
\end{array}
$$

Los functores Hom *y* $\prod \circ \mathrm{Exp}$ *son naturalmente isomorfos*

Demostración. El isomorfismo se define, para cada par de S-conjuntos (A, B) como

$$
\begin{array}{ccl}
\mathrm{Hom}(A,B) & \longrightarrow & \prod_{s\in S} B_s^{A_s} \\
f & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccl} S & \longrightarrow & \bigcup_{s\in S} B_s^{A_s} \\ s & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} A_s & \longrightarrow & B_s \\ a & \longmapsto & f_s(a) \end{array} \right. \end{array} \right.
\end{array}
$$

i.e., asociando a f la familia $(f_s)_{s\in S}$ □

El objeto de valores de verdad en $\mathbf{Set}^S$ se denota mediante Ω^S y consiste en el S-conjunto $(2)_{s\in S}$, que en cada coordenada es $2 = \Omega$, el objeto de valores de verdad en $\mathbf{Set}$. El clasificador de mónicas es $\top^S = (\top)_{s\in S}\colon 1^S \longrightarrow \Omega^S$, cuya coordenada s-ésima, $\top\colon 1 \longrightarrow 2$, es la aplicación que a 0 le asigna 1. El carácter de una S-aplicación mónica $f\colon A \longrightarrow B$ se obtiene entonces a partir de los caracteres de las aplicaciones componentes en $\mathbf{Set}$, i.e., $\mathrm{ch}_f = (\mathrm{ch}_{f_s})_{s\in S}$.

Si el conjunto de tipos S no es vacío, el topos $\mathbf{Set}^S$ no es degenerado, i.e., el objeto inicial no es isomorfo a ningún objeto final. Su conjunto de valores de verdad, i.e., el conjunto de los morfismos de 1^S en Ω^S, tiene cardinalidad 2^S. Un S-conjunto es *vacío* si su conjunto de miembros globales lo es. Si $\mathrm{card}(S) \geq 2$, existen en $\mathbf{Set}^S$ objetos que no son cero pero son globalmente vacíos (los S-conjuntos que tienen alguna coordenada vacía). No es, pues, un topos bien punteado puesto que no satisface el principio de extensionalidad: un par de S-aplicaciones distintas cuyo dominio tenga alguna coordenada vacía no pueden distinguirse mediante un S-aplicación desde 1^S. Por consiguiente, 1^S no es un generador y es por ello que conviene introducir las nociones de S-conjunto subfinal y delta de Kronecker, para poder obtener un conjunto de generadores para $\mathbf{Set}^S$.

Definición 2.17.

1. Un S-conjunto A es subfinal si $\mathrm{card}(A_s) \leq 1$, para todo $s \in S$.
2. Un miembro parcial de un S-conjunto A es un morfismo desde una delta de Kronecker hasta A, i.e., esencialmente un miembro de una coordenada de A.

En $\mathbf{Set}$ no existen conjuntos que estén estrictamente entre el objeto inicial y el final, pero en $\mathbf{Set}^S$ existen $2^{\mathrm{card}(S)}$ objetos, salvo isomorfismo, entre el objeto inicial, $0^S = (\varnothing)_{s\in S}$, y el final, 1^S. En general, para un S-conjunto A se cumple que $\mathrm{card}\,(\mathrm{Sub}(A)) = 2^{\sum_{s\in S}\mathrm{card}\,(A_s)}$. El conjunto $\{\delta^s \mid s \in S\}$ es un conjunto de generadores para $\mathbf{Set}^S$ puesto que cualquier par de S-aplicaciones paralelas distintas pueden ser siempre distinguidas haciendo uso de algún morfismo desde un δ^s apropiado. En general, todos los S-conjuntos se pueden representar como coproductos de múltiplos de las deltas de Kronecker, i.e., si A es un S-conjunto, entonces A es naturalmente isomorfo a $\coprod_{s\in S}\mathrm{card}(A_s)\cdot\delta^s$.

En $\mathbf{Set}^S$ se cumple que $[\top,\bot]\colon 1\amalg 1 \longrightarrow \Omega^S$ es un isomorfismo, por lo que $\mathbf{Set}^S$ es un topos clásico y por consiguiente booleano. Su estructura lógica es, localmente, como la de $\mathbf{Set}$. Los morfismos de verdad en $\mathbf{Set}^S$ son, en cada coordenada, los correspondientes en $\mathbf{Set}$, e.g., $\wedge^S = (\wedge)_{s\in S}$ y $\neg^S = (\neg)_{s\in S}$. Como consecuencia, las operaciones correspondientes en las álgebras de subobjetos de $\mathbf{Set}^S$ se realizan también coordenada a coordenada y coinciden con las operaciones definidas en **??**. En el álgebra booleana de los subfinales de $\mathbf{Set}^S$, $\mathbf{Sub}(1^S)$, los δ^s son los átomos de la misma y es, esencialmente, el álgebra booleana de los subconjuntos de S, $\mathbf{Sub}(S)$.

Los S-conjuntos pueden ser considerados también como aplicaciones con codominio S, que a cada elemento del dominio de la aplicación le asigna su tipo. Como tales se denominan S-foliaciones y constituyen los objetos de la categoría de cotas inferiores de S en $\mathbf{Set}$, $\mathbf{Set}\downarrow S$, i.e., los pares (X, A) en los que X es un conjunto y A una aplicación de X en S, que asigna a cada $x \in X$ su tipo $A(x)$. Las S-aplicaciones de un S-conjunto en otro se corresponden entonces con los morfismos de $\mathbf{Set}\downarrow S$, siendo un morfismo de (X, A) en (Y, B) un triplo $((X, A), f, (Y, B))$ en el que $f\colon X \longrightarrow Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "A"'] & & Y \arrow[dl, "B"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Proposición 2.18. *Las categorías* $\mathbf{Set}^S$ *y* $\mathbf{Set}\downarrow S$ *son equivalentes.*

Demostración. Sea A un S-conjunto. Sea P^S el functor definido como

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set}^S \arrow[r, "P^S"] & \mathbf{Set}\downarrow S \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & & (\coprod A, [\kappa_s^A]_{s\in S}) \arrow[d, "\coprod f"] \\ B & \longmapsto & (\coprod B, [\kappa_s^B]_{s\in S}) \end{tikzcd}$$

donde κ_s^A es la aplicación constante de A_s en S que asigna a cada miembro de A_s su tipo s y $[\kappa_s^A]_{s\in S}$ la única aplicación de $\coprod A$ en S determinada por la propiedad universal del coproducto, y lo mismo para κ_s^A y $[\kappa_s^A]_{s\in S}$.

Sea Q^S el functor definido como

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set}\downarrow S \arrow[r, "Q^S"] & \mathbf{Set}^S \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (X, A) \arrow[d, "f"'] & & (A^{-1}(s))_{s\in S} \arrow[d, "(f_s)_{s\in S}"] \\ (Y, B) & \longmapsto & (B^{-1}(s))_{s\in S} \end{tikzcd}$$

donde f_s es la restricción de f al dominio y codominio indicado. Ambos functores son cuasi-inversos, i.e., su composición es naturalmente isomorfa a la identidad, por lo que ambas categorías son equivalentes. $\square$

La categoría $\mathbf{Set}\downarrow S$ es un topos, por el *teorema fundamental de los topoi* (v. [**?**]). La equivalencia con la categoría $\mathbf{Set}^S$ determina morfismos entre ambas categorías que permiten *traducir* la estructura de topos de una categoría hasta la otra, por lo que cualquiera de las dos puede ser utilizada como formalización de los conceptos de conjunto y aplicación heterogénea para un conjunto de tipos S fijo. Sin embargo, algunas construcciones tienen una forma más *natural* en una de las dos, por lo que resulta conveniente considerar directamente algunas de las propiedades del topos $\mathbf{Set}\downarrow S$.

Productos. Sean (X, A) y (Y, B) dos objetos en $\mathbf{Set}\downarrow S$. Su producto es $(X, A)\times(Y, B) = (\mathrm{Pb}(A, B), \mathrm{pr})$, con $\mathrm{Pb}(A, B)$ el producto fibrado en $\mathbf{Set}$ de A y B, y $\mathrm{p} = A \circ \mathrm{p}_0 = B \circ \mathrm{p}_1$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pb}(A, B) \arrow[r, "\mathrm{p}_1"] \arrow[d, "\mathrm{p}_0"'] \arrow[dr, "\mathrm{p}"] & Y \arrow[d, "B"] \\ X \arrow[r, "A"'] & S \end{tikzcd}$$

El objeto final es $1^{\downarrow S} = (S, \mathrm{id}_S)$

Igualadores. Sean $f, g\colon (X,A) \longrightarrow (Y,B)$. Su igualador es $\mathrm{eq}(f,g)$ considerado como un morfismo de $\mathrm{Eq}^{\downarrow S}(f,g) = A \circ \mathrm{eq}(f,g)$ en B.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Eq}(f,g) \arrow[r, "\mathrm{eq}(f,g)"] \arrow[dr, "\mathrm{Eq}^{\downarrow S}(f,g)"'] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "A"'] & Y \arrow[dl, "B"] \\
 & S &
\end{tikzcd}$$

Productos fibrados. Sean $f\colon (X,A) \longrightarrow (Z,C)$ y $G\colon (Y,B) \longrightarrow (Z,C)$ dos morfismos en $\mathbf{Set}\downarrow S$. El producto fibrado de f y g, $\mathrm{Pb}^{\downarrow S}(f,g)$, es $(\mathrm{Pb}(f,g), \mathrm{p})$ con $\mathrm{Pb}(f,g)$ el producto fibrado de f y g en $\mathbf{Set}$ y $\mathrm{p} = C \circ f \circ \mathrm{p}_0 = C \circ g \circ \mathrm{p}_1$ en $\mathbf{Set}\downarrow S$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pb}(f,g) \arrow[rr, "\mathrm{p}_1"] \arrow[dd, "\mathrm{p}_0"'] \arrow[dr, "\mathrm{p}"] & & Y \arrow[dl, "B"'] \arrow[dd, "g"] \\
 & S & \\
X \arrow[ur, "A"] \arrow[rr, "f"'] & & Z \arrow[ul, "C"']
\end{tikzcd}$$

Colímites. El coproducto de (X,A) y (Y,B) es $[A,B]$, la única aplicación de $X \amalg Y$ en S. El objeto inicial es $0^{\downarrow S} = (\emptyset, !_{\emptyset,S})$. El coigualador y la suma amalgamada se obtienen mediante diagramas duales a los del igualador y el producto fibrado.

Exponenciales. Sean (X,A) y (Y,B) dos objetos en $\mathbf{Set}{\downarrow}S$. Entonces $(Y,B)^{(X,A)} = (\coprod_{s\in S} B^{-1}(s)^{A^{-1}(s)}, \mathrm{pr}_1)$ y la función de evaluación, $\mathrm{ev}_{(X,A),(Y,B)}$ se define como

$$\mathrm{ev}_{(X,A),(Y,B)} \begin{cases} \mathrm{Pb}(A, \mathrm{pr}_1) & \longrightarrow & Y \\ (x,(f,s)) & \longmapsto & f(x) \end{cases}$$

Clasificador de subobjetos. El objeto de valores de verdad, $\Omega^{\downarrow S}$, viene dado por $(2\times S, \mathrm{pr}_1)$, y el clasificador de mónicas es $\top^{\downarrow S} = \langle \top_S, \mathrm{id}_S\rangle$. Si $f\colon (Y,B) \rightarrowtail (X,A)$ entonces $\mathrm{ch}_f^{\downarrow S} = \langle \mathrm{ch}_f, A\rangle$.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, "B"'] \arrow[dr, "B"] & & X \arrow[dl, "A"'] \arrow[dd, "\mathrm{ch}_f^{\downarrow S} = \langle \mathrm{ch}_f, A\rangle"] \\
 & S & \\
S \arrow[ur, "\mathrm{id}_S"] \arrow[rr, "\langle \top, \mathrm{id}_S\rangle"'] & & 2\times S \arrow[ul, "\mathrm{pr}_1"']
\end{tikzcd}$$

Valores de verdad. Por ser $\mathbf{Set}\downarrow S$ un topos, los elementos de Ω^S están en correspondencia biunívoca con $\mathrm{Sub}(1^S)$. Ahora bien, un subobjeto de 1^S es un $f\colon (X,A) \rightarrowtail (S, \mathrm{id}_S)$ tal que $\mathrm{id}_s \circ f = A$, por lo que $f = A$. Así pues, un subobjeto de 1^S se puede identificar con una mónica $f\colon X \rightarrowtail S$, i.e., con un subconjunto de S. Su carácter $\mathrm{ch}_f\colon 1^{\downarrow S} \longrightarrow \Omega^{\downarrow S}$ es $\langle \mathrm{ch}_X, \mathrm{id}_S\rangle$, i.e.,

$$\mathrm{ch}_f(s) = \begin{cases} (1,s) & \text{si } s \in X \\ (0,s) & \text{si } s \notin X \end{cases}$$

El conjunto de valores de verdad de $\mathbf{Set}\downarrow S$ tiene por tanto, cardinalidad 2^S.

Morfismos de verdad. Puesto que $\Omega^{\downarrow S} = (2 \times S, \mathrm{pr}_1)$, la fibra sobre un $s \in S$ es $2 \times \{s\}$, i.e., esencialmente una copia de 2, el objeto de valores de verdad de $\mathbf{Set}$. Los morfismos de verdad en $\mathbf{Set}\downarrow S$ consisten en *copias* de los morfismos de verdad correspondientes en $\mathbf{Set}$ actuando en cada fibra. Así, por ejemplo,

$$\neg^{\downarrow S} = \langle \neg \circ \mathrm{pr}_0, \mathrm{id}_S \rangle = \begin{cases} 2 \times S \longrightarrow 2 \times S \\ (0, s) \longmapsto (1, s) \\ (1, s) \longmapsto (0, s) \end{cases}$$

y

$$\wedge^{\downarrow S} = \langle \wedge \circ \langle \mathrm{pr}_0 \circ \mathrm{p}_0, \mathrm{pr}_0 \circ \mathrm{p}_1 \rangle, \mathrm{pr}_0 \circ \mathrm{p}_0 \rangle = \begin{cases} (2 \times S) \times_S (2 \times S) \longrightarrow 2 \times S \\ ((x, s), (y, s)) \longmapsto (x \wedge y, s) \end{cases}$$

Por su equivalencia con $\mathbf{Set}^S$, $\mathbf{Set}\downarrow S$ es un topos no degenerado si $S \neq \emptyset$, clásico y booleano, en el que existen objetos no cero pero que son vacíos (los objetos (X, A) en los que A no es una aplicación sobreyectiva) y que, por consiguiente, no está bien punteado.

La equivalencia entre las categorías $\mathbf{Set}^S$ y $\mathbf{Set}\downarrow S$ puede ser considerada también desde otra perspectiva. Ambas categorías son, junto a los functores apropiados, categorías concretas sobre $\mathbf{Set}$.

Proposición 2.19. *Sea S un conjunto. Entonces la categoría $\mathbf{Set}\downarrow S$, junto con el functor de olvido*

$$G(f\colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)) = f\colon X \longrightarrow Y$$

es una categoría de conjuntos con estructura.

Demostración. Sea $\mathrm{St}(X)$ el conjunto de las aplicaciones A de X en S, y $\mathrm{Ad}((X, A), (Y, B))$ el conjunto de las aplicaciones $f\colon X \longrightarrow Y$ tales que $A = B \circ f$. Entonces $(\mathrm{St}, \mathrm{Ad})$ es un constructo unívocamente transportable, y su categoría asociada es $\mathbf{Set}\downarrow S$. □

La categoría $(\mathbf{Set}^S, \coprod)$ es una categoría concreta (amnéstica y no transportable) sobre $\mathbf{Set}$. Por otra parte, $(\mathbf{Set}\downarrow S, G)$, siendo una categoría de conjuntos con estructura, es una categoría concreta y unívocamente transportable. La equivalencia entre ambas es una equivalencia concreta. Puesto que, para cada categoría concreta, existe una categoría concreta unívocamente transportable y una equivalencia concreta hasta ella determinada salvo un isomorfismo concreto (v. [**?**], prop. 5.36), podemos concluir que $(\mathbf{Set}\downarrow S, G)$ es, salvo isomorfismo concreto, la modificación transportable de $(\mathbf{Set}^S, \coprod)$.

Ahora definimos el concepto de sistema de clausura heterogéneo sobre un S-conjunto.

Definición 2.20. Sea A un S-conjunto. Un S-sistema de clausura sobre A es un subconjunto $\mathcal{C}$ de $\mathrm{Sub}(A)$ que satisface las siguientes condiciones

1. $A \in \mathcal{C}$.
2. Para cada $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$, si $\mathcal{D} \neq \varnothing$, entonces $\bigcap \mathcal{D} \in \mathcal{C}$.

Denotamos por $\mathrm{Cls}(A)$ el conjunto de los S-sistemas de clausura sobre A.

Proposición 2.21. *Sea A un S-conjunto y $\mathcal{C}$ un S-sistema de clausura sobre A. Entonces $\boldsymbol{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \subseteq)$ es un retículo completo.*

Demostración. Let $(C^i)_{i\in I}$ be a nonempty family in $\mathcal{C}$. Then the greatest lower bound of $(C^i)_{i\in I}$ is

$$\mathrm{ínf}_{i\in I} C^i = \textstyle\bigcap_{i\in I} C^i$$

and the least upper bound of the same family is the greatest lower bound of the upper bounds of the S-unión of $(C^i)_{i\in I}$, i.e.,

$$\bigvee_{i\in I} C^i = \bigcap \left\{ T \in \mathcal{C} \mid \bigcup_{i\in I} C^i \subseteq_S T \right\}$$

In this complete lattice the greatest element is A and the least element $\bigcap \mathcal{C}$. $\square$

Proposición 2.22. *El conjunto ordenado* $\mathbf{Cls}(A) = (\mathrm{Cls}(A), \subseteq)$ *es un retículo completo.*

Demostración. Let $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ be a nonempty family in $\mathrm{Cls}(A)$. Then greatest lower bound of $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ is

$$\text{ínf}_{i\in I} \mathcal{C}_i = \bigcap_{i\in I} \mathcal{C}_i$$

and the least upper bound of the same family is

$$\bigvee_{i\in I} \mathcal{C}_i = \bigcap \{ \mathcal{C} \in \mathrm{Cls}(A) \mid \bigcup_{i\in I} \mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{C} \}$$

In this complete lattice the greatest element is $\mathrm{Sub}(A)$ and the least element $\{A\}$. $\square$

Definición 2.23. Un S-operador de clausura sobre un S-conjunto A es un operador J sobre $\mathrm{Sub}(A)$ tal que, para cada $X, Y \subseteq A$, cumple las siguientes condiciones:

1. $X \subseteq J(X)$, i.e., J es extensivo.
2. Si $X \subseteq Y$, entonces $J(X) \subseteq J(Y)$, i.e., J es isótono.
3. $J(J(X)) = J(X)$, i.e., J es idempotente.

Denotamos por $\mathrm{Clop}(A)$ el conjunto de los S-operadores de clausura sobre A y por $\mathbf{Clop}(A)$ el mismo conjunto pero ordenado por la relación $\leq$,donde, para J y K en $\mathrm{Clop}(A)$, tenemos que $J \leq K$ si, para cada $X \subseteq A$, $J(X) \subseteq K(X)$. Además, a los puntos fijos de un S-operador de clausura J sobre A los llamamos S-conjuntos J-cerrados.

Proposición 2.24. *Let A be an S-sorted set y J un operador clausura sobre A. Entonces, para cada familia $(X^i)_{i\in I}$ de partes de A, se cumple que*

$$J(\bigcup_{i\in I} X^i) = J(\bigcup_{i\in I} J(X^i)).$$

Además, $J(X \cup Y) = J(X \cup J(Y)) = J(J(X) \cup Y) = J(J(X) \cup J(Y))$.

En el caso heterogéneo, lo mismo que en el homogéneo, para dos partes X, Y de A, si $J(X) \subseteq J(Y)$, entonces $J(X \cup Z) \subseteq J(Y \cup Z)$, para cualquier parte Z de A. Pero observemos que, en el caso heterogéneo, puede existir una parte no vacía y estricta T del conjunto de los tipos S y dos partes X, Y de A, de modo que, para cada $t \in T$, $J(X)_t \subseteq J(Y)_t$, y, a su vez, exista una parte Z de A y un $t \in T$ tal que $J(X \cup Z)_t \nsubseteq J(Y \cup Z)_t$; del mismo modo, puede existir una parte no vacía y estricta T del conjunto de los tipos S y dos partes X, Y de A, tales que, para cada $t \in T$, $J(X)_t = J(Y)_t$, y, a su vez, exista una parte Z de A y un $t \in T$ tal que $J(X \cup Z)_t \neq J(Y \cup Z)_t$.

Proposición 2.25. *El conjunto ordenado* $\mathbf{Clop}(A)$ *es un retículo completo.*

Demostración. Let $(J^i)_{i\in I}$ be a nonempty family in $\mathrm{Clop}(A)$. Then the greatest lower bound of $(J^i)_{i\in I}$, $\text{ínf}_{i\in I} J^i$, is defined, for every $X \subseteq_S A$, as

$$\text{ínf}_{i\in I} J^i(X) = \bigcap_{i\in I} J^i(X)$$

and the least upper bound of the same family, $\bigvee_{i\in I} J^i$, is

$$\bigvee_{i\in I} J^i = \text{ínf} \left\{ J \in \mathrm{Clop}(A) \mid \forall i \in I\, (\, J^i \leq J \,) \right\}$$

The greatest element is the totally inconsistent h-closure operator, κ_A, that, to every $X \subseteq A$, assigns A, and the least the identity on $\mathrm{Sub}(A)$. $\square$

Proposición 2.26. *Sea A un S-conjunto. Entonces existe un anti-isomorfismo* Fix *del conjunto ordenado* $\mathbf{Clop}(A)$*, de los S-operadores de clausura sobre A, en el conjunto ordenado* $\mathbf{Cls}(A)$*, de los S-sistemas de clausura sobre A.*

Demostración. Veamos, en primer lugar, que si J es un operador clausura heterogéneo, entonces, siendo $\mathrm{Fix}(J) = \{X \subseteq_S A \mid J(X) = X\}$, el conjunto $\mathcal{C}^J = \mathrm{Fix}(J)$ es un sistema de clausura heterogéneo. En efecto, si $(J(X^i))_{i\in I}$ es una familia no vacía en $\mathcal{C}^J$, entonces tenemos que, para cada $i \in I$, se cumple que

$$\bigcap\nolimits_{i\in I} J(X^i) \subseteq J(X^i)$$

y, por ser $\mathcal{C}^J$ isótono e idempotente,

$$J(\bigcap\nolimits_{i\in I} J(X^i)) \subseteq J(X^i).$$

Entonces

$$J(\bigcap\nolimits_{i\in I} J(X^i)) = \bigcap\nolimits_{i\in I} J(X^i)$$

puesto que J es idempotente, y $\bigcap_{i\in I} J(X^i)$ es un punto fijo de J y, por tanto, pertenece a $\mathcal{C}^J$. Como $J(A) = A$, $\mathrm{Fix}(J)$ es un sistema de clausura.

Por otra parte, si $\mathcal{C}$ es un sistema de clausura heterogéneo, entonces la aplicación $J^{\mathcal{C}}$, definida como:

$$J^{\mathcal{C}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(A) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \\ \quad X \quad \longmapsto \bigcap\{Y \in \mathcal{C} \mid X \subseteq Y\}, \end{cases}$$

es un operador clausura heterogéneo. En efecto, el operador $J^{\mathcal{C}}$ es extensivo, ya que

$$X \subseteq \bigcap\{Y \subseteq A \mid Y \supseteq X\} \subseteq \bigcap\{Y \subseteq \mathcal{C} \mid Y \supseteq X\} = J^{\mathcal{C}}(X),$$

el operador $J^{\mathcal{C}}$ es isótono, ya que si $X \subseteq_S Y$, entonces $\{T \in \mathcal{C} \mid X \subseteq_S T\}$ contiene a $\{T \in \mathcal{C} \mid Y \subseteq_S T\}$, luego $\bigcap\{T \in \mathcal{C} \mid X \subseteq_S T\} \subseteq \bigcap\{T \in \mathcal{C} \mid Y \subseteq_S T\}$, por lo tanto $J^{\mathcal{C}}(X) \subseteq_S J^{\mathcal{C}}(Y)$.

Por último, $J^{\mathcal{C}}$ es idempotente, debido a que por estar $\{T \in \mathcal{C} \mid X \subseteq_S T\}$ incluido en $\{T \in \mathcal{C} \mid J^{\mathcal{C}}(X) \subseteq_S T\}$, se cumple que $\bigcap\{T \in \mathcal{C} \mid X \subseteq_S T\}$ contiene a $\bigcap\{T \in \mathcal{C} \mid J^{\mathcal{C}}(X) \subseteq_S T\}$, luego $J^{\mathcal{C}}(X) = J^{\mathcal{C}}(J^{\mathcal{C}}(X))$.

Las aplicaciones $J \mapsto \mathcal{C}^J$ y $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}^J$ son inversas una de la otra, y, por tanto, son aplicaciones biyectivas.

Queda por demostrar que las biyecciones son antihomomorfismos, i.e., que invierten el orden. Supongamos que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$. Entonces

$$J^{\mathcal{C}}(X) = \bigcap\{T \in \mathcal{C} \mid T \supseteq X\} \supseteq \bigcap\{T \in \mathcal{D} \mid T \supseteq X\} = J^{\mathcal{D}}(X)$$

luego $J^{\mathcal{C}} \geq J^{\mathcal{D}}$. Supongamos ahora que $J \leq K$. Entonces si $T \in \mathcal{C}_K$, se tiene que $T = K(X)$, para algún $X \subseteq B$. Pero

$$JK(X) \subseteq KK(X) = K(X)$$

luego $T \in \mathcal{C}^J$. □

Observación. Si $t \in S$ y $a, b \in A_t$, entonces $J(\delta^{t,a}) = J(\delta^{t,b})$ si y sólo si $J(\delta^{t,a})_t = J(\delta^{t,b})_t$. Es evidente que $J(\delta^{t,a}) = J(\delta^{t,b})$ es una condición suficiente para que $J(\delta^{t,a})_t = J(\delta^{t,b})_t$.

Por otra parte, si $J(\delta^{t,a})_t = J(\delta^{t,b})_t$, entonces $J(\delta^{t,a}) = J(\delta^{t,b})$. En efecto, por ser $J(\delta^{t,b})$ el mínimo cerrado que contiene a $\delta^{t,b}$, es suficiente que se demuestre que $J(\delta^{t,a})$ contiene a $\delta^{t,b}$, pero, para $s = t$, eso se cumple por la hipótesis, y, para $s \neq t$, es evidente. Del mismo modo se demuestra la inclusión inversa.

Proposición 2.27. *Sea A un S-conjunto, $J \in \mathrm{Clop}(A)$ y $(X^i)_{i\in I}$ una familia en* $\mathrm{Sub}(A)$*. Entonces*

$$\bigvee\nolimits_{i\in I}^{\mathrm{Fix}(J)} J(X^i) = J(\bigcup\nolimits_{i\in I} X^i)$$

Demostración. Si $T \in \mathrm{Fix}(J)$ entonces T contiene a $\bigcup_{i\in I} X^i$ exactamente si T contiene a $\bigcup_{i\in I} J(X^i)$, puesto que para cada cerrado T se tiene que $T \supseteq X$ si y sólo si $T \supseteq J(X)$. Entonces

$$\begin{aligned} J(\textstyle\bigcup_{i\in I} X^i) &= \textstyle\bigcap\{T \in \mathcal{C}^J \mid T \supseteq \bigcup_{i\in I} X^i\} \\ &= \textstyle\bigcap\{T \in \mathcal{C}^J \mid T \supseteq \bigcup_{i\in I} J(X^i)\} \\ &= \textstyle\bigvee_{i\in I}^{\mathcal{C}^J} J(X^i) \end{aligned}$$

□

Para cada conjunto de tipos S, existe una categoría de S-espacios de clausura, cuyos objetos están formados por un S-conjunto y, alternativa pero equivalentemente, un sistema de clausura heterogéneo o un operador clausura heterogéneo, y cuyos morfismos son las S-aplicaciones compatibles con los espacios de clausura respectivos.

Proposición 2.28. *Sea S un conjunto de tipos. Entonces $\mathbf{ClSp}(S)$, es la categoría cuyos objetos son pares $(A, \mathcal{C})$, en los que A un S-conjunto y $\mathcal{C} \in \mathrm{Cls}(A)$, y cuyos morfismos de $(A, \mathcal{C})$ en $(B, \mathcal{D})$ son los triplos $((A, \mathcal{C}), f, (B, \mathcal{D}))$, denotados como $f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (B, \mathcal{D})$, en los que f es una S-aplicación de A en B tal que, para cada $D \in \mathcal{D}$, $f^{-1}[D] \in \mathcal{C}$, y con composición e identidades definidas a partir de las de sus S-aplicaciones subyacentes.*

De $\mathbf{ClSp}(S)$ en $\mathbf{Set}^S$ se tiene un functor de olvido, $G_{\mathbf{ClSp}(S)}$, definido como:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{ClSp}(S) & \xrightarrow{G_{\mathbf{ClSp}(S)}} & \mathbf{Set}^S \\ (A, \mathcal{C}) & & A \\ f\Big\downarrow & \longmapsto & \Big\downarrow f \\ (B, \mathcal{D}) & & B \end{array}$$

que es obviamente fiel, por lo que $\mathbf{ClSp}(S)$ es una categoría concreta sobre $\mathbf{Set}^S$.

Proposición 2.29. *Sea S un conjunto de tipos. Entonces $\mathbf{Clop}(S)$, es la categoría cuyos objetos son pares (A, J), en los que A un S-conjunto y $J \in \mathrm{Clop}(A)$, y cuyos morfismos de (A, J) en (B, K) son los triplos $((A, J), f, (B, K))$, denotados como $f\colon (A, J) \longrightarrow (B, K)$, en los que f es una S-aplicación de A en B tal que, para todo $X \subseteq A$, $f[J(X)] \subseteq_S K(f[X])$, y con composición e identidades definidas a partir de las de sus S-aplicaciones subyacentes.*

De $\mathbf{Clop}(S)$ en $\mathbf{Set}^S$ se tiene un functor de olvido $G_{\mathbf{Clop}(S)}$, definido similarmente a $G_{\mathbf{ClSp}(S)}$, por lo que $\mathbf{Clop}(S)$ es también una categoría concreta sobre $\mathbf{Set}^S$.

Proposición 2.30. *Las categorías $\mathbf{ClSp}(S)$ y $\mathbf{Clop}(S)$ son concretamente isomorfas, a través del functor definido como:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Clop}(S) & \longrightarrow & \mathbf{ClSp}(S) \\ (A, J) & & (A, \mathrm{Fix}(J)) \\ f\Big\downarrow & \longmapsto & \Big\downarrow f \\ (B, K) & & (B, \mathrm{Fix}(K)) \end{array}$$

Este resultado justifica que, en lo que sigue, se use aquella de las dos categorías, $\mathbf{Clop}(S)$, o $\mathbf{ClSp}(S)$, que se considere más oportuna para abordar la situación de que se trate. Convenimos que por la categoría de S-espacios de clausura, $\mathbf{ClSp}(S)$, nos referimos indistintamente a cualquiera de las dos categorías $\mathbf{Clop}(S)$, o $\mathbf{ClSp}(S)$.

Cada espacio de clausura ordinario se identifica con un S-espacio de clausura heterogéneo, tomando como conjunto de tipos S cualquier conjunto final.

Podemos inducir un sistema de clausura heterogéneo, de manera optimal, sobre el dominio común de una familia de S-aplicaciones cuando los codominios de las mismas están dotados de sistemas de clausura heterogéneos, y, dualmente, podemos inducir un sistema de clausura heterogéneo, de manera co-optimal, sobre el codominio común de una familia de S-aplicaciones cuando los dominios de las mismas están dotados de sistemas de clausura heterogéneos.

Lema 2.31. *Sea A un S-conjunto, $(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}$ una familia de S-espacios de clausura y $f^{\cdot} = (f^i)_{i\in I}$ una familia de S-aplicaciones, en la que, para cada $i \in I$, $f^i\colon A \longrightarrow A^i$. Entonces hay un único sistema de clausura heterogéneo $\mathcal{C}$ sobre A, al que denotamos por $L^{f^{\cdot}}(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}$, y denominamos el levantamiento optimal de $(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}$ a través de $f^{\cdot}$, tal que:*

1. *Para cada $i \in I$, $f^i\colon (A, L^f(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}) \longrightarrow (A^i, \mathcal{C}^i)$.*
2. *Dado un S-espacio de clausura $(B, \mathcal{B})$ y $g\colon B \longrightarrow A$, si, para cada $i \in I$, $f^i \circ g\colon (B, \mathcal{B}) \longrightarrow (A^i, \mathcal{C}^i)$, entonces $g\colon (B, \mathcal{B}) \longrightarrow (A, L^{f^{\cdot}}(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I})$.*

Además, se cumple que:

1. *Para cada sistema de clausura heterogéneo $\mathcal{C}$ sobre A:*
$$L^{\mathrm{id}_A}(A, \mathcal{C}) = \mathcal{C}.$$
2. *Si, para cada $i \in I$, $(A^{i,m}, \mathcal{C}^{i,m})_{m\in \mathrm{M}_i}$ es una familia de S-espacios de clausura, $g^{i,\cdot} = (g^{i,m})_{m\in \mathrm{M}_i}$ una familia de S-aplicaciones, en la que, para cada $m \in \mathrm{M}_i$, $g^{i,m}\colon A^i \longrightarrow A^{i,m}$ y $\mathcal{C}^i = L^{g^{i,\cdot}}(A^{i,m}, \mathcal{C}^{i,m})_{m\in \mathrm{M}_i}$, entonces*
$$L^{(g^{i,\cdot}\circ f^{\cdot})_{i\in I}}(A^{i,m}, \mathcal{C}^{i,m})_{(i,m)\in \coprod_{i\in I}\mathrm{M}_i} = L^{f^{\cdot}}(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}.$$

Demostración. Es suficiente que tomemos como $\mathrm{L}^{f^{\cdot}}(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}$ el sistema de clausura heterogéneo sobre A generado por $\bigcup_{i\in I}\{\, (f^i)^{-1}[C] \mid C \in \mathcal{C}^i \,\}$. □

Obsérvese que, para cada S-conjunto A, el levantamiento optimal de $(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in\emptyset}$ a través de $f^{\cdot} = (f^i)_{i\in\emptyset}$ es $\{A\}$.

Definición 2.32. Sea $f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (B, \mathcal{D})$ un morfismo de S-espacios de clausura. Decimos que f es un morfismo optimal si, para cada S-espacio de clausura $(C, \mathcal{E})$ y cada aplicación $g\colon C \longrightarrow A$, si $f \circ g\colon (C, \mathcal{E}) \longrightarrow (B, \mathcal{D})$, entonces $g\colon (C, \mathcal{E}) \longrightarrow (A, \mathcal{C})$.

Proposición 2.33. *Sea $f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (B, \mathcal{D})$ un morfismo de S-espacios de clausura. Una condición necesaria y suficiente para que f sea un morfismo optimal es que $\mathcal{C} = L^f(B, \mathcal{D})$.*

Proposición 2.34. *Si $f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (B, \mathcal{D})$ y $g\colon (B, \mathcal{D}) \longrightarrow (C, \mathcal{E})$ son morfismos optimales, entonces $g \circ f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (C, \mathcal{E})$ es un morfismo optimal. Además, si se cumple que $g \circ f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (C, \mathcal{E})$ es un morfismo optimal, entonces también se cumple que $f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (B, \mathcal{D})$ es optimal.*

Lema 2.35. *Sea A un S-conjunto, $(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}$ una familia de S-espacios de clausura heterogéneos y $f^{\cdot} = (f^i)_{i\in I}$ una familia de S-aplicaciones, en la que, para cada $i \in I$, $f^i\colon A^i \longrightarrow A$. Entonces hay un único sistema de clausura heterogéneo $\mathcal{C}$*

sobre A, al que denotamos por $L_{f^\cdot}(A^i,\mathcal{C}^i)_{i\in I}$, y denominamos el levantamiento co-optimal de $(A^i,\mathcal{C}^i)_{i\in I}$ a través de $f^\cdot$, tal que:

1. *Para cada $i\in I$, $f^i\colon (A^i,\mathcal{C}^i)\longrightarrow (A, L_{f^\cdot}(A^i,\mathcal{C}^i)_{i\in I})$.*
2. *Dado un S-espacio de clausura $(B,\mathcal{D})$ y $g\colon A\longrightarrow B$, si, para cada $i\in I$, $g\circ f^i\colon (A^i,\mathcal{C}^i)\longrightarrow (B,\mathcal{D})$, entonces $g\colon (A, L_{f^\cdot}(A^i,\mathcal{C}^i)_{i\in I})\longrightarrow (B,\mathcal{D})$.*

Además, se cumple que:

1. *Para cada sistema de clausura heterogéneo $\mathcal{C}$ en A:*
$$L_{\mathrm{id}_A}(A,\mathcal{C}) = \mathcal{C}.$$
2. *Si, para cada $i\in I$, $(A^{i,m},\mathcal{C}^{i,m})_{m\in \mathrm{M}_i}$ es una familia de S-espacios de clausura, $g^{i,\cdot} = (g^{i,m})_{m\in\mathrm{M}_i}$ una familia de S-aplicaciones, en la que, para cada $m\in\mathrm{M}_i$, $g^{i,m}\colon A^{i,m}\longrightarrow A^i$ y $\mathcal{C}^i = L_{g^i}(A^{i,m},\mathcal{C}^{i,m})_{m\in\mathrm{M}_i}$, entonces*
$$L_{(f^\cdot\circ g^{i,\cdot})_{i\in I}}(A^{i,m},\mathcal{C}^{i,m})_{(i,m)\in\coprod_{i\in I}\mathrm{M}_i} = L_{f^\cdot}(A^i,\mathcal{C}^i)_{i\in I}.$$

Demostración. Es suficiente que tomemos como $\mathrm{L}_{f^\cdot}(A^i,\mathcal{C}^i)_{i\in I}$ el subconjunto de $\mathrm{Sub}(A)$ definido como:
$$\mathrm{L}_{f^\cdot}(A^i,\mathcal{C}^i)_{i\in I} = \{\, C\subseteq A \mid \forall i\in I\,(\,(f^i)^{-1}[C]\in\mathcal{C}^i\,)\,\}.$$
□

Para cada S-conjunto A, el levantamiento co-optimal de $(A^i,\mathcal{C}^i)_{i\in\emptyset}$ a través de $f^\cdot = (f^i)_{i\in\emptyset}$ es $\mathrm{Sub}(A)$.

Corolario 2.36. *El functor de olvido de la categoría* $\mathbf{ClSp}(S)$ *en la categoría* $\mathbf{Set}^S$ *has left and right adjoints.*

Corolario 2.37. *El functor de olvido de la categoría* $\mathbf{ClSp}(S)$ *en la categoría* $\mathbf{Set}^S$ *constucts limits and colimits.*

Definición 2.38. Sea $f\colon (A,\mathcal{C})\longrightarrow (B,\mathcal{D})$ un morfismo de S-espacios de clausura. Decimos que f es un morfismo co-optimal si, para cada S-espacio de clausura $(C,\mathcal{E})$ y cada aplicación $g\colon B\longrightarrow C$, si $g\circ f\colon (A,\mathcal{C})\longrightarrow (C,\mathcal{E})$, entonces $g\colon (B,\mathcal{D})\longrightarrow (C,\mathcal{E})$.

Proposición 2.39. *Sea $f\colon (A,\mathcal{C})\longrightarrow (B,\mathcal{D})$ un morfismo de S-espacios de clausura. Una condición necesaria y suficiente para que f sea un morfismo co-optimal es que $\mathcal{D} = L_f(A,\mathcal{C})$.*

Proposición 2.40. *Si $f\colon (A,\mathcal{C})\longrightarrow (B,\mathcal{D})$ y $g\colon (B,\mathcal{D})\longrightarrow (C,\mathcal{E})$ son morfismos co-optimales, entonces $g\circ f\colon (A,\mathcal{C})\longrightarrow (C,\mathcal{E})$ es un morfismo co-optimal. Además, si $g\circ f\colon (A,\mathcal{C})\longrightarrow (C,\mathcal{E})$ es un morfismo co-optimal, entonces $g\colon (B,\mathcal{D})\longrightarrow (C,\mathcal{E})$ es co-optimal.*

2.2. S-Signaturas y Σ-álgebras heterogéneas.

Definición 2.41. Sea S un conjunto de tipos. Una S-signatura algebraica Σ es un $S^\star\times S$-conjunto $\Sigma = (\Sigma_{w,s})_{(w,s)\in S^\star\times S}$ tal que $\Sigma_{w,s}$ y $\Sigma_{w',s'}$ son disjuntos si $(w,s)\neq(w',s')$.

Si Σ es una S-signatura algebraica y $\sigma\in\Sigma_{w,s}$, para algún par $(w,s)\in S^\star\times S$, entonces decimos que σ es un símbolo de operación de biariedad (w,s) y a las expresiones $\sigma\colon w\longrightarrow s$ y $\sigma\in\Sigma_{w,s}$ las consideramos sinónimas. Además, para cada $w\in S^\star$, a los símbolos de operación pertenecientes al conjunto $\bigcup_{s\in S}\Sigma_{w,s}$, denotado por $\Sigma_{w,\cdot}$, los denominamos símbolos de operación de ariedad w, y, para cada $s\in S$, a los pertenecientes al conjunto $\bigcup_{w\in S^\star}\Sigma_{w,s}$, denotado por $\Sigma_{\cdot,s}$, los denominamos símbolos de operación de coariedad s.

Definición 2.42. Sea $A = (A_s)_{s\in S}$ un S-conjunto y $\mathbf{\Sigma}$ una S-signatura algebraica. Una $\mathbf{\Sigma}$-estructura algebraica F sobre A es una $S^\star \times S$-aplicación de Σ en $\mathrm{Op}^{S^\star\times S}(A) = (\mathbf{Set}(A_w, A_s))_{(w,s)\in S^\star\times S}$. Una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra es un par $\mathbf{A} = (A, F)$, en el que A es un S-conjunto y F una $\mathbf{\Sigma}$-estructura algebraica sobre A.

En algunas ocasiones, denotamos a la $\mathbf{\Sigma}$-estructura de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ por $F^{\mathbf{A}}$, y a las operaciones que la componen por $F^{\mathbf{A}}_\sigma$. Cuando $\sigma\colon \lambda \longrightarrow s$, denotamos mediante $\sigma^{\mathbf{A}}$ al valor de $F^{\mathbf{A}}_\sigma\colon 1 \longrightarrow A_s$ para el único miembro de 1.

Definición 2.43.

- Sean $\mathbf{A} = (A, F^{\mathbf{A}})$ y $\mathbf{B} = (B, F^{\mathbf{B}})$ dos $\mathbf{\Sigma}$-álgebras. Un $\mathbf{\Sigma}$-homomorfismo o, simplemente, un homomorfismo, de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ es un triplo ordenado $(\mathbf{A}, f, \mathbf{B})$, denotado por $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, en el que f es una S-aplicación de A en B, tal que para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\sigma\colon w \longrightarrow s$, el diagrama
$$\begin{tikzcd} A_w \arrow[r, "f_w"] \arrow[d, "F^{\mathbf{A}}_\sigma"'] & B_w \arrow[d, "F^{\mathbf{B}}_\sigma"] \\ A_s \arrow[r, "f_s"'] & B_s \end{tikzcd}$$
conmuta, i.e., para cada $x \in A_w$, se cumple que
$$f_s(F^{\mathbf{A}}_\sigma(x)) = F^{\mathbf{B}}_\sigma(f_w(x)).$$
- Sean $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ y $g\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ dos homomorfismos. Su composición, $g\circ f$, es el triplo $(\mathbf{A}, g\circ f, \mathbf{C})$. Para una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$, el morfismo identidad, $\mathrm{id}_{\mathbf{A}}$, es $(\mathbf{A}, \mathrm{id}_A, \mathbf{A})$, siendo id_A la S-aplicación identidad para A.

A continuación, mostramos algunos ejemplos de álgebras heterogéneas que son de uso frecuente en las matemáticas, aunque, por lo general, con una de las componentes del conjunto heterogéneo subyacente mantenida fija.

Si tomamos como conjunto de tipos S el conjunto $\{\,\mathsf{e}, \mathsf{v}\,\}$, en el que e se realizará como un conjunto de escalares, el conjunto subyacente de un anillo, y v como un conjunto de vectores, el conjunto subyacente de un grupo abeliano, como S-signatura la definida como
$$\begin{aligned} \Sigma_{(\mathsf{e},\mathsf{e}),\mathsf{e}} &= \{\, +_{\mathsf{e}}, \cdot_{\mathsf{e}} \,\} & \Sigma_{(\mathsf{v},\mathsf{v}),\mathsf{v}} &= \{\, +_{\mathsf{v}} \,\} \\ \Sigma_{(\mathsf{e}),\mathsf{e}} &= \{\, -_{\mathsf{e}} \,\} & \Sigma_{(\mathsf{v}),\mathsf{v}} &= \{\, -_{\mathsf{v}} \,\} \\ \Sigma_{(\lambda),\mathsf{e}} &= \{\, 0_{\mathsf{e}}, 1_{\mathsf{e}} \,\} & \Sigma_{(\lambda),\mathsf{v}} &= \{\, 0_{\mathsf{v}} \,\} \\ \Sigma_{(\mathsf{e},\mathsf{v}),\mathsf{v}} &= \{\, \cdot \,\} \end{aligned}$$
en la que $+_{\mathsf{e}}, \cdot_{\mathsf{e}}, -_{\mathsf{e}}, 0_{\mathsf{e}}$ y 1_{e} se realizarán como las operaciones estructurales del anillo que se considere, $+_{\mathsf{v}}, -_{\mathsf{v}}$ y 0_{v} como las operaciones estructurales del grupo abeliano que se considere y $\cdot$ como la acción por la izquierda de los escalares sobre los vectores, entonces, por cada anillo $\mathbf{R}$ y cada $\mathbf{R}$-módulo por la izquierda $\mathbf{M}$ obtenemos un álgebra heterogénea, llamado en este caso un módulo. Observemos que los morfismos de un módulo $(\mathbf{R}, \mathbf{M}, \cdot)$ en otro $(\mathbf{R}', \mathbf{M}', \cdot')$ son pares de morfismos, un homomorfismo de anillos $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}'$ y uno de grupos abelianos $g\colon \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}'$, tales que, para cada $r \in R$ y cada $x \in M$, $g(r \cdot x) = f(r) \cdot' g(x)$.

Otros ejemplos de álgebras heterogéneas vienen dados por la noción de autómata, la de $\mathbf{G}$-conjunto, siendo $\mathbf{G}$ un grupo, la de $\mathbf{M}$-conjunto, siendo $\mathbf{M}$ un monoide, la de $\mathbf{K}$-álgebra lineal, con $\mathbf{K}$ un anillo, y, en general, por cualquier constructo matemático en el que exista, al menos, una acción de un sistema algebraico sobre otro.

Dado un anillo $\mathbf{R}$, también se pueden interpretar los complejos de cadenas de $\mathbf{R}$-módulos por la izquierda, i.e., los pares $((\mathbf{M}_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (d_n)_{n\in\mathbb{Z}})$ en los que, para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{M}_n$ es un $\mathbf{R}$-módulo por la izquierda, y d_{n+1} un morfismo de $\mathbf{R}$-módulos de $\mathbf{M}_{n+1}$ en $\mathbf{M}_n$ tal que $d_n \circ d_{n+1} = 0$, como álgebras heterogéneas para el conjunto de tipos $\mathbb{Z}$ y la $\mathbb{Z}$-signatura algebraica adecuada, y los morfismos de complejos de cadenas de $\mathbf{R}$-módulos por la izquierda como homomorfismos de álgebras heterogéneas. Recordemos que un morfismo de $((\mathbf{M}_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (d_n)_{n\in\mathbb{Z}})$ en $((\mathbf{M}'_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (d'_n)_{n\in\mathbb{Z}})$ es una $\mathbb{Z}$-familia, $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en la que, para cada $n \in \mathbb{Z}$, f_n es un homomorfismo de $\mathbf{M}_n$ en $\mathbf{M}'_n$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{M}_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & \mathbf{M}_n \arrow[d, "f_n"] \\
\mathbf{M}'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & \mathbf{M}'_n
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proposición 2.44. *Sea $\mathbf{\Sigma}$ una S-signatura algebraica. Las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras y los homomorfismos entre ellas forman una categoría,* $\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})$.

Al conjunto de los homomorfismos de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ lo denotamos por $\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Sigma}}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Un homomorfismo $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ con el mismo dominio y codominio recibe el nombre de endomorfismo de $\mathbf{A}$, y al monoide de los endomorfismos de $\mathbf{A}$ lo denotamos por $\mathbf{End}_{\mathbf{\Sigma}}(\mathbf{A})$. Un endomorfismo de $\mathbf{A}$ cuya S-aplicación subyacente sea una biyección recibe el nombre de automorfismo y al grupo de los automorfismos de $\mathbf{A}$ lo denotamos por $\mathbf{Aut}_{\mathbf{\Sigma}}(\mathbf{A})$. Los homomorfismos inyectivos (resp., sobreyectivos, biyectivos) entre $\mathbf{\Sigma}$-álgebras son aquellos cuya S-aplicación subyacente es inyectiva (resp., sobreyectiva, biyectiva). Por último, si hay un $\mathbf{\Sigma}$-homomorfismo sobreyectivo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$, diremos que $\mathbf{B}$ es una imagen homomorfa de $\mathbf{A}$.

2.3. Subálgebras heterogéneas.

Los S-subconjuntos del S-conjunto subyacente de un álgebra heterogénea que están cerrados respecto de las operaciones estructurales del álgebra constituyen un sistema de clausura algebraico, lo mismo que en el caso ordinario u homogéneo. Estudiamos a continuación la noción de parte cerrada o subálgebra de un álgebra heterogénea.

En lo que sigue, $\mathbf{\Sigma}$ es una S-signatura algebraica heterogénea arbitraria pero fija.

Definición 2.45. Sea $\mathbf{A} = (A, F^{\mathbf{A}})$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebras y X un S-subconjunto de A, i.e., X es un S-conjunto tal que, para cada $s \in S$, $X_s \subseteq A_s$.

1. Si $\sigma \in \Sigma$, con $\sigma\colon w \longrightarrow s$, decimos de X que está *cerrado bajo la operación* $F^{\mathbf{A}}_\sigma\colon A_w \longrightarrow A_s$ si, para cada $a \in X_w$, $F^{\mathbf{A}}_\sigma(a) \in X_s$, i.e., si $F^{\mathbf{A}}_\sigma[X_w] \subseteq X_s$.
2. Decimos que X es un *cerrado* o una *subálgebra* de $\mathbf{A}$ si, para cada $\sigma \in \Sigma$ con $\sigma\colon w \longrightarrow s$, y cada $a \in X_w$, $F^{\mathbf{A}}_\sigma(a) \in X_s$, i.e., si X está cerrado bajo cada una de las operaciones estructurales de $\mathbf{A}$. Al conjunto de los cerrados de $\mathbf{A}$ lo denotamos por $\mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.

Proposición 2.46. *Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Entonces el conjunto de los cerrados de $\mathbf{A}$, $\mathrm{Cl}(\mathbf{A})$, es un sistema de clausura algebraico sobre A, i.e., tiene las siguientes propiedades:*

1. $A \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.
2. *Si $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$ y $\mathcal{X} \neq \varnothing$, entonces* $\bigcap_{X\in\mathcal{X}} X \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.

3. *Si* $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$*,* $\mathcal{X} \neq \varnothing$ *y si dados* $X, Y \in \mathcal{X}$*, hay un* $Z \in \mathcal{X}$ *tal que* $X \cup Y \subseteq_S Z$*, entonces* $\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$*.*

Demostración. □

Corolario 2.47. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra heterogénea. Entonces la endoaplicación* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *del conjunto* $\mathrm{Sub}_S(A)$*, de los* S*-subconjuntos de* A*, definida como:*

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}} \begin{cases} \mathrm{Sub}_S(A) \longrightarrow \mathrm{Sub}_S(A) \\ \quad X \quad\;\; \longmapsto \bigcap\{\, C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid X \subseteq_S C \,\} \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{Im}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}) \subseteq \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.
2. $\{\, X \in \mathrm{Sub}(A) \mid X = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \,\} = \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.
3. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es extensiva o inflacionaria, i.e., para cada* $X \in \mathrm{Sub}_S(A)$*,* $X \subseteq_S \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$*.*
4. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es isótona, i.e., para cada* $X, Y \in \mathrm{Sub}_S(A)$*, si* $X \subseteq_S Y$*, entonces se cumple que* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq_S \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(Y)$*.*
5. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es idempotente, i.e., para cada* $X \in \mathrm{Sub}_S(A)$*,* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X))$*.*
6. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es algebraica, i.e., para cada* $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sub}_S(A)$*, si* $\mathcal{X} \neq \varnothing$ *y para cada* $X, Y \in \mathcal{X}$*, existe un* $Z \in \mathcal{X}$ *tal que* $X \cup Y \subseteq_S Z$*, entonces* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\bigcup \mathcal{X}) = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$*.*

Por consiguiente, para cada $X \subseteq A$*,* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ *es el mínimo cerrado de* $\mathbf{A}$ *que contiene a* X*, y lo denominamos el cerrado de* $\mathbf{A}$ generado *por* X*.*

Demostración. □

A continuación, introducimos unas nociones que nos permitirán obtener una descripción más constructiva de la subálgebra generada por un S-subconjunto de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra heterogénea.

Definición 2.48. Sea $\mathbf{A} = (A, F)$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra heterogénea. Entonces:

1. Denotamos por $\mathrm{E}_{\mathbf{A}}$ el operador sobre $\mathrm{Sub}_S(A)$, definido como:

$$\mathrm{E}_{\mathbf{A}} \begin{cases} \mathrm{Sub}_S(A) \longrightarrow \mathrm{Sub}_S(A) \\ \quad X \quad\;\; \longmapsto X \cup \big(\bigcup_{\sigma \in \Sigma_{\cdot, s}} F_\sigma[X_{\mathrm{ar}(\sigma)}] \bigm| s \in S \big). \end{cases}$$

2. Si $X \subseteq_S A$, entonces denotamos por $(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X) \mid n \in \mathbb{N})$ la familia en $\mathrm{Sub}_S(A)$ definida por recursión como:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}^0_{\mathbf{A}}(X) &= X, \\ \mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X) &= \mathrm{E}_{\mathbf{A}}(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)),\ n \geq 0. \end{aligned}$$

Además, convenimos que:

$$\mathrm{E}^\omega_{\mathbf{A}}(X) = \bigcup (\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X) \mid n \in \mathbb{N})$$

Proposición 2.49. *Si* $\mathbf{A}$ *es una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y* $X \subseteq_S A$*, entonces* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{E}^\omega_{\mathbf{A}}(X)$*.*

Demostración. □

Proposición 2.50. *Si* $\mathbf{A}$ *es una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* $X \subseteq_S A$*,* $s \in S$ *y* $a \in A_s$*, entonces una condición necesaria y suficiente para que* $a \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)_s$ *es que exista un* $p \in \mathbb{N} - 1$*, una familia* $(s_i \mid i \in p) \in S^p$*, y una familia* $(a_i \mid i \in p) \in \prod_{i \in p} A_{s_i}$ *tal que* $a = a_{p-1}$ *y para cada* $i \in p$*,* $a_i \in X_{s_i}$*, o* $a_i = \sigma^{\mathbf{A}}$*, para algún* $\sigma \colon \lambda \longrightarrow s_i$*, o* $a_i = F_\sigma(a_{i_\alpha} \mid \alpha \in n)$*, para un* $n \in \mathbb{N} - 1$*, una familia* $(i_\alpha \mid \alpha \in n) \in i^n$ *y un* $\sigma \colon (s_{i_\alpha} \mid \alpha \in n) \longrightarrow s_i$*.*

Demostración. □

2.4. Operaciones polinómicas.

A continuación estudiamos aquellas operaciones sobre el conjunto heterogéneo subyacente de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra que se derivan de sus operaciones estructurales. Posteriormente se estudiarán las relaciones de estas operaciones con las operaciones polinómicas formales o términos.

Definición 2.51. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $w \in S^{\star}$. La $\mathbf{\Sigma}$-álgebra de las operaciones w-arias sobre $\mathbf{A}$, $\mathbf{Op}_w(\mathbf{A})$, es $\mathbf{A}^{A_w}$, i.e., el producto de $\mathrm{card}(A_w)$-copias de $\mathbf{A}$.

En $\mathbf{Op}_w(\mathbf{A})$, las operaciones estructurales F_σ, con $\sigma\colon v \longrightarrow s$, están definidas para elementos $(f_j)_{j\in|v|}$ de $(A^{A_w})_v = \prod_{j\in|v|} A_{v_j}^{A_w}$. Ahora bien, como A_v es el producto de la familia $(A_{v_j})_{j\in|v|}$, existe, en virtud de la propiedad universal del producto, un único morfismo $\langle f_j\rangle_{j\in|v|}$ de A_w en A_v tal que

$$\begin{tikzcd}
A_w \arrow[d, "\langle f_j\rangle_{j\in|v|}"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\
A_v \arrow[r, "\mathrm{pr}_j"'] & A_{v_j}
\end{tikzcd}$$

conmuta. Entonces

$$F_\sigma \begin{cases} (A^{A_w})_v & \longrightarrow A_s^{A_w} \\ (f_j)_{j\in|v|} & \longmapsto F_\sigma^{\mathbf{A}} \circ \langle f_j\rangle_{j\in|v|} \end{cases}$$

Definición 2.52. Sea A un S-conjunto y w una palabra sobre S. Entonces

1. Para cada $i \in |w|$, la proyección w-aria, i-ésima para A, $\mathrm{pr}^A_{w,i}$, es la operación definida como:
$$\mathrm{pr}^A_{w,i} \begin{cases} A_w & \longrightarrow A_{w(i)} \\ a & \longmapsto a_i \end{cases}$$
2. El S-conjunto de las proyecciones w-arias sobre un S-conjunto A es:
$$\mathrm{pr}^A_w = (\{\mathrm{pr}^A_{w,i} \mid w_i = s\})_{s\in S}.$$

Definición 2.53. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $w \in S^{\star}$. La $\mathbf{\Sigma}$-álgebra heterogénea de las operaciones polinómicas w-arias u operaciones derivadas w-arias sobre $\mathbf{A}$, $\mathbf{Pol}_w(\mathbf{A})$, es la subálgebra de la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra de las operaciones w-arias sobre $\mathbf{A}$, $\mathbf{Op}_w(\mathbf{A})$ generada por pr^A_w.

Proposición 2.54. *Sea $\mathbf{A} = (A, F)$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Entonces, se cumple que, para cada $\sigma \in \Sigma_{w,s}$, $F_\sigma \in \mathrm{Pol}_w(\mathbf{A})_s$.* $\square$

Proposición 2.55. *Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra, $u, w \in S^{\star}$, $s \in S$, $P \in \mathrm{Pol}_w(\mathbf{A})_s$ y $Q = (Q_i)_{i\in|w|}$ una familia tal que, para cada $i \in |w|$, $Q_i \in \mathrm{Pol}_u(\mathbf{A})_{w(i)}$. Entonces $P \circ \langle Q_i\rangle_{i\in|w|} \in \mathrm{Pol}_u(\mathbf{A})_s$.*

Demostración. Sea $\mathcal{X}^{w,u}$ el S-conjunto cuya coordenada s-ésima es:

$$\mathcal{X}^{w,u}_s = \{P \in \mathrm{Pol}_w(\mathbf{A})_s \mid \forall (Q_i)_{i\in|w|} \in \mathrm{Pol}_u(\mathbf{A})_w,\ f \circ \langle Q_i\rangle_{i\in|w|} \in \mathrm{Pol}_u(\mathbf{A})_s\}$$

En primer lugar, se cumple que el S-conjunto de las proyecciones w-arias sobre A, pr^A_w, está incluido en $\mathcal{X}^{w,u}$ porque, dado un $s \in S$, un $i \in w^{-1}(s)$ y una familia $(Q_i)_{i\in|w|}$ en $\mathrm{Pol}_u(\mathbf{A})_w$,

$$\mathrm{pr}^A_{w,i} \circ \langle Q_i\rangle_{i\in|w|} = Q_i \in \mathrm{Pol}_u(\mathbf{A})_{w(i)}$$

Además, $\mathcal{X}$ es un cerrado de $\mathrm{Pol}_w(\mathbf{A})$, ya que, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\sigma\colon v \longrightarrow s$, y cada $R = (R_i)_{i\in|v|} \in \mathcal{X}_v$, se tiene que $F_\sigma^{\mathbf{Op}_w(\mathbf{A})}(R) \in \mathcal{X}_s$, puesto que dada una familia $(Q_i)_{i\in|w|} \in \mathrm{Pol}_u(\mathbf{A})_w$ se cumple que

$$\begin{aligned} F_\sigma^{\mathbf{Op}_w(\mathbf{A})}(R) \circ \langle Q_i\rangle_{i\in|w|} &= F_\sigma^{\mathbf{A}} \circ \langle R_i\rangle_{i\in|v|} \circ \langle Q_i\rangle_{i\in|w|} \\ &= F_\sigma^{\mathbf{A}} \circ \langle R_i \circ \langle Q_i\rangle_{i\in|w|}\rangle_{i\in|v|} \in \mathrm{Pol}_u(\mathbf{A})_s \end{aligned}$$

□

En la proposición que sigue usamos las operaciones polinómicas para dar otra descripción del operador subálgebra generada.

Proposición 2.56. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra. Entonces se cumple que*

1. *Para cada* $w \in S^\star$*, cada* $a \in A_w$ *y cada* $s \in S$

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}((a[w^{-1}[s]])_{s\in S})_s = \{P(a) \mid P \in \mathrm{Pol}_w(\mathbf{A})_s\}.$$

2. *Para cada* $X \subseteq A$ *y cada* $s \in S$ *se cumple que*

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)_s = \{P(x) \mid w \in S^\star,\ P \in \mathrm{Pol}_w(\mathbf{A})_s,\ x \in X_w\}$$

□

La siguiente proposición afirma que los cerrados de las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras no sólo lo están respecto de las operaciones estructurales, sino respecto de las operaciones polinómicas de las mismas.

Proposición 2.57. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* X *un cerrado de* $\mathbf{A}$*,* $w \in S^\star$*,* $s \in S$ *y* $P \in \mathrm{Pol}_w(\mathbf{A})_s$*. Entonces, para cada* $x \in X_w$*,* $P(x) \in X_s$*.* □

2.5. Álgebras libres.

Demostramos a continuación la existencia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras libres sobre cualquier S-conjunto y se estudia la relación de los *términos* o *símbolos de operación polinómica* con las operaciones polinómicas de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra.

Definición 2.58. De $\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})$ en $\mathbf{Set}^S$ existe un functor de olvido $\mathrm{G}_{\mathbf{\Sigma}}$ definido sobre objetos y morfismos como:

$$\mathrm{G}_{\mathbf{\Sigma}}(f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}) = f\colon A \longrightarrow B$$

El functor $\mathrm{G}_{\mathbf{\Sigma}}$ tiene un adjunto por la izquierda, que asigna a cada S-conjunto X, una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre sobre él. Ésta se obtiene a partir de una cierta $\mathbf{\Sigma}$-álgebra de palabras, como la subálgebra generada por X. En este contexto, es usual referirse a los elementos de X como *variables*.

Definición 2.59. Sea $\mathbf{\Sigma} = (S, \Sigma)$ una signatura algebraica y X un S-conjunto. La $\mathbf{\Sigma}$-álgebra de las palabras sobre X, $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, es la definida como:

1. Para cada $s \in S$, $\mathrm{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)_s = (\coprod \Sigma \amalg \coprod X)^\star$, i.e., el conjunto subyacente es, en cada coordenada, el conjunto de las palabras que pueden formarse con símbolos de operación de Σ y variables de X.
2. Para cada $\sigma \in \Sigma$, $\sigma\colon w \longrightarrow s$, la operación estructural F_σ, asociada a σ, es la aplicación de $\mathrm{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)_w$ en $\mathrm{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)_s$, i.e., de $((\coprod \Sigma \amalg \coprod X)^\star)^{|w|}$ en $(\coprod \Sigma \amalg \coprod X)^\star$, que a una palabra de palabras $(P_i)_{i\in|w|}$ le asigna $(\sigma) \curlywedge \curlywedge_{i\in|w|} P_i$, i.e., la concatenación de (la imagen de) σ (bajo las inclusiones canónicas desde Σ hasta $(\coprod \Sigma \amalg \coprod X)^\star$ y de la concatenación de las palabras que componen $(P_i)_{i\in|w|}$.

$$F_\sigma \begin{cases} \mathrm{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)_w & \longrightarrow \mathrm{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)_s \\ (P_i)_{i\in|w|} & \longmapsto (\sigma) \curlywedge \curlywedge_{i\in|w|} P_i \end{cases}$$

Definición 2.60. La $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre sobre un S-conjunto X, $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, es la subálgebra de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ generada por el S-conjunto $(\{(x) \mid x \in X_s\})_{s\in S}$, donde, para cada $s \in S$ y cada $x \in X_s$, (x) es la imagen de x mediante las inclusiones canónicas desde X_s hasta $(\coprod \Sigma \amalg \coprod X)^\star$.

A los elementos de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)_s$ se les denomina operación polinómicas formales o términos de tipo s con variables en X.

En las figuras siguientes se muestran las inclusiones desde X_s, resp., $\Sigma_{w,s}$, hasta $\mathrm{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)_s$:

$$
\begin{array}{ccccccc}
X_s & \xrightarrow{\mathrm{in}_{X_s}} & \coprod X & \xrightarrow{\mathrm{in}_{\coprod X}} & \coprod \Sigma \amalg \coprod X & \xrightarrow{\eta_{\coprod \Sigma \amalg \coprod X}} & (\coprod \Sigma \amalg \coprod X)^\star \\
x & \longmapsto & (x,s) & \longmapsto & ((x,s),1) & \longmapsto & (((x,s),1)) \equiv (x)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\Sigma_{w,s} & \xrightarrow{\mathrm{in}_{\Sigma_{w,s}}} & \coprod \Sigma & \xrightarrow{\mathrm{in}_{\coprod \Sigma}} & \coprod \Sigma \amalg \coprod X & \xrightarrow{\eta_{\coprod \Sigma \amalg \coprod X}} & (\coprod \Sigma \amalg \coprod X)^\star \\
\sigma & \longmapsto & (\sigma,(w,s)) & \longmapsto & ((\sigma,(w,s)),0) & \longmapsto & (((\sigma,(w,s)),0)) \equiv (\sigma)
\end{array}
$$

Proposición 2.61. *Los símbolos de operación polinómica se pueden representar unívocamente como:*

1. (x), *para un único* $s \in S$ *y un único* $x \in X_s$.
2. (σ), *para un único* $s \in S$ *y un único* $\sigma \in \Sigma_{\lambda,s}$.
3. $(\sigma) \curlywedge \curlywedge(P_i)_{i\in|w|}$, *para unos únicos* $w \in S^\star - \{\lambda\}$, $s \in S$, $\sigma \in \Sigma_{w,s}$, *y una única familia* $(P_i)_{i\in|w|}$ *en* $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)_w$.

□

Es posible dar otras representaciones de la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre sobre un S-conjunto, e.g., mediante la noción de árbol etiquetado. Sin embargo, las propiedades esenciales de la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre sobre un S-conjunto X dependen sólo de su propiedad universal, puesto que esta la determina salvo un único homomorfismo, y no de la forma concreta que se dé de la misma.

Proposición 2.62. *Para cada S-conjunto X, el par $(\eta^X, \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X))$, en el que η^X es la correstricción a $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ de la inclusión canónica de X en $\mathrm{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, es un morfismo universal desde X hasta $\mathrm{G}_{\mathbf{\Sigma}}$, i.e., dada una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ y una S-aplicación $f\colon X \longrightarrow A$, existe un único homomorfismo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras $f^\sharp\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \longrightarrow \mathbf{A}$ que extiende f, i.e., tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta^X"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[d, "f^\sharp"] \\
 & A
\end{tikzcd}
$$

Demostración. En la coordenada s-ésima, la aplicación $f^\sharp_s\colon \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)_s \longrightarrow A_s$ se define, por recursión, como:

$$
P \longmapsto \begin{cases} f_s(x), & \text{si } P = (x); \\ \sigma^{\mathbf{A}}, & \text{si } P = (\sigma); \\ F^{\mathbf{A}}_\sigma(f^\sharp_{w(0)}(P_0), \ldots, f^\sharp_{w(|w|-1)}(P_{|w|-1})), & \text{si } P = (\sigma) \curlywedge \curlywedge(P_i)_{i\in|w|}. \end{cases}
$$

□

Siguiendo la práctica habitual, los términos, $F_{\sigma}^{\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)}(P_i \mid i \in |w|)$ se denotan como $\sigma(P_0, \ldots, P_{|w|-1})$. Asimismo, si no hay ambigüedad, los términos (x) y (σ) se denotan simplemente como x y σ.

Corolario 2.63. *El functor* $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}$ *es adjunto por la izquierda del functor de olvido* $\mathrm{G}_{\mathbf{\Sigma}}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}) \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{G}_{\mathbf{\Sigma}}"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{Set} \arrow[l, shift left=2, "\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}"] \end{tikzcd}$$

Proposición 2.64. *Cada* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{A}$ *es isomorfa a un cociente de una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra libre sobre un* S*-conjunto.* □

Demostración. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Entonces la extensión canónica de la identidad en A, $\mathrm{id}_{\mathbf{A}}^{\sharp}$, es un epimorfismo y $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(A)/\operatorname{Ker}(\mathrm{id}_{\mathbf{A}}^{\sharp})$ es isomorfa a $\mathbf{A}$. □

2.6. Operaciones polinómicas formales y operaciones polinómicas.

Las operaciones polinómicas sobre una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ se pueden caracterizar como las realizaciones de las operaciones polinómicas formales. Estos son los miembros de una cierta $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre sobre un S-conjunto de variables asociado a la ariedad de las operaciones.

Para el estudio de las operaciones polinómica formales es necesario asociar a cada palabra sobre S un S-conjunto de *variables*.

Definición 2.65. Sea $w \in S^{\star}$. Entonces $\downarrow w$ es el S-conjunto

$$\downarrow w = (w^{-1}[s])_{s \in S}$$

Si A un S-conjunto y w es una palabra sobre S, entonces los conjuntos $A_{\downarrow w}$ y A_w son naturalmente isomorfos. En lo que sigue, si no hay ambigüedad, no distinguiremos notacionalmente entre las S-aplicaciones de $A_{\downarrow w}$ y los elementos de A_w.

Las operaciones polinómicas w-arias sobre un álgebra pueden definirse mediante los símbolos de operación polinómica w-arios. Para ello, se hace uso del hecho de que dada una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ y un $w \in S^{\star}$, existe un único homomorfismo $\mathrm{Pd}_w^{\mathbf{A}} \colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow w) \longrightarrow \mathbf{Op}_w(\mathbf{A})$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \downarrow w \arrow[r, "\eta^{\downarrow w}"] \arrow[dr, "\mathrm{p}_w^A"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow w) \arrow[d, "\mathrm{Pd}_w^{\mathbf{A}}"] \\ & \mathrm{Op}_w(\mathbf{A}) \end{tikzcd}$$

conmuta, siendo p_w^A la S-aplicación definida, para cada $s \in S$ y para cada $i \in \downarrow w_s$, como $\mathrm{p}_{w,s}^A(i) = \mathrm{pr}_{w,i}^A$.

Definición 2.66. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra, $w \in S^{\star}$, $s \in S$ y $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow w)_s$. Entonces a $\mathrm{Pd}_{w,s}^{\mathbf{A}}(P)$ se le denomina el polinomio (w, s)-ario determinado por P en $\mathbf{A}$ y se le denota por $P^{\mathbf{A}}$.

Proposición 2.67. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y* $w \in S^{\star}$*. La* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra heterogénea de las operaciones polinómicas* w*-arias sobre* $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{Pol}_w(\mathbf{A})$*, coincide con la subálgebra de* $\mathbf{Op}_w(\mathbf{A})$ *canónicamente asociada a la imagen de* $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow w)$ *mediante* $\mathrm{Pd}_w^{\mathbf{A}}$*, i.e.,* $\mathrm{Pol}_w(\mathbf{A}) = \mathrm{Pd}_w^{\mathbf{A}}[\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow w)]$. □

Demostración. Puesto que $\mathrm{pr}^A_w \subseteq \mathrm{Pd}^{\mathbf{A}}_w[\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow w)]$, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{Op}_w(\mathbf{A})}(\mathrm{pr}^A_w) \subseteq \mathrm{Pd}^{\mathbf{A}}_w[\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow w)]$.

Recíprocamente,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pd}^{\mathbf{A}}_w[\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow w)] &= \mathrm{Pd}^{\mathbf{A}}_w[\mathrm{Sg}_{\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow w)}(\eta^{\downarrow w}[\downarrow w])] \\
&= \mathrm{Sg}_{\mathbf{Op}_w(\mathbf{A})}(\mathrm{Pd}^{\mathbf{A}}_w[\eta^{\downarrow w}[\downarrow w]]) \\
&= \mathrm{Sg}_{\mathbf{Op}_w(\mathbf{A})}(\mathrm{p}^A_w[\downarrow w]) \\
&= \mathrm{Sg}_{\mathbf{Op}_w(\mathbf{A})}(\mathrm{pr}^A_w) \\
&= \mathrm{Pol}^{\mathbf{A}}_w
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.68 (Ley de reciprocidad)**.** *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* P *un polinomio formal en* $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow w)_s$ *y* $a\colon \downarrow w \longrightarrow A$*. Entonces* $a^\sharp_s(P) = P^{\mathbf{A}}(a)$*.*

Demostración. El diagrama

$$\begin{tikzcd}
\downarrow w \arrow[r, "\eta^{\downarrow w}"] \arrow[dr, "a"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow w) \arrow[d, "a^\sharp"] \arrow[dr, "\mathrm{Pd}^{\mathbf{A}}_w"] & \\
& A & \mathrm{Op}_w(\mathbf{A}) \arrow[l, "\mathrm{ev}_a"]
\end{tikzcd}$$

conmuta, siendo ev_a el homomorfismo de evaluación definido, en la coordenada s-ésima, como

$$(\mathrm{ev}_a)_s(f\colon A_w \longrightarrow A_s) = f(a)$$

luego, para cada $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow w)_s$, se cumple que:

$$a^\sharp_s(P) = (\mathrm{ev}_a)_s \circ \mathrm{Pd}^A_{w,s}(P) = (\mathrm{ev}_a)_s(P^{\mathbf{A}}) = P^{\mathbf{A}}(a)$$

□

Proposición 2.69. *La restricción a* $\mathbf{Pol}_w(\mathbf{A})$ *de* $\mathrm{Pd}^{\mathbf{A}}_w$ *es un homomorfismo sobreyectivo, por lo que* $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow w)/\operatorname{Ker}(\mathrm{Pd}^{\mathbf{A}}_w)$ *es isomorfa a* $\mathbf{Pol}_w(\mathbf{A})$*.* □

Las operaciones polinómicas w-arias se comportan, respecto de los homomorfismos, como las operaciones estructurales de las álgebras.

Proposición 2.70. *Sea* $\mathbf{\Sigma}$ *un signatura algebraica y* $h\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras. Entonces para cada* $w \in S^\star$*,* $s \in S$ *y* $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow w)_s$ *el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
A_w \arrow[r, "P^{\mathbf{A}}"] \arrow[d, "h_w"'] & A_s \arrow[d, "h_s"] \\
B_w \arrow[r, "P^{\mathbf{B}}"'] & B_s
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. El diagrama

$$\begin{tikzcd}
\downarrow w \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "a"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow w) \arrow[d, "a^\sharp"] \arrow[dr, "(h \circ a)^\sharp"] & \\
& A \arrow[r, "h"'] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta, por lo que

$$h_s \circ P^{\mathbf{A}}(a) = h_s \circ a_s^\sharp(P) = (h \circ a)_s^\sharp(P) = P^{\mathbf{B}}(h \circ a) = P^{\mathbf{B}}(h_w(a))$$

□

3. Números naturales.

> It was a commonplace belief among philosophers and mathematicians of the 19th century that the existence of infinite sets could be proved, and in particular the set of natural numbers could be "constructed"out of thin air, "by logic alone."All the proposed "proofs"involved the faulty General Comprehension Principle in some form or other. We know better now: *Logic can codify the valid forms of reasoning but it cannot prove the existence of anything, let alone infinite sets.* By taking account of this fact cleanly and explicitly in the formulation of his axioms, Zermelo made a substantial contribution to the process of purging logic of ontological concerns, a necessary step in the rigurous development of logic as a science in its own right in our century.
>
> *Y. Moschovakis.*

> Brouwer made it clear, as I think beyond any doubt, that there is no evidence supporting the belief in the existential character of the totality of all natural numbers ... The sequence of numbers which grows beyond any stage already reached by passing to the next number, is the manifold of possibilities open towards infinity: it remains forever in the state of creation but is not a closed realm of things existing in themselves. That we blindly converted one into the other is the true source of our difficulties, including the antinomies – a source of more fundamental nature than Russell's vicious principle indicated. Brouwer mathematics, nourished by a belief in the 'absolute' that transcends all possibilities of realization, goes beyond such statements as can claim real meaning and truth founded on evidence.
>
> *H. Weyl.*

En este sección enunciamos el axioma del conjunto infinito, que nos permitirá demostrar la existencia de un álgebra de Dedekind-Peano y, para tales álgebras, obtendremos el principio de la definición por recursión finita, a partir del cual demostraremos que las álgebras de Dedekind-Peano son esencialmente únicas, y que otros principios de definición por recursión más complejos, se pueden obtener a partir del mismo.

Además, demostraremos que el conjunto subyacente del álgebra Dedekind-Peano, que será el conjunto de los números naturales, está dotado de una buena ordenación, y que tal ordenación es compatible con las operaciones aritméticas usuales, definidas por recursión, sobre el conjunto de los números naturales; así como la caracterización, en términos ordinales del conjunto de los números naturales.

Por último, una vez definidos los conjuntos finitos y los infinito numerables, estudiaremos la conducta de los mismos respecto de las operaciones conjuntistas, y demostraremos que el conjunto de los números naturales, junto con las aplicaciones entre ellos, es un esqueleto del sistema de los conjuntos finitos, junto con las aplicaciones entre ellos.

Los axiomas de la teoría de conjuntos de **ZFSk** hasta ahora enunciados, sólo nos permiten afirmar la existencia de una infinidad de conjuntos distintos, e.g., los conjuntos $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, ..., pero no, y éste será el primer gran salto de lo finito a lo transfinito, la existencia de un conjunto, actualmente, *infinito*. Para poder asegurar la existencia de al menos un conjunto infinito, procedemos axiomáticamente, tal como hizo Zermelo.

3.1. El axioma del conjunto infinito.

Antes de enunciar el axioma del conjunto infinito, recordamos que si A es un conjunto, entonces A^+ denota el conjunto sucesor de A, que es $A \cup \{A\}$.

Axioma del conjunto infinito. *Hay al menos un conjunto del cual es miembro el conjunto vacío, y que está cerrado bajo la operación de formación del sucesor de un conjunto:*

$$\exists A\, (\varnothing \in A \wedge \forall x\, (x \in A \rightarrow x^+ \in A)).$$

El axioma del conjunto infinito, bajo la forma anterior, se debe a von Neumann; el que propuso Zermelo es:

$$\exists A\, (\varnothing \in A \wedge \forall x\, (x \in A \rightarrow \{x\} \in A)).$$

Obsérvese que lo que diferencia al axioma propuesto por von Neumann del propuesto por Zermelo, reside en la operación de formación del conjunto sucesor, que, en el caso de von Neumann, es la que a un conjunto x la asigna x^+ y, en el de Zermelo, la que a x le asigna $\{x\}$.

De ahora en adelante usaremos el propuesto por von Neumann.

Antes de proseguir con la obtención de algunas de las consecuencias de la admisión del nuevo axioma, conviene recordar que Dedekind, después de definir a los conjuntos *infinitos* como aquéllos que son isomorfos a un subconjunto estricto de sí mismos, transformando de este modo un teorema de Galileo, según el cual hay tantos números naturales como cuadrados de los mismos, en una definición; propuso, como *teorema*, la existencia de al menos un conjunto infinito. De dicho *teorema* dió la siguiente *demostración*:

> El mundo de mis pensamientos, es decir, la totalidad S de todas las cosas que pueden ser objeto de mi pensamiento es infinito. De hecho, si s indica un elemento de S, el pensamiento s' de que s puede ser objeto de mi pensamiento es él mismo un elemento de S. Si se considera s' como la imagen $\varphi(s)$ del elemento s, entonces la representación φ de S determinada de esa manera tiene la propiedad de que la imagen S' es parte de S; además, S' es parte propia de S, ya que en S hay elementos (e.g., mi propio yo) diferentes de cada pensamiento de la forma s', y por lo tanto no contenido en S'. Por último, está claro que si a y b son elementos distintos de S, entonces las imágenes a' y b' serán diferentes, es decir φ es una representación inyectiva. Por consiguiente, S es infinito.

Sin entrar en los problemas que plantean los aspectos no matemáticos de la anterior *demostración*, cabe señalar que si se admitiera la existencia del conjunto S de todas las cosas que puedan ser objeto del pensamiento (de Dedekind), entonces, ya que cada subconjunto de S, podría ser objeto del pensamiento (de Dedekind), el conjunto $\mathrm{Sub}(S)$, formado por la totalidad de los subconjuntos de S, debería estar incluido en S. Por lo tanto ambos conjuntos deberían ser isomorfos, en virtud del teorema de Cantor-Bernstein, lo cual entraría en contradicción con un teorema de Cantor. Luego, desgraciadamente, no se puede admitir como existente el conjunto de todas las cosas que puedan ser objeto del pensamiento.

Hay que decir, que Peirce también propuso, independientemente de Dedekind, el mismo concepto de infinitud que éste último; y que la *demostración* anterior de Dedekind es similar a una de Bolzano.

Hay algunos autores que afirman que lo siguiente es una definición de los números naturales:

> Los números naturales son el cero, el siguiente de cero, el siguiente del siguiente del cero y, *en general*, todos los objetos a los que se llega a partir del cero aplicando un *número finito* de veces la *operación* "siguiente", entendiendo que cada vez obtenemos un objeto distinto de todos los anteriores.

Si con ello tales autores pretenden dar una descripción de los elementos del conjunto subyacente del álgebra absolutamente libre sobre el conjunto vacío y para la signatura algebraica que tiene una operación formal 0-aria, precisamente el cero, y una operación formal 1-aria, el sucesor, no hay nada que objetar. Sólo subsiste el problema de demostrar la existencia de tal álgebra libre, y dicho problema se soluciona admitiendo, axiomáticamente, la existencia de un conjunto infinito. Ahora bien, si lo que pretenden es que lo afirmado es una definición, entonces están incurriendo en peticiones de principio y algunos defectos más, como no caer en la cuenta de que las definiciones no son creativas, ni tomar en consideración la diferencia entre lenguaje y metalenguaje.

Esta, pretendida definición, parece presuponer que ya se sabe lo que significa "aplicar un número finito de veces una operación"a una entidad, por lo tanto parece innecesario definir los números finitos, i.e., los números naturales, pués ya se conocen, o se está incurriendo en una petición de principio. Seamos más explícitos, entre otras cosas, se está presuponiendo que se dispone del concepto de operación (se habla de la operación "siguiente"), pero una operación actúa sobre los objetos de un dominio bien determinado, cerrado, así que la operación "siguiente"ha de tenerlo,.... Además, al decir que la operación se aplique un número finito de veces, se está, una vez más, presuponiendo que se dispone de los números naturales, que se conoce el concepto de composición y, además, la definición por recursión finita. Por último, para entender que "cada vez obtenemos un objeto distinto de todos los anteriores ", hemos de presuponer que sabemos que la operación sucesor es inyectiva.

3.2. Algebras de Dedekind-Peano.

Dedekind, en una carta dirigida a Keferstein, y después de indicarle que su ensayo sobre los números no fué escrito en un día; sino que, más bien, era una síntesis construida después de un prolongado trabajo, basado en un análisis previo de la sucesión de los números naturales tal cual como se presenta, en la experiencia, por así decir, para nuestra consideración; se pregunta por:

> What are the mutually independent fundamental properties of the sequence $\mathbb{N}$, that is, those properties that are not derivable from one another but from which all others follow? And how should we divest these properties of their specifically arithmetic character so that they are subsumed under more general notions and under activities of the understanding *whithout* which no thinking is possible but *with* which a foundation is provided for the reliability and completeness of proofs and for the construction of consistent notions and definitions?

La respuesta a lo anterior viene dada por el concepto de *álgebra de Dedekind-Peano*, de las que a continuación, apoyándonos sobre el axioma del conjunto infinito, demostraremos la existencia, y cuya definición, es la siguiente.

Definición 3.1. Un *álgebra de Dedekind-Peano* es un triplo ordenado $\mathbf{A} = (A, f, e)$ en el que A es un conjunto, f una endoaplicación de A y e un miembro de A, tal que:

1. f es inyectiva.
2. $\operatorname{Im}(f) \cap \{e\} = \varnothing$.
3. $\forall X \subseteq A\,((\,f[X] \subseteq X \wedge e \in X\,) \to X = A\,)$.

Observemos que la segunda claúsula de la definición anterior afirma simplemente que e no es de la forma $f(a)$, sea cual sea $a \in A$, y que la última cláusula de la misma, dice que la única parte de A que tiene las propiedades de está cerrada bajo f y contener como miembro a e, es la propia A.

Como primer paso hacia la demostración de la existencia de un álgebra de Dedekind-Peano, establecemos el siguiente teorema.

Teorema 3.2. *Hay un único conjunto, el conjunto de los* números naturales*, denotado por* $\mathbb{N}$*, que tiene las siguientes propiedades:*

1. $\varnothing \in \mathbb{N} \wedge \forall n\,(\, n \in \mathbb{N} \rightarrow n^{+} \in \mathbb{N}\,)$.
2. $\forall B\,((\,\varnothing \in B \wedge \forall y\,(y \in B \rightarrow y^{+} \in B\,)) \rightarrow \mathbb{N} \subseteq B\,)$

Demostración. Existencia. En virtud del axioma del conjunto infinito, existe al menos un conjunto A tal que $\varnothing \in A$ y para cada $x \in A$, $x^{+} \in A$. Sea A uno de ellos, arbitrario, pero fijo. Entonces para el conjunto $\mathcal{X}$ definido como:

$$\mathcal{X} = \{\, X \in \mathrm{Sub}(A) \mid \varnothing \in X \wedge \forall x\,(x \in X \rightarrow x^{+} \in X)\,\},$$

se cumple que $\mathcal{X} \neq \varnothing$, porque $A \subseteq A$, $\varnothing \in A$ y para cada $x \in A$, $x^{+} \in A$. Luego existe el conjunto $\mathbb{N} = \bigcap \mathcal{X}$ y es tal que $\varnothing \in \mathbb{N}$, porque, para cada $X \in \mathcal{X}$, $\varnothing \in X$, y, para cada $x \in \mathbb{N}$, $x^{+} \in \mathbb{N}$, ya que, para cada $X \in \mathcal{X}$, $x^{+} \in X$.

Ahora demostramos que $\mathbb{N}$ está incluido en cualquier conjunto B que esté cerrado bajo la formación del conjunto sucesor y para el que $\varnothing \in B$. Sea B un tal conjunto, arbitrario, pero fijo. Entonces, ya que $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B$ está cerrado bajo la formación del conjunto sucesor y $\varnothing \in A \cap B$, se cumple que $A \cap B \in \mathcal{X}$, por lo tanto $\mathbb{N} \subseteq A \cap B$, pero $A \cap B \subseteq B$, así que $\mathbb{N} \subseteq B$.

Unicidad. Si $\mathbb{N}'$ tuviera las mismas propiedades que tiene $\mathbb{N}$, entonces $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}'$ y $\mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$, luego $\mathbb{N} = \mathbb{N}'$. □

Definición 3.3. Al conjunto vacío, cuando lo consideremos como miembro del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, lo denotamos por 0. Además, 1 denota al sucesor de 0, i.e., $1 = \{0\}$, 2 al sucesor de 1, i.e., $2 = \{0, 1\}$, ..., 9 al sucesor de 8, i.e., $9 = \{0, 1, \ldots, 8\}$ y 10 al sucesor de 9, i.e., $\{0, 1, \ldots, 9\}$.

Proposición 3.4. *La relación binaria* Sc *sobre* $\mathbb{N}$*, definida como:*

$$\mathrm{Sc} = \{\, (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n = m^{+}\,\},$$

es una endofunción de $\mathbb{N}$.

Demostración. Porque, para cada número natural está unívocamente determinado el conjunto sucesor del mismo y, además, tal conjunto sucesor, en este caso, es un número natural. □

Definición 3.5. Denotamos por sc la endoaplicación de $\mathbb{N}$ cuya función subyacente es Sc y la denominamos la aplicación *sucesor* de $\mathbb{N}$. Además, denotamos el valor de sc en n, para cada $n \in \mathbb{N}$, por n^{+} o $n + 1$. Por último, denotamos por $\mathbf{N}$ el triplo ordenado $(\mathbb{N}, \mathrm{sc}, 0)$.

Proposición 3.6. *Para cada número natural* $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{sc}(n) \neq 0$*, o, lo que es equivalente,* $\{0\} \cap \mathrm{Im}(\mathrm{sc}) = \varnothing$.

Demostración. Porque, para cada número natural $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{sc}(n) = n \cup \{n\}$ no es vacío. □

Teorema 3.7 (Principio de la demostración por inducción finita)**.** *Para cada subconjunto* X *de* $\mathbb{N}$*, si* $0 \in X$ *y* $\mathrm{sc}[X] \subseteq X$*, entonces* $X = \mathbb{N}$.

Demostración. Sea X un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que $0 \in X$ y $\mathrm{sc}[X] \subseteq X$. Entonces $\mathbb{N} \subseteq X$, ya que $\mathbb{N}$ es el mínimo conjunto con tales propiedades, por lo tanto, ya que por hipótesis $X \subseteq \mathbb{N}$, $X = \mathbb{N}$. □

Proposición 3.8. *El principio de la demostración por inducción finita equivale a que* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{N}}(\varnothing) = \mathbb{N}$*, siendo* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{N}}(\varnothing)$ *el mínimo subconjunto de* $\mathbb{N}$ *que contiene al vacío, al que pertenece el* 0 *y que está cerrado bajo* sc*, i.e., siendo* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{N}}(\varnothing)$ *el conjunto definido como:*

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{N}}(\varnothing) = \bigcap \{\, Y \subseteq \mathbb{N} \mid 0 \in Y \wedge \mathrm{sc}[Y] \subseteq Y\,\}.$$

Demostración. Supongamos el principio de la demostración por inducción finita, i.e., que para cada subconjunto X de $\mathbb{N}$, si $0 \in X$ y $\mathrm{sc}[X] \subseteq X$, entonces $X = \mathbb{N}$. Entonces, por ser $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$ y cumplirse que $0 \in \mathbb{N}$ y que $\mathrm{sc}[\mathbb{N}] \subseteq \mathbb{N}$, tenemos que $\mathbb{N}$ pertenece al conjunto $\{\, Y \subseteq \mathbb{N} \mid 0 \in Y \wedge \mathrm{sc}[Y] \subseteq Y \,\}$, luego $\mathrm{Sg}_{\mathbf{N}}(\varnothing) \subseteq \mathbb{N}$. Además, $\mathbb{N} \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{N}}(\varnothing)$, porque $0 \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{N}}(\varnothing)$, $\mathrm{sc}[\mathrm{Sg}_{\mathbf{N}}(\varnothing)] \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{N}}(\varnothing)$ y $\mathbb{N}$ es el mínimo conjunto con tales propiedades. Por lo tanto $\mathrm{Sg}_{\mathbf{N}}(\varnothing) = \mathbb{N}$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{N}}(\varnothing) = \mathbb{N}$. Entonces, si un subconjunto X de $\mathbb{N}$ es tal que $0 \in X$ y $\mathrm{sc}[X] \subseteq X$, entonces $X \in \{\, Y \subseteq \mathbb{N} \mid 0 \in Y \wedge \mathrm{sc}[Y] \subseteq Y \,\}$, luego $\mathrm{Sg}_{\mathbf{N}}(\varnothing) \subseteq X$, así que $\mathbb{N} \subseteq X$, pero $X \subseteq \mathbb{N}$, luego $X = \mathbb{N}$. □

A partir del principio de la demostración por inducción finita, se deduce que una condición suficiente para que todos los números naturales tenga una cierta propiedad, es que la tenga el 0, y que cuando un número natural arbitrario la tenga, también la tenga su sucesor, i.e., si $\varphi(x, t_{[n]})$ es una fórmula, entonces

$$\forall t_0, \dots, t_{n-1} \,((\, \varphi(0, t_{[n]}) \wedge \forall x \in \mathbb{N}\,(\, \varphi(x, t_{[n]}) \to \varphi(x^+, t_{[n]})\,)\,) \to \\ \forall x \in \mathbb{N}\,(\, \varphi(x, t_{[n]})\,)\,)).$$

Proposición 3.9. *Si* $n \in \mathbb{N} - 1$, *entonces hay un* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $n = m^+$, *o, lo que es equivalente,* $\mathbb{N} - (\{0\} \cup \mathrm{Im}(\mathrm{sc})) = \varnothing$

Demostración. □

Para demostrar que la aplicación sucesor es inyectiva, definimos a continuación el concepto de conjunto $\in$-*transitivo*. Además, damos algunas caracterizaciones de dicho concepto y establecemos algunas propiedades de clausura del mismo.

Definición 3.10. Un conjunto A es $\in$-*transitivo* si para cualesquiera conjuntos x e y, si $y \in x$ y $x \in A$, entonces $y \in A$.

Lema 3.11. *Un conjunto* A *es* $\in$-transitivo *si y sólo si para cada conjunto* x, *si* $x \in A$, *entonces* $x \subseteq A$.

Proposición 3.12. *Sea* A *un conjunto. Entonces son equivalentes:*

1. A *es* $\in$-*transitivo.*
2. $\bigcup A \subseteq A$.
3. $A \subseteq \mathrm{Sub}(A)$.

Demostración. □

Proposición 3.13.

1. *Si* A *es* $\in$-*transitivo, entonces* A^+ *es* $\in$-*transitivo.*
2. *Si* A *es* $\in$-*transitivo, entonces* $\bigcup A$ *es* $\in$-*transitivo.*
3. *Si* A *es tal que todos sus miembros son* $\in$-*transitivos, entonces* $\bigcup A$ *es* $\in$-*transitivo.*
4. *Si* A *no es vacío y todos sus miembros son* $\in$-*transitivos, entonces* $\bigcap A$ *es* $\in$-*transitivo.*

Demostración. □

A continuación, establecemos una caracterización del concepto de conjunto $\in$-transitivo, que será especialmente útil en la demostración de que la aplicación sucesor es inyectiva.

Proposición 3.14. *Una condición necesaria y suficiente para que un conjunto* A *sea* $\in$-*transitivo, es que* $\bigcup A^+ = A$

Demostración. □

Proposición 3.15. *Cualquier número natural es $\in$-transitivo.*

Demostración. Demostramos, por inducción, que $T = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \,\text{es}\, \in\text{-transitivo}\,\}$, coincide con el conjunto de los números naturales.

Se cumple que $0 \in T$, porque $\bigcup 0^+ = 0$. Supongamos que $n \in T$, i.e., que n sea $\in$-transitivo, o, lo que es equivalente, que $\bigcup n^+ = n$. Entonces

$$\begin{aligned}
\bigcup (n^+)^+ &= \bigcup (n^+ \cup \{n^+\}) \\
&= (\bigcup n^+) \cup (\bigcup \{n^+\}) \\
&= n \cup (n \cup \{n\}) \\
&= n^+,
\end{aligned}$$

luego n^+ es $\in$-transitivo, i.e., $n^+ \in T$. Por consiguiente $T = \mathbb{N}$.

□

Teorema 3.16. *El triplo ordenado* $(\mathbb{N}, \mathrm{sc}, 0)$ *es un álgebra de Dedekind-Peano.*

Demostración. □

Proposición 3.17. *El conjunto $\mathbb{N}$ es $\in$-transitivo, i.e., para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $n \subseteq \mathbb{N}$, así que todo número natural es un conjunto de números naturales.*

Demostración. □

3.3. El principio de la definición por recursión finita.

Demostramos a continuación el *principio de la definición por recursión finita*, debido a Dedekind. Este principio de definición nos permitirá demostrar que el álgebra de Dedekind-Peano $(\mathbb{N}, \mathrm{sc}, 0)$ es esencialmente única. También, a partir de dicho principio establecemos otros principios de definición por recursión, que usaremos en la teoría de las funciones recursivas.

Teorema 3.18 (Principio de la definición por recursión finita)**.** *Sea A un conjunto, $e \in A$ y $f\colon A \longrightarrow A$ una endoaplicación de A. Entonces se cumple que hay una única aplicación $h\colon \mathbb{N} \longrightarrow A$ tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{N} \arrow[dd, "h"'] & \mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{sc}"'] \arrow[dd, "h"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_0"] \arrow[dr, "\kappa_e"'] & & \\
 & A & A \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}$$

en el que κ_0 es la aplicación que al único miembro de 1 le asigna 0 y κ_e la aplicación que al único miembro de 1 le asigna e, conmuta, i.e., tal que:

1. $h(0) = e$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}\, (h(\mathrm{sc}(n)) = f(h(n)))$.

Demostración. Decimos que una función parcial G de $\mathbb{N}$ en A es *aceptable*, respecto de e y $f = (A, F, A)$, si cumple las siguientes condiciones:

1. Si $0 \in \mathrm{Dom}(G)$, entonces $G(0) = e$.
2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, si $\mathrm{sc}(n) \in \mathrm{Dom}(G)$, entonces $n \in \mathrm{Dom}(G)$ y $G(\mathrm{sc}(n)) = F(G(n))$.

Sea $\mathcal{G}$ el conjunto de todas las funciones parciales de $\mathbb{N}$ en A que sean aceptables (conjunto obtenido, mediante una aplicación del esquema axiomático de separación, a partir del conjunto de todas las funciones parciales de $\mathbb{N}$ en A). Vamos a demostrar que el conjunto $H = \bigcup \mathcal{G}$ tiene las siguientes propiedades:

1. H es una función parcial de $\mathbb{N}$ en A.
2. H es aceptable.
3. $\mathrm{Dom}(H) = \mathbb{N}$.
4. H es la única función de $\mathbb{N}$ en A tal que
   a) $H(0) = e$.
   b) $\forall n \in \mathbb{N}\,(H(\mathrm{sc}(n)) = F(H(n)))$.

Demostramos en primer lugar que hay a lo sumo una función H de $\mathbb{N}$ en A tal que

- $H(0) = e$.
- $\forall n \in \mathbb{N}\,(H(\mathrm{sc}(n)) = F(H(n)))$.

En efecto, si H' fuera otra función de $\mathbb{N}$ en A que tuviera las mismas propiedades que tiene H, entonces el igualador de H y H', i.e., el conjunto $\mathrm{Eq}(H, H') = \{\, n \in \mathbb{N} \mid H(n) = H'(n)\,\}$, coincidiría con $\mathbb{N}$, ya que, por cumplirse, por una parte, que $0 \in \mathrm{Eq}(H, H')$, debido a que $H(0) = e = H'(0)$, y, por otra, que dado un $n \in \mathbb{N}$, si $n \in \mathrm{Eq}(H, H')$, i.e., si $H(n) = H'(n)$, entonces $\mathrm{sc}(n) \in \mathrm{Eq}(H, H')$, porque

$$\begin{aligned} H(\mathrm{sc}(n)) &= F(H(n)) \text{ (porque } H \text{ tiene tal propiedad)} \\ &= F(H'(n)) \text{ (porque, por hipótesis, } H(n) = H'(n)) \\ &= H'(\mathrm{sc}(n)) \text{ (porque } H' \text{ tiene tal propiedad)}, \end{aligned}$$

entonces, en virtud del principio de la demostración por inducción finita, $\mathrm{Eq}(H, H') = \mathbb{N}$, luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, $H(n) = H'(n)$, i.e., $H = H'$.

Ahora demostramos que $H = \bigcup \mathcal{G}$ es una función parcial de $\mathbb{N}$ en A.

En efecto, puesto que, para cada $G \in \mathcal{G}$, G es una función parcial de $\mathbb{N}$ en A, $H \subseteq \mathbb{N} \times A$, luego H es una relación de $\mathbb{N}$ en A. Para demostrar que la relación H es una función parcial de $\mathbb{N}$ en A, hay que demostrar que, para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $y, z \in A$, si $(n, y), (n, z) \in H$, entonces $y = z$. Para ello, es suficiente que demostremos, por inducción, que el conjunto T definido como:

$$T = \{\, n \in \mathbb{N} \mid \forall y, z \in A\,((n, y) \in H \wedge (n, z) \in H \rightarrow y = z)\,\},$$

coincide con $\mathbb{N}$.

Se cumple que $T = \mathbb{N}$, ya que, por una parte, $0 \in T$, porque si $y, z \in A$ son tales que $(0, y) \in H$ y $(0, z) \in H$, entonces, ya que $H = \bigcup \mathcal{G}$, hay un $G_y \in \mathcal{G}$ tal que $(0, y) \in G_y$ y hay un $G_z \in \mathcal{G}$ tal que $(0, z) \in G_z$, luego $0 \in \mathrm{Dom}(G_y)$ y $0 \in \mathrm{Dom}(G_z)$, por lo tanto, ya que G_y y G_z son aceptables, $G_y(0) = e = G_z(0)$, pero $G_y(0) = y$ y $G_z(0) = z$, así que $y = e = z$, por lo tanto $y = z$; y, por otra, dado un $n \in \mathbb{N}$, si $n \in T$, entonces, dados $y, z \in A$ tales que $(\mathrm{sc}(n), y) \in H$ y $(\mathrm{sc}(n), z) \in H$, ya que $H = \bigcup \mathcal{G}$, hay un $G_y \in \mathcal{G}$ tal que $(\mathrm{sc}(n), y) \in G_y$ y hay un $G_z \in \mathcal{G}$ tal que $(\mathrm{sc}(n), z) \in G_z$. Ahora bien, ya que G_y y G_z son aceptables, $n \in \mathrm{Dom}(G_y)$ y $G_y(\mathrm{sc}(n)) = F(G_y(n)) = y$ y $n \in \mathrm{Dom}(G_z)$ y $G_z(\mathrm{sc}(n)) = F(G_z(n)) = z$. Además, se cumple que $(n, G_y(n))$ y $(n, G_z(n)) \in H$, luego, por la hipótesis de inducción, $G_y(n) = G_z(n)$, por lo tanto $F(G_y(n)) = F(G_z(n))$, pero $F(G_y(n)) = y$ y $F(G_z(n)) = z$, así que $y = z$. Podemos afirmar pues que $\mathrm{sc}(n) \in T$. Por consiguiente $\mathbb{N} = T$, i.e., H es una función parcial de $\mathbb{N}$ en A.

Demostramos a continuación que H es aceptable. Si $0 \in \mathrm{Dom}(H)$, entonces, ya que $H = \bigcup \mathcal{G}$, hay un $G \in \mathcal{G}$ tal que $0 \in \mathrm{Dom}(G)$, luego $G(0) = e$, i.e., $(0, e) \in G$, pero $G \subseteq H$, así que $(0, e) \in H$, i.e., $H(0) = e$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $\mathrm{sc}(n) \in \mathrm{Dom}(H)$, entonces ya que $H = \bigcup \mathcal{G}$, hay un $G \in \mathcal{G}$ tal que $\mathrm{sc}(n) \in \mathrm{Dom}(G)$, luego $n \in \mathrm{Dom}(G)$ y $G(\mathrm{sc}(n)) = F(G(n))$. De donde, en particular, $n \in \mathrm{Dom}(H)$, porque $\mathrm{Dom}(H) = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} \mathrm{Dom}(G)$. Así que $H(n) = G(n)$ y, ya que $(\mathrm{sc}(n), F(G(n))) \in G$ y $G \subseteq H$, $(\mathrm{sc}(n), F(G(n))) \in H$, i.e., $H(\mathrm{sc}(n)) = F(G(n))$, luego $H(\mathrm{sc}(n)) = F(H(n))$.

Demostramos, por último, que H es una función de $\mathbb{N}$ en A. Para ello es suficiente que demostremos, por inducción, que el conjunto $T = \{\, n \in \mathbb{N} \mid \exists y \in A\,((n, y) \in H)\,\}$ coincide con $\mathbb{N}$.

Se cumple que $0 \in T$, porque $\{(0, e)\} \in \mathcal{G}$ y $H = \bigcup \mathcal{G}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $n \in T$. Vamos a demostrar que si $\mathrm{sc}(n) \notin T$, entonces la relación $G = H \cup \{(\mathrm{sc}(n), F(H(n)))\}$ tiene las propiedades de ser una función parcial de $\mathbb{N}$ en A, ser aceptable y contener estrictamente a H, lo cual, junto con lo demostrado hasta ahora para H, constituirá una contradicción.

G es una función parcial de $\mathbb{N}$ en A, porque tanto H como $\{(\mathrm{sc}(n), F(H(n)))\}$ lo son y las restricciones de ambas a la intersección de sus dominios de definición (que es el conjunto vacío) coinciden. Además, por definición de G, se cumple que $H \subset G$. Por último, G es aceptable, ya que, por una parte, si $0 \in \mathrm{Dom}(G)$, entonces $0 \in \mathrm{Dom}(H)$, luego $H(0) = e = G(0)$, y, por otra, dado un $m \in \mathbb{N}$, si $\mathrm{sc}(m) \in \mathrm{Dom}(G)$, entonces, puesto que $\mathrm{Dom}(G) = \mathrm{Dom}(H) \cup \{\mathrm{sc}(n)\}$ y $\mathrm{Dom}(H) \cap \{\mathrm{sc}(n)\} = \varnothing$, o bien $\mathrm{sc}(m) \in \mathrm{Dom}(H)$ o bien $\mathrm{sc}(m) = \mathrm{sc}(n)$. Si lo primero, entonces, por ser H aceptable, $m \in \mathrm{Dom}(H)$ y $H(\mathrm{sc}(m)) = F(H(m))$, luego $m \in \mathrm{Dom}(G)$ y $G(\mathrm{sc}(m)) = F(H(m)) = F(G(m))$. Si lo segundo, entonces por ser sc inyectiva, $m = n$, pero $n \in \mathrm{Dom}(H)$, luego $n \in \mathrm{Dom}(G)$ y $G(\mathrm{sc}(m)) = F(H(m)) = F(G(m))$. Pero esto entra en contradicción con la definición de H. Por lo tanto $\mathrm{sc}(n) \in T$ y, en consecuencia, $T = \mathbb{N}$, i.e., $\mathrm{Dom}(H) = \mathbb{N}$.

Luego, tomando como h el triplo ordenado $(\mathbb{N}, H, A)$, obtenemos el teorema. □

Debemos observar que la propiedad establecida en el teorema anterior, para el álgebra de Dedekind-Peano $(\mathbb{N}, \mathrm{sc}, 0)$, no es privativa de ésa álgebra concreta, sino que es compartida por todas las álgebras de Dedekind-Peano.

Si $\mathbf{A} = (A, f, e)$ es un álgebra de Dedekind-Peano, A' un conjunto, $e' \in A'$ y $f' \colon A' \longrightarrow A'$, entonces hay una única aplicación $h \colon A \longrightarrow A'$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dd, "h"] & A \arrow[l, "f"'] \arrow[dd, "h"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_e"] \arrow[dr, "\kappa_{e'}"'] & & \\
 & A' & A' \arrow[l, "f'"]
\end{tikzcd}$$

conmuta, siendo κ_e la aplicación que al único miembro de 1 le asigna e y $\kappa_{e'}$ la aplicación que al único miembro de 1 le asigna e'.

Proposición 3.19. *Si $\mathbf{A} = (A, f, e)$ es un álgebra de Dedekind-Peano, entonces hay una única aplicación biyectiva $h \colon \mathbb{N} \longrightarrow A$ tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{N} \arrow[dd, "h"] & \mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{sc}"'] \arrow[dd, "h"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_0"] \arrow[dr, "\kappa_e"'] & & \\
 & A & A \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Por ser $\mathbf{N}$ y $\mathbf{A}$ álgebras de Dedekind-Peano, existe una única aplicación $h \colon \mathbb{N} \longrightarrow A$, así como una única aplicación $t \colon A \longrightarrow \mathbb{N}$, de modo que los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{N} \arrow[dd, "h"'] & \mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{sc}"'] \arrow[dd, "h"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_0"] \arrow[dr, "\kappa_e"'] & & \\
& A & A \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
& A \arrow[dd, "t"'] & A \arrow[l, "f"'] \arrow[dd, "t"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_e"] \arrow[dr, "\kappa_0"'] & & \\
& \mathbb{N} & \mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{sc}"]
\end{tikzcd}$$

conmutan. Luego los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{N} \arrow[dd, "t \circ h"'] & \mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{sc}"'] \arrow[dd, "t \circ h"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_0"] \arrow[dr, "\kappa_0"'] & & \\
& \mathbb{N} & \mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{sc}"]
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
& A \arrow[dd, "h \circ t"'] & A \arrow[l, "f"'] \arrow[dd, "h \circ t"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_e"] \arrow[dr, "\kappa_e"'] & & \\
& A & A \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}$$

conmutan. Pero los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{N} \arrow[dd, "\mathrm{id}_{\mathbb{N}}"'] & \mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{sc}"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}_{\mathbb{N}}"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_0"] \arrow[dr, "\kappa_0"'] & & \\
& \mathbb{N} & \mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{sc}"]
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
& A \arrow[dd, "\mathrm{id}_A"'] & A \arrow[l, "f"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}_A"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_e"] \arrow[dr, "\kappa_e"'] & & \\
& A & A \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}$$

también conmutan. De donde, por unicidad, $t \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ y $h \circ t = \mathrm{id}_A$, así que $h\colon \mathbb{N} \longrightarrow A$ es una biyección que cumple las condiciones. $\square$

Lema 3.20. *Sea $f\colon A \longrightarrow B$ y $g\colon B \longrightarrow B$. Entonces hay una única aplicación $h\colon A \times \mathbb{N} \longrightarrow B$ tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& A \times \mathbb{N} \arrow[dd, "h"'] & A \times \mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{id}_A \times \mathrm{sc}"'] \arrow[dd, "h"] \\
A \arrow[ur, "\langle \mathrm{id}_A, \kappa_0 \circ \omega_A \rangle"] \arrow[dr, "f"'] & & \\
& B & B \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., tal que:

1. $\forall a \in A\,(h(a,0) = f(a))$.
2. $\forall a \in A\, \forall n \in \mathbb{N}\,(h(a,n^+) = g(h(a,n)))$.

Demostración. Antes de proceder a la demostración, recordemos que $\langle \mathrm{id}_A, \kappa_0 \circ \omega_A\rangle$ es la única aplicación de A en $A \times \mathbb{N}$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "\omega_A"] \arrow[dl, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[d, "\langle \mathrm{id}_A, \kappa_0 \circ \omega_A\rangle"] \arrow[dr, "\kappa_0 \circ \omega_A"] & 1 \arrow[d, "\kappa_0"] \\
A & A \times \mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{pr}_A"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathbb{N}}"'] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Sea $g^A\colon B^A \longrightarrow B^A$ la única endoaplicación de B^A tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \times B^A \arrow[r, "\mathrm{ev}_{A,B}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A \times g^A"'] \arrow[dr, "g \circ \mathrm{ev}_{A,B}"] & B \arrow[d, "g"] \\
A \times B^A \arrow[r, "\mathrm{ev}_{A,B}"'] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta, y $(f \circ \mathrm{pr}_A)^{@}\colon 1 \longrightarrow B^A$ la única aplicación de 1 en B^A tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \times 1 \arrow[r, "\mathrm{pr}_A"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A \times (f \circ \mathrm{pr}_A)^{@}"'] \arrow[dr, "f \circ \mathrm{pr}_A"] & A \arrow[d, "f"] \\
A \times B^A \arrow[r, "\mathrm{ev}_{A,B}"'] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Para $(f \circ \mathrm{pr}_A)^{@}\colon 1 \longrightarrow B^A$ y $g^A\colon B^A \longrightarrow B^A$, en virtud del principio de la definición por recursión finita, podemos afirmar que existe una única aplicación t de $\mathbb{N}$ en B^A, tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{N} \arrow[r, "\mathrm{sc}"] \arrow[d, "t"] & \mathbb{N} \arrow[d, "t"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_0"] \arrow[r, "(f \circ \mathrm{pr}_A)^{@}"'] & B^A \arrow[r, "g^A"'] & B^A
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Sea $h\colon A \times \mathbb{N} \longrightarrow B$ la composición de $\mathrm{id}_A \times t\colon A \times \mathbb{N} \longrightarrow A \times B^A$ y $\mathrm{ev}_{A,B}\colon A \times B^A \longrightarrow B$.

Demostramos en primer lugar que $h \circ (\mathrm{id}_A \times \mathrm{sc}) = g \circ h$.

$$\begin{aligned}
h \circ (\mathrm{id}_A \times \mathrm{sc}) &= (\mathrm{ev}_{A,B} \circ (\mathrm{id}_A \times t)) \circ (\mathrm{id}_A \times \mathrm{sc}) \\
&= \mathrm{ev}_{A,B} \circ ((\mathrm{id}_A \times t) \circ (\mathrm{id}_A \times \mathrm{sc})) \\
&= \mathrm{ev}_{A,B} \circ ((\mathrm{id}_A \circ \mathrm{id}_A) \times (t \circ \mathrm{sc})) \\
&= \mathrm{ev}_{A,B} \circ ((\mathrm{id}_A \circ \mathrm{id}_A) \times (g^A \circ t)) \\
&= \mathrm{ev}_{A,B} \circ ((\mathrm{id}_A \times g^A) \circ (\mathrm{id}_A \times t)) \\
&= (\mathrm{ev}_{A,B} \circ (\mathrm{id}_A \times g^A)) \circ (\mathrm{id}_A \times t) \\
&= (g \circ \mathrm{ev}_{A,B}) \circ (\mathrm{id}_A \times t) \\
&= g \circ (\mathrm{ev}_{A,B} \circ (\mathrm{id}_A \times t)) \\
&= g \circ h.
\end{aligned}$$

Para demostrar que $f = h \circ \langle \mathrm{id}_A, \kappa_0 \circ \omega_A \rangle$, hemos de tener en cuenta que coinciden las columnas centrales de los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[d, "\langle \mathrm{id}_A, \omega_A \rangle"] \arrow[dr, "\omega_A"] & \\
A \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & A \times 1 \arrow[l, "\mathrm{pr}_A"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_A \times (f \circ \mathrm{pr}_A)^@"] & 1 \arrow[d, "(f \circ \mathrm{pr}_A)^@"] \\
A & A \times B^A \arrow[l, "\mathrm{pr}_A"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_{B^A}"'] & B^A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[d, "\left\langle \mathrm{id}_A, (f \circ \mathrm{pr}_A)^@ \circ \omega_A \right\rangle"] \arrow[r, "\omega_A"] & 1 \arrow[d, "(f \circ \mathrm{pr}_A)^@"] \\
A & A \times B^A \arrow[l, "\mathrm{pr}_A"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_{B^A}"'] & B^A
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{aligned}
h \circ \langle \mathrm{id}_A, \kappa_0 \circ \omega_A \rangle &= (\mathrm{ev}_{A,B} \circ (\mathrm{id}_A \times t)) \circ \langle \mathrm{id}_A, \kappa_0 \circ \omega_A \rangle \\
&= \mathrm{ev}_{A,B} \circ ((\mathrm{id}_A \times t) \circ \langle \mathrm{id}_A, \kappa_0 \circ \omega_A \rangle) \\
&= \mathrm{ev}_{A,B} \circ \langle \mathrm{id}_A, t \circ \kappa_0 \circ \omega_A \rangle \\
&= \mathrm{ev}_{A,B} \circ \left\langle \mathrm{id}_A, (f \circ \mathrm{pr}_A)^{@} \circ \omega_A \right\rangle \\
&= \mathrm{ev}_{A,B} \circ ((\mathrm{id}_A \times (f \circ \mathrm{pr}_A)^{@}) \circ \langle \mathrm{id}_A, \omega_A \rangle) \\
&= (\mathrm{ev}_{A,B} \circ (\mathrm{id}_A \times (f \circ \mathrm{pr}_A)^{@})) \circ \langle \mathrm{id}_A, \omega_A \rangle \\
&= (f \circ \mathrm{pr}_A) \circ \langle \mathrm{id}_A, \omega_A \rangle \\
&= f \circ (\mathrm{pr}_A \circ \langle \mathrm{id}_A, \omega_A \rangle) \\
&= f \circ \mathrm{id}_A \\
&= f.
\end{aligned}
$$

De la segunda ecuación a la tercera se pasa porque coinciden las columnas centrales de los siguientes diagramas

$$
\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[d, "\langle \mathrm{id}_A, \kappa_0 \circ \omega_A \rangle"] \arrow[dr, "\kappa_0 \circ \omega_A"] & \\
A \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & A \times \mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{pr}_A"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathbb{N}}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_A \times t"] & \mathbb{N} \arrow[d, "t"] \\
A & A \times B^A \arrow[l, "\mathrm{pr}_A"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_{B^A}"'] & B^A
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& A \arrow[r, "\omega_A"] \arrow[ddl, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[dd, "\langle \mathrm{id}_A, t \circ \kappa_0 \circ \omega_A \rangle"] & 1 \arrow[d, "\kappa_0"] \\
& & \mathbb{N} \arrow[d, "t"] \\
A & A \times B^A \arrow[l, "\mathrm{pr}_A"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_{B^A}"'] & B^A
\end{tikzcd}
$$

y de la antepenúltima a la penúltima se pasa porque el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[d, "\langle \mathrm{id}_A, \omega_A \rangle"] \arrow[dr, "\omega_A"] & \\
A & A \times 1 \arrow[l, "\mathrm{pr}_A"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"'] & 1
\end{tikzcd}
$$

□

Proposición 3.21 (Recursión primitiva con parámetros). *Sea* $g\colon A\times\mathbb{N}\times B \longrightarrow B$ *y* $f\colon A \longrightarrow B$. *Entonces hay una única aplicación* $h\colon A\times\mathbb{N} \longrightarrow B$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& A\times\mathbb{N} \arrow[dd, "h"] & A\times\mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{id}_A\times\mathrm{sc}"'] \arrow[dd, "\langle \mathrm{id}_{A\times\mathbb{N}}, h\rangle"] \\
A \arrow[ur, "\langle \mathrm{id}_A, \kappa_0\circ\omega_A\rangle"] \arrow[dr, "f"'] & & \\
& B & A\times\mathbb{N}\times B \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., tal que:

1. $\forall a \in A\,(h(a,0) = f(a))$.
2. $\forall a \in A\,\forall n \in \mathbb{N}\,(h(a,n^+) = g(a,n,h(a,n)))$.

Demostración. Consideremos en primer lugar el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A\times\mathbb{N} \arrow[d, "\langle \mathrm{pr}_A, \mathrm{sc}\circ\mathrm{pr}_{\mathbb{N}}\rangle"'] & (A\times\mathbb{N})\times B \arrow[l, "\mathrm{pr}_{A\times\mathbb{N}}"'] \arrow[d, "\big\langle \langle \mathrm{pr}_A, \mathrm{sc}\circ\mathrm{pr}_{\mathbb{N}}\rangle\circ\mathrm{pr}_{A\times\mathbb{N}}, g\big\rangle"] \arrow[dr, bend left, "g"] & \\
A\times\mathbb{N} & (A\times\mathbb{N})\times B \arrow[l, "\mathrm{pr}_{A\times\mathbb{N}}"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

Ahora consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& A\times\mathbb{N} \arrow[dd, "k"'] & A\times\mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{id}_A\times\mathrm{sc} = \langle \mathrm{pr}_A, \mathrm{sc}\circ\mathrm{pr}_{\mathbb{N}}\rangle"'] \arrow[dd, "k"] \\
A \arrow[ur, "\langle \mathrm{id}_A, \kappa_0\circ\omega_A\rangle"] \arrow[dr, "\langle \mathrm{id}_A, \kappa_0\circ\omega_A, f\rangle"'] & & \\
& A\times\mathbb{N}\times B & A\times\mathbb{N}\times B \arrow[l, "\big\langle \langle \mathrm{pr}_A, \mathrm{sc}\circ\mathrm{pr}_{\mathbb{N}}\rangle\circ\mathrm{pr}_{A\times\mathbb{N}}, g\big\rangle"]
\end{tikzcd}$$

obtenido aplicando el lema anterior.

Sea $h\colon A\times\mathbb{N} \longrightarrow B$ la composición de $k\colon A\times\mathbb{N} \longrightarrow A\times\mathbb{N}\times B$ y $\mathrm{pr}_B\colon A\times\mathbb{N}\times B \longrightarrow B$.

Demostramos en primer lugar que $h\circ\langle \mathrm{id}_A, \kappa_0\circ\omega_A\rangle = f$.

$$\begin{aligned}
h\circ\langle \mathrm{id}_A, \kappa_0\circ\omega_A\rangle &= (\mathrm{pr}_B\circ k)\circ\langle \mathrm{id}_A, \kappa_0\circ\omega_A\rangle \\
&= \mathrm{pr}_B\circ(k\circ\langle \mathrm{id}_A, \kappa_0\circ\omega_A\rangle) \\
&= \mathrm{pr}_B\circ\langle \mathrm{id}_A, \kappa_0\circ\omega_A, f\rangle \\
&= f.
\end{aligned}$$

Ahora demostramos que $h \circ (\mathrm{id}_A \times \mathrm{sc}) = g \circ \langle \mathrm{id}_{A\times\mathbb{N}}, h\rangle$.

$$
\begin{aligned}
h \circ (\mathrm{id}_A \times \mathrm{sc}) &= (\mathrm{pr}_B \circ k) \circ (\mathrm{id}_A \times \mathrm{sc}) \\
&= \mathrm{pr}_B \circ (k \circ (\mathrm{id}_A \times \mathrm{sc})) \\
&= \mathrm{pr}_B \circ (\big\langle \langle \mathrm{pr}_A, \mathrm{sc} \circ \mathrm{pr}_{\mathbb{N}} \rangle \circ \mathrm{pr}_{A\times\mathbb{N}}, g \big\rangle \circ k) \\
&= (\mathrm{pr}_B \circ \big\langle \langle \mathrm{pr}_A, \mathrm{sc} \circ \mathrm{pr}_{\mathbb{N}} \rangle \circ \mathrm{pr}_{A\times\mathbb{N}}, g \big\rangle) \circ k \\
&= g \circ k \\
&= g \circ \mathrm{id}_{A\times\mathbb{N}} \circ k \\
&= g \circ \big\langle \mathrm{pr}_{A\times\mathbb{N}}, \mathrm{pr}_B \big\rangle \circ k \\
&= g \circ \big\langle \mathrm{pr}_{A\times\mathbb{N}} \circ k, \mathrm{pr}_B \circ k \big\rangle \\
&= g \circ \big\langle \mathrm{pr}_{A\times\mathbb{N}} \circ k, h \big\rangle .
\end{aligned}
$$

Falta demostrar que $\mathrm{pr}_{A\times\mathbb{N}} \circ k = \mathrm{id}_{A\times\mathbb{N}}$. Pero eso es consecuencia de que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & A \times \mathbb{N} \arrow[r, "\langle \mathrm{pr}_A, \mathrm{sc} \circ \mathrm{pr}_{\mathbb{N}} \rangle"] \arrow[dd, "\mathrm{pr}_{A\times\mathbb{N}} \circ k"] & A \times \mathbb{N} \arrow[dd, "\mathrm{pr}_{A\times\mathbb{N}} \circ k"] \\
A \arrow[ur, "\langle \mathrm{id}_A, \kappa_0 \circ \omega_A \rangle"] \arrow[dr, "\langle \mathrm{id}_A, \kappa_0 \circ \omega_A \rangle"'] & & \\
 & A \times \mathbb{N} \arrow[r, "\langle \mathrm{pr}_A, \mathrm{sc} \circ \mathrm{pr}_{\mathbb{N}} \rangle"'] & A \times \mathbb{N}
\end{tikzcd}
$$

conmuta, porque el segundo diagrama de esta demostración conmuta, y porque la aplicación identidad de $A \times \mathbb{N}$ también hace conmutativo a los mismos diagramas que hace conmutativos la aplicación $\mathrm{pr}_{A\times\mathbb{N}} \circ k$ y por el lema 4. □

Corolario 3.22. *Si $A = \mathbb{N}^n$, $B = \mathbb{N}$, $f\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ y $g\colon \mathbb{N}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{N}$, entonces hay una única aplicación $h\colon \mathbb{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{N}^{n+1} \arrow[d, "h"'] & \mathbb{N}^{n+1} \arrow[l, "\mathrm{id}_{\mathbb{N}^n} \times \mathrm{sc}"'] \arrow[d, "\langle \mathrm{id}_{\mathbb{N}^{n+1}}, h \rangle"] \\
\mathbb{N}^n \arrow[ur, "\langle \mathrm{id}_{\mathbb{N}^n}, \kappa_0 \circ \omega_{\mathbb{N}^n} \rangle"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{N} & \mathbb{N}^{n+2} \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}
$$

conmuta, i.e., tal que:

1. $\forall a \in A\, (h(a, 0) = f(a))$.
2. $\forall a \in A\, \forall n \in \mathbb{N}\, (h(a, n^+) = g(a, n, h(a, n)))$.

Proposición 3.23 (Recursión primitiva con parámetros para aplicaciones parciales)**.** *Sea $f\colon A \rightharpoonup B$ y $g\colon A \times \mathbb{N} \times B \rightharpoonup B$. Entonces hay una única aplicación parcial $h\colon A \times \mathbb{N} \rightharpoonup B$ tal que:*

1. *Para cada $a \in A$, $(a, 0) \in \mathrm{Dom}(h)$ si y sólo si $a \in \mathrm{Dom}(f)$, y si $(a, 0) \in \mathrm{Dom}(h)$, entonces $h(a, 0) = f(a)$.*
2. *Para cada $a \in A$ y cada $n \in \mathbb{N}$, $(a, n^+) \in \mathrm{Dom}(h)$ si y sólo si $(a, n) \in \mathrm{Dom}(f)$ y $(a, n, h(a, n)) \in \mathrm{Dom}(g)$, y si $(a, n^+) \in \mathrm{Dom}(h)$, entonces $h(a, n^+) = g(a, n, h(a, n))$.*

Demostración. □

Proposición 3.24 (Recursión primitiva sin parámetros)**.** *Sea A un conjunto, $e \in A$ y $f\colon A \times \mathbb{N} \longrightarrow A$. Entonces hay una única aplicación $h\colon \mathbb{N} \longrightarrow A$ tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{N} \arrow[dd, "h"'] & \mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{sc}"'] \arrow[dd, "\langle h, \mathrm{id}_{\mathbb{N}} \rangle"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_0"] \arrow[dr, "\kappa_e"'] & & \\
& A & A \times \mathbb{N} \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., tal que:

1. $h(0) = e$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}\,(h(n^+) = f(h(n), n))$.

Demostración. □

Proposición 3.25 (Recursión primitiva sin parámetros para aplicaciones parciales)**.** *Sea A un conjunto, $e \in A$ y $f\colon A \times \mathbb{N} \rightharpoonup A$. Entonces hay una única aplicación parcial $h\colon \mathbb{N} \rightharpoonup A$ tal que:*

1. $0 \in \mathrm{Dom}(h)$ *y* $h(0) = e$.
2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, si $n^+ \in \mathrm{Dom}(h)$, entonces $h(n^+) = f(h(n), n)$.*
3. $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{N}$ *o para un $n \in \mathbb{N}$,* $\mathrm{Dom}(h) = n^+$ *y $f(h(n), n)$ no está definido.*

Demostración. □

Proposición 3.26 (Principio de la definición por recursión de curso de valores)**.** *Sea A un conjunto y $f\colon A^\star \longrightarrow A$. Entonces hay una única aplicación $h\colon \mathbb{N} \longrightarrow A$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $h(n) = f(h{\restriction}n)$.*

Demostración. □

Proposición 3.27.

1. *Sea $f\colon A \longrightarrow B$ y $g\colon A \times B \longrightarrow B$. Entonces hay una única aplicación $h\colon A \times \mathbb{N} \longrightarrow B$ tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& A \times \mathbb{N} \arrow[dd, "h"'] & A \times \mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{id}_A \times \mathrm{sc}"'] \arrow[dd, "\langle \mathrm{pr}_A, h \rangle"] \\
A \arrow[ur, "\langle \mathrm{id}_A, \kappa_0 \circ \omega_A \rangle"] \arrow[dr, "f"'] & & \\
& B & A \times B \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., tal que:

a) $\forall a \in A\,(h(a, 0) = f(a))$.
b) $\forall a \in A\, \forall n \in \mathbb{N}\,(h(a, n^+) = g(a, h(a, n)))$.

2. *Sea* $f\colon A \longrightarrow B$ *y* $g\colon \mathbb{N}\times B \longrightarrow B$. *Entonces hay una única aplicación* $h\colon A\times\mathbb{N} \longrightarrow B$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & A\times\mathbb{N} \arrow[dd, "h"] & A\times\mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{id}_A\times\mathrm{sc}"'] \arrow[dd, "\langle \mathrm{pr}_{\mathbb{N}}, h\rangle"] \\
A \arrow[ur, "\langle \mathrm{id}_A, \kappa_0\circ\omega_A\rangle"] \arrow[dr, "f"'] & & \\
 & B & \mathbb{N}\times B \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., tal que:
   a) $\forall a\in A\,(h(a,0)=f(a))$.
   b) $\forall a\in A\,\forall n\in\mathbb{N}\,(h(a,n^+)=g(n,h(a,n)))$.
3. *Sea* $f\colon 1 \longrightarrow B$ *y* $g\colon \mathbb{N} \longrightarrow B$. *Entonces hay una única aplicación* $h\colon \mathbb{N} \longrightarrow B$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{N} \arrow[dd, "h"] & \mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{sc}"'] \arrow[ddl, "g"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_0"] \arrow[dr, "f"'] & & \\
 & B &
\end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., tal que:
   a) $(h(0)=f(0))$.
   b) $\forall n\in\mathbb{N}\,(h(n^+)=g(n))$.

3.4. Caracterización de Lawvere de las álgebras de Dedekind-Peano.

Vamos a demostrar, en lo que sigue, que una condición necesaria y suficiente para que un triplo ordenado $\mathbf{A}=(A,f,e)$ en el que A es un conjunto, f una endoaplicación de A y e un miembro de A, sea un álgebra de Dedekind-Peano, es que $\mathbf{A}$ tenga la propiedad de la definición por recursión finita, i.e., que si A' es un conjunto, $e'\in A'$ y $f'\colon A' \longrightarrow A'$, entonces exista una única aplicación $h\colon A \longrightarrow A'$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dd, "h"] & A \arrow[l, "f"'] \arrow[dd, "h"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_e"] \arrow[dr, "\kappa_{e'}"'] & & \\
 & A' & A' \arrow[l, "f'"]
\end{tikzcd}$$

conmute.

De hecho, ya hemos demostrado que la condición es necesaria. Para demostrar la suficiencia hemos de demostrar que si $\mathbf{A}$ tiene la propiedad de la definición por recursión finita, entonces se cumple que:

- f es inyectiva.
- $\mathrm{Im}(f)\cap\{e\}=\varnothing$.
- $\forall X\subseteq A\,((\,f[X]\subseteq X\wedge e\in X\,)\to X=A\,)$.

Para ello, establecemos, en primer lugar, la siguiente definición.

Definición 3.28. Si $\mathbf{A}$ tiene la propiedad de la definición por recursión finita, entonces denotamos por pd a la única endoaplicación de A para la que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dd, "\mathrm{pd}"'] & A \arrow[l, "f"'] \arrow[ddl, "\mathrm{id}_A"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_e"] \arrow[dr, "\kappa_e"'] & & \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

conmuta, y la denominamos la aplicación *predecesor*.

Proposición 3.29. *Si* **A** *tiene la propiedad de la definición por recursión finita, entonces*

1. *La aplicación* $f\colon A \longrightarrow A$ *es inyectiva.*
2. *Para cada* $a \in A$*,* $f(a) \neq e$*, i.e.,* $\mathrm{Im}(f) \cap \{e\} = \varnothing$*.*
3. *Para cada* $X \subseteq A$*, si* $f[X] \subseteq X$ *y* $e \in X$*, entonces* $X = A$*.*

Demostración. Para demostrar que la aplicación $f\colon A \longrightarrow A$ es inyectiva es suficiente que tomemos en consideración que, en la categoría **Set**, las aplicaciones inyectivas son exactamente los monomorfismos, i.e., las aplicaciones cancelables a la izquierda, y que $\mathrm{pd} \circ f = \mathrm{id}_A$.

Para demostrar que $\mathrm{Im}(f) \cap \{e\} = \varnothing$, procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que exista un $a \in A$ tal que $f(a) = e$, i.e., tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dd, "f"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_a"] \arrow[dr, "\kappa_e"'] & \\
 & A
\end{tikzcd}$$

conmute. Entonces $\mathrm{pd} \circ f \circ \kappa_a = \mathrm{pd} \circ \kappa_e$, luego $\mathrm{id}_A \circ \kappa_a = \kappa_e$, i.e., $\kappa_a = \kappa_e$ o, lo que es equivalente, $a = e$, luego $f \circ \kappa_e = f \circ \kappa_a = \kappa_e$.

Ahora bien, para $\mathbf{2} = (2, \perp, \neg)$, siendo $\perp$ la aplicación de 1 en 2 que a 0 le asigna 0 y $\neg$ la endoaplicación de 2 que a 0 le asigna 1 y 1 le asigna 0, tenemos que hay una única aplicación h de A en 2 tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dd, "h"'] & A \arrow[l, "f"'] \arrow[dd, "h"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_e"] \arrow[dr, "\perp"'] & & \\
 & 2 & 2 \arrow[l, "\neg"]
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto, siendo $\top$ la aplicación de 1 en 2 que a 0 le asigna 1, se cumple que

$$\begin{aligned}
\top &= \neg \circ \perp \\
&= h \circ f \circ \kappa_e \\
&= h \circ \kappa_e \\
&= \perp
\end{aligned}$$

contradicción.

Para demostrar la última parte, es suficiente tomar en consideración que si $X \subseteq A$ es tal que $f[X] \subseteq X$ y $e \in X$, entonces existe una única aplicación $h\colon A \longrightarrow X$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, "h"'] & A \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "h"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_e"] \arrow[dr, "\kappa_e"'] & & \\
 & X & X \arrow[l, "f\upharpoonright_X"]
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Ahora bien, los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, "\mathrm{in}_X \circ h"'] & A \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "\mathrm{in}_X \circ h"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_e"] \arrow[dr, "\kappa_e"'] & & \\
 & A & A \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & A \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_e"] \arrow[dr, "\kappa_e"'] & & \\
 & A & A \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}$$

conmutan, luego, por la unicidad, $\mathrm{in}_X \circ h = \mathrm{id}_A$, i.e., in_X es sobreyectiva. Pero como in_X es inyectiva, es, en definitiva, biyectiva. Luego $X = A$. $\square$

Como dice Mac Lane:

> This case illustrates a general point: The axioms needed to describe a Mathematical structure are themselves by no means unique. The recursion theorem is an especially convenient form of axiom; it states that the diagram
>
> $$1 \xrightarrow{\kappa_e} A \xrightarrow{\mathrm{sc}} A$$
>
> is "universal".

3.5. El orden aritmético sobre el conjunto de los números naturales.

Nos proponemos demostrar a continuación que el conjunto de los números naturales está dotado de una *buena ordenación*, i.e., de una relación binaria $<$ que cumple las siguientes condiciones:

- $<$ es irreflexiva, i.e., $\forall n \in \mathbb{N}\,(\, n \not< n\,)$.
- $<$ es transitiva, i.e., $\forall m, n, p \in \mathbb{N}\,((\, m < n \wedge n < p\,) \rightarrow m < p\,)$.
- $\forall X \subseteq \mathbb{N}\,(\, X \neq \varnothing \rightarrow \exists n \in X\,(\forall x \in X\,(\, n < x \vee n = x\,)))$.

Para ello, siguiendo a Diener, usaremos, por una parte, el hecho de que la estructura algebraica, dada por la operación unaria sc y la operación ceroaria 0, de que está dotado el conjunto de los números naturales, lo convierte en un álgebra de Dedekind-Peano, y, por otra, que a partir de ello se puede obtener, sobre el conjunto de los números naturales, una relación de orden bien fundamentada y disyuntiva, i.e., en definitiva una buena ordenación sobre $\mathbb{N}$. Pero antes introducimos una serie de nociones y proposiciones relativas a las secciones iniciales de los conjuntos ordenados y las relaciones bien fundamentadas, necesarias para alcanzar el objetivo anterior.

Definición 3.30. Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Decimos que un subconjunto X de A es una *R-sección inicial* de A, si junto a un $x \in X$ contiene al conjunto $\downarrow_R x = \{\, y \in A \mid (y, x) \in R\,\}$ de todos los *R-predecesores* de x, i.e., si

$$\forall x \in X\,(\, \downarrow_R x \subseteq X\,),$$

o, lo que es equivalente, ya que $R^{-1}[X] = \bigcup_{x \in X} \downarrow_R x$, si

$$R^{-1}[X] \subseteq X.$$

Denotamos por $\mathrm{Sec}_R(A)$ el conjunto de todas las R-secciones iniciales de A.

Proposición 3.31. *El conjunto $\mathrm{Sec}_R(A)$, de todas las R-secciones iniciales de A, es un sistema de clausura completamente aditivo sobre A, i.e., tiene las siguientes propiedades:*

1. $A \in \mathrm{Sec}_R(A)$.
2. $\forall \mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sec}_R(A)\,(\,\mathcal{X} \neq \varnothing \rightarrow \bigcap \mathcal{X} \in \mathrm{Sec}_R(A)\,)$.
3. $\forall \mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sec}_R(A)\,(\,\bigcup \mathcal{X} \in \mathrm{Sec}_R(A)\,)$.

Demostración. □

Corolario 3.32. *Sea A un conjunto, R una relación binaria en A y $X \subseteq A$. Entonces hay una mínima R-sección inicial de A que contiene a X.*

Demostración. Es suficiente considerar la intersección del conjunto

$$\{\, Y \in \mathrm{Sec}_R(A) \mid X \subseteq Y \,\}.$$

□

Definición 3.33. Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Entonces denotamos por C_R el operador clausura sobre A, canónicamente asociado al sistema de clausura completamente aditivo $\mathrm{Sec}_R(A)$, que asocia a cada subconjunto X de A, $\mathrm{C}_R(X)$, la mínima R-sección inicial de A que contiene a X, a la que denominamos el *cierre inicial* de X relativo a R. En particular, cuando $X = \{x\}$, con $x \in A$, al cierre inicial de $\{x\}$ lo denotamos, para abreviar, por $\mathrm{C}_R(x)$, y lo denominamos también, la R-sección inicial *principal* determinada por x.

Proposición 3.34. *Sea A un conjunto y R una relación binaria en A, entonces el operador C_R, definido como:*

$$\mathrm{C}_R \begin{cases} \mathrm{Sub}(A) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \\ \quad X \quad \longmapsto \bigcap\{\, Y \in \mathrm{Sec}_R(A) \mid X \subseteq Y \,\} \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{Im}(\mathrm{C}_R) \subseteq \mathrm{Sec}_R(A)$.
2. $\{\, X \in \mathrm{Sub}(A) \mid X = \mathrm{C}_R(X) \,\} = \mathrm{Sec}_R(A)$.
3. C_R *es extensivo o inflacionario, i.e., para cada* $X \in \mathrm{Sub}(A)$, $X \subseteq \mathrm{C}_R(X)$.
4. C_R *es isótono, i.e., para cada* $X, Y \in \mathrm{Sub}(A)$, *si* $X \subseteq Y$, *entonces se cumple que* $\mathrm{C}_R(X) \subseteq \mathrm{C}_R(Y)$.
5. C_R *es idempotente, i.e., para cada* $X \in \mathrm{Sub}(A)$, $\mathrm{C}_R(X) = \mathrm{C}_R(\mathrm{C}_R(X))$.
6. C_R *es completamente aditivo, i.e., para cada* $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sub}(A)$, *se cumple que* $\mathrm{C}_R(\bigcup \mathcal{X}) = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \mathrm{C}_R(X)$.

Proposición 3.35. *Sea A un conjunto y R una relación binaria en A, entonces*

1. $\forall X \subseteq A\,(\mathrm{C}_R(X) = \bigcup_{x \in X} \mathrm{C}_R(x))$.
2. $\forall x \in A\,(\mathrm{C}_R(\downarrow_R x) = \bigcup_{y \in \downarrow_R x} \mathrm{C}_R(y))$.

Proposición 3.36. *Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Si R es transitiva, entonces, para cada $x \in A$, se cumple que*

$$\mathrm{C}_R(x) = \Downarrow_R x,$$

siendo $\Downarrow_R x = \{\, a \in A \mid (a, x) \in R \vee a = x \,\}$.

Naturalmente, considerando la relación R^{-1}, obtenemos la noción dual de la de R-sección inicial de A, que es la de R-sección final de A, y las propiedades homólogas.

Ahora que disponemos del concepto de cierre inicial, damos una caracterización del cierre transitivo de una relación binaria en un conjunto, especialmente útil para algunas demostraciones posteriores.

Proposición 3.37. *Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Entonces*

$$R^{\mathrm{t}} = \{\, (z,x) \in A \times A \mid \exists y \in A\,(\,(y,x) \in R \wedge z \in \mathrm{C}_R(y)\,)\,\},$$

o, lo que es equivalente

$$R^{\mathrm{t}} = \{\, (z,x) \in A \times A \mid z \in \mathrm{C}_R(\downarrow_R x)\,\}.$$

Demostración. □

Corolario 3.38. *Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Entonces las R-secciones iniciales coinciden con las R^{t}-secciones iniciales y las R-secciones finales con las R^{t}-secciones finales, i.e., para cada subconjunto X de A, $\mathrm{C}_R(X) = \mathrm{C}_{R^{\mathrm{t}}}(X)$ y $\mathrm{C}_{R^{-1}}(X) = \mathrm{C}_{(R^{\mathrm{t}})^{-1}}(X)$.*

Demostración. Demostramos sólo que $\mathrm{C}_R(X) = \mathrm{C}_{R^{\mathrm{t}}}(X)$. Para demostrar que $\mathrm{C}_R(X) \subseteq \mathrm{C}_{R^{\mathrm{t}}}(X)$, es suficiente que demostremos que $\mathrm{C}_{R^{\mathrm{t}}}(X)$ es una R-sección inicial. Ahora bien, si $a \in \mathrm{C}_{R^{\mathrm{t}}}(X)$, entonces $\downarrow_{R^{\mathrm{t}}} a \subseteq \mathrm{C}_{R^{\mathrm{t}}}(X)$, pero $\downarrow_R a \subseteq \downarrow_{R^{\mathrm{t}}} a$, porque si $b \in \downarrow_R a$, entonces, por ser $\downarrow_R a \subseteq \mathrm{C}_R(\downarrow_R a)$, $b \in \mathrm{C}_R(\downarrow_R a)$, luego $(b,a) \in R^{\mathrm{t}}$, i.e., $b \in \downarrow_{R^{\mathrm{t}}} a$.

Del mismo modo, para demostrar que $\mathrm{C}_{R^{\mathrm{t}}}(X) \subseteq \mathrm{C}_R(X)$, es suficiente que demostremos que $\mathrm{C}_R(X)$ es una R^{t}-sección inicial. Ahora bien, si $a \in \mathrm{C}_R(X)$, entonces $\downarrow_R a \subseteq \mathrm{C}_R(X)$, luego $\mathrm{C}_R(\downarrow_R a) \subseteq \mathrm{C}_R(X)$. Además, si $b \in \downarrow_{R^{\mathrm{t}}} a$, entonces $b \in \mathrm{C}_R(\downarrow_R a)$, por lo tanto $b \in \mathrm{C}_R(X)$, así que $\downarrow_{R^{\mathrm{t}}} a \subseteq \mathrm{C}_R(X)$. □

Definición 3.39. Sea A un conjunto, R una relación binaria en A, X un subconjunto de A y $m \in X$. Decimos que m es un R-*minimal* de X si $\downarrow_R m \cap X = \varnothing$. i.e., si no hay ningún $x \in X$ tal que $(x,m) \in R$.

Definición 3.40. Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Decimos que R es una relación *bien fundamentada* sobre A si todo subconjunto no vacío X de A tiene un R-minimal, i.e., si hay un $m \in X$ tal que $\downarrow_R m \cap X = \varnothing$. Además, si $X \subseteq A$, diremos, para abreviar, que R está bien fundamentada sobre X si $R \cap (X \times X)$ lo está sobre X, i.e., si todo subconjunto no vacío Y de X tiene un $R \cap (X \times X)$-minimal.

A continuación establecemos la equivalencia entre el concepto de relación bien fundamentada, y un principio de demostración por inducción.

Proposición 3.41. *Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Entonces una condición necesaria y suficiente para que R esté bien fundamentada sobre A es que, para cada subconjunto X de A, $X = A$, si, para cada $x \in A$, $x \in X$, si $\downarrow_R x \subseteq X$, i.e., R está bien fundamentada si y sólo si*

$$\forall X \subseteq A\,(\,(\,\forall x \in A\,(\,\downarrow_R x \subseteq X \to x \in X\,)\,) \to X = A\,)$$

Demostración. La condición es necesaria. Sea X un subconjunto de A tal que para cada $x \in A$, $x \in X$, si $\downarrow_R x \subseteq X$. Si $X \neq A$, entonces $A - X \neq \varnothing$, luego, por la hipótesis, existe un $m \in A - X$ tal que $\downarrow_R m \cap (A - X) = \varnothing$, por lo tanto $\downarrow_R m \subseteq A - (A - X) = X$, así que $m \in X$, contradicción. Por consiguiente $A = X$.

La condición es suficiente. Puesto que la condición

$$\forall X \subseteq A\,(\,(\,\forall x \in A(\downarrow_R x \subseteq X \to x \in X\,)\,) \to X = A\,)$$

equivale a la condición

$$\forall Y \subseteq A\,(\, A - Y \neq \varnothing \rightarrow (\, \exists x \in A\,(\, \downarrow_R x \subseteq X \wedge x \notin Y\,)),$$

si X es un subconjunto no vacío de A, entonces, tomando como subconjunto Y de A, el conjunto $A - X$, y ya que $X = A - (A - X) \neq \varnothing$, existe un $x \in A$ tal que $\downarrow_R x \subseteq A - X$ y $x \notin A - X$, luego hay un $x \in A$ tal que $\downarrow_R x \subseteq A - X$ y $x \in X$, así que hay un $x \in X$ tal que $\downarrow_R x \cap X = \varnothing$. □

Proposición 3.42. *Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Si R está bien fundamentada sobre A, entonces R es irreflexiva.*

Demostración. □

Proposición 3.43. *Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Entonces son equivalentes:*

1. *R está bien fundamentada sobre A.*
2. *R está bien fundamentada sobre cualquier R-sección inicial.*
3. *R está bien fundamentada sobre cualquier R-sección inicial principal.*

Demostración. Nos limitamos a demostrar que de la última condición se deduce la primera.

Supongamos que R esté bien fundamentada sobre cualquier R-sección inicial principal y sea X un subconjunto no vacío de A. Por ser X no vacío, sea $a \in X$, arbitrario, pero fijo. Entonces el conjunto $Y = \mathrm{C}_R(a) \cap X$, que es un subconjunto no vacío de $\mathrm{C}_R(a)$, tiene, por hipótesis, un R-minimal m, i.e., hay un $m \in Y$ tal que $\downarrow_R m \cap Y = \varnothing$. Demostramos ahora que m es un R-minimal de X. En efecto, por ser $Y \subseteq X$, se cumple que $m \in X$. Además, $\downarrow_R m \cap X = \varnothing$, ya que si $\downarrow_R m \cap X \neq \varnothing$, eligiendo un $b \in \downarrow_R m \cap X$, tendríamos que $b \in \mathrm{C}_R(a)$, porque $(b, m) \in R$ y $m \in \mathrm{C}_R(a)$; luego $b \in \downarrow_R m \cap Y$, pero éso es imposible, debido a que $\downarrow_R m \cap Y = \varnothing$. Por lo tanto $\downarrow_R m \cap X = \varnothing$, i.e., X tiene un R-minimal. □

Corolario 3.44. *Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Entonces R está bien fundamentada sobre A si y sólo si R^{t} lo está.*

Proposición 3.45. *La función inyectiva* $\mathrm{Sc} = \{\, (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n = m^+ \,\}$*, es una relación bien fundamentada sobre* $\mathbb{N}$.

Demostración. En virtud de la prop. 3.43, es suficiente que demostremos que Sc está bien fundamentada sobre cada Sc-sección inicial principal $\mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(n)$; para lo cual, a su vez, es suficiente que demostremos, por inducción finita, que el conjunto T definido como:

$$T = \{\, n \in \mathbb{N} \mid \text{Sc está bien fundamentada sobre } \mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(n) \,\}$$

coincide con $\mathbb{N}$.

Se cumple que $0 \in T$, porque en este caso $\mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(0) = \{0\}$, ya que $\downarrow_{\mathrm{Sc}} 0 = \varnothing$ y la única parte no vacía de $\{0\}$, que es ella misma, tiene a 0 como Sc-minimal. Supongamos que $n \in T$, i.e., que Sc está bien fundamentada sobre $\mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(n)$, entonces, en virtud de las condiciones definitorias del concepto de álgebra de Dedekind-Peano, y por la prop. **??**, tenemos que

$$\mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(n^+) = \{n^+\} \cup \mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(n).$$

Sea X un subconjunto no vacío de $\mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(n^+)$. Si $X \cap \mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(n) = \varnothing$, entonces $X = \{n^+\}$, y n^+ es un Sc-minimal de X. Si $X \cap \mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(n) \neq \varnothing$, entonces, por la hipótesis de inducción, $X \cap \mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(n)$ tiene un Sc-minimal, i.e., hay un $m \in X \cap \mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(n)$ tal que $\downarrow_{\mathrm{Sc}} m \cap (X \cap \mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(n)) = \varnothing$, que es también un Sc-minimal de X, ya que si para algún $x \in X$ se tuviera que $(x, m) \in \mathrm{Sc}$, entonces $x \in \downarrow_{\mathrm{Sc}} m \cap (X \cap \mathrm{C}_{\mathrm{Sc}}(n))$, lo cual es imposible. Por lo tanto $n^+ \in T$. Luego $T = \mathbb{N}$, i.e., Sc está bien fundamentada sobre toda Sc-sección inicial principal $C_{\mathrm{Sc}}(n)$. Podemos pues afirmar que Sc está bien fundamentada sobre $\mathbb{N}$. □

Corolario 3.46. *El cierre transitivo de* Sc*, denotado en este caso por* $<$ *y denominado el* orden aritmético *sobre* $\mathbb{N}$*, es una relación de orden bien fundamentada sobre* $\mathbb{N}$*.*

Proposición 3.47. *El orden aritmético sobre* $\mathbb{N}$ *es* disyuntivo*, i.e., tiene la siguiente propiedad*

$$\forall m, n \in \mathbb{N}\, (m \neq n \rightarrow (m < n \vee n < m))$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, arbitrario, pero fijo. Demostramos, por inducción sobre m, que el conjunto T definido como:

$$T = \{\, m \in \mathbb{N} \mid m = n \vee m < n \vee n < m \,\},$$

coincide con $\mathbb{N}$.

Se cumple que $0 \in T$, porque al ser $C_{\mathrm{Sc}^{-1}}(0) = \mathbb{N}$, tenemos que $0 \leq n$. Supongamos que $m \in T$. Si $n \leq m$, entonces de $n \leq m$ y $m < m^+$, concluimos que $n < m^+$. Si $m < n$, entonces hay un $p \in \mathbb{N}$ tal que $p = m^+$ y $n \in C_{\mathrm{Sc}^{-1}}(p)$, pero $C_{\mathrm{Sc}^{-1}}(p) = \{p\} \cup C_{\mathrm{Sc}^{-1}}(\uparrow_{\mathrm{Sc}^{-1}} p)$, luego $m^+ \leq n$, por lo tanto $m^+ \in T$. Así que $T = \mathbb{N}$. □

Corolario 3.48. *El orden aritmético sobre* $\mathbb{N}$ *es una buena ordenación sobre* $\mathbb{N}$*. Luego, para cada* $n \in \mathbb{N}$*,* $<_n = < \cap (n \times n)$*, es una buena ordenación sobre* n*.*

Demostramos a continuación que el orden sobre $\mathbb{N}$ coincide con la restricción de la relación de pertenencia al conjunto $\mathbb{N}$, i.e., con

$$\in_{\mathbb{N}} = \{\, (m, n) \in \mathbb{N} \mid m \in n \,\}.$$

Proposición 3.49. *Se cumple que* $< = \in_{\mathbb{N}}$*.*

Demostración. Para demostrar que $< \subseteq \in_{\mathbb{N}}$, es suficiente que demostremos que $\in_{\mathbb{N}}$ es transitivo y que contiene a Sc, porque $<$ es el cierre transitivo de Sc.

Si $(m, n) \in \mathrm{Sc}$, entonces $n = m^+$, luego $(m, n) \in \in_{\mathbb{N}}$. Además, si $(m, n) \in \in_{\mathbb{N}}$ y $(n, p) \in \in_{\mathbb{N}}$, entonces $m \in n$ y $n \in p$, luego, por ser p $\in$-transitivo, $m \in p$. Por lo tanto $< \subseteq \in_{\mathbb{N}}$.

Para demostrar que $\in_{\mathbb{N}} \subseteq <$, es suficiente que demostremos, por inducción, que el conjunto T definido como:

$$T = \{\, n \in \mathbb{N} \mid C_{\mathrm{Sc}}(\downarrow_{\mathrm{Sc}} n) = n \,\},$$

coincide con $\mathbb{N}$, ya que, por la prop. 3.37, $m < n$ si y sólo si $m \in C_{\mathrm{Sc}}(\downarrow_{\mathrm{Sc}} n)$.

Se cumple que $0 \in T$, porque $C_{\mathrm{Sc}}(\downarrow_{\mathrm{Sc}} 0) = 0$. Supongamos que $n \in T$, entonces

$$\begin{aligned}
C_{\mathrm{Sc}}(\downarrow_{\mathrm{Sc}} n^+) &= C_{\mathrm{Sc}}(n) && (\text{porque } \downarrow_{\mathrm{Sc}} n^+ = \{n\}) \\
&= \{n\} \cup \textstyle\bigcup_{m \in \downarrow_{\mathrm{Sc}} n} C_{\mathrm{Sc}}(m) && (\text{por la prop. } \mathbf{??}) \\
&= \{n\} \cup C_{\mathrm{Sc}}(\downarrow_{\mathrm{Sc}} n) && (\text{porque } C_{\mathrm{Sc}} \text{ es completamente aditivo}) \\
&= \{n\} \cup n && (\text{por la hipótesis de inducción}) \\
&= n^+ && (\text{por definición del conjunto sucesor}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $n^+ \in T$. Luego $T = \mathbb{N}$. □

Proposición 3.50. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$*,* $\downarrow_< n = n$*.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\downarrow_< n &= \{\, m \in \mathbb{N} \mid m < n \,\} && \text{(por definición)}\\
&= \{\, m \in \mathbb{N} \mid m \in \mathrm{Sc}(\downarrow_{\mathrm{Sc}} n) \,\} && \text{(por definición)}\\
&= \{\, m \in \mathbb{N} \mid m \in n \,\} && \text{(por la prop. 3.49)}\\
&= n && \text{(por ser } \mathbb{N} \in\text{-transitivo)}
\end{aligned}
$$

□

3.6. Principios de demostración por inducción derivados.

Para abreviar, denotamos por "PDI" la frase "principio de demostración por inducción".

Proposición 3.51 (PDI de curso de valores)**.** *Sea X un subconjunto de $\mathbb{N}$. Si, para cada $n \in \mathbb{N}$, si cuando $n \subseteq X$, entonces $n \in X$, entonces $X = \mathbb{N}$.*

Demostración. □

Proposición 3.52 (PDI a partir de un número)**.** *Sea $k \in \mathbb{N}$ y $X \subseteq \mathbb{N}$. Si $k \in X$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, si cuando $k \leq n$ y $n \in X$, entonces $n^+ \in X$, entonces $\{\, n \in \mathbb{N} \mid k \leq n \,\} \subseteq X$.*

Demostración. □

Proposición 3.53 (PDI ascendente en un intervalo)**.** *Sean $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $a \leq b$ y $X \subseteq \mathbb{N}$. Si $a \in X$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, si cuando $a \leq n < b$ y $n \in X$, entonces $n^+ \in X$, entonces $[a, b] = \{\, n \in \mathbb{N} \mid a \leq n \wedge n \leq b \,\} \subseteq X$.*

Demostración. □

Proposición 3.54 (PDI descendente en un intervalo)**.** *Sean $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $a \leq b$ y $X \subseteq \mathbb{N}$. Si $b \in X$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, si cuando $a \leq n < b$ y $n^+ \in X$, entonces $n \in X$, entonces $[a, b] \subseteq X$.*

Demostración. □

3.7. Caracterización ordinal del conjunto de los números naturales.

Con anterioridad caracterizamos al conjunto de los números naturales, dotado de la estructura algebraica, dada por el cero y el sucesor, mediante la propiedad de la definición por recursión. Ahora nos proponemos caracterizar al conjunto de los números naturales, dotado de la estructura ordinal, dada por el orden aritmético, mediante un par de propiedades ordinales adicionales, que tiene el orden sobre el conjunto de los números naturales. Para ello definimos y estudiamos una serie de conceptos, relativos a los conjuntos ordenados, útiles en sí, y algunos de ellos necesarios para establecer la caracterización ordinal antes mencionada.

Definición 3.55. Sea A un conjunto.

1. Un *orden* sobre A es una relación binaria $<$ en A tal que:
   a) $<$ es *irreflexiva*, i.e., $\forall a \in A\,(a \not< a)$.
   b) $<$ es *transitiva*, i.e., $\forall a, b, c \in A\,((a < b \wedge b < c) \rightarrow a < c)$.

   Denotamos al conjunto de los órdenes sobre A por $\mathrm{Ord}(A)$. Un *conjunto ordenado* es un par ordenado $(A, <)$, abreviado como $\mathbf{A}$, en el que $<\in \mathrm{Ord}(A)$.
2. Un *orden lineal* sobre A es una relación binaria $<$ en A tal que:
   a) $<$ es irreflexiva, i.e., $\forall a \in A\,(a \not< a)$.
   b) $<$ es transitiva, i.e., $\forall a, b, c \in A\,((a < b \wedge b < c) \rightarrow a < c)$.
   c) $<$ es *disyuntiva*, i.e., $\forall a, b \in A\,(a \neq b \rightarrow (a < b \vee b < a))$.

Denotamos al conjunto de los órdenes lineales sobre A por $\mathrm{Lo}(A)$. Un *conjunto linealmente ordenado* es un par ordenado $(A,<)$, abreviado como $\mathbf{A}$, en el que $<\in \mathrm{Lo}(A)$.

Sea A un conjunto. Entonces que hay una correspondencia biunívoca entre el conjunto $\mathrm{Ord}(A)$ y el conjunto de las relaciones binarias $\leq$ en A tales que:

1. $\leq$ es reflexiva, i.e., $\Delta_A \subseteq \leq$.
2. $\leq$ es antisimétrica, i.e., $\forall a, b \in A\,((a \leq b \wedge b \leq a) \rightarrow a = b)$.
3. $\leq$ es transitiva, i.e., $\leq \circ \leq \subseteq \leq$.

Aunque el concepto de orden fué entendido, por parte de su introductor, Hausdorff, en el sentido irreflexivo, en virtud del resultado contenido en el ejercicio anterior, según el cual son indistinguibles las relaciones irreflexivas y transitivas de las refexivas, antisimétricas y transitivas en un mismo conjunto, haremos uso del concepto de orden que más convenga a la situación de que se trate.

Sea A un conjunto. Entonces que hay una correspondencia biunívoca entre el conjunto $\mathrm{Ord}(A)$ y el conjunto de las relaciones binarias $<$ en A tales que:

1. $<$ es asimétrica, i.e., $\forall a, b \in A\,(a < b \rightarrow b \not< a)$.
2. $<$ es transitiva, i.e., $< \circ < \subseteq <$.

El conjunto $\mathrm{Ord}(A)$, a su vez, se ordena por extensión, conviniendo que un orden $\leq'$ sobre A extiende a otro orden $\leq$ sobre A, precisamente cuando $\leq \subseteq \leq'$. Esto nos va a permitir caracterizar a los órdenes lineales sobre A como aquellos órdenes sobre A que sean maximales en el conjunto ordenado por extensión $\mathbf{Ord}(A)$.

Proposición 3.56. *Sea A un conjunto y $\leq \in \mathrm{Ord}(A)$. Una condición necesaria y suficiente para que $\leq$ sea un orden lineal sobre A es que $\leq$ sea maximal en $\mathbf{Ord}(A)$.*

Demostración. $\square$

Definición 3.57. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos conjuntos ordenados.

1. Una *aplicación isótona* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ es un triplo ordenado $(\mathbf{A}, \varphi, \mathbf{B})$, abreviado como φ y denotado por $\varphi\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, en el que φ es una aplicación de A en B tal que
$$\forall x, y \in A\,(\, x \leq y \rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)\,).$$
2. Una *aplicación antítona* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ es un triplo ordenado $(\mathbf{A}, \varphi, \mathbf{B})$, abreviado como φ y denotado por $\varphi\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, en el que φ es una aplicación de A en B tal que
$$\forall x, y \in A\,(\, x \leq y \rightarrow \varphi(y) \leq \varphi(x)\,).$$

Proposición 3.58. *Sean $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ cuatro conjuntos ordenados y $\varphi\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, $\psi\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ y $\xi\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ tres aplicaciones isótonas. Entonces:*

1. *Siendo $\mathrm{id}_{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}, \mathrm{id}_A, \mathbf{A})$, se cumple que $\mathrm{id}_{\mathbf{A}}\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ es un endomorfismo de $\mathbf{A}$.*
2. *Siendo $\psi \circ \varphi = (\mathbf{A}, \psi \circ \varphi, \mathbf{C})$, se cumple que $\psi \circ \varphi\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ es una aplicación isótona de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{C}$.*

3. (Asociatividad). *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi\circ\varphi"'] \arrow[drr, bend left=60, "(\xi\circ\psi)\circ\varphi"] \arrow[drr, bend right=60, "\xi\circ(\psi\circ\varphi)"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "\psi"] \arrow[dr, "\xi\circ\psi"] & \\
& \mathbf{C} \arrow[r, "\xi"'] & \mathbf{D}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

4. (Neutros). *Los diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbf{A}}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathbf{A} \arrow[d, "\varphi"] \\
& \mathbf{B}
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbf{B}}"] \\
& \mathbf{B}
\end{tikzcd}$$

conmutan.

La composición de dos aplicaciones antítonas es una aplicación isótona, y que la composición de una isótona y una antítona es antítona.

Definición 3.59. Sea $\mathbf{A}$ un conjunto ordenado, $X \subseteq A$ y $a \in A$.

1. Decimos que a que es el *máximo* de $\mathbf{A}$ si, para cada $x \in A$, se cumple que $x \leq a$.
2. Decimos de a es el *mínimo* de $\mathbf{A}$ si, para cada $x \in A$, se cumple que $a \leq x$.
3. Decimos que a es un *minorante* o una *cota inferior* de X en $\mathbf{A}$, y lo denotamos por $a \leq X$, si, para cada $x \in X$, $a \leq x$. Denotamos por $\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(X)$ el conjunto de las cotas inferiores de X en $\mathbf{A}$. Además, si $\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(X) \neq \varnothing$, entonces decimos que el conjunto X está *acotado inferiormente* en $\mathbf{A}$. Convenimos que $\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(\varnothing) = A$.
4. Decimos que a que es un *mayorante* o una *cota superior* de X en $\mathbf{A}$, y lo denotamos por $X \leq a$, si, para cada $x \in X$, $x \leq a$. Denotamos por $\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(X)$ el conjunto de las cotas superiores de X en $\mathbf{A}$. Además, si $\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(X) \neq \varnothing$, entonces decimos que el conjunto X está *acotado superiormente* en $\mathbf{A}$. Convenimos que $\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(\varnothing) = A$.
5. Si X es tal que $\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(X) \neq \varnothing$ y $\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(X) \neq \varnothing$, entonces decimos que X está *acotado* en $\mathbf{A}$.

En un conjunto linealmente ordenado coinciden los conceptos de mínimo y de minimal, así como los de máximo y de maximal

Sea $\mathbf{A}$ un conjunto ordenado y $X \subseteq A$ no vacía. Entonces

1. $\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(X) = \bigcap_{x\in X} \Downarrow_{\leq} x$.
2. $\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(X) = \bigcap_{x\in X} \Uparrow_{\leq} x$.

Definición 3.60. Sea $\mathbf{A}$ un conjunto linealmente ordenado y X una parte de A. Decimos que X es un *intervalo* de $\mathbf{A}$ si, para cada $a \in A$ y cada $x, y \in X$, si $x \leq a \leq y$, entonces $a \in A$.

Proposición 3.61. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto linealmente ordenado y* X *una parte de* A. *Entonces* $\widehat{X} = \{\, a \in A \mid \exists x, y \in X\, (\, x \leq a \leq y\,)\,\}$ *es un intervalo de* $\mathbf{A}$ *que contiene a* X *y es el mínimo intervalo de* $\mathbf{A}$ *con dicha propiedad. Por lo tanto* X *es un intervalo exactamente si* $X = \widehat{X}$.

Demostración. □

Introducimos a continuación el concepto de *conexión de Galois contravariante*, ya que, como demostraremos en lo que sigue, los operadores $\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}$ y $\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}$, constituyen un ejemplo de tan importante concepto, introducido por Galois, a principios del siglo pasado, al estudiar la relación existente entre cuerpos y grupos de automorfismos.

Definición 3.62. Una *conexión de Galois contravariante* es un cuádruplo ordenado $(\mathbf{A}, \varphi, \psi, \mathbf{B})$ en el que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son conjuntos ordenados, φ una aplicación antítona de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ y ψ una aplicación antítona de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$ tales que:

1. $\forall a \in A\, (\, a \leq \psi(\varphi(a))\,)$.
2. $\forall b \in B\, (\, b \leq \varphi(\psi(b))\,)$.

Proposición 3.63. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto ordenado y* X *e* Y *dos subconjuntos de* A *tales que* $X \subseteq Y$. *Entonces:*

1. $\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(X)$ *es una* $\leq$*-sección inicial* A.
2. $\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(X)$ *es una* $\leq$*-sección final de* A.
3. $\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(Y) \subseteq \mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(X)$.
4. $\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(Y) \subseteq \mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(X)$.
5. $X \subseteq \mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(X))$.
6. $X \subseteq \mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(X))$.

Demostración. □

Corolario 3.64. *Si* $\mathbf{A}$ *es un conjunto ordenado, entonces el cuádruplo ordenado* $(\mathbf{Sub}(A), \mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}, \mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}, \mathrm{Sub}(A))$ *es una conexión de Galois contravariante.*

Proposición 3.65. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto ordenado. Entonces:*

1. *Para cada subconjunto* X *de* A, $\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(X)))$.
2. *Para cada subconjunto* X *de* A, $\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(X)))$.
3. $\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}} \circ \mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}$ *y* $\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}} \circ \mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}$ *son operadores clausura sobre* A, *i.e., ambos son extensivos, isótonos e idempotentes.*
4. *La restricción de* $\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}$ *al conjunto de los puntos fijos del operador clausura* $\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}} \circ \mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}$ *y al conjunto de los puntos fijos del operador clausura* $\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}} \circ \mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}$, *determina un antiisomorfismo de* $\mathrm{Im}(\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}} \circ \mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}})$ *en* $\mathrm{Im}(\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}} \circ \mathrm{Csup}_{\mathbf{A}})$, *cuyo inverso es precisamente el antiisomorfismo de* $\mathrm{Im}(\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}} \circ \mathrm{Csup}_{\mathbf{A}})$ *en* $\mathrm{Im}(\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}} \circ \mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}})$ *determinado por la restricción de* $\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}$ *al conjunto de los puntos fijos del operador clausura* $\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}} \circ \mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}$ *y al conjunto de los puntos fijos del operador clausura* $\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}} \circ \mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}$.
5. *Para cada subconjunto no vacío* $\mathcal{X}$ *de* $\mathrm{Sub}(A)$, *se cumple que*

$$\mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(\textstyle\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X) = \bigcap_{X \in \mathcal{X}} \mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(X) \;\; y \;\; \mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X) = \bigcap_{X \in \mathcal{X}} \mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(X).$$

Demostración. □

Definición 3.66. Sea $\mathbf{A}$ un conjunto ordenado, $X \subseteq A$ y $a \in A$.

1. Decimos que a es el *ínfimo* o el *extremo inferior* de X en $\mathbf{A}$, si cumple las siguientes condiciones:
   a) Para cada $x \in X$, $a \leq x$, i.e., $a \in \mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(X)$.
   b) Para cada $b \in \mathrm{Cinf}_{\mathbf{A}}(X)$, $b \leq a$.

Denotamos por $\mathrm{Inf}_{\mathbf{A}}(X)$, o $\mathrm{ínf}_{\mathbf{A}} X$, o simplemente por $\mathrm{ínf}\, X$, el ínfimo de X en $\mathbf{A}$, si tal ínfimo existe.

2. Decimos que a que es el *supremo* o el *extremo superior* de X en $\mathbf{A}$, si cumple las siguientes condiciones:
   a) Para cada $x \in X$, $x \leq a$, i.e., $a \in \mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(X)$.
   b) Para cada $b \in \mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(X)$, $a \leq b$.

   Denotamos por $\mathrm{Sup}_{\mathbf{A}}(X)$, o $\bigvee_{\mathbf{A}} X$, o simplemente por $\bigvee X$, el supremo de X en $\mathbf{A}$, si tal supremo existe.

Así pues, el ínfimo de X en $\mathbf{A}$, si existe, es la máxima de las cotas inferiores de X en $\mathbf{A}$. Además, tal ínfimo no pertenece necesariamente a X, pero si perteneciera, entonces sería el mínimo de X. Del mismo modo, el supremo de X en $\mathbf{A}$, caso de existir, es la mínima de las cotas superiores de X en $\mathbf{A}$, y no pertenece necesariamente a X, pero si perteneciera, entonces sería el máximo de X.

Proposición 3.67. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto ordenado y* $X \subseteq A$ *tal que existan* $\mathrm{ínf}\, X$ *y* $\bigvee X$. *Entonces:*

1. *Si* $X = \varnothing$, *entonces* $\mathrm{ínf}\, X$ *es el máximo de* $\mathbf{A}$ *y* $\bigvee X$ *el mínimo de* $\mathbf{A}$.
2. *Si* $X \neq \varnothing$, *entonces* $\mathrm{ínf}\, X \leq \bigvee X$.

Demostración. □

Proposición 3.68. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto ordenado y* X *e* Y *dos subconjuntos de* A *tales que existan* $\mathrm{ínf}\, X$, $\bigvee X$, $\mathrm{ínf}\, Y$ *y* $\bigvee Y$. *Si* $X \subseteq Y$, *entonces* $\mathrm{ínf}\, Y \leq \mathrm{ínf}\, X$ *y* $\bigvee X \leq \bigvee Y$.

Demostración. □

Proposición 3.69. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto ordenado y* $(x_i \mid i \in I)$ *e* $(y_i \mid i \in I)$ *dos familias en* A *tales que, para cada* $i \in I$, $x_i \leq y_i$. *Entonces:*

1. *Si existen* $\bigvee(x_i \mid i \in I)$ *y* $\bigvee(y_i \mid i \in I)$, *entonces* $\bigvee(x_i \mid i \in I) \leq \bigvee(y_i \mid i \in I)$.
2. *Si existen* $\mathrm{ínf}(x_i \mid i \in I)$ *e* $\mathrm{ínf}(y_i \mid i \in I)$, *entonces* $\mathrm{ínf}(x_i \mid i \in I) \leq \mathrm{ínf}(y_i \mid i \in I)$.

Demostración. □

Proposición 3.70. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto ordenado,* $(x_i \mid i \in I)$ *una familia en* A *y* $(J_l \mid l \in L)$ *una familia de subconjuntos de* I *tal que* $I = \bigcup(J_l \mid l \in L)$. *Entonces:*

1. *Si para cada* $l \in L$, *existe* $\bigvee(x_i \mid i \in J_l)$, *entonces existe* $\bigvee(x_i \mid i \in I)$ *si y sólo si existe* $\bigvee(\bigvee(x_i \mid i \in J_l) \mid l \in L)$, *y entonces*
$$\bigvee(x_i \mid i \in I) = \bigvee\left(\bigvee(x_i \mid i \in J_l) \mid l \in L\right).$$
2. *Si para cada* $l \in L$, *existe* $\mathrm{ínf}(x_i \mid i \in J_l)$, *entonces existe* $\mathrm{ínf}(x_i \mid i \in I)$ *si y sólo si existe* $\mathrm{ínf}(\mathrm{ínf}(x_i \mid i \in J_l) \mid l \in L)$, *y entonces*
$$\mathrm{ínf}(x_i \mid i \in I) = \mathrm{ínf}\left(\mathrm{ínf}(x_i \mid i \in J_l) \mid l \in L\right).$$

Demostración. □

Corolario 3.71. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto ordenado y* $(x_{i,j} \mid (i,j) \in I \times J)$ *una familia en* A. *Entonces:*

1. *Si para cada* $j \in J$, *existe* $\bigvee(x_{i,j} \mid i \in I)$, *entonces existe* $\bigvee(x_{i,j} \mid (i,j) \in I \times J)$ *si y sólo si existe* $\bigvee(\bigvee(x_{i,j} \mid i \in I) \mid j \in J)$, *y entonces*
$$\bigvee(x_{i,j} \mid (i,j) \in I \times J) = \bigvee\left(\bigvee(x_{i,j} \mid i \in I) \mid j \in J\right).$$

2. *Si para cada* $j \in J$, *existe* $\operatorname{ínf}(x_{i,j} \mid i \in I)$, *entonces existe* $\operatorname{ínf}(x_{i,j} \mid (i,j) \in I \times J)$ *si y sólo si existe* $\operatorname{ínf}(\operatorname{ínf}(x_{i,j} \mid i \in I) \mid j \in J)$, *y entonces*
$$\operatorname{ínf}(x_{i,j} \mid (i,j) \in I \times J) = \operatorname{ínf}\left(\operatorname{ínf}(x_{i,j} \mid i \in I) \mid j \in J\right).$$

Demostración. □

Proposición 3.72. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto ordenado y* X *e* Y *dos subconjuntos de* A *tales que* $X \subseteq Y$. *Entonces:*

1. *Si existen* $\bigvee_{\mathbf{A}} X$ *y* $\bigvee_{\mathbf{Y}} X$, *siendo* $\mathbf{Y} = (Y, \leq \cap (Y \times Y))$, *entonces* $\bigvee_{\mathbf{A}} X \leq \bigvee_{\mathbf{Y}} X$. *Además, si* $\bigvee_{\mathbf{A}} X$ *existe y pertenece a* Y, *entonces* $\bigvee_{\mathbf{Y}} X$ *existe y* $\bigvee_{\mathbf{A}} X = \bigvee_{\mathbf{Y}} X$.
2. *Si existen* $\operatorname{ínf}_{\mathbf{A}} X$ *y* $\operatorname{ínf}_{\mathbf{Y}} X$, *entonces* $\operatorname{ínf}_{\mathbf{Y}} X \leq \operatorname{ínf}_{\mathbf{A}} X$. *Además, si* $\operatorname{ínf}_{\mathbf{A}} X$ *existe y pertenece a* Y, *entonces* $\operatorname{ínf}_{\mathbf{Y}} X$ *existe y* $\operatorname{ínf}_{\mathbf{A}} X = \operatorname{ínf}_{\mathbf{Y}} X$.

Demostración. □

Proposición 3.73. *Si un conjunto no vacío de números naturales está acotado superiormente, entonces tiene un máximo.*

Demostración. □

Teorema 3.74. *Sea* $\mathbf{A}$ *un conjunto linealmente ordenado no vacío tal que:*

1. $\forall x \in A\, \exists y \in A\, (\, x < y\,)$.
2. $\forall X \subseteq A\, (\, X \neq \varnothing \rightarrow \exists m \in X\, (\, \forall x \in X\, (\, m \leq x\,)))$.
3. $\forall X \subseteq A\, (\mathrm{Csup}_{\mathbf{A}}(X) \neq \varnothing \rightarrow \exists n \in X\, (\forall x \in X\, (x \leq n)))$.

Entonces $\mathbf{A} \cong \mathbb{N}$.

Demostración. □

Definición 3.75. Un conjunto es *finito* si es isomorfo a un número natural. En caso contrario decimos que es *infinito*. Además, si A es un conjunto, $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(A)$ denota el conjunto de los subconjuntos finitos de A.

Teorema 3.76 (Dirichlet)**.** *Ningún número natural es isomorfo a un subconjunto estricto de sí mismo.*

Demostración. □

Corolario 3.77. *Ningún conjunto finito es isomorfo a un subconjunto estricto de sí mismo.*

Corolario 3.78 (Dedekind)**.**

1. *Cualquier conjunto isomorfo a un subconjunto estricto de sí mismo es infinito.*
2. *El conjunto de los números naturales es infinito.*

Corolario 3.79. *Cualquier conjunto finito es isomorfo a un único número natural. Si* A *es un conjunto finito, al único número natural isomorfo a* A *lo denominamos el número cardinal de* A *y lo denotamos por* $\mathrm{card}(A)$.

Lema 3.80. *Si* X *es un subconjunto estricto de un número natural* n, *entonces* X *es isomorfo a un único número natural* $m \in n$.

Demostración. □

Proposición 3.81. *Cualquier subconjunto de un conjunto finito es finito.*

Proposición 3.82. *Si* A *es un conjunto finito y* F *una función, entonces* $F[A]$ *es finito. Además,* $\mathrm{card}(F[A]) \leq \mathrm{card}(A)$.

Demostración. □

Proposición 3.83. *Si A es un conjunto finito y cada miembro de A es finito, entonces $\bigcup A$ es finito. Además, si* $\mathrm{card}(A) = n$ *y* $A = \{ X_i \mid i \in n \}$*, entonces* $\mathrm{card}(\bigcup A) \leq Sum_{i\in n}\mathrm{card}(X_i)$ *y, si $X_i \cap X_j = \varnothing$ cuando $i \neq j$, entonces* $\mathrm{card}(\bigcup A) = Sum_{i\in n}\mathrm{card}(X_i)$.

Demostración. □

Proposición 3.84. *Si A es un conjunto finito, entonces* $\mathrm{Sub}(A)$ *es finito. Además, se cumple que*

$$\mathrm{card}(\mathrm{Sub}(A)) = 2^{\mathrm{card}(A)}.$$

Demostración. □

Proposición 3.85. *Si A es un conjunto infinito, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, hay una aplicación inyectiva de n en A y no hay ningún isomorfismo de n en A.*

Demostración. □

Proposición 3.86. *Si A y B son finitos, entonces $A \times B$ es finito. Además, se cumple que*

$$\mathrm{card}(A \times B) = \mathrm{card}(A) \cdot \mathrm{card}(B).$$

Demostración. □

Proposición 3.87. *Si los conjuntos A y B son finitos, entonces también los conjuntos* $\mathrm{Fnc}(A, B)$*,* $\mathrm{Pfnc}(A, B)$ *y* $\mathrm{Mfnc}(A, B)$ *son finitos.*

Demostración. □

Definición 3.88. Sea A un conjunto. Decimos de A que es *infinito numerable* si hay un isomorfismo entre A y $\mathbb{N}$. Si tal es el caso, lo denotamos por $\mathrm{card}(A) = \aleph_0$. Por otra parte, decimos de A que es *numerable* si A está dominado por $\mathbb{N}$. Si tal es el caso, lo denotamos por $\mathrm{card}(A) \leq \aleph_0$.

Proposición 3.89. *Cualquier subconjunto infinito de un conjunto infinito numerable es infinito numerable.*

Demostración. □

Corolario 3.90. *Una condición necesaria y suficiente para que un conjunto sea numerable es que sea finito o infinito numerable.*

Proposición 3.91. *Si A es un conjunto infinito numerable y F una función, entonces $F[A]$ es numerable.*

Demostración. □

Proposición 3.92. *El conjunto de los números naturales se puede representar como la unión de un conjunto infinito numerable de conjuntos infinito numerables*

Demostración. □

Usaremos esta últimna proposición en la teoría de la recursión cuando definamos la noción de aplicación de gran amplitud de Kouznetsov.

Proposición 3.93. *La unión de dos conjuntos infinito numerables es un conjunto infinito numerable. Por consiguiente, la unión de un conjunto finito de conjuntos infinito numerables es infinito numerable.*

Demostración. □

Teorema 3.94 (Cantor)**.** *Hay un isomorfismo de* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *en* $\mathbb{N}$.

Demostración. □

En la teoría de la recursión demostraremos la existencia de aplicaciones recursivas primitivas biyectivas de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, para las que las dos aplicaciones asociadas a la inversa son recursivas primitivas.

Corolario 3.95. *Si A y B son dos conjuntos infinito numerables, entonces $A\times B$ es infinito numerable. Por consiguiente, para cada número natural no nulo n y cada familia $(\, A_i \mid i\in n\,)$, si para cada $i\in n$, A_i es infinito numerable, entonces $\prod_{i\in n} A_i$ es infinito numerable; en particular, si A es infinito numerable, A^n es infinito numerable.*

Proposición 3.96. *Sea $(\, A_n \mid n\in\mathbb{N}\,)$ una familia de conjuntos tal que, para cada $n\in\mathbb{N}$, $A_n\neq\varnothing$ y A_n es numerable. Entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es numerable.*

Demostración. □

Corolario 3.97. *Si A es infinito numerable, entonces $A^\star=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n$ es infinito numerable. Por consiguiente, si A es infinito numerable, entonces $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(A)$ es infinito numerable.*

Proposición 3.98. *Sea A un conjunto numerable y R una relación de equivalencia sobre A. Entonces A/R, el conjunto cociente de A entre R, es numerable.*

Demostración. □

Teorema 3.99 (Cantor)**.** *El conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ es infinito y no es infinito numerable. Por consiguiente, los conjuntos se dividen en tres grupos: Los finitos, los infinito numerables y los innumerables. A los conjuntos de los dos últimos tipos los denominamos conjuntos transfinitos*

Proposición 3.100. *Sea A un conjunto y R una relación binaria en A. Entonces $\mathrm{Pog}(R)$, el preorden generado por R, coincide con $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^n$, siendo $(\, R^n \mid n\in\mathbb{N}\,)$ la familia de relaciones definida por recursión como:*

1. $R^0=\Delta_A$.
2. $R^{n+1}=R\circ R^n$, *para cada* $n\in\mathbb{N}$.

Así pues, para cada $(x,y)\in A\times A$, $(x,y)\in\mathrm{Pog}(R)$ si y sólo si $x=y$ o hay un $n\in\mathbb{N}-1$ y una familia $(\, a_j \mid j\in n+1\,)$ en A tal que $a_0=x$, $a_n=y$ y para cada $j\in n$, $(a_j,a_{j+1})\in R$.

Por otra parte, $\mathrm{Eqg}(R)$, la equivalencia generada por R, coincide con el conjunto de los pares $(x,y)\in A\times A$ tales que $x=y$ o hay un $n\in\mathbb{N}-1$ y una familia $(\, a_j \mid j\in n+1\,)$ en A tal que $a_0=x$, $a_n=y$ y para cada $j\in n$, $(a_j,a_{j+1})\in R\cup R^{-1}$.

4. Teoría de la recursión.

4.1. Aplicaciones recursivas primitivas.

> Tarski has stressed in his lecture (and I think justly) the great importance of the concept of general recursiveness (or Turing computability). It seems to me that this importance is largely due to the fact that with this concept one has for the first time succeeded in giving an absolute definition of an interesting epistemological notion, i.e., one not depending on the formalism chosen. In all other cases treated previously, such as demonstrability or definability, one has been able to define them only relative to a given language, and for each individual language it is clear that the one thus obtained is not the one looked for. For the concept of computability, however, although it is merely a special kind of demonstrability or decidability, the situation is different. By a kind of miracle it is not necessary to distinguish orders, and the diagonal procedure does not lead outside the defined notion.
>
> *K. Gödel.*

> En mathématiques, il est d'usage d'entendre par "algorithme" une prescription précise, définissant un processus de calcul, conduisant à partir de points de départ qui varient au résultat cherché.
>
> *A.A. Markov.*

La teoría de la recursión se ocupa del *estudio y clasificación de las relaciones y funciones computables* y tuvo su origen en algunas de las nociones y construcciones que introdujo Gödel en su trabajo sobre la incompletud. Además, la teoría de la recursión, junto con la teoría de autómatas, lenguajes y máquinas, es el *fundamento de la informática teórica* y esta, a su vez, de la industria de los ordenadores.

Desde tiempo inmemorial se sabe que cierta clase de *problemas*, e.g., la determinación del máximo común divisor de dos números enteros, mediante el algoritmo de Euclides, la determinación de los números primos, mediante la criba de Eratóstenes, o la determinación de si una ecuación $a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 = 0$, con coeficientes enteros, tiene soluciones enteras, son *algorítmicamente solubles*, i.e., hay algoritmos o procedimientos mecánicos que permiten obtener la solución del problema en cuestión (para el último, las soluciones enteras han de ser divisores de a_0). De manera que hasta principios del presente siglo se daba por hecho que existían algoritmos y que el único problema residía en determinarlos. Así pues, si lo que se desea es determinar un algoritmo, no hay ninguna necesidad de definir la clase de todos los algoritmos; eso sólo es necesario si se pretende demostrar que algún *problema no es algorítmicamente soluble.* i.e., que para dicho problema no hay ningún algoritmo que lo resuelva.

Ejemplos de problemas matemáticos algorítmicamente insolubles vienen dados por:

1. El problema de las ecuaciones diofánticas (que es el problema décimo de la lista de veintitrés que propuso Hilbert en 1900:

   > Given a Diophantine equation with any number of unknown quantities and with rational integral numerical coefficients: *To devise a process according to which it can be determined in a finite number of operations whether the equation is solvable in rational integers.*").

   Resuelto por Matijasevich.
2. El problema de las palabras para los semigrupos finitamente presentados (problema de Thue). Resuelto, independientemente, por Post y Markoff.
3. El problema de las palabras para los grupos finitamente presentados (problema de Dehn & Thue). Resuelto, independientemente, por Novikoff, Boone y Britton.
4. El problema del homeomorfismo para las n-variedades ($4 \leq n$).

Es posible que el primero en afirmar la *no existencia de un algoritmo* fuera Tietze en 1908, quién dijo de los grupos de presentación finita:

> "la cuestión acerca de cuando dos grupos son isomorfos no es soluble en general."

Pero parece ser que fue, por una parte, el *problema de la decidibilidad de la lógica de predicados*, planteado por Hilbert y Ackermann en su libro sobre lógica, publicado en 1928, y, por otra, el asunto de la *solubilidad de todo problema matemático*, lo que indujo, en aras a resolverlos, a diversos investigadores a partir de 1930, y entre los que cabe mencionar a Gödel, Church y Turing, a proponer diversas *formalizaciones del concepto informal de función mecánicamente computable.* Debido a que de todas esas formalizaciones, y de otras, propuestas por Kleene, Post y Markov, se demostró que eran dos a dos equivalentes, se propuso la hipótesis, conocida como *Hipótesis de Church-Turing-Post-Kleene*, que afirma la coincidencia entre el concepto informal de *función parcial mecánica o algorítmicamente computable*, y el concepto formal de *aplicación parcial recursiva.* Naturalmente, esa hipótesis, de caracter similar a otras hipótesis propuestas en las ciencias empíricas, no es demostrable, y su fundamento último reside en las equivalencias antes mencionadas.

Definimos y estudiamos en esta sección las aplicaciones y relaciones recursivas primitivas, lo cual nos permitirá, en particular, dotar al conjunto de los números naturales de una estructura algebraica, i.e., de unas operaciones finitarias (la adición y la multiplicación, entre otras), que como puso de manifiesto Dedekind, son definibles por recursión y sus propiedades demostrables por inducción, lo mismo que ocurre con casi todas las operaciones aritméticas usuales, y, que de hecho, tienen la propiedad de caer bajo el concepto de aplicación recursiva primitiva, estando, además, tales operaciones finitarias sujetas a cumplir ciertas condiciones, expresadas ecuacional o implicacionalmente, y de modo que tal estructura sea compatible con la buena ordenación de que está dotado el conjunto de los números naturales.

Conviene también señalar que el conjunto de las aplicaciones recursivas primitivas, considerado por primera vez por Gödel, es una de las clases de aplicaciones numéricas (con argumentos y valores, números naturales), junto al de las aplicaciones recursivas (generales) y al de las aplicaciones parciales recursivas, que se considera está constituido por aplicaciones que son mecánicamente computables (si no se toman en consideración las limitaciones espacio-temporales, o si no se las identifica con las aplicaciones que sean pragmáticamente computables), pace Blum, Shub and Smale.

Puesto que el conjunto de las aplicaciones recursivas primitivas será la unión de la mínima subálgebra heterogénea de una determinada álgebra heterogénea, definimos en primer lugar la signatura algebraica heterogénea del álgebra heterogénea en cuestión.

Definición 4.1. Denotamos por $\mathbf{\Sigma}^{\mathrm{rp}}$ la $\mathbb{N}$-signatura algebraica heterogénea, para las aplicaciones recursivas primitivas, cuya coordenada (w,n)-ésima, con $(w,n) \in \mathbb{N}^{\star} \times \mathbb{N}$, es la definida como:

$$\Sigma_{w,n} = \begin{cases} \{\kappa_{0,0}\}, & \text{si } w = \lambda \text{ y } n = 0; \\ \{\mathrm{sc}\} \cup \{\mathrm{pr}_{1,0}\}, & \text{si } w = \lambda \text{ y } n = 1; \\ \{\, \mathrm{pr}_{n,i} \mid i \in n \,\}, & \text{si } w = \lambda \text{ y } n \geq 2; \\ \{\Omega_{\mathrm{C}}^{m,n}\}, & \text{si } w = (m) \curlywedge (n \mid i \in m) \text{ y } m \geq 1; \\ \{\Omega_{\mathrm{R}}^{m}\}, & \text{si } w = (m) \curlywedge (m+2) \text{ y } n = m+1; \\ \varnothing, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Definición 4.2. Denotamos por $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})$ la $\mathbf{\Sigma}^{\mathrm{rp}}$-álgebra heterogénea cuyo $\mathbb{N}$-conjunto subyacente, $\mathrm{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})$, es $(\mathrm{Hom}(\mathbb{N}^n,\mathbb{N}) \mid n \in \mathbb{N})$, de modo que la coordenada n-ésima es el conjunto de las aplicaciones de $\mathbb{N}^n$ en $\mathbb{N}$, y en la que las operaciones estructurales son:

1. $\kappa_{0,0}$, la aplicación constante 0-aria determinada por 0, que es la aplicación de $\mathbb{N}^0$ en $\mathbb{N}$, que al único miembro de $\mathbb{N}^0$ le asigna como valor 0.
2. sc, la aplicación sucesor.
3. $\mathrm{pr}_{1,0}$, la aplicación identidad de $\mathbb{N}$.
4. Para cada $n \geq 2$ y cada $i \in n$, $\mathrm{pr}_{n,i}$, la proyección canónica i-ésima de $\mathbb{N}^n$ en $\mathbb{N}$.
5. Para cada $m \in \mathbb{N} - 1$ y cada $n \in \mathbb{N}$, $\Omega_{\mathrm{C}}^{m,n}$, el operador de composición (generalizada) de ariedad $(m) \curlywedge (n \mid i \in m)$ y coariedad n, que es la aplicación de $\mathrm{Hom}(\mathbb{N}^m,\mathbb{N}) \times (\mathrm{Hom}(\mathbb{N}^n,\mathbb{N}))^m$ en $\mathrm{Hom}(\mathbb{N}^n,\mathbb{N})$ que a un par $(f,(g_i \mid i \in m))$ del primero le asigna como valor la aplicación $\Omega_{\mathrm{C}}^{m,n}(f,(g_i \mid i \in m))$ de $\mathbb{N}^n$ en $\mathbb{N}$ obtenida componiendo $\langle g_i \mid i \in m \rangle$ y f.
6. Para cada $m \in \mathbb{N}$, Ω_{R}^{m}, el operador de recursión primitiva de ariedad $(m) \curlywedge (m+2)$ y coariedad $m+1$, que es la aplicación de $\mathrm{Hom}(\mathbb{N}^m,\mathbb{N}) \times$

$\mathrm{Hom}(\mathbb{N}^{m+2}, \mathbb{N})$ en $\mathrm{Hom}(\mathbb{N}^{m+1}, \mathbb{N})$ que a un par (f, g) del primero le asigna como valor la aplicación $\Omega_{\mathrm{R}}^{m}(f, g)$ de $\mathbb{N}^{m+1}$ en $\mathbb{N}$ obtenida de f y g por recursión primitiva.

En la definición anterior, en virtud del isomorfismo natural que existe entre ambos, hemos identificado el conjunto $\mathrm{Hom}(\mathbb{N}^1, \mathbb{N})$ con el conjunto $\mathrm{End}(\mathbb{N})$, de las endoaplicaciones de $\mathbb{N}$. Además, para simplificar la notación, hemos identificado los símbolos de operación heterogéneos con sus realizaciones en el $\mathbb{N}$-conjunto $(\mathrm{Hom}(\mathbb{N}^n, \mathbb{N}) \mid n \in \mathbb{N})$.

Puesto que disponemos del concepto de subálgebra de un álgebra heterogénea, para la $\mathbf{\Sigma}^{\mathrm{rp}}$-álgebra heterogénea $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$, un $\mathbb{N}$-subconjunto $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ del $\mathbb{N}$-conjunto subyacente $\mathrm{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$ de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$, será una subálgebra precisamente cuando cumpla las siguientes condiciones:

- $\kappa_{0,0} \in \mathcal{F}_0$.
- $\mathrm{sc} \in \mathcal{F}_1$.
- $\mathrm{pr}_{1,0} \in \mathcal{F}_1$.
- Para cada $n \geq 2$ y cada $i \in n$, $\mathrm{pr}_{n,i} \in \mathcal{F}_n$.
- Para cada $m \in \mathbb{N}-1$, cada $n \in \mathbb{N}$, cada $f \in \mathcal{F}_m$ y cada $(g_i \mid i \in m) \in (\mathcal{F}_n)^m$, $\Omega_{\mathrm{C}}^{m,n}(f, (g_i \mid i \in m)) \in \mathcal{F}_n$.
- Para cada $m \in \mathbb{N}$, cada $f \in \mathcal{F}_m$ y cada $g \in \mathcal{F}_{m+2}$, $\Omega_{\mathrm{R}}^{m}(f, g) \in \mathcal{F}_{m+1}$.

Debido a que lo que es cierto para todas las álgebras heterogéneas, lo es de las de una signatura determinada, tenemos las siguientes proposiciones.

Proposición 4.3.

1. $(\mathrm{Hom}(\mathbb{N}^n, \mathbb{N}))_{n \in \mathbb{N}}$ *es una subálgebra de* $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$.
2. *Si* $(\mathcal{F}^i)_{i \in I}$ *es una familia no vacía de subálgebras de* $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$*, entonces* $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}^i$ *es una subálgebra de* $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$.
3. *Si* $(\mathcal{F}^i)_{i \in I}$ *es una familia no vacía de subálgebras de* $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$*, y si dados* $i, j \in I$*, hay un* $k \in I$ *tal que* $\mathcal{F}^i \cup \mathcal{F}^j \subseteq_{\mathbb{N}} \mathcal{F}^k$*, entonces* $\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}^i$ *es una subálgebra de* $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$.

Corolario 4.4. *Para la* $\mathbf{\Sigma}^{\mathrm{rp}}$*-álgebra heterogénea* $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$*, se cumple que la endoaplicación* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})}$ *del conjunto* $\mathrm{Sub}_{\mathbb{N}}(\mathrm{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N}))$*, de los* $\mathbb{N}$*-subconjuntos de* $\mathrm{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$*, definida como:*

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})} \begin{cases} \mathrm{Sub}_{\mathbb{N}}(\mathrm{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})) & \longrightarrow \mathrm{Sub}_{\mathbb{N}}(\mathrm{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})) \\ \qquad \mathcal{F} & \longmapsto \bigcap\{\, \mathcal{C} \in \mathrm{S}(\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})) \mid \mathcal{F} \subseteq_{\mathbb{N}} \mathcal{C} \,\} \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{Im}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})}) \subseteq \mathrm{Cl}(\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N}))$.
2. $\{\, \mathcal{X} \in \mathrm{Sub}_{\mathbb{N}}(\mathrm{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})) \mid \mathcal{X} = \mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})}(\mathcal{X}) \,\} = \mathrm{Cl}(\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N}))$.
3. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})}$ *es extensiva, i.e., para cada* $\mathcal{X} \in \mathrm{Sub}_{\mathbb{N}}(\mathrm{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N}))$*, se cumple que* $\mathcal{X} \subseteq_{\mathbb{N}} \mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})}(\mathcal{X})$.
4. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})}$ *es isótona, i.e., para cada* $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathrm{Sub}_{\mathbb{N}}(\mathrm{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N}))$*, si* $\mathcal{X} \subseteq_{\mathbb{N}} \mathcal{Y}$*, entonces* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})}(\mathcal{X}) \subseteq_{\mathbb{N}} \mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})}(\mathcal{Y})$.
5. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})}$ *es idempotente, i.e., para cada* $\mathcal{X} \in \mathrm{Sub}_{\mathbb{N}}(\mathrm{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N}))$*, se cumple que* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})}(\mathcal{X}) = \mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})}(\mathcal{X}))$.
6. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})}$ *es algebraica, i.e., para cada familia no vacía* $(\mathcal{X}^i)_{i \in I}$ *en el conjunto* $\mathrm{Sub}_{\mathbb{N}}(\mathrm{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N}))$*, si para cada* $i, j \in I$*, existe un* $k \in I$ *tal que* $\mathcal{X}^i \cup \mathcal{X}^j \subseteq_{\mathbb{N}} \mathcal{X}^k$*, entonces* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})}(\bigcup_{i \in I} \mathcal{X}^i) = \bigcup_{i \in I} \mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})}(\mathcal{X}^i)$.

Por consiguiente, para cada $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\boldsymbol{\cdot}}, \mathbb{N})$*,* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\boldsymbol{\cdot}},\mathbb{N})}(\mathcal{X})$*, al que también denotamos por* $\overline{\mathcal{X}}$*, es el mínimo cerrado de* $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\boldsymbol{\cdot}}, \mathbb{N})$ *que contiene a* $\mathcal{X}$*, y lo denominamos el cerrado de* $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\boldsymbol{\cdot}}, \mathbb{N})$ generado *por* $\mathcal{X}$*.*

Demostración. □

Observemos que la propiedad de algebricidad del operador $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\boldsymbol{\cdot}},\mathbb{N})}$ equivale a que, para cada $\mathcal{X} \subseteq_{\mathbb{N}} \mathrm{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\boldsymbol{\cdot}}, \mathbb{N})$, se cumpla que:

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\boldsymbol{\cdot}},\mathbb{N})}(\mathcal{X}) = \textstyle\bigcup_{\mathcal{F}\in\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{X})}\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\boldsymbol{\cdot}},\mathbb{N})}(\mathcal{F}),$$

siendo $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{X})$ el conjunto formado por los $\mathbb{N}$-subconjuntos $\mathcal{F}$ de $\mathcal{X}$ tales que el soporte de $\mathcal{F}$, i.e., el conjunto $\mathrm{supp}(\mathcal{F}) = \{\, n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{F}_n \neq \varnothing \,\}$, es finito y, además, para cada $n \in \mathrm{supp}(\mathcal{F})$, $\mathcal{F}_n$ es finito.

Definición 4.5. Sea $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un $\mathbb{N}$-subconjunto finito de $\mathrm{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\boldsymbol{\cdot}}, \mathbb{N})$. Entonces a las aplicaciones pertenecientes a la unión de la subálgebra heterogénea de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\boldsymbol{\cdot}}, \mathbb{N})$ generada por tal $\mathbb{N}$-subconjunto finito, las denominamos aplicaciones *recursivas primitivas relativas a* $\mathcal{F}$, o aplicaciones $\mathcal{F}$*-recursivas primitivas*, y al conjunto de todas ellas lo denotamos por $\mathrm{ARP}(\mathcal{F})$.

En particular, el conjunto de las aplicaciones *recursivas primitivas*, denotado por ARP, es la unión de la subálgebra heterogénea de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\boldsymbol{\cdot}}, \mathbb{N})$ generada por el $\mathbb{N}$-conjunto $(\varnothing)_{n\in\mathbb{N}}$ (cuyas coordenadas son todas vacías).

No perdemos generalidad, si en lugar de definir el conjunto de las aplicaciones recursivas primitivas respecto de un $\mathbb{N}$-subconjunto finito de $\mathrm{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\boldsymbol{\cdot}}, \mathbb{N})$, lo definimos respecto de una subálgebra heterogénea finitamente generada de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\boldsymbol{\cdot}}, \mathbb{N})$, ya que, debido a que el operador $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\boldsymbol{\cdot}},\mathbb{N})}$ es idempotente, para cada $\mathbb{N}$-subconjunto finito $\mathcal{F}$ de $\mathrm{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\boldsymbol{\cdot}}, \mathbb{N})$, se cumple que:

$$\mathrm{ARP}(\mathcal{F}) = \mathrm{ARP}(\overline{\mathcal{F}}).$$

Además, si $\mathcal{F}$ es una subálgebra heterogénea finitamente generada de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\boldsymbol{\cdot}}, \mathbb{N})$, entonces $\mathrm{ARP}(\mathcal{F})$ es, simplemente, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.

Como consecuencia inmediata de las propiedades del operador $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\boldsymbol{\cdot}},\mathbb{N})}$, tenemos, por una parte, que para cada $\mathbb{N}$-subconjunto finito $\mathcal{F}$ de $\mathrm{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\boldsymbol{\cdot}}, \mathbb{N})$, $\mathrm{ARP} \subseteq \mathrm{ARP}(\mathcal{F})$, i.e., que toda aplicación recursiva primitiva es una aplicación $\mathcal{F}$-recursiva primitiva y, por otra, que si $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ son tres $\mathbb{N}$-subconjuntos finitos de $\mathrm{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\boldsymbol{\cdot}}, \mathbb{N})$ tales que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$, y, además, toda aplicación de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ es $\mathcal{G}$-recursiva primitiva y toda aplicación de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_n$ es $\mathcal{H}$-recursiva primitiva, entonces toda aplicación de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ es $\mathcal{H}$-recursiva primitiva.

Proposición 4.6. *Sea* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un* $\mathbb{N}$*-subconjunto finito de* $\mathrm{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\boldsymbol{\cdot}}, \mathbb{N})$ *y* $f \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}(\mathbb{N}^n, \mathbb{N})$*. Entonces una condición necesaria y suficiente para que* $f \in \mathrm{ARP}(\mathcal{F})$ *es que exista una sucesión de formación para* f *relativa a* $\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{rp}}$ *y* $\mathcal{F}$*, i.e., que exista un* $p \in \mathbb{N}-1$*, y una familia* $(f_i)_{i\in p}$ *en* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}(\mathbb{N}^n, \mathbb{N})$ *tal que* $f = f_{p-1}$ *y, para cada* $i \in p$*, se cumpla que:*

1. $f_i \in \mathcal{F}_n$*, para algún* $n \in \mathbb{N}$*, o*
2. $f_i = \kappa_{0,0}$*, o*
3. $f_i = \mathrm{sc}$*, o*
4. $f_i = \mathrm{pr}_{1,0}$*, o*
5. $f_i = \mathrm{pr}_{n,j}$*, para algún* $n \geq 2$ *y algún* $j \in n$*, o*
6. f_i *es* $m+1$*-aria y* $f_i = \Omega^m_{\mathrm{R}}(f_j, f_k)$*, para un* j *y un* $k \in i$ *tales que* f_j *sea* m*-aria y* f_k *sea* $m+2$*-aria, o*

7. *f_i es n-aria y $f_i = \Omega_{\mathrm{C}}^{m,n}(f_j, (f_{k_\alpha} \mid \alpha \in m))$, para un $m \in \mathbb{N} - 1$, un $j \in i$ y una familia $(k_\alpha \mid \alpha \in m) \in i^m$ tal que f_j sea m-aria y, para cada $\alpha \in m$, f_{k_α} sea n-aria.*

Demostración. Sea $\mathcal{L}$ el $\mathbb{N}$-subconjunto de $\mathrm{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$ cuya coordenada n-ésima, $\mathcal{L}_n$, consta de todas las aplicaciones $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{N}^n, \mathbb{N})$ para las que existe una sucesión de formación relativa a $\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{rp}}$ y $\mathcal{F}$. Puesto que $\mathrm{ARP}(\mathcal{F})$ es la unión de $\overline{\mathcal{F}}$, i.e., la unión del mínimo cerrado de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$ que contiene a $\mathcal{F}$, para demostrar que $\mathrm{ARP}(\mathcal{F}) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_n$, será suficiente que demostremos que $\mathcal{L}$ es un cerrado de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$ y que contiene a $\mathcal{F}$.

Se cumple que $\mathcal{F} \subseteq_{\mathbb{N}} \mathcal{L}$, porque, dado un $n \in \mathbb{N}$ y un $f \in \mathcal{F}_n$, la familia $(f_i)_{i\in 1}$ con $f_0 = f$, es una sucesión de formación para f. Es evidente que $\kappa_{0,0} \in \mathcal{L}_0$, que sc y $\mathrm{pr}_{1,0} \in \mathcal{L}_1$ y que, para cada $n \geq 2$ y cada $j \in n$, $\mathrm{pr}_{n,j} \in \mathcal{L}_n$. Además, dado un $m \in \mathbb{N} - 1$, un $n \in \mathbb{N}$, un $f \in \mathcal{L}_m$ y una m-familia $(g_j)_{j\in m}$ en $\mathcal{L}_n$, en virtud de la definición de $\mathcal{L}$, tenemos que hay una sucesión de formación $(f_i)_{i\in n_f}$ para f y, para cada $j \in m$, hay una sucesión de formación $(f_{j,i})_{i\in n_j}$ para g_j. Situación que resumimos, parcialmente, mediante la matriz:

$$\begin{pmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & f_{n_f-1} = f \\ f_{0,0} & f_{0,1} & \cdots & f_{0,n_0-1} = g_0 \\ f_{1,0} & f_{1,1} & \cdots & f_{1,n_1-1} = g_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m-1,0} & f_{m-1,1} & \cdots & f_{m-1,n_{m-1}-1} = g_{m-1} \end{pmatrix}$$

Luego para $n = n_f + \left(\sum_{j\in m} n_j\right) + 1$ y tomando como $(h_i)_{i\in n}$ la familia cuyo último término es $\Omega_{\mathrm{C}}^{m,n}(f, (g_j \mid j \in m))$ y siendo los otros términos los formado por los de la matriz, recorridos de izquierda a derecha y de arriba abajo, se cumple que $(h_i)_{i\in n}$ es una sucesión de formación para $\Omega_{\mathrm{C}}^{m,n}(f, (g_j \mid j \in m))$, luego $\Omega_{\mathrm{C}}^{m,n}(f, (g_j \mid j \in m)) \in \mathcal{L}_n$. Del mismo modo se demuestra que $\mathcal{L}$ está cerrado bajo Ω_{R}^{m}. Por consiguiente $\mathcal{L}$ es un cerrado de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$. De todo ello concluimos que $\mathrm{ARP}(\mathcal{F}) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_n$.

Demostramos ahora que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_n \subseteq \mathrm{ARP}(\mathcal{F})$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f \in \mathcal{L}_n$. Entonces, por definición, hay un $p \in \mathbb{N} - 1$ y una familia $(f_i)_{i\in p}$ en $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}(\mathbb{N}^n, \mathbb{N})$ tal que $f = f_{p-1}$ y, para cada $i \in p$, se cumple que $f_i \in \mathcal{F}_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, o $f_i = \kappa_{0,0}$, o $f_i = \mathrm{sc}$, o $f_i = \mathrm{pr}_{1,0}$, o $f_i = \mathrm{pr}_{n,j}$, para algún $n \geq 2$ y algún $j \in n$, o f_i es $m+1$-aria y $f_i = \Omega_{\mathrm{R}}^{m}(f_j, f_k)$, para un j y un $k \in i$ tales que f_j sea m-aria y f_k sea $m+2$-aria, o f_i es n-aria y $f_i = \Omega_{\mathrm{C}}^{m,n}(f_j, (f_{k_\alpha} \mid \alpha \in m))$, para un $m \in \mathbb{N} - 1$, un $j \in i$ y una familia $(k_\alpha)_{\alpha\in m} \in i^m$ tal que f_j sea m-aria y, para cada $\alpha \in m$, f_{k_α} sea n-aria.

Demostramos que $f = f_{p-1} \in \mathrm{ARP}(\mathcal{F})$, por inducción sobre $i \in p$. Para $i = 0$, $f_0 \in \mathrm{ARP}(\mathcal{F})$, porque, en este caso, f_0 o bien pertenece a $\mathcal{F}_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, o bien es de la forma $\kappa_{0,0}$, o sc, o $\mathrm{pr}_{1,0}$, o $\mathrm{pr}_{n,j}$, para algún $n \geq 2$ y algún $j \in n$ y entonces $f_0 \in \mathrm{ARP}(\mathcal{F})$, porque $\mathrm{ARP}(\mathcal{F})$ es la unión del mínimo cerrado de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$ que contiene a $\mathcal{F}$. Sea $k \in p$ y supongamos que $\forall i \in k$, $f_i \in \mathrm{ARP}(\mathcal{F})$. Entonces, por definición, $f_k \in \mathcal{F}_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, o $f_k = \kappa_{0,0}$, o $f_k = \mathrm{sc}$, o $f_k = \mathrm{pr}_{1,0}$, o $f_k = \mathrm{pr}_{n,j}$, para algún $n \geq 2$ y algún $j \in n$, o f_k es $m+1$-aria y $f_k = \Omega_{\mathrm{R}}^{m}(f_u, f_v)$, para un u y un $v \in k$ tales que f_u sea m-aria y f_v sea $m+2$-aria, o f_k es n-aria y $f_k = \Omega_{\mathrm{C}}^{m,n}(f_j, (f_{k_\alpha} \mid \alpha \in m))$, para un $m \in \mathbb{N} - 1$, un $j \in k$ y una familia $(k_\alpha)_{\alpha\in m} \in k^m$ tal que f_j sea m-aria y, para cada $\alpha \in m$, f_{k_α} sea n-aria. Es evidente que en los cinco primeros casos $f_k \in \mathrm{ARP}(\mathcal{F})$. En los dos últimos casos también $f_k \in \mathrm{ARP}(\mathcal{F})$, porque al ser, por hipótesis, $f_0, \ldots, f_{k-1} \in \mathrm{ARP}(\mathcal{F})$, también f_u, f_v y $f_{k_0}, \ldots, f_{k_{m-1}} \in \mathrm{ARP}(\mathcal{F})$, luego, ya que $\mathrm{ARP}(\mathcal{F})$ es la unión del mínimo cerrado de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$ que contiene a $\mathcal{F}$, $f_k = \Omega_{\mathrm{R}}^{m}(f_u, f_v) \in \mathrm{ARP}(\mathcal{F})$ y

$f_k = \Omega_{\mathrm{C}}^{m,n}(f_j, (f_{k_\alpha} \mid \alpha \in m)) \in \mathrm{ARP}(\mathcal{F})$. Así que, para cada $k \in p$, $f_k \in \mathrm{ARP}(\mathcal{F})$, luego, para $k = p-1$, $f = f_{p-1} \in \mathrm{ARP}(\mathcal{F})$. Por lo tanto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_n \subseteq \mathrm{ARP}(\mathcal{F})$. □

Corolario 4.7. *Sea $f \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}(\mathbb{N}^n, \mathbb{N})$. Entonces una condición necesaria y suficiente para que $f \in \mathrm{ARP}$ es que exista un $p \in \mathbb{N} - 1$, y una familia $(f_i)_{i\in p}$ en $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}(\mathbb{N}^n, \mathbb{N})$ tal que $f = f_{p-1}$ y, para cada $i \in p$, se cumpla que:*

1. *$f_i = \kappa_{0,0}$, o*
2. *$f_i = \mathrm{sc}$, o*
3. *$f_i = \mathrm{pr}_{1,0}$, o*
4. *$f_i = \mathrm{pr}_{n,j}$, para algún $n \geq 2$ y algún $j \in n$, o*
5. *f_i es $m+1$-aria y $f_i = \Omega_{\mathrm{R}}^{m}(f_j, f_k)$, para un j y un $k \in i$ tales que f_j sea m-aria y f_k sea $m+2$-aria, o*
6. *f_i es n-aria y $f_i = \Omega_{\mathrm{C}}^{m,n}(f_j, (f_{k_\alpha} \mid \alpha \in m))$, para un $m \in \mathbb{N} - 1$, un $j \in i$ y una familia $(k_\alpha \mid \alpha \in m) \in i^m$ tal que f_j sea m-aria y, para cada $\alpha \in p$, f_{k_α} sea n-aria.*

Corolario 4.8. *El conjunto de las aplicaciones recursivas primitivas es infinito numerable. Por consiguiente, la mayoría de las aplicaciones numericas no son recursivas primitivas.*

Corolario 4.9. *El conjunto de las aplicaciones recursivas primitivas ceroarias es infinito numerable. Además, hay ninguna aplicación recursiva primitiva unaria $g\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = f_n$, siendo $\{\, f_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ la imagen de un isomorfismo entre $\mathbb{N}$ y el conjunto de las aplicaciones recursivas primitivas ceroarias.*

Corolario 4.10. *El conjunto de las aplicaciones recursivas primitivas unarias es infinito numerable. Además, no hay ninguna aplicación recursiva primitiva $g\colon \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $g(n, -) = f_n$, siendo $\{\, f_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ la imagen de un isomorfismo entre $\mathbb{N}$ y el conjunto de las aplicaciones recursivas primitivas unarias.*

Demostración. Hay al menos $\aleph_0$ de ellas, porque $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, sc, sc^2,..., sc^n, ..., son todas recursivas primitivas y dos a dos distintas. hay a lo sumo $\aleph_0$ de ellas, porque son parte de las aplicaciones recursivas primitivas, de las que hay una infinidad numerable.

Supongamos que exista una aplicación recursiva primitiva $g\colon \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $g(n, -) = f_n$. Entonces la endoaplicación $f = \mathrm{sc} \circ g \circ \langle \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \mathrm{id}_{\mathbb{N}} \rangle$ de $\mathbb{N}$, que a un $n \in \mathbb{N}$ le asigna $g(n, n) + 1$, es recursiva primitiva. Por lo tanto, hay un $n \in \mathbb{N}$, para el que $f = f_n$, así que $f(n) = f_n(n) = g(n, n)$ y $f(n) = g(n, n) + 1$, que es absurdo. □

La segunda parte del corolario anterior se puede generalizar de modo que, para cada número natural $n \geq 1$, no hay ninguna aplicación recursiva primitiva $g\colon \mathbb{N}^{1+n} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que, para cada $x \in \mathbb{N}$, $g(x, -) = f_x$, siendo $\{\, f_x \mid x \in \mathbb{N} \,\}$ la imagen de un isomorfismo entre $\mathbb{N}$ y el conjunto de las aplicaciones recursivas primitivas n-arias. Porque si existiera una aplicación recursiva primitiva $g\colon \mathbb{N}^{1+n} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que, para cada $x \in \mathbb{N}$, $g(x, -) = f_x$, entonces la aplicación $f = \mathrm{sc} \circ g \circ \langle \mathrm{pr}_{n,0}, \mathrm{pr}_{n,0}, \mathrm{pr}_{n,1}, \ldots, \mathrm{pr}_{n,n-1} \rangle$ de $\mathbb{N}^n$ en $\mathbb{N}$, que a un $(y_j)_{j\in n} \in \mathbb{N}^n$ le asigna $g(y_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) + 1$, es recursiva primitiva. Por lo tanto, hay un $x \in \mathbb{N}$, para el que $f = f_x$, así que, para $(y_j)_{j\in n} = (x)_{j\in n}$, $f(x, \ldots, x) = f_x(x, \ldots, x) = g(x, x, \ldots, x)$ y $f(x, \ldots, x) = g(x, x, \ldots, x) + 1$, que es absurdo.

4.2. Algunas aplicaciones recursivas primitivas.

Proposición 4.11. *La familia de aplicaciones $(\kappa_{0,k})_{k\in\mathbb{N}}$, que es la única aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}^0}$ tal que el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{N} \arrow[dd, "(\kappa_{0,k})_{k\in\mathbb{N}}"] & \mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{sc}"'] \arrow[dd, "(\kappa_{0,k})_{k\in\mathbb{N}}"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_0"] \arrow[dr, "\kappa_{0,0}"'] & & \\
 & \mathbb{N}^{\mathbb{N}^0} & \mathbb{N}^{\mathbb{N}^0} \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}
$$

conmuta, siendo f la endoaplicación de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}^0}$ que a una aplicación t de $\mathbb{N}^0$ en $\mathbb{N}$ le asigna $\mathrm{sc}\circ\langle t\rangle$, es tal que, para cada $k\in\mathbb{N}$, $\kappa_{0,k}$ es recursiva primitiva.

Demostración. Desde luego $\kappa_{0,0}$ es recursiva primitiva. Por otra parte, la aplicación constante $\kappa_{0,1}\colon\mathbb{N}^0 \longrightarrow \mathbb{N}$, que al único miembro de $\mathbb{N}^0$ le asigna 1, es recursiva primitiva, porque $\kappa_{0,1}=\Omega_{\mathrm{C}}^{1,0}(\mathrm{sc},(\kappa_{0,0}))$, i.e., $\kappa_{0,1}$ es la composición de $\langle\kappa_{0,0}\rangle$ y sc, o diagramáticamente:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N}^0 \arrow[d, "\langle\kappa_{0,0}\rangle"] \arrow[dr, "\kappa_{0,0}"] \arrow[dd, bend right=60, "\kappa_{0,1}"'] & \\
\mathbb{N}^1 \arrow[r, "\mathrm{pr}_{1,0}"'] \arrow[d, "\mathrm{sc}"] & \mathbb{N} \\
\mathbb{N} &
\end{tikzcd}
$$

Supongamos que la aplicación constante $\kappa_{0,k}\colon\mathbb{N}^0 \longrightarrow \mathbb{N}$, que al único miembro de $\mathbb{N}^0$ le asigna k, para $k\geq 0$ sea recursiva primitiva. Entonces la aplicación constante $\kappa_{0,k+1}\colon\mathbb{N}^0 \longrightarrow \mathbb{N}$, que al único miembro de $\mathbb{N}^0$ le asigna $k+1$, es recursiva primitiva, porque $\kappa_{0,k+1}=\Omega_{\mathrm{C}}^{1,0}(\mathrm{sc},(\kappa_{0,k}))$, i.e., $\kappa_{0,1}$ es la composición de $\langle\kappa_{0,k}\rangle$ y sc, o diagramáticamente:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N}^0 \arrow[d, "\langle\kappa_{0,k}\rangle"] \arrow[dr, "\kappa_{0,k}"] \arrow[dd, bend right=60, "\kappa_{0,k+1}"'] & \\
\mathbb{N}^1 \arrow[r, "\mathrm{pr}_{1,0}"'] \arrow[d, "\mathrm{sc}"] & \mathbb{N} \\
\mathbb{N} &
\end{tikzcd}
$$

□

Proposición 4.12. *Para cada $k\in\mathbb{N}$, la aplicación constante $\kappa_{1,k}\colon\mathbb{N}^1 \longrightarrow \mathbb{N}$, que a cualquier miembro de $\mathbb{N}^1$ le asigna k, es recursiva primitiva.*

Demostración. Lo es porque $\kappa_{1,k}=\Omega_{\mathrm{R}}^{0}(\kappa_{0,k},\mathrm{pr}_{2,1})$, o diagramáticamente:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N}^0 \arrow[dr, "\kappa_{0,k}"'] & \mathbb{N}^1 \arrow[d, "\kappa_{1,k}"] & \mathbb{N}^2 \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{2,1}"] \\
& \mathbb{N} &
\end{tikzcd}$$

□

Corolario 4.13. *Para cada $n \geq 2$ y cada $k \in \mathbb{N}$, la aplicación constante $\kappa_{n,k} \colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$, que a cualquier miembro de $\mathbb{N}^n$ le asigna k, es recursiva primitiva.*

Demostración. Porque $\kappa_{n,k} = \Omega_{\mathrm{C}}^{1,n}(\kappa_{1,k}, (\mathrm{pr}_{n,0}))$, i.e., $\kappa_{n,k}$ es la composición de $\langle \mathrm{pr}_{n,0} \rangle$ y $\kappa_{1,k}$, o diagramáticamente:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N}^n \arrow[d, "\langle \mathrm{pr}_{n,0} \rangle"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{n,0}"] \arrow[dd, bend right=60, "\kappa_{n,k}"'] & \\
\mathbb{N}^1 \arrow[r, "\mathrm{pr}_{1,0}"'] \arrow[d, "\kappa_{1,k}"'] & \mathbb{N} \\
\mathbb{N} &
\end{tikzcd}$$

□

Con esto queda demostrado que todas las aplicaciones constantes son recursivas primitivas. Ahora bien, si, e.g., respecto de la conjetura de Goldbach, según la cual *cualquier número natural par distinto del* 2 *es la suma de dos números primos*, que todavía no ha sido demostrada, a pesar de que su verdad parece indudable, definimos la endoaplicación f de $\mathbb{N}$ como:

$$f \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si la conjetura es verdadera;} \\ 0, & \text{si la conjetura es falsa,} \end{cases} \end{cases}$$

entonces, en virtud del principio del tercio excluso, f es una aplicación constante (sí, pero ¿cual de ellas?), luego recursiva primitiva. Estamos ante un caso en el que disponemos, por una parte, de un conjunto, el de las aplicaciones recursivas primitivas, exactamente definido y, por otra, de una aplicación, la f, también perfectamente definida, y, en virtud de un principio lógico, está *determinada* la pertenencia al conjunto en cuestión de la aplicación, en este caso, positivamente. Sin embargo, dado el estado actual del conocimiento matemático, no está deductivamente *decidida* tal pertenencia. Esto proyecta sombras de duda acerca de la legitimidad del uso indiscriminado en las matemáticas de las definiciones no efectivas de entidades matemáticas. Al respecto dice N. Cuesta:

> Difícil es también dar un criterio para discernir las definiciones efectivas de las aparentes. No todos los matemáticos convendrán con Hilbert en que está bien definido el número real, cuyo desarrollo diádico sea
>
> $$0'[2^{\sqrt{2}}][3^{\sqrt{3}}][4^{\sqrt{4}}]\ldots$$
>
> y donde $[n^{\sqrt{n}}]$ vale 0, 1, según que, respectivamente, $n^{\sqrt{n}}$ sea racional o irracional.

Proposición 4.14. *La aplicación* $\mathrm{pd}\colon \mathbb{N}^1 \longrightarrow \mathbb{N}$*, de formación del* predecesor *de un número natural, definida como:*

$$\mathrm{pd}\begin{cases} \mathbb{N}^1 \longrightarrow \mathbb{N} \\ \quad x \;\longmapsto\; \mathrm{pd}(x) = \begin{cases} 0, & \textit{si } x = 0; \\ y, & \textit{si } x = \mathrm{sc}(y), \end{cases} \end{cases}$$

es recursiva primitiva.

Demostración. Lo es porque $\mathrm{pd} = \Omega^0_{\mathrm{R}}(\kappa_{0,0}, \mathrm{pr}_{2,0})$, o diagramáticamente:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N}^0 \arrow[dr, "\kappa_{0,0}"'] & \mathbb{N}^1 \arrow[d, "\mathrm{pd}"] & \mathbb{N}^2 \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{2,0}"] \\
& \mathbb{N} &
\end{tikzcd}$$

□

Proposición 4.15. *La* diferencia modificada $\dot{-}\colon \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$*, definida como:*

$$\begin{cases} x \dot{-} 0 = x, \\ x \dot{-} \mathrm{sc}(y) = \mathrm{pd}(x \dot{-} y), \quad \textit{si } y \geq 0, \end{cases}$$

es recursiva primitiva.

Demostración. Lo es porque $\dot{-} = \Omega^1_{\mathrm{R}}(\mathrm{pr}_{1,0}, \Omega^{1,3}_{\mathrm{C}}(\mathrm{pd}, (\mathrm{pr}_{3,2})))$, o diagramáticamente:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N}^1 \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{1,0}"'] & \mathbb{N}^2 \arrow[d, "\dot{-}"] & \mathbb{N}^3 \arrow[dl, "\Omega^{1,3}_{\mathrm{C}}(\mathrm{pd}, (\mathrm{pr}_{3,2}))"] \\
& \mathbb{N} &
\end{tikzcd}$$

siendo $\Omega^{1,3}_{\mathrm{C}}(\mathrm{pd}, (\mathrm{pr}_{3,2}))$ la aplicación de $\mathbb{N}^3$ en $\mathbb{N}$ obtenida como:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N}^3 \arrow[d, "\langle \mathrm{pr}_{3,2} \rangle"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{3,2}"] \arrow[dd, bend right=60, "\Omega^{1,3}_{\mathrm{C}}(\mathrm{pd}, (\mathrm{pr}_{3,2}))"'] & \\
\mathbb{N}^1 \arrow[r, "\mathrm{pr}_{1,0}"'] \arrow[d, "\mathrm{pd}"'] & \mathbb{N} \\
\mathbb{N} &
\end{tikzcd}$$

□

Proposición 4.16. *La suma* $+\colon \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$*, definida como:*

$$\begin{cases} x + 0 = x, \\ x + \mathrm{sc}(y) = \mathrm{sc}(x + y), \quad \textit{si } y \geq 0, \end{cases}$$

es recursiva primitiva.

Demostración. Lo es porque $+ = \Omega^1_{\mathrm{R}}(\mathrm{pr}_{1,0}, \Omega^{1,3}_{\mathrm{C}}(\mathrm{sc}, (\mathrm{pr}_{3,2})))$, o diagramáticamente:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N}^1 \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{1,0}"'] & \mathbb{N}^2 \arrow[d, "+"] & \mathbb{N}^3 \arrow[dl, "\Omega_{\mathrm{C}}^{1,3}(\mathrm{sc}, (\mathrm{pr}_{3,2}))"] \\
& \mathbb{N} &
\end{tikzcd}
$$

siendo $\Omega_{\mathrm{C}}^{1,3}(\mathrm{sc}, (\mathrm{pr}_{3,2}))$ la aplicación de $\mathbb{N}^3$ en $\mathbb{N}$ obtenida como:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N}^3 \arrow[d, "\langle \mathrm{pr}_{3,2} \rangle"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{3,2}"] \arrow[dd, bend right=60, "\Omega_{\mathrm{C}}^{1,3}(\mathrm{sc}, (\mathrm{pr}_{3,2}))"'] & \\
\mathbb{N}^1 \arrow[r, "\mathrm{pr}_{1,0}"'] \arrow[d, "\mathrm{sc}"'] & \mathbb{N} \\
\mathbb{N} &
\end{tikzcd}
$$

□

Proposición 4.17. *El producto* $\cdot \colon \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, *definido como:*

$$
\begin{cases}
x \cdot 0 = 0, \\
x \cdot \mathrm{sc}(y) = x \cdot y + x, & \textit{si } y \geq 0,
\end{cases}
$$

es una aplicación recursiva primitiva.

Demostración. Lo es porque $\cdot = \Omega_{\mathrm{R}}^{1}(\kappa_{1,0}, \Omega_{\mathrm{C}}^{2,3}(+, (\mathrm{pr}_{3,2}, \mathrm{pr}_{3,0})))$, o diagramáticamente:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N}^1 \arrow[dr, "\kappa_{1,0}"'] & \mathbb{N}^2 \arrow[d, "\cdot"] & \mathbb{N}^3 \arrow[dl, "\Omega_{\mathrm{C}}^{2,3}(+, (\mathrm{pr}_{3,2}, \mathrm{pr}_{3,0}))"] \\
& \mathbb{N} &
\end{tikzcd}
$$

siendo $\Omega_{\mathrm{C}}^{2,3}(+, (\mathrm{pr}_{3,2}, \mathrm{pr}_{3,0}))$ la aplicación de $\mathbb{N}^3$ en $\mathbb{N}$ obtenida como:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N}^3 \arrow[d, "\langle \mathrm{pr}_{3,2}, \mathrm{pr}_{3,0} \rangle"'] \arrow[dr, "(\mathrm{pr}_{3,2}, \mathrm{pr}_{3,0})"] \arrow[dd, bend right=60, "\Omega_{\mathrm{C}}^{2,3}(+, (\mathrm{pr}_{3,2}, \mathrm{pr}_{3,0}))"'] & \\
\mathbb{N}^2 \arrow[r, "(\mathrm{pr}_{2,i})_{i \in 2}"'] \arrow[d, "+"'] & \mathbb{N} \\
\mathbb{N} &
\end{tikzcd}
$$

□

Proposición 4.18. *La* potenciación $\mathrm{pot} \colon \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, *definida como:*

$$
\begin{cases}
x^0 = 1, \\
x^{\mathrm{sc}(y)} = x^y \cdot x, & \textit{si } y \geq 0,
\end{cases}
$$

es una aplicación recursiva primitiva.

Demostración. Lo es porque $\mathrm{pot} = \Omega_{\mathrm{R}}^{1}(\kappa_{1,1}, \Omega_{\mathrm{C}}^{2,3}(\cdot, (\mathrm{pr}_{3,2}, \mathrm{pr}_{3,0})))$, i.e., se cumple que:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N}^1 \arrow[dr, "\kappa_{1,1}"'] & \mathbb{N}^2 \arrow[d, "\mathrm{pot}"] & \mathbb{N}^3 \arrow[dl, "\Omega_{\mathrm{C}}^{2,3}(\cdot, (\mathrm{pr}_{3,2}, \mathrm{pr}_{3,0}))"] \\
 & \mathbb{N} &
\end{tikzcd}$$

siendo $\Omega_{\mathrm{C}}^{2,3}(\cdot, (\mathrm{pr}_{3,2}, \mathrm{pr}_{3,0}))$ la aplicación de $\mathbb{N}^3$ en $\mathbb{N}$ obtenida como:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N}^3 \arrow[d, "\langle \mathrm{pr}_{3,2}, \mathrm{pr}_{3,0} \rangle"'] \arrow[dr, "(\mathrm{pr}_{3,2}, \mathrm{pr}_{3,0})"] \arrow[dd, bend right=60, "\Omega_{\mathrm{C}}^{2,3}(\cdot, (\mathrm{pr}_{3,2}, \mathrm{pr}_{3,0}))"'] & \\
\mathbb{N}^2 \arrow[r, "(\mathrm{pr}_{2,i})_{i\in 2}"'] \arrow[d, "\cdot"'] & \mathbb{N} \\
\mathbb{N} &
\end{tikzcd}$$

□

Proposición 4.19. *Para cada $n \geq 1$ y cada $i \in n$, la aplicación $\mathrm{sc}_{n,i}$ de $\mathbb{N}^n$ en $\mathbb{N}$ que a un $x \in \mathbb{N}^n$ le asigna $\mathrm{sc}(x_i)$, es recursiva primitiva.*

Demostración. Lo es porque $\mathrm{sc}_{n,i} = \Omega_{\mathrm{C}}^{1,n}(\mathrm{sc}, (\mathrm{pr}_{n,i}))$. □

Proposición 4.20. *La aplicación* factorial $\mathrm{fac}\colon \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, *definida como:*

$$\begin{cases} 0! = 1, \\ \mathrm{sc}(y)! = y! \cdot \mathrm{sc}(y), & \text{si } y \geq 0, \end{cases}$$

es una aplicación recursiva primitiva.

Demostración. Lo es porque $\mathrm{fac} = \Omega_{\mathrm{R}}^{0}(\kappa_{0,1}, \Omega_{\mathrm{C}}^{2,2}(\cdot, (\mathrm{pr}_{2,1}, \mathrm{sc}_{2,0})))$, i.e., se cumple que:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N}^0 \arrow[dr, "\kappa_{0,1}"'] & \mathbb{N}^2 \arrow[d, "\mathrm{fac}"] & \mathbb{N}^3 \arrow[dl, "\Omega_{\mathrm{C}}^{2,2}(\cdot, (\mathrm{pr}_{2,1}, \mathrm{sc}_{2,0}))"] \\
 & \mathbb{N} &
\end{tikzcd}$$

siendo $\Omega_{\mathrm{C}}^{2,2}(\cdot, (\mathrm{pr}_{2,1}, \mathrm{sc}_{2,0}))$ la aplicación de $\mathbb{N}^2$ en $\mathbb{N}$ obtenida como:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N}^2 \arrow[d, "\langle \mathrm{pr}_{2,1}, \mathrm{sc}_{2,0} \rangle"'] \arrow[dr, "(\mathrm{pr}_{2,1}, \mathrm{sc}_{2,0})"] \arrow[dd, bend right=60, "\Omega_{\mathrm{C}}^{2,2}(\cdot, (\mathrm{pr}_{2,1}, \mathrm{sc}_{2,0}))"'] & \\
\mathbb{N}^2 \arrow[r, "(\mathrm{pr}_{2,i})_{i\in 2}"'] \arrow[d, "\cdot"'] & \mathbb{N} \\
\mathbb{N} &
\end{tikzcd}$$

□

4.3. Relaciones recursivas primitivas.

Ahora que ya disponemos del concepto de aplicación recursiva primitiva y del de aplicación recursiva primitiva relativa a una subálgebra heterogénea finitamente generada de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\cdot}, \mathbb{N})$, definimos la noción de relación recursiva primitiva y de relación recursiva primitiva relativa a una subálgebra heterogénea finitamente generada de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\cdot}, \mathbb{N})$, a través de la aplicación característica de la relación, demostramos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto de las relaciones recursivas primitivas es un álgebra Booleana que contiene a las relaciones n-arias finitas (y, por lo tanto a las cofinitas) y caracterizamos a las relaciones recursivas primitivas mediante las fibras o conjuntos de nivel de las aplicaciones recursivas primitivas.

Además, demostramos que el sistema de las relaciones recursivas primitivas está cerrado bajo el operador mixto de composición (generalizada), cilindrificaciones, concatenación, los operadores relacionales de cuantificación universal y existencial limitadas, así como que los operadores mixtos de minimización limitada transforman relaciones recursivas primitivas en aplicaciones recursivas primitivas y que un nuevo operador mixto de definición por casos, transforma aplicaciones recursivas primitivas y relaciones recursivas primitivas en aplicaciones recursivas primitivas.

Por otra parte, demostramos que las relaciones recursivas primitivas se conservan bajo las imágenes inversas mediante la aplicación determinada por una familia de aplicaciones recursivas primitivas, que la función subyacente de una aplicación recursiva primitiva es una relación recursiva primitiva y que las fibras de una aplicación recursiva primitiva son relaciones recursivas primitivas.

Por último, demostramos la existencia de situaciones de Cantor recursivas primitivas y de representaciones isomorfas recursivas primitivas entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}^{\star}$.

En la definición que sigue, para una relación n-aria R sobre $\mathbb{N}$, convenimos que ch_R, la aplicación característica de R, denota la aplicación de $\mathbb{N}^n$ en $\mathbb{N}$ definida como:

$$\mathrm{ch}_R \begin{cases} \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N} \\ (x_i \mid i \in n) \longmapsto \mathrm{ch}_R(x_i \mid i \in n) = \begin{cases} 1, & \text{si } (x_i \mid i \in n) \in R; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \end{cases}$$

De modo que ch_R es la composición de $\chi_R \colon \mathbb{N}^n \longrightarrow 2$, el caracter de R, e $\mathrm{in}_2 \colon 2 \longrightarrow \mathbb{N}$, la inclusión canónica de 2 en $\mathbb{N}$.

Definición 4.21. Sea $\mathcal{F}$ una subálgebra heterogénea finitamente generada de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\cdot}, \mathbb{N})$ y $R \subseteq \mathbb{N}^n$, i.e., una relación n-aria sobre $\mathbb{N}$. Decimos que R es una relación *recursiva primitiva relativa a* $\mathcal{F}$, o que es una relación $\mathcal{F}$*-recursiva primitiva* si su aplicación característica $\mathrm{ch}_R \in \mathrm{ARP}(\mathcal{F})$. Al conjunto de las relaciones $\mathcal{F}$-recursivas primitivas lo denotamos por $\mathrm{RRP}(\mathcal{F})$.

En particular, decimos que R es una relación *recursiva primitiva* si $\mathrm{ch}_R \in \mathrm{ARP}$. Al conjunto de las relaciones recursivas primitivas lo denotamos por RRP.

Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son dos subálgebras heterogéneas finitamente generadas de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\cdot}, \mathbb{N})$ tales que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ y $R \subseteq \mathbb{N}^n$ es una relación $\mathcal{F}$-recursiva primitiva, entonces R es $\mathcal{G}$-recursiva primitiva. Por consiguiente, para cada subálgebra heterogénea finitamente generada $\mathcal{F}$ de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\cdot}, \mathbb{N})$, se cumple que $\mathrm{RRP} \subseteq \mathrm{RRP}(\mathcal{F})$, i.e., que toda relación recursiva primitiva es $\mathcal{F}$-recursiva primitiva.

Proposición 4.22. *Para cada* $n \in \mathbb{N} - 1$*, el conjunto de las relaciones recursivas primitivas* n*-arias es infinito numerable. Por consiguiente, la mayoría de las relaciones en* $\mathbb{N}$ *no son recursivas primitivas.*

Demostración. □

Lema 4.23. *Sea* $m \in \mathbb{N} - 1$, $n \in \mathbb{N}$, $(f_i)_{i\in m}$ *una familia de aplicaciones en la que, para cada* $i \in m$, $f_i\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ *y* Q *una relación* m*-aria en* $\mathbb{N}$. *Entonces hay una única relación* n*-aria, obtenida de* $f_i\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ *y* Q *por* composición generalizada, *a la que denotamos por* $\Pi^{m,n}_{\mathrm{C}}(Q,(f_i)_{i\in m})$, *tal que, para cada* $x \in \mathbb{N}^n$, *una condición necesaria y suficiente para que* $x \in \Pi^{m,n}_{\mathrm{C}}(Q,(f_i)_{i\in m})$ *es que* $(f_i(x) \mid i \in m) \in Q$.

Demostración. $\Pi^{m,n}_{\mathrm{C}}(Q,(f_i)_{i\in m})$ es $\langle f_i\rangle^{-1}_{i\in m}[Q]$ □

Proposición 4.24. *Sea* $m \in \mathbb{N} - 1$, $n \in \mathbb{N}$, $(f_i)_{i\in m}$ *una familia de aplicaciones en la que, para cada* $i \in m$, $f_i\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$, Q *una relación* m*-aria y* $\mathcal{F}$ *una subálgebra heterogénea finitamente generada de* $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\cdot},\mathbb{N})$. *Si, para cada* $i \in m$, f_i *es* $\mathcal{F}$*-recursiva primitiva y* Q *es una relación* $\mathcal{F}$*-recursiva primitiva, entonces la relación* n*-aria* $\Pi^{m,n}_{\mathrm{C}}(Q,(f_i)_{i\in m})$ *en* $\mathbb{N}$ *es* $\mathcal{F}$*-recursiva primitiva.*

Demostración. Porque $\mathrm{ch}_{\Pi^{m,n}_{\mathrm{C}}(Q,(f_i)_{i\in m})} = \Omega^{m,n}_{\mathrm{C}}(\mathrm{ch}_Q,(f_i)_{i\in m})$. □

Corolario 4.25. *Sea* $m \in \mathbb{N} - 1$, $n \in \mathbb{N}$, $(f_i)_{i\in m}$ *una familia de aplicaciones en la que, para cada* $i \in m$, $f_i\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$, Q *una relación* m*-aria. Si, para cada* $i \in m$, f_i *es una aplicación recursiva primitiva y* Q *una relación recursiva primitiva, entonces la relación* n*-aria* $\Pi^{m,n}_{\mathrm{C}}(Q,(f_i \mid i \in m))$ *en* $\mathbb{N}$ *es recursiva primitiva.*

Proposición 4.26. *Sea* $n \in \mathbb{N}$, R *una relación* n*-aria en* $\mathbb{N}$ *y* $\mathcal{F}$ *una subálgebra heterogénea finitamente generada de* $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\cdot},\mathbb{N})$. *Si* R *es* $\mathcal{F}$*-recursiva primitiva, entonces la* negación *de* R, *a la que denotamos por* $\mathrm{Ng}^n(R)$ *y que es la relación* n*-aria* $\mathbb{N}^n - R$ *en* $\mathbb{N}$, *es* $\mathcal{F}$*-recursiva primitiva.*

Demostración. Porque $\mathrm{ch}_{\mathrm{Ng}^n(R)} = 1 \dot{-} \mathrm{ch}_R$. □

Corolario 4.27. *Sea* $n \in \mathbb{N}$ *y* R *una relación* n*-aria en* $\mathbb{N}$. *Si* R *es recursiva primitiva, entonces la relación* n*-aria* $\mathrm{Ng}^n(R)$ *en* $\mathbb{N}$ *es recursiva primitiva.*

Proposición 4.28. *Sea* $n \in \mathbb{N}$, P *y* Q *dos relaciones* n*-arias en* $\mathbb{N}$ *y* $\mathcal{F}$ *una subálgebra heterogénea finitamente generada de* $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\cdot},\mathbb{N})$. *Si* P *y* Q *son* $\mathcal{F}$*-recursivas primitivas, entonces la* conjunción *de* P *y* Q, *a la que denotamos por* $\mathrm{Cj}^n(P,Q)$ *y que es la relación* n*-aria* $P \cap Q$ *en* $\mathbb{N}$, *es* $\mathcal{F}$*-recursiva primitiva.*

Demostración. □

Corolario 4.29. *Sea* $n \in \mathbb{N}$ *y* P *y* Q *dos relaciones* n*-arias en* $\mathbb{N}$. *Si* P *y* Q *son recursivas primitivas, entonces la relación* n*-aria* $\mathrm{Cj}^n(P,Q)$ *en* $\mathbb{N}$ *es recursiva primitiva.*

Definición 4.30. Sean m, $n \in \mathbb{N}$ y $\varphi\colon m \longrightarrow n$. Entonces denotamos por Rl^{φ} la aplicación de $\mathrm{Sub}(\mathbb{N}^m)$ en $\mathrm{Sub}(\mathbb{N}^n)$ que a una relación m-aria R en $\mathbb{N}$ le asigna la relación n-aria $\mathrm{Rl}^{\varphi}(R)$ en $\mathbb{N}$ definida como:

$$\mathrm{Rl}^{\varphi}(R) = \{\, x \in \mathbb{N}^n \mid (x_{\varphi(i)} \mid i \in m) \in R \,\}.$$

Además, si φ es inyectiva (resp., sobreyectiva, biyectiva) a los operadores relacionales del tipo Rl^{φ} los denominamos *operadores de expansión* o de *adjunción de variables ficticias* (resp., de *contracción* o de *identificación de variables*, de *permutación de las variables*).

Proposición 4.31. *Sean* m, n *y* $t \in \mathbb{N}$ *tales que* $t > m, n$, $\alpha\colon m \rightarrowtail t$, $\beta\colon n \rightarrowtail t$, P *una relación* m*-aria en* $\mathbb{N}$, Q *una relación* n*-aria en* $\mathbb{N}$ *y* $\mathcal{F}$ *una subálgebra heterogénea finitamente generada de* $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\cdot},\mathbb{N})$. *Si* P *y* Q *son* $\mathcal{F}$*-recursivas primitivas, entonces la* conjunción generalizada *de* P *y* Q *relativa a* (α,β,t), *a la que denotamos por* $\mathrm{Cj}^{m,n}_{\alpha,\beta,t}(P,Q)$ *y que es la relación* t*-aria* $\mathrm{Rl}^{\alpha}(P) \cap \mathrm{Rl}^{\beta}(Q)$ *en* $\mathbb{N}$ *es* $\mathcal{F}$*-recursiva primitiva.*

Demostración. □

Corolario 4.32. *Sean m, n y $t \in \mathbb{N}$ tales que $t > m, n$, $\alpha\colon m \rightarrowtail t$, $\beta\colon n \rightarrowtail t$, P una relación m-aria en $\mathbb{N}$, Q una relación n-aria en $\mathbb{N}$. Si P y Q son recursivas primitivas, entonces la relación t-aria $\mathrm{Cj}^{m,n}_{\alpha,\beta,t}(P,Q)$ en $\mathbb{N}$ es recursiva primitiva.*

Proposición 4.33. *Sea $n \in \mathbb{N}$, P y Q dos relaciones n-arias en $\mathbb{N}$ y $\mathcal{F}$ una subálgebra heterogénea finitamente generada de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$. Si P y Q son $\mathcal{F}$-recursivas primitivas, entonces la* disyunción *de P y Q, a la que denotamos por $\mathrm{Dj}^n(P,Q)$ y que es la relación n-aria $P \cup Q$ en $\mathbb{N}$ es $\mathcal{F}$-recursiva primitiva.*

Demostración. □

Corolario 4.34. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y P y Q dos relaciones n-arias en $\mathbb{N}$. Si P y Q son recursivas primitivas, entonces la relación n-aria $\mathrm{Dj}^n(P,Q)$ en $\mathbb{N}$ es recursiva primitiva.*

Proposición 4.35. *Sean m, n y $t \in \mathbb{N}$ tales que $t > m, n$, $\alpha\colon m \rightarrowtail t$, $\beta\colon n \rightarrowtail t$, P una relación m-aria en $\mathbb{N}$, Q una relación n-aria en $\mathbb{N}$ y $\mathcal{F}$ una subálgebra heterogénea finitamente generada de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$. Si P y Q son $\mathcal{F}$-recursivas primitivas, entonces la* disyunción generalizada *de P y Q relativa a (α, β, t), a la que denotamos por $\mathrm{Dj}^{m,n}_{\alpha,\beta,t}(P,Q)$ y que es la relación t-aria $\mathrm{Rl}^{\alpha}(P) \cup \mathrm{Rl}^{\beta}(Q)$ en $\mathbb{N}$ es $\mathcal{F}$-recursiva primitiva.*

Demostración. □

Corolario 4.36. *Sean m, n y $t \in \mathbb{N}$ tales que $t > m, n$, $\alpha\colon m \rightarrowtail t$, $\beta\colon n \rightarrowtail t$, P una relación m-aria en $\mathbb{N}$, Q una relación n-aria en $\mathbb{N}$. Si P y Q son recursivas primitivas, entonces la relación t-aria $\mathrm{Dj}^{m,n}_{\alpha,\beta,t}(P,Q)$ en $\mathbb{N}$ es recursiva primitiva.*

Proposición 4.37. *Sea $\mathcal{F}$ una subálgebra heterogénea finitamente generada de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces el conjunto de las relaciones n-arias en $\mathbb{N}$ $\mathcal{F}$-recursivas primitivas es una subálgebra Booleana del álgebra Booleana $\mathbf{Sub}(\mathbb{N}^n)$. Además, $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}^n)$ está incluido en tal subálgebra Booleana.*

Demostración. □

Corolario 4.38. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces el conjunto de las relaciones n-arias en $\mathbb{N}$ recursivas primitivas es una subálgebra Booleana del álgebra Booleana $\mathbf{Sub}(\mathbb{N}^n)$. Además, $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}^n)$ está incluido en tal subálgebra Booleana.*

Definición 4.39. Sean m, $n \in \mathbb{N}$ y $\varphi\colon m \longrightarrow n$. Entonces denotamos por pr_{φ} la única aplicación de $\mathbb{N}^n$ en $\mathbb{N}^m$ tal que, para cada $i \in m$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N}^n \arrow[d, "\mathrm{pr}_{\varphi}"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{n,\varphi(i)}"] & \\
\mathbb{N}^m \arrow[r, "\mathrm{pr}_{m,i}"'] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

conmuta. De modo que pr_{φ} asigna a cada $x \in \mathbb{N}^n$, la m-tupla $(x_{\varphi(i)})_{i \in m}$.

Proposición 4.40. *Sean q, $r \in \mathbb{N}$ y φ una aplicación estrictamente creciente de q en $r + q$. Entonces hay una única aplicación estrictamente creciente φ^{c}, la* complementaria *de φ, de r en $r + q$ tal que:*

1. $\mathrm{Im}(\varphi) \cap \mathrm{Im}(\varphi^{\mathrm{c}}) = \varnothing$.
2. $\mathrm{Im}(\varphi) \cup \mathrm{Im}(\varphi^{\mathrm{c}}) = r + q$.

Demostración. □

Definición 4.41. Sean q, $r \in \mathbb{N}$, φ una aplicación estrictamente creciente de q en $r+q$ y L una relación r-aria en $\mathbb{N}$. Entonces el *cilindro en* $\mathbb{N}^{r+q}$ *elevado sobre* L *a lo largo de los ejes* φ, al que denotamos por $\mathrm{Cyl}_{\varphi}(L)$, es la imagen inversa de L bajo $\mathrm{pr}_{\varphi^{c}}$. De modo que:

$$\mathrm{Cyl}_{\varphi}(L) = \{\, x \in \mathbb{N}^{r+q} \mid (x_{\varphi^{c}(j)} \mid j \in r) \in L \,\}$$

Proposición 4.42. *Sean q, $r \in \mathbb{N}$, φ una aplicación estrictamente creciente de q en $r+q$, L una relación r-aria en $\mathbb{N}$ y $\mathcal{F}$ una subálgebra heterogénea finitamente generada de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$. Si L es $\mathcal{F}$-recursiva primitiva, entonces la relación $r+q$-aria $\mathrm{Cyl}_{\varphi}(L)$ en $\mathbb{N}$ (el cilindro en $\mathbb{N}^{r+q}$ elevado sobre L a lo largo de los ejes φ), es $\mathcal{F}$-recursiva primitiva.*

Demostración. $\square$

Corolario 4.43. *Sean q, $r \in \mathbb{N}$, φ una aplicación estrictamente creciente de q en $r+q$ y L una relación r-aria en $\mathbb{N}$. Si L es recursiva primitiva, entonces la relación $r+q$-aria $\mathrm{Cyl}_{\varphi}(L)$ en $\mathbb{N}$ (el cilindro en $\mathbb{N}^{r+q}$ elevado sobre L a lo largo de los ejes φ), es recursiva primitiva.*

Proposición 4.44. *Sean m, $n \in \mathbb{N}$, L una relación m-aria en $\mathbb{N}$, M una relación n-aria en $\mathbb{N}$ y $\mathcal{F}$ una subálgebra heterogénea finitamente generada de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$. Si L y M son $\mathcal{F}$-recursivas primitivas, entonces la concatenación de L y M, $L \curlywedge M$, que es una relación $m+n$-aria en $\mathbb{N}$, es $\mathcal{F}$-recursiva primitiva.*

Demostración. $\square$

Corolario 4.45. *Sean m, $n \in \mathbb{N}$, L una relación m-aria en $\mathbb{N}$ y M una relación n-aria en $\mathbb{N}$. Si L y M son recursivas primitivas, entonces la concatenación de L y M, $L \curlywedge M$, que es una relación $m+n$-aria en $\mathbb{N}$, es recursiva primitiva.*

En lo que sigue convenimos en denotar por Γ_f la función subyacente de una aplicación numérica $f\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$, de modo que

$$\Gamma_f = \{\, (x, f(x)) \mid x \in \mathbb{N}^n \,\} = \mathrm{Im}(\langle \mathrm{id}_{\mathbb{N}^n}, f \rangle).$$

Proposición 4.46. *Sea $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n \mid n \in \mathbb{N})$ una subálgebra heterogénea finitamente generada de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$ y $f\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$. Si f es $\mathcal{F}$-recursiva primitiva, entonces Γ_f, la función subyacente de f, que es un subconjunto de $\mathbb{N}^{n+1}$, es $\mathcal{F}$-recursiva primitiva.*

Demostración. $\square$

Corolario 4.47. *Sea $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{N}^n, \mathbb{N})$. Si f es recursiva primitiva, entonces Γ_f, la función subyacente de f, es recursiva primitiva.*

Hay aplicaciones numéricas cuya función subyacente es una relación recursiva primitiva, pero que no son recursivas primitivas.

Proposición 4.48. *Sea $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} - 1$, $(f_i)_{i \in n}$ una familia de aplicaciones en la que, para cada $i \in n$, $f_i\colon \mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{N}$ y $\mathcal{F}$ una subálgebra heterogénea finitamente generada de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$. Si, para cada $i \in n$, f_i es $\mathcal{F}$-recursiva primitiva, entonces $\Gamma_{\langle f_i \rangle_{i \in n}}$ es $\mathcal{F}$-recursiva primitiva.*

Demostración. $\square$

Corolario 4.49. *Sea $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} - 1$ y $(f_i)_{i \in n}$ una familia de aplicaciones en la que, para cada $i \in n$, $f_i\colon \mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{N}$. Si, para cada $i \in n$, f_i es recursiva primitiva, entonces $\Gamma_{\langle f_i \rangle_{i \in n}}$ es recursiva primitiva.*

Proposición 4.50. *Sea* $f\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{N}$ *y* $\mathcal{F}$ *una subálgebra heterogénea finitamente generada de* $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\cdot}, \mathbb{N})$. *Si* f *es* $\mathcal{F}$*-recursiva primitiva, entonces* $f^{-1}[\{a\}]$, *la fibra de* f *en* a, *es* $\mathcal{F}$*-recursiva primitiva.*

Demostración. □

Corolario 4.51. *Sea* $f\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{N}$. *Si* f *es recursiva primitiva, entonces* $f^{-1}[\{a\}]$, *la fibra de* f *en* a, *es recursiva primitiva.*

Proposición 4.52. *Sea* $L \subseteq \mathbb{N}^n$ *y* $\mathcal{F}$ *una subálgebra heterogénea finitamente generada de* $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\cdot}, \mathbb{N})$. *Entonces una condición necesaria y suficiente para que* L *sea* $\mathcal{F}$*-recursiva primitiva es que exista una aplicación* $f\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ *tal que* f *sea* $\mathcal{F}$*-recursiva primitiva y* L *sea la fibra de* f *en un* $a \in \mathbb{N}$.

Demostración. □

Corolario 4.53. *Sea* $L \subseteq \mathbb{N}^n$. *Entonces una condición necesaria y suficiente para que* L *sea recursiva primitiva es que exista una aplicación* $f\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ *tal que* f *sea sea recursiva primitiva y* L *sea la fibra de* f *en un* $a \in \mathbb{N}$.

Proposición 4.54. *Sean* m, $n \in \mathbb{N}$, $(f_i \mid i \in m)$ *una familia de aplicaciones en la que, para cada* $i \in m$, $f_i\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ *y* $(R_i \mid i \in m)$ *una familia de relaciones* n*-arias tal que, para cada* i, $j \in m$, *si* $i \neq j$, *entonces* $R_i \cap R_j = \varnothing$ *y* $\bigcup_{i\in m} R_i = \mathbb{N}^n$. *Entonces hay una única aplicación* n*-aria* $\Omega^{m,n}_{\mathrm{DC}}((f_i \mid i \in m), (R_i \mid i \in m))$, definida por casos *a partir de* $(f_i \mid i \in m)$ *y* $(R_i \mid i \in m)$, *tal que, para cada* $x \in \mathbb{N}^n$,

$$\Omega^{m,n}_{\mathrm{DC}}((f_i)_{i\in m}, (R_i)_{i\in m})(x) = f_i(x),$$

siendo i *el único miembro de* m *tal que* $x \in R_i$.

Demostración. □

Proposición 4.55. *Sean* m, $n \in \mathbb{N}$, $(f_i)_{i\in m}$ *una familia de aplicaciones en la que, para cada* $i \in m$, $f_i\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$, $(R_i)_{i\in m}$ *una familia de relaciones* n*-arias tal que, para cada* i, $j \in m$, *si* $i \neq j$, *entonces* $R_i \cap R_j = \varnothing$ *y* $\bigcup_{i\in m} R_i = \mathbb{N}^n$ *y* $\mathcal{F}$ *una subálgebra heterogénea finitamente generada de* $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\cdot}, \mathbb{N})$. *Si, para cada* $i \in m$, f_i *es* $\mathcal{F}$*-recursiva primitiva y* R_i *es* $\mathcal{F}$*-recursiva primitiva, entonces* $\Omega^{m,n}_{\mathrm{DC}}((f_i)_{i\in m}, (R_i)_{i\in m}) \in \mathcal{F}_n$.

Demostración. Porque $\Omega^{m,n}_{\mathrm{DC}}((f_i)_{i\in m}, (R_i)_{i\in m}) = f_0 \cdot \mathrm{ch}_{R_0} + \ldots + f_{m-1} \cdot \mathrm{ch}_{R_{m-1}}$. □

Corolario 4.56. *Sean* m, $n \in \mathbb{N}$, $(f_i)_{i\in m}$ *una familia de aplicaciones en la que, para cada* $i \in m$, $f_i\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ *y* $(R_i)_{i\in m}$ *una familia de relaciones* n*-arias tal que, para cada* i, $j \in m$, *si* $i \neq j$, *entonces* $R_i \cap R_j = \varnothing$ *y* $\bigcup_{i\in m} R_i = \mathbb{N}^n$. *Si, para cada* $i \in m$, f_i *es recursiva primitiva y* R_i *es recursiva primitiva, entonces* $\Omega^{m,n}_{\mathrm{DC}}((f_i)_{i\in m}, (R_i)_{i\in m})$ *es recursiva primitiva.*

La recursividad primitiva de las relaciones no se conserva, en general, bajo la formación de imágenes directas.

Definición 4.57. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f\colon \mathbb{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{N}$, entonces:

1. $\sum^{n+1}_{<}(f)$ denota la aplicación de $\mathbb{N}^{n+1}$ en $\mathbb{N}$ definida como:

$$\textstyle\sum^{n+1}_{<}(f) \begin{cases} \mathbb{N}^{n+1} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ (x, y) & \longmapsto \sum(f(x, z) \mid z < y). \end{cases}$$

2. $\sum^{n+1}_{\leq}(f)$ denota la aplicación de $\mathbb{N}^{n+1}$ en $\mathbb{N}$ definida como:

$$\textstyle\sum^{n+1}_{\leq}(f) \begin{cases} \mathbb{N}^{n+1} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ (x, y) & \longmapsto \sum(f(x, z) \mid z \leq y). \end{cases}$$

3. $\prod_{<}^{n+1}(f)$ denota la aplicación de $\mathbb{N}^{n+1}$ en $\mathbb{N}$ definida como:

$$\prod\nolimits_{<}^{n+1}(f)\begin{cases} \mathbb{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{N} \\ (x,y) \longmapsto \prod(f(x,z) \mid z < y). \end{cases}$$

4. $\prod_{\leq}^{n+1}(f)$ denota la aplicación de $\mathbb{N}^{n+1}$ en $\mathbb{N}$ definida como:

$$\prod\nolimits_{\leq}^{n+1}(f)\begin{cases} \mathbb{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{N} \\ (x,y) \longmapsto \prod(f(x,z) \mid z \leq y). \end{cases}$$

Proposición 4.58. *Sean $n \in \mathbb{N}$, $f\colon \mathbb{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{N}$, y $\mathcal{F}$ una subálgebra heterogénea finitamente generada de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$. Si f es $\mathcal{F}$-recursiva primitiva, entonces $\sum_{<}^{n+1}(f)$, $\sum_{\leq}^{n+1}(f)$, $\prod_{<}^{n+1}(f)$ y $\prod_{\leq}^{n+1}(f)$ son $\mathcal{F}$-recursivas primitivas.*

Demostración. □

Corolario 4.59. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $f\colon \mathbb{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{N}$. Si f es recursiva primitiva, entonces $\sum_{<}^{n+1}(f)$, $\sum_{\leq}^{n+1}(f)$, $\prod_{<}^{n+1}(f)$ y $\prod_{\leq}^{n+1}(f)$ son recursivas primitivas.*

Definición 4.60. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces:

1. $\exists_{<}^{n+1}$, el *operador de cuantificación existencial limitado estricto*, es la endoaplicación de $\mathrm{Sub}(\mathbb{N}^{n+1})$ que a una relación $n+1$-aria R en $\mathbb{N}$ le asigna la relación $n+1$-aria
$$\exists_{<}^{n+1}(R) = \{\, (x,y) \in \mathbb{N}^{n+1} \mid \exists z < y\, ((x,z) \in R) \,\}.$$
2. $\exists_{\leq}^{n+1}$, el *operador de cuantificación existencial limitado amplio*, es la endoaplicación de $\mathrm{Sub}(\mathbb{N}^{n+1})$ que a una relación $n+1$-aria R en $\mathbb{N}$ le asigna la relación $n+1$-aria
$$\exists_{\leq}^{n+1}(R) = \{\, (x,y) \in \mathbb{N}^{n+1} \mid \exists z \leq y\, ((x,z) \in R) \,\}.$$
3. $\forall_{<}^{n+1}$, el *operador de cuantificación universal limitado estricto*, es la endoaplicación de $\mathrm{Sub}(\mathbb{N}^{n+1})$ que a una relación $n+1$-aria R en $\mathbb{N}$ le asigna la relación $n+1$-aria
$$\forall_{<}^{n+1}(R) = \{\, (x,y) \in \mathbb{N}^{n+1} \mid \forall z < y\, ((x,z) \in R) \,\}.$$
4. $\forall_{\leq}^{n+1}$, el *operador de cuantificación universal limitado amplio*, es la endoaplicación de $\mathrm{Sub}(\mathbb{N}^{n+1})$ que a una relación $n+1$-aria R en $\mathbb{N}$ le asigna la relación $n+1$-aria
$$\forall_{\leq}^{n+1}(R) = \{\, (x,y) \in \mathbb{N}^{n+1} \mid \forall z \leq y\, ((x,z) \in R) \,\}.$$

Proposición 4.61. *Sean $n \in \mathbb{N}$, $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$, y $\mathcal{F}$ una subálgebra heterogénea finitamente generada de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$. Si R es $\mathcal{F}$-recursiva primitiva, entonces $\exists_{<}^{n+1}(R)$, $\exists_{\leq}^{n+1}(R)$, $\forall_{<}^{n+1}(R)$ y $\forall_{\leq}^{n+1}(R)$ son $\mathcal{F}$-recursivas primitivas.*

Demostración. □

Corolario 4.62. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$. Si R es recursiva primitiva, entonces $\exists_{<}^{n+1}(R)$, $\exists_{\leq}^{n+1}(R)$, $\forall_{<}^{n+1}(R)$ y $\forall_{\leq}^{n+1}(R)$ son recursivas primitivas.*

Definición 4.63. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces:

1. $\mu_{<}^{n+1}$, el *operador de minimización limitado estricto*, es la aplicación de $\mathrm{Sub}(\mathbb{N}^{n+1})$ en $\mathrm{Hom}(\mathbb{N}^{n+1}, \mathbb{N})$ que a una relación $n+1$-aria R en $\mathbb{N}$ le asigna la aplicación
$$\mu_{<}^{n+1}(R)\begin{cases} \mathbb{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{N} \\ (x,y) \longmapsto \begin{cases} \min\{\, z < y \mid (x,z) \in R \,\}, & \text{si } \exists z < y\, ((x,z) \in R); \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \end{cases}$$

2. $\mu_{\leq}^{n+1}$, el *operador de minimización limitado amplio*, es la aplicación de $\mathrm{Sub}(\mathbb{N}^{n+1})$ en $\mathrm{Hom}(\mathbb{N}^{n+1}, \mathbb{N})$ que a una relación $n+1$-aria R en $\mathbb{N}$ le asigna la aplicación

$$\mu_{\leq}^{n+1}(R)\begin{cases} \mathbb{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{N} \\ (x,y) \longmapsto \begin{cases} \min\{\, z \leq y \mid (x,z) \in R\,\}, & \text{si } \exists z \leq y\,((x,z) \in R); \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \end{cases}$$

Proposición 4.64. *Sean $n \in \mathbb{N}$, $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$, y $\mathcal{F}$ una subálgebra heterogénea finitamente generada de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$. Si R es $\mathcal{F}$-recursiva primitiva, entonces $\mu_{<}^{n+1}(R)$ y $\mu_{\leq}^{n+1}(R)$ son $\mathcal{F}$-recursivas primitivas.*

Demostración. □

Corolario 4.65. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$. Si R es recursiva primitiva, entonces $\mu_{<}^{n+1}(R)$ y $\mu_{\leq}^{n+1}(R)$ son recursivas primitivas.*

Proposición 4.66. *Sean $n \in \mathbb{N}$, $f\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$, y $\mathcal{F}$ una subálgebra heterogénea finitamente generada de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$. Si Γ_f es $\mathcal{F}$-recursiva primitiva y hay una aplicación $\mathcal{F}$-recursiva primitiva $g\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que, para cada $x \in \mathbb{N}^n$, $f(x) \leq g(x)$, entonces f es $\mathcal{F}$-recursiva primitiva.*

Demostración. □

Corolario 4.67. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $f\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$. Si Γ_f es recursiva primitiva y hay una aplicación recursiva primitiva $g\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que, para cada $x \in \mathbb{N}^n$, $f(x) \leq g(x)$, entonces f es recursiva primitiva.*

Definición 4.68. Sea $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ y $L \subseteq \mathbb{N}$. Decimos de f que es una *enumeración* de L si $\mathrm{Im}(f) = L$.

Definición 4.69 (Kouznetsov)**.** Sea $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ y L un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Decimos que f es una *enumeración directa* de L si $\mathrm{Im}(f) = L$ y, además, f es *extensiva*, i.e., para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \leq f(n)$.

Proposición 4.70. *Sea L un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una enumeración directa de L y $\mathcal{F}$ una subálgebra heterogénea finitamente generada de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$. Si f es $\mathcal{F}$-recursiva primitiva, entonces L es $\mathcal{F}$-recursiva primitiva.*

Demostración. □

Corolario 4.71. *Sea L un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ y $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una enumeración directa de L. Si f es recursiva primitiva, entonces L es recursiva primitiva.*

Definición 4.72. Sean $n \in \mathbb{N} - 1$, $L \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ y $(x,y) \in \mathbb{N}^{n+1}$. Decimos que (x,y) es un *punto inferior* de L (a lo largo del último eje) si $(x,y) \in L$ y, para cada $z \in \mathbb{N}$, si $z < y$, entonces $(x,z) \notin L$. Al conjunto de los puntos inferiores de L lo denotamos por $\mathrm{Inf}^{n+1}(L)$.

Proposición 4.73. *Sean $n \in \mathbb{N} - 1$, $L \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ y $\mathcal{F}$ una subálgebra heterogénea finitamente generada de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$. Si L es $\mathcal{F}$-recursiva primitiva, entonces $\mathrm{Inf}^{n+1}(L)$ es $\mathcal{F}$-recursiva primitiva.*

Demostración. □

Corolario 4.74. *Sean $n \in \mathbb{N} - 1$ y $L \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$. Si L es recursiva primitiva, entonces $\mathrm{Inf}^{n+1}(L)$ es recursiva primitiva.*

El conjunto de los números naturales se puede representar como la unión de una infinidad numerable de conjuntos infinito numerables y dos a dos disjuntos, e.g., para la familia $(X_n \mid n \in \mathbb{N})$ de subconjuntos de $\mathbb{N}$ definida como:

$$X_n = \begin{cases} \{0\} \cup \{\, 2k+1 \mid k \in \mathbb{N} \,\}, & \text{si } n = 0; \\ \{\, 2^n m \mid m \in X_0 - \{0\} \,\}, & \text{si } n \geq 1, \end{cases}$$

se cumple que $\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$, que los conjuntos X_n son dos a dos disjuntos y que cada uno de ellos es infinito numerable.

Se cumple que $X_0 \cap X_n = \varnothing$, si $n \geq 1$, porque $0 \notin X_n$ y porque los elementos de X_n son todos pares, ya que empiezan por 2^n, siendo $n \geq 1$. Además, $X_m \cap X_n = \varnothing$, si $m, n \geq 1$ y $m \neq n$, porque, suponiendo que $m < n$, entonces hay un $p \geq 1$ tal que $m + p = n$. Por lo tanto, si $a \in X_m \cap X_n$, $a = 2^m \cdot x$ y $a = 2^n \cdot y$, con x e y impares, luego $2^m \cdot x = 2^m \cdot 2^n \cdot y$, de donde $x = 2^p \cdot y$, pero x es impar y $2^p \cdot y$ es par, que es una contradicción.

Definición 4.75. Sea f es una endoaplicación de $\mathbb{N}$. Decimos que f es una aplicación de *gran amplitud* si para cada $n \in \mathbb{N}$, hay un $M \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{card}(M) = \aleph_0$ y para cada $m \in M$, $f(m) = n$.

Puesto que $\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$, siendo los conjuntos X_n infinito numerables y dos a dos disjuntos, la endoaplicación f de $\mathbb{N}$ que a un $x \in \mathbb{N}$ le asigna el único $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in X_n$, es una aplicación de gran amplitud.

Proposición 4.76. *Sea f es una endoaplicación de $\mathbb{N}$. Entonces son equivalentes:*

1. *f es una aplicación de gran amplitud.*
2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{card}(f^{-1}[\{n\}]) = \aleph_0$.*
3. *Hay una relación de equivalencia Φ sobre $\mathbb{N}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{card}([n]_\Phi) = \aleph_0$.*

Demostración. □

Proposición 4.77. *Sean $f, g\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dos aplicaciones tales que $\langle f, g\rangle : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^2$ sea sobreyectiva. Entonces f y g son aplicaciones de gran amplitud, i.e., son sobreyectivas y con todas las fibras infinitas.*

Demostración. Recordemos que $\langle f, g\rangle$ es la única aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}^2$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{N} \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\langle f, g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\ \mathbb{N} & \mathbb{N}^2 \arrow[l, "\mathrm{pr}_{2,0}"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_{2,1}"'] & \mathbb{N} \end{tikzcd}$$

conmuta. Puesto que $\mathrm{pr}_{2,0}$ y $\mathrm{pr}_{2,1}$ son sobreyectivas, f y g también lo son.

Nos limitamos a demostrar que f tiene todas las fibras infinitas, debido a que el argumento para demostrar lo mismo de g, es idéntico. Supongamos que no sea ese el caso, i.e., que exista un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-1}[n] = \{\, x_{n,0}, \ldots, x_{n,p-1} \,\}$, con $p > 0$. Entonces, para cada $i \in p$, $\langle f, g\rangle (x_{n,i}) = (n, g(x_{n,i}))$. Veamos que hay un $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\langle f, g\rangle (k) \neq (x, y)$. En efecto, sea y un número natural distinto de $g(x_{n,\alpha})$, para cada $i \in p$, entonces para $(x, y) = (n, y)$, tenemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\langle f, g\rangle (k) \neq (n, y)$, porque si, para algún $k \in \mathbb{N}$, tuviéramos que $\langle f, g\rangle (k) = (n, y)$, entonces, por ser $\langle f, g\rangle (k) = (f(k), g(k))$, tendríamos que $f(k) = n$ y $g(k) = y$, luego, de $f(k) = n$, que k debería ser igual a uno de entre los elementos de $f^{-1}[n]$, por ejemplo a $x_{n,i}$, y entonces que $g(x_{n,i}) = y$, pero eso es imposible, ya que, para cada $i \in p$, $g(x_{n,i}) \neq y$. □

Corolario 4.78. *Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq 2$ y $(f_i)_{i \in m}$ una familia de aplicaciones tal que, para cada $i \in m$, f_i sea una endoaplicación de $\mathbb{N}$. Si $\langle f_i \rangle_{i \in m} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^m$ es sobreyectiva, entonces, para cada $i \in m$, f_i es una aplicación de gran amplitud.*

Demostración. □

Teorema 4.79 (Kouznetsov)**.** *Si f es una endoaplicación de $\mathbb{N}$ de gran amplitud, entonces existe una endoaplicación g de $\mathbb{N}$ tal que $\langle f, g \rangle$ es un isomorfismo de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}^2$. Además, en virtud de la proposición anterior, g es una aplicación de gran amplitud.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, arbitrario pero fijo. Puesto que f es una endoaplicación de gran amplitud, la fibra de f en n, que es un conjunto infinito numerable, se puede representar, supuesta elejida una biyección de $\mathbb{N}$ en tal fibra, como $f^{-1}[n] = \{ x_{n,i} \mid i \in \mathbb{N} \}$. Sea entonces g_n la aplicación de $f^{-1}[n]$ en $\mathbb{N}$ definida como $g(x_{n,i}) = i$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Puesto que $\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}[n]$, o gráficamente:

$$\mathbb{N} = \begin{pmatrix} x_{0,0}, & x_{0,1}, & x_{0,2}, & \dots, & x_{0,i}, \dots \\ x_{1,0}, & x_{1,1}, & x_{1,2}, & \dots, & x_{1,i}, \dots \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \dots \\ x_{n,0}, & x_{n,1}, & x_{n,2}, & \dots, & x_{n,i}, \dots \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \dots \end{pmatrix}$$

y dos filas distintas son disjuntas, definimos la endoaplicación g de $\mathbb{N}$ como la única para la que cada uno de los diagramas:

$$\begin{tikzcd} f^{-1}[n] \arrow[r, "\mathrm{in}_n"] \arrow[dr, "g_n"'] & \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}[n] \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{N} \end{tikzcd}$$

conmuta. Es evidente que entonces $\langle f, g \rangle$ es biyectiva. □

Proposición 4.80. *Si f es una endoaplicación de $\mathbb{N}$ recursiva primitiva y de gran amplitud, entonces hay una endoaplicación g de $\mathbb{N}$ recursiva primitiva tal que $\langle f, g \rangle$ es una biyección de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}^2$.*

Demostración. □

Proposición 4.81. *Sea $m \geq 1$. Entonces hay situaciones de Cantor para m que son recursivas primitivas, i.e., hay un par ordenado $(\gamma^m, (\gamma^m_j)_{j \in m})$ en el que γ^m es una aplicación recursiva primitiva de $\mathbb{N}^m$ en $\mathbb{N}$ y, para cada $j \in m$, γ^m_j una endoaplicación recursiva primitiva de $\mathbb{N}$ tal que:*

1. $\gamma^m \circ \langle \gamma^m_j \rangle_{j \in m} = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
2. $\langle \gamma^m_j \rangle_{j \in m} \circ \gamma^m = \mathrm{id}_{\mathbb{N}^m}$.

Además, hay situaciones de Cantor para m recursivas primitivas $(\gamma^m, (\gamma^m_j)_{j \in m})$ tales que:

1. *Para cada $j \in m$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $\gamma^m_j(n) \leq n$.*
2. *Hay una aplicación recursiva primitiva $\pi \colon \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que, para cada $x \in \mathbb{N}$ y cada $y \in \mathbb{N}$, si, para cada $j \in m$, $x_j \leq y$, entonces $\gamma^m(x) \leq \pi(y, m)$.*

Demostración. □

Proposición 4.82. *Sea $m \geq 1$. Si tanto $(\gamma^m, (\gamma^m_j)_{j \in m})$ como $(\overline{\gamma}^m, (\overline{\gamma}^m_j)_{j \in m})$ son situaciones de Cantor para m recursivas primitivas, entonces hay una endoaplicación recursiva primitiva η de $\mathbb{N}$ tal que $\eta \circ \gamma^m = \overline{\gamma}^m$.*

Demostración. □

Proposición 4.83. *Hay una biyección (natural) entre el conjunto de las aplicaciones ξ de $\mathbb{N}-1$ en $\mathbb{N}^{\star}-\{\lambda\}$ y el conjunto de los pares ordenados (ξ_0,ξ_1) en los que ξ_0 es una endoaplicación parcial de $\mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Dom}(\xi_0)=\mathbb{N}-1$ y, para cada $t\in\mathrm{Dom}(\xi_0)$, $\xi_0(t)\geq 1$ y ξ_1 una aplicación parcial de $\mathbb{N}^2$ en $\mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Dom}(\xi_1)=\bigcup_{t\in\mathbb{N}-1}\{t\}\times\xi_0(t)$. Por consiguiente hay una biyección (natural) entre el conjunto de las aplicaciones ξ de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}^{\star}$ tales que $\xi(0)=\lambda$ y el mismo conjunto de pares ordenados de aplicaciones parciales.*

Demostración. □

Definición 4.84. Sea ξ una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}^{\star}$ tal que $\xi(0)=\lambda$. Decimos que ξ es una *representación recursiva primitiva de* $\mathbb{N}$ *en* $\mathbb{N}^{\star}$ si el par ordenado (ξ_0,ξ_1), que le corresponde, en virtud de la biyección (natural) anterior, es tal que hay un par ordenado $(\overline{\xi}_0,\overline{\xi}_1)$ de aplicaciones recursivas primitivas, con $\overline{\xi}_0\colon\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ y $\overline{\xi}_1\colon\mathbb{N}^2\longrightarrow\mathbb{N}$, para el que se cumple que:

1. Para cada $t\in\mathbb{N}$, $\overline{\xi}_0(t)=\xi_0(t)$.
2. Para cada $t\in\mathbb{N}-1$ y cada $j\in\xi_0(t)$, $\overline{\xi}_1(t,j)=\xi_1(t,j)$

Proposición 4.85. *Hay una biyección (natural) entre el conjunto de las biyecciones η de $\mathbb{N}^{\star}$ en $\mathbb{N}$ tales que $\eta(\lambda)=0$ y el conjunto de los pares ordenados (η_0,η_1) en los que η_0 es una endoaplicación inyectiva de $\mathbb{N}$ tal que, para cada $x\in\mathbb{N}$, $\eta_0(x)\neq 0$ y η_1 una aplicación sobreyectiva de $\mathbb{N}^2$ en $\mathbb{N}$ tal que, para cada $x,y\in\mathbb{N}$, $\eta_1(x,y)=0$ si y sólo si $x=0$ e $y=0$.*

Demostración. □

Definición 4.86. Sea η una aplicación de $\mathbb{N}^{\star}$ en $\mathbb{N}$ tal que $\eta(\lambda)=0$. Decimos que η es una *representación recursiva primitiva de* $\mathbb{N}^{\star}$ *en* $\mathbb{N}$ si el par ordenado (η_0,η_1), que le corresponde, en virtud de la biyección (natural) anterior, es tal que η_0 y η_1 son aplicaciones recursivas primitivas.

Definición 4.87. Sea ξ una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}^{\star}$ y η una aplicación de $\mathbb{N}^{\star}$ en $\mathbb{N}$. Decimos que (ξ,η) es una *representación isomorfa recursiva primitiva entre* $\mathbb{N}$ *y* $\mathbb{N}^{\star}$ si $\eta\circ\xi=\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, $\xi\circ\eta=\mathrm{id}_{\mathbb{N}^{\star}}$, ξ es una representación recursiva primitiva de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}^{\star}$ y η una representación recursiva primitiva de $\mathbb{N}^{\star}$ en $\mathbb{N}$.

Proposición 4.88. *Hay una representación isomorfa recursiva primitiva entre* $\mathbb{N}$ *y* $\mathbb{N}^{\star}$.

Demostración. □

4.4. Relaciones recursivamente enumerables.

En esta sección definimos las relaciones recursivamente enumerables como las proyecciones de las relaciones recursivas primitivas y demostramos la independencia de tal concepto respecto de la dimensión del espacio en el que se encuentre la relación recursiva primitiva. Además, caracterizamos las relaciones recursivamente enumerables mediante la acción del operador relacional de cuantificación existencial ilimitada sobre las relaciones recursivas primitivas y las relaciones recursivamente enumerables no vacías mediante las imágenes directas de la aplicación determinada por una familia de aplicaciones recursivas primitivas. Por otra parte, demostramos que el sistema de las relaciones recursivamente enumerables está cerrado bajo el operador mixto de composición (generalizada), cilindrificaciones, concatenación, los operadores relacionales de cuantificación existencial ilimitada, cuantificación existencial y universal limitada y que, para cada $n\in\mathbb{N}$, el conjunto de las relaciones n-arias en $\mathbb{N}$ recursivamente enumerables constituyen un anillo de subconjuntos del anillo $\mathbf{Sub}(\mathbb{N}^n)$. También demostramos que las relaciones recursivamente enumerables se conservan bajo la formación de imágenes directas e inversas mediante la aplicación determinada por una familia de aplicaciones recursivas primitivas, así como que la proyección de una relación recursivamente enumerable es recursivamente enumerable.

Definición 4.89. Sea $m \in \mathbb{N}$ y $R \subseteq \mathbb{N}^m$, i.e., una relación m-aria en $\mathbb{N}$. Decimos que R es una relación *recursivamente enumerable* si hay un $n \in \mathbb{N}$, una relación recursiva primitiva $m+n$-aria S en $\mathbb{N}$ y una aplicación estrictamente creciente $\varphi\colon m \rightarrowtail m+n$ tal que $\mathrm{pr}_\varphi[S] = R$. Al conjunto de las relaciones recursivamente enumerables lo denotamos por RRE.

Proposición 4.90. *Para cada $n \in \mathbb{N} - 1$, el conjunto de las relaciones n-arias en $\mathbb{N}$ recursivamente enumerables es infinito numerable. Por consiguiente, el conjunto* RRE *es infinito numerable. De donde se deduce que la mayoría de las relaciones en $\mathbb{N}$ no son recursivamente enumerables.*

Demostración. □

Proposición 4.91. *Toda relación en $\mathbb{N}$ que sea recursiva primitiva es recursivamente enumerable.*

Demostración. □

La recíproca, como demostraremos en una sección posterior, no es cierta.

Proposición 4.92. *Sea $m \in \mathbb{N}$, R una relación m-aria en $\mathbb{N}$ recursivamente enumerable, $n \in \mathbb{N} - 1$ y $\varphi\colon m \rightarrowtail m+n$ una aplicación estrictamente creciente. Entonces hay una relación recursiva primitiva $m+n$-aria S en $\mathbb{N}$ tal que $\mathrm{pr}_\varphi[S] = R$.*

Demostración. □

Proposición 4.93. *Sean $m, n \in \mathbb{N}$, R una relación m-aria en $\mathbb{N}$ recursivamente enumerable y $\varphi\colon m \rightarrowtail n$ una aplicación estrictamente creciente. Entonces $\mathrm{pr}_\varphi[R]$ es una relación m-aria en $\mathbb{N}$ recursivamente enumerable.*

Demostración. □

Proposición 4.94. *Sea $m \in \mathbb{N}$ y R una relación m-aria en $\mathbb{N}$. Una condición necesaria y suficiente para que R sea recursivamente enumerable es que exista una relación $m+1$-aria S en $\mathbb{N}$ tal que S sea recursiva primitiva y $R = \exists^m(S)$, i.e., para cada $x \in \mathbb{N}^m$, $x \in R$ precisamente si hay un $y \in \mathbb{N}$ tal que $(x, y) \in S$.*

Demostración. □

Proposición 4.95. *Sea $m \in \mathbb{N}-1$, $n \in \mathbb{N}$, $(f_i)_{i\in m}$ una familia de aplicaciones en la que, para cada $i \in m$, $f_i\colon \mathbb{N}^n \rightarrowtail \mathbb{N}$ y R una relación m-aria. Si, para cada $i \in m$, f_i es una aplicación recursiva primitiva y R es una relación recursivamente enumerable, entonces la relación n-aria $\Pi_{\mathrm{C}}^{m,n}(R, (f_i \mid i \in m))$ en $\mathbb{N}$ es recursivamente enumerable.*

Demostración. □

Proposición 4.96. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y P y Q dos relaciones n-arias en $\mathbb{N}$. Si P y Q son recursivamente enumerables, entonces la relación n-aria $\mathrm{Cj}^n(P, Q)$ en $\mathbb{N}$ es recursivamente enumerable.*

Demostración. □

Proposición 4.97. *Sean m, n y $t \in \mathbb{N}$ tales que $t > m, n$, $\alpha\colon m \rightarrowtail t$, $\beta\colon n \rightarrowtail t$, P una relación m-aria en $\mathbb{N}$, Q una relación n-aria en $\mathbb{N}$. Si P y Q son recursivamente enumerables, entonces la relación t-aria $\mathrm{Cj}^{m,n}_{\alpha,\beta,t}(P,Q)$ en $\mathbb{N}$ es recursivamente enumerable.*

Demostración. □

Proposición 4.98. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y P y Q dos relaciones n-arias en $\mathbb{N}$. Si P y Q son recursivamente enumerables, entonces la relación n-aria $\mathrm{Dj}^n(P,Q)$ en $\mathbb{N}$ es recursivamente enumerable.*

Proposición 4.99. *Sean m, n y $t \in \mathbb{N}$ tales que $t > m, n$, $\alpha\colon m \rightarrowtail t$, $\beta\colon n \rightarrowtail t$, P una relación m-aria en $\mathbb{N}$, Q una relación n-aria en $\mathbb{N}$. Si P y Q son recursivamente enumerables, entonces la relación t-aria $\mathrm{Dj}^{m,n}_{\alpha,\beta,t}(P,Q)$ en $\mathbb{N}$ es recursivamente enumerable.*

Demostración. □

La negación no conserva, en general, la propiedad de una relación de ser recursivamente enumerable. Este es un hecho central de la teoría de las relaciones recursivamente enumerables y, en el fondo, sobre él se fundamentan todos los ejemplos de inexistencia de algoritmos.

Proposición 4.100. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces el conjunto de las relaciones n-arias en $\mathbb{N}$ recursivamente enumerables es un anillo de subconjuntos del anillo $\mathbf{Sub}(\mathbb{N}^n)$. Además, $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}^n)$ está incluido en tal anillo de subconjuntos.*

Demostración. □

Proposición 4.101. *Sean q, $r \in \mathbb{N}$, φ una aplicación estrictamente creciente de q en $r+q$ y L una relación r-aria en $\mathbb{N}$ recursivamentre enumerable. Entonces la relación $r+q$-aria $\mathrm{Cyl}_{\varphi}(L)$ en $\mathbb{N}$ (el cilindro en $\mathbb{N}^{r+q}$ elevado sobre L a lo largo de los ejes φ), es recursivamentre enumerable.*

Demostración. □

Proposición 4.102. *Sean m, $n \in \mathbb{N}$, L una relación m-aria en $\mathbb{N}$ y M una relación n-aria en $\mathbb{N}$. Si L y M son recursivamentre enumerables, entonces la concatenación de L y M, $L \curlywedge M$, que es una relación $m+n$-aria en $\mathbb{N}$, es recursivamentre enumerable.*

Demostración. □

Proposición 4.103. *Sea $m \in \mathbb{N}$, φ una permutación de m y L una relación m-aria en $\mathbb{N}$. Si L es recursivamentre enumerable, entonces $\mathrm{Rl}^{\varphi}(L)$ es recursivamentre enumerable.*

Demostración. □

Proposición 4.104. *Sea $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} - 1$, $(f_i)_{i \in n}$ una familia de aplicaciones en la que, para cada $i \in n$, $f_i\colon \mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{N}$, L una relación m-aria en $\mathbb{N}$ y M una relación n-aria en $\mathbb{N}$. Si, para cada $i \in n$, f_i es recursiva primitiva, y L y M son recursivamente enumerables, entonces $\langle f_i \rangle_{i \in n}[L]$ y $\langle f_i \rangle_{i \in n}^{-1}[M]$ son recursivamente enumerables*

Demostración. □

Proposición 4.105. *Sea $n \in \mathbb{N} - 1$ y $L \subseteq \mathbb{N}^n$ no vacío. Entonces una condición necesaria y suficiente para que L sea recursivamente enumerable es que exista una familia de aplicaciones $(f_i)_{i \in n}$ en la que, para cada $i \in n$, f_i sea una endoaplicación de $\mathbb{N}$ recursiva primitiva tal que $L = \mathrm{Im}(\langle f_i \rangle_{i \in n})$. En particular, una condición* *necesaria y suficiente para que un subconjunto no vacío L de $\mathbb{N}$ sea recursivamente enumerable es que L sea la imagen de una endoaplicación de $\mathbb{N}$ recursiva primitiva.*

Demostración. □

Proposición 4.106. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$. Si R es recursivamente enumerable, entonces $\exists^n(R)$, $\exists^{n+1}_<(R)$, $\exists^{n+1}_\leq(R)$, $\forall^{n+1}_<(R)$ y $\forall^{n+1}_\leq(R)$ son recursivamente enumerables.*

Demostración. □

4.5. Aplicaciones parciales recursivas.

En esta sección definimos, en primer lugar, el conjunto de las aplicaciones parciales recursivas como la unión de la mínima subálgebra heterogénea de una determinada álgebra heterogénea y caracterizamos, además, tal conjunto constructivamente.

Después, enunciamos la hipótesis fundamental de la teoría de la recursión de Church-Turing, que afirma la coincidencia entre la noción no matemática de función parcial mecánicamente computable y la noción matemática de aplicación parcial recursiva; demostramos el teorema del grafo, según el cual el conjunto de las aplicaciones parciales recursivas coincide con el conjunto de las aplicaciones parciales cuya función subyacente es recursivamente enumerable, que tiene como consecuencia el teorema débil de la forma normal para las aplicaciones parciales recursivas, en el que se demuestra que, para cada $m \geq 1$, cada aplicación parcial recursiva de $\mathbb{N}^m$ en $\mathbb{N}$ se puede representar como la composición de la minimización ilimitada de una aplicación recursiva primitiva de $\mathbb{N}^{m+1}$ en $\mathbb{N}$ que depende de la aplicación parcial recursiva dada y de una endoaplicación de $\mathbb{N}$ recursiva primitiva de gran amplitud arbitraria.

Además, una vez definida la noción de representación parcial recursiva, demostramos que tales representaciones preservan y reflejan las relaciones recursivamente enumerables, que su dominio de definición y su imagen son relaciones recursivamente enumerables y que las fibras también lo son. Por otra parte, demostramos que el sistema de las relaciones recursivamente enumerables está cerrado bajo el operador mixto de composición (generalizada) para aplicaciones parciales recursivas y relaciones recursivamente enumerables y que el, operador mixto de definición por casos transforma aplicaciones parciales recursivas y relaciones recursivamente enumerables en aplicaciones parciales recursivas.

Por último, caracterizamos las relaciones recursivamente enumerables, entre otros, en términos de las fibras de las aplicaciones parciales recursivas y de los dominios de definición de las aplicaciones parciales recursivas.

Antes de definir la signatura algebraica heterogénea adecuada para las aplicaciones parciales recursivas, establecemos una serie de lemas que nos permitirán asociar a determinados símbolos de operación de la signatura, operaciones concretas sobre las aplicaciones parciales, que usaremos para generar tales aplicaciones parciales.

Lema 4.107. *Sea $m \in \mathbb{N} - 1$, $n \in \mathbb{N}$ y $(g_i)_{i \in m} \in (\mathrm{Hom_p}(\mathbb{N}^n, \mathbb{N}))^m$. Entonces hay una única aplicación parcial $\langle g_i \rangle_{i \in m}$ de $\mathbb{N}^n$ en $\mathbb{N}^m$ tal que:*

1. *Para cada $i \in m$, $\mathrm{pr}_i \circ \langle g_i \rangle_{i \in m} \leq g_i$.*
2. *Para cada $h\colon \mathbb{N}^n \rightharpoonup \mathbb{N}^m$, si, para cada $i \in m$, $\mathrm{pr}_i \circ h \leq g_i$, entonces $h \leq \langle g_i \rangle_{i \in m}$.*

Demostración. Es suficiente tomar como $\langle g_i \rangle_{i \in m}$ la aplicación parcial de $\mathbb{N}^n$ en $\mathbb{N}^m$ cuyo dominio de definición es $\bigcap_{i \in m} \mathrm{Dom}(g_i)$ y que a un $x \in \bigcap_{i \in m} \mathrm{Dom}(g_i)$ le asigna como valor $(g_i(x))_{i \in m}$. □

Lema 4.108. *Sea* $m \in \mathbb{N}$, $f \in \mathrm{Hom_p}(\mathbb{N}^m, \mathbb{N})$ *y* $g \in \mathrm{Hom_p}(\mathbb{N}^{m+2}, \mathbb{N})$*. Entonces hay una única aplicación parcial* $\Omega^m_{\mathrm{R}}(f,g)$ *de* $\mathbb{N}^{m+1}$ *en* $\mathbb{N}$*, obtenida de* f *y* g *por* recursión primitiva*, tal que:*

1. *Para cada* $x \in \mathbb{N}^m$, $\Omega^m_{\mathrm{R}}(f,g)(x,0) = f(x)$*, i.e.,* $\Omega^m_{\mathrm{R}}(f,g)$ *está definida en* $(x,0)$ *precisamente si* f *lo está en* x *y si ese es el caso, entonces sus valores coinciden.*
2. *Para cada* $(x,y) \in \mathbb{N}^{m+1}$, $\Omega^m_{\mathrm{R}}(f,g)(x,y+1) = g(x,y,\Omega^m_{\mathrm{R}}(f,g)(x,y))$*, i.e.,* $\Omega^m_{\mathrm{R}}(f,g)$ *está definida en* $(x,y+1)$ *precisamente si la aplicación parcial* g *lo está en* $(x,y,\Omega^m_{\mathrm{R}}(f,g)(x,y))$ *y si ese es el caso, entonces sus valores coinciden.*

Demostración. Decimos que un subconjunto G de $\mathbb{N}^{m+1} \times \mathbb{N}$ es (f,g)-admisible si cumple las siguientes condiciones:

1. Para cada $x \in \mathbb{N}^m$, si f está definida en x, entonces $(x,0,f(x)) \in G$.
2. Para cada $(x,y,z) \in \mathbb{N}^{m+1} \times \mathbb{N}$, si $(x,y,z) \in G$ y g está definida en (x,y,z), entonces $(x,y+1,g(x,y,z)) \in G$.

Es evidente que $\mathbb{N}^{m+1} \times \mathbb{N}$ es (f,g)-admisible y que la intersección de cualquier familia no vacía de conjuntos (f,g)-admisibles, es (f,g)-admisible. Por lo tanto existe el mínimo conjunto (f,g)-admisible: precisamente la intersección de todos ellos, al que denotamos por H.

Ahora demostramos que:

1. *a*) Para cada $x \in \mathbb{N}^m$ y cada $z \in \mathbb{N}$, si f está definida en x, entonces $(x,0,z) \in H$ precisamente si $z = f(x)$.
   b) Para cada $x \in \mathbb{N}^m$, si f no está definida en x, entonces no hay ningún $z \in \mathbb{N}$ tal que $(x,0,z) \in H$.
2. *a*) Para cada $x \in \mathbb{N}^m$ y cada $y \in \mathbb{N}$, si hay un único $z \in \mathbb{N}$ tal que $(x,y,z) \in H$ y g está definida en (x,y,z), entonces, para cada $w \in \mathbb{N}$, $(x,y+1,w) \in H$ precisamente si $g(x,y,z) = w$.
   b) Para cada $x \in \mathbb{N}^m$ y cada $y \in \mathbb{N}$, si hay un único $z \in \mathbb{N}$ tal que $(x,y,z) \in H$ y g no está definida en (x,y,z), entonces, para cada $w \in \mathbb{N}$, $(x,y+1,w) \notin H$.
   c) Para cada $x \in \mathbb{N}^m$ y cada $y \in \mathbb{N}$, si no hay un $z \in \mathbb{N}$ tal que $(x,y,z) \in H$, entonces no hay un $w \in \mathbb{N}$ tal que $(x,y+1,w) \in H$.

1*a*. Sean $x \in \mathbb{N}^m$ y $z \in \mathbb{N}$, arbitrarios, pero fijos. Supongamos que f esté definida en x. Si $z = f(x)$, entonces $(x,0,z) = (x,0,f(x))$ y, por ser H (f,g)-admisible, $(x,0,f(x)) \in H$, así que $(x,0,z) \in H$.

Ahora, en lugar de demostrar que si $(x,0,z) \in H$, entonces $z = f(x)$, demostramos la contra-recíproca, i.e., que si $z \neq f(x)$, entonces $(x,0,z) \notin H$. Supongamos que $z \neq f(x)$ y sea $G = H - \{(x,0,z)\}$. Demostramos que G es (f,g)-admisible. En este caso es suficiente que demostremos la primera condición, i.e., que para cada $x' \in \mathbb{N}$, si f está definida en x', entonces $(x',0,f(x')) \in G$, i.e., $(x',0,f(x')) \in H$ y $(x',0,f(x')) \neq (x,0,z)$. Sea $x' \in \mathbb{N}$, arbitrario, pero fijo. Supongamos que f esté definida en x'.

Si $x' = x$, entonces $(x',0,f(x')) = (x,0,f(x)) \in H$, por ser H (f,g)-admisible. Además, $(x,0,f(x)) \neq (x,0,z)$ porque, por hipótesis, $z \neq f(x)$. Por lo tanto $(x',0,f(x')) \in G$.

Si $x' \neq x$, entonces $(x',0,f(x')) \in H$, por ser H (f,g)-admisible. Además, $(x',0,f(x')) \neq (x,0,z)$, porque $x' \neq x$. Por lo tanto $(x',0,f(x')) \in G$.

Con esto queda demostrado que G es (f,g)-admisible. Por lo tanto $(x,0,z) \notin H$, ya que si $(x,0,z) \in H$, G sería una parte estricta (f,g)-admisible de H, que es el mínimo conjunto (f,g)-admisible.

$1b$. Sea $x \in \mathbb{N}^m$ arbitrario, pero fijo. Supongamos que f no esté definida en x. Queremos demostrar que no hay ningún $z \in \mathbb{N}$ tal que $(x, 0, z) \in H$, i.e., que, para cada $z \in \mathbb{N}$, $(x, 0, z) \notin H$. Sea $z \in \mathbb{N}$, arbitrario, pero fijo. Vamos a demostrar que $G = H - \{(x, 0, z)\}$ es (f, g)-admisible, i.e., que para cada $x' \in \mathbb{N}$, si f está definida en x', entonces $(x', 0, f(x')) \in G$, i.e., $(x', 0, f(x')) \in H$ y $(x', 0, f(x')) \neq (x, 0, z)$. Sea $x' \in \mathbb{N}$, arbitrario, pero fijo. Supongamos que f esté definida en x'.

Para x' tenemos que $x' = x$ o $x' \neq x$. Ahora bien, x' no puede coincidir con x, porque f está definida en x' pero f no lo está en x. Así que $x' \neq x$. Por otra parte, puesto que H es (f, g)-admisible y f está definida en x', $(x', 0, f(x')) \in H$. Además, $(x', 0, f(x')) \neq (x, 0, z)$, porque $x' \neq x$. Por lo tanto $(x', 0, f(x')) \in G$. Así que $(x, 0, z) \notin H$.

$2a$. Sean $x \in \mathbb{N}^m$ e $y \in \mathbb{N}$, arbitrarios, pero fijos. Supongamos que exista un único $z \in \mathbb{N}$ tal que $(x, y, z) \in H$ y g está definida en (x, y, z). Sea $w \in \mathbb{N}$, arbitrario, pero fijo. Si $g(x, y, z) = w$, entonces $(x, y + 1, w) = (x, y + 1, g(x, y, z))$, luego $(x, y + 1, g(x, y, z)) \in H$.

Ahora demostramos que si $g(x, y, z) \neq w$, entonces $(x, y + 1, z) \notin H$. Sea $G = H - \{(x, y + 1, w)\}$. Vamos a demostrar que G es (f, g)-admisible, i.e., que para cada $(x', y', z') \in \mathbb{N}^{m+1} \times \mathbb{N}$, si $(x', y', z') \in G$ y g está definida en (x', y', z'), entonces $(x', y' + 1, g(x', y', z')) \in G$, i.e., $(x', y' + 1, g(x', y', z')) \in H$ y $(x', y' + 1, g(x', y', z')) \neq (x, y + 1, w)$. Sea $(x', y', z') \in \mathbb{N}^{m+1} \times \mathbb{N}$, arbitrario, pero fijo y tal que $(x', y', z') \in G$ y g está definida en (x', y', z'). Es evidente que $(x', y' + 1, g(x', y', z')) \in H$, porque $G \subseteq H$.

Si $(x', y', z') = (x, y, z)$, entonces $(x', y' + 1, g(x', y', z')) = (x, y + 1, g(x, y, z))$, pero $(x, y + 1, g(x, y, z)) \neq (x, y + 1, w)$, porque se supuso que $g(x, y, z) \neq w$.

Si $(x', y', z') \neq (x, y, z)$, entonces $x' \neq x$ o $y' \neq y$ o $z' \neq z$. Si $x' \neq x$, entonces $(x', y' + 1, g(x', y', z')) \neq (x, y + 1, w)$; si $y' \neq y$, entonces $(x', y' + 1, g(x', y', z')) \neq (x, y + 1, w)$; si $z' \neq z$, entonces, necesariamente, $x' \neq x$ o $y' \neq y$, ya que si $x' = x$ e $y' = y$, tendríamos que $(x, y, z') \in H$, contradicción, porque $z' \neq z$, luego $(x', y' + 1, g(x', y', z')) \neq (x, y + 1, w)$.

$2b$. Sean $x \in \mathbb{N}^m$ e $y \in \mathbb{N}$, arbitrarios, pero fijos. Supongamos que exista un único $z \in \mathbb{N}$ tal que $(x, y, z) \in H$ y que g no esté definida en (x, y, z). Sea $w \in \mathbb{N}$, arbitrario, pero fijo. Queremos demostrar que $(x, y+1, w) \notin H$. Sea $G = H - \{(x, y + 1, w)\}$. Vamos a demostrar que G es (f, g)-admisible, i.e., que para cada $(x', y', z') \in \mathbb{N}^{m+1} \times \mathbb{N}$, si $(x', y', z') \in G$ y g está definida en (x', y', z'), entonces $(x', y' + 1, g(x', y', z')) \in G$, i.e., $(x', y' + 1, g(x', y', z')) \in H$ y $(x', y' + 1, g(x', y', z')) \neq (x, y+1, w)$. Sea $(x', y', z') \in \mathbb{N}^{m+1} \times \mathbb{N}$, arbitrario, pero fijo y tal que $(x', y', z') \in G$ y g está definida en (x', y', z'). Es evidente que $(x', y' + 1, g(x', y', z')) \in H$, porque $G \subseteq H$.

Para (x', y', z') no puede ocurrir que $(x', y', z') = (x, y, z)$, porque g está definida en (x', y', z') pero no en (x, y, z). De modo que $(x', y', z') \neq (x, y, z)$. Así que $x' \neq x$ o $y' \neq y$ o $z' \neq z$. Si $x' \neq x$, entonces $(x', y' + 1, g(x', y', z')) \neq (x, y+1, w)$; si $y' \neq y$, entonces $(x', y' + 1, g(x', y', z')) \neq (x, y + 1, w)$; si $z' \neq z$, entonces, necesariamente, $x' \neq x$ o $y' \neq y$, ya que si $x' = x$ e $y' = y$, tendríamos que $(x, y, z') \in H$, contradicción, porque $z' \neq z$, luego $(x', y' + 1, g(x', y', z')) \neq (x, y + 1, w)$. Por lo tanto $(x, y + 1, w) \notin H$.

$2c$. Sean $x \in \mathbb{N}^m$ e $y \in \mathbb{N}$, arbitrarios, pero fijos. Supongamos que para, cada $z \in \mathbb{N}$, $(x, y, z) \notin H$. Queremos demostrar que, para cada $w \in \mathbb{N}$, $(x, y + 1, w) \notin H$. Sea $w \in \mathbb{N}$, arbitrario, pero fijo. Entonces $G = H - \{(x, y + 1, w)\}$ es (f, g)-admisible, i.e., para cada $(x', y', z') \in \mathbb{N}^{m+1} \times \mathbb{N}$, si $(x', y', z') \in G$ y g está definida en (x', y', z'), entonces $(x', y' + 1, g(x', y', z')) \in G$, i.e., $(x', y' + 1, g(x', y', z')) \in H$ y $(x', y' + 1, g(x', y', z')) \neq (x, y + 1, w)$. Sea $(x', y', z') \in \mathbb{N}^{m+1} \times \mathbb{N}$, arbitrario, pero fijo y tal que $(x', y', z') \in G$ y g está definida en (x', y', z'). Es evidente que $(x', y'+1, g(x', y', z')) \in H$, porque $G \subseteq H$.

Falta demostrar que $(x', y'+1, g(x', y', z')) \neq (x, y+1, w)$. Supongamos que ambos pares ordenados coincidan, entonces $x' = x$, $y' = y$ y $g(x, y, z') = w$. Así que $(x, y, z') = (x', y', z') \in H$, porque $(x', y', z') \in G \subseteq H$ y $x' = x$ e $y' = y$, que contradice el que, para cada $z \in \mathbb{N}$, $(x, y, z) \notin H$. Por lo tanto $(x, y+1, w) \notin H$.

A partir de lo anterior, por inducción sobre y, se demuestra que, para cada $x \in \mathbb{N}^m$ y cada $y \in \mathbb{N}$, hay a lo sumo un $z \in \mathbb{N}$ tal que $(x, y, z) \in H$. Entonces $\Omega^m_{\mathrm{R}}(f, g)$ es la única aplicación parcial de $\mathbb{N}^{m+1}$ en $\mathbb{N}$ cuyo dominio de definición es:

$$\mathrm{Dom}(\Omega^m_{\mathrm{R}}(f, g)) = \{\, (x, y) \in \mathbb{N}^{m+1} \mid \exists z \in \mathbb{N}\, ((x, y, z) \in H)\,\},$$

y que a un $(x, y) \in \mathrm{Dom}(\Omega^m_{\mathrm{R}}(f, g))$ le asigna como valor el único $z \in \mathbb{N}$ tal que $(x, y, z) \in H$. □

Lema 4.109. *Sea $m \in \mathbb{N}$ y $f \in \mathrm{Hom_p}(\mathbb{N}^{m+1}, \mathbb{N})$. Entonces hay una única aplicación parcial $\Omega^m_\mu(f)$ de $\mathbb{N}^m$ en $\mathbb{N}$, obtenida de f por* minimización*, tal que, para cada $x \in \mathbb{N}^m$ y cada $y \in \mathbb{N}$, $\Omega^m_\mu(f)(x) = y$ precisamente si $f(x, y) = 0$ y, para cada $z < y$, $f(x, z)$ está definida y $f(x, z) \neq 0$.*

Demostración. Dado un $x = (x_i \mid i \in m) \in \mathbb{N}^m$ sea $\mathrm{D}_f(x_i \mid i \in m)$ el subconjunto de $\mathbb{N}$ definido como:

$$\mathrm{D}_f(x_i \mid i \in m) = \left\{ y \in \mathbb{N} \;\middle|\; \forall z \leq y \begin{pmatrix} (x_0, \ldots, x_{m-1}, z) \in \mathrm{Dom}(f) \\ \&\;\; f(x_0, \ldots, x_{m-1}, y) = 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Entonces $\Omega^m_\mu(f)$ es la única aplicación parcial de $\mathbb{N}^m$ en $\mathbb{N}$ cuyo dominio de definición es:

$$\mathrm{Dom}(\Omega^m_\mu(f)) = \{\, (x_i \mid i \in m) \in \mathbb{N}^m \mid \mathrm{D}_f(x_i \mid i \in m) \neq \varnothing \,\},$$

y que a un $(x_i \mid i \in m) \in \mathrm{Dom}(\Omega^m_\mu(f))$ le asigna como valor:

$$\Omega^m_\mu(f)(x_i \mid i \in m) = \min(\mathrm{D}_f(x_i \mid i \in m))$$

□

Así pués, $\Omega^m_\mu(f)$ está definida en $(x_i \mid i \in m)$ si y sólo si hay un $y \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $z \leq y$, la aplicación parcial f está definida en $(x_0, \ldots, x_{m-1}, z)$ y $f(x_0, \ldots, x_{m-1}, y) = 0$; en cuyo caso $\Omega^m_\mu(f)(x_i \mid i \in m)$ es precisamente el primer $y \in \mathbb{N}$ con tal propiedad.

Podría parecer razonable definir $\Omega^m_\mu(f)$ conviniendo que su dominio de definición sea:

$$\mathrm{Dom}(\Omega^m_\mu(f)) = \left\{ (x_i \mid i \in m) \in \mathbb{N}^m \;\middle|\; \exists y \in \mathbb{N} \begin{pmatrix} (x_0, \ldots, x_{m-1}, y) \in \mathrm{Dom}(f) \\ \&\;\; f(x_0, \ldots, x_{m-1}, y) = 0 \end{pmatrix} \right\},$$

y que entonces a un $(x_i \mid i \in m) \in \mathrm{Dom}(\Omega^m_\mu(f))$ le asigne como valor el primer $y \in \mathbb{N}$ tal que $(x_0, \ldots, x_{m-1}, y) \in \mathrm{Dom}(f)$ y $f(x_0, \ldots, x_{m-1}, y) = 0$. Ahora bien, las aplicaciones parciales recursivas no están cerradas bajo tal esquema, porque, usando resultados posteriores, si A es un subconjunto recursivamente enumerable pero no recursivo, entonces la aplicación parcial f de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ cuyo dominio de definición es:

$$\mathrm{Dom}(f) = \{\, (x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid (y = 0 \;\&\; x \in A) \vee y = 1 \,\},$$

y que a un $(x, y) \in \mathrm{Dom}(f)$ le asigna como valor:

$$f(x, y) = 0,$$

es parcial recursiva y para la aplicación g de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ cuyo dominio de definición es:

$$\mathrm{Dom}(g) = \left\{ x \in \mathbb{N} \;\middle|\; \exists y \in \mathbb{N} \begin{pmatrix} (x, y) \in \mathrm{Dom}(f) \\ \&\;\; f(x, y) = 0 \end{pmatrix} \right\},$$

y que a un $x \in \mathrm{Dom}(g)$ le asigna como valor el primer $y \in \mathbb{N}$ tal que $(x,y) \in \mathrm{Dom}(f)$ y $f(x,y) = 0$, se cumple que $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{N}$ y que g no es parcial recursiva, ya que si lo fuera, sería recursiva y puesto que, para cada $x \in \mathbb{N}$, $g(x) = 0$ si y sólo si $x \in A$, A sería recursivo, contradicción.

Definición 4.110. Denotamos por $\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{pr}}$ la $\mathbb{N}$-signatura algebraica heterogénea, para las aplicaciones parciales recursivas, cuya coordenada (w,n)-ésima, con $(w,n) \in \mathbb{N}^{\star} \times \mathbb{N}$, es la definida como:

$$\Sigma_{w,n} = \begin{cases} \{\kappa_{0,0}\}, & \text{si } w = \lambda \text{ y } n = 0; \\ \{\mathrm{sc}\} \cup \{\mathrm{pr}_{1,0}\}, & \text{si } w = \lambda \text{ y } n = 1; \\ \{\, \mathrm{pr}_{n,i} \mid i \in n \,\}, & \text{si } w = \lambda \text{ y } n \geq 2; \\ \{\Omega_{\mathrm{C}}^{m,n}\}, & \text{si } w = (m) \curlywedge (n \mid i \in m) \text{ y } m \geq 1; \\ \{\Omega_{\mathrm{R}}^{m}\}, & \text{si } w = (m) \curlywedge (m+2) \text{ y } n = m+1; \\ \{\Omega_{\mu}^{m}\}, & \text{si } w = (m+1) \text{ y } n = m; \\ \varnothing, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Definición 4.111. Denotamos por $\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\cdot}, \mathbb{N})$ la $\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{pr}}$-álgebra heterogénea cuyo $\mathbb{N}$-conjunto subyacente $\mathrm{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\cdot}, \mathbb{N})$ es $(\mathrm{Hom}_{\mathrm{p}}(\mathbb{N}^{n}, \mathbb{N}))_{n \in \mathbb{N}}$ y en la que las operaciones estructurales son:

1. $\kappa_{0,0}$, la aplicación constante 0-aria determinada por 0, que es la aplicación de $\mathbb{N}^{0}$ en $\mathbb{N}$, que al único miembro de $\mathbb{N}^{0}$ le asigna como valor 0.
2. sc, la aplicación sucesor.
3. $\mathrm{pr}_{1,0}$, la aplicación identidad de $\mathbb{N}$.
4. Para cada $n \geq 2$ y cada $i \in n$, $\mathrm{pr}_{n,i}$, la proyección canónica i-ésima de $\mathbb{N}^{n}$ en $\mathbb{N}$.
5. Para cada $m \in \mathbb{N} - 1$ y cada $n \in \mathbb{N}$, $\Omega_{\mathrm{C}}^{m,n}$, el *operador de composición (generalizada)* de ariedad $(m) \curlywedge (n \mid i \in m)$ y coariedad n, que es la aplicación de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{p}}(\mathbb{N}^{m}, \mathbb{N}) \times (\mathrm{Hom}_{\mathrm{p}}(\mathbb{N}^{n}, \mathbb{N}))^{m}$ en $\mathrm{Hom}_{\mathrm{p}}(\mathbb{N}^{n}, \mathbb{N})$ que a un par $(f, (g_i \mid i \in m))$ del primero le asigna como valor la aplicación parcial $\Omega_{\mathrm{C}}^{m,n}(f, (g_i \mid i \in m))$ de $\mathbb{N}^{n}$ en $\mathbb{N}$ obtenida componiendo $\langle g_i \mid i \in m \rangle$ y f.
6. Para cada $m \in \mathbb{N}$, Ω_{R}^{m}, el *operador de recursión primitiva* de ariedad $(m) \curlywedge (m+2)$ y coariedad $m+1$, que es la aplicación de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{p}}(\mathbb{N}^{m}, \mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{p}}(\mathbb{N}^{m+2}, \mathbb{N})$ en $\mathrm{Hom}_{\mathrm{p}}(\mathbb{N}^{m+1}, \mathbb{N})$ que a un par (f,g) del primero le asigna como valor la aplicación parcial $\Omega_{\mathrm{R}}^{m}(f,g)$ de $\mathbb{N}^{m+1}$ en $\mathbb{N}$ obtenida de f y g por recursión primitiva.
7. Para cada $m \in \mathbb{N}$, Ω_{μ}^{m}, el *operador de minimización* de ariedad $(m+1)$ y coariedad m, que es la aplicación de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{p}}(\mathbb{N}^{m+1}, \mathbb{N})$ en $\mathrm{Hom}_{\mathrm{p}}(\mathbb{N}^{m}, \mathbb{N})$ que a una aplicación parcial $f\colon \mathbb{N}^{m+1} \rightharpoonup \mathbb{N}$ del primero le asigna como valor la aplicación parcial $\Omega_{\mu}^{m}(f)\colon \mathbb{N}^{m} \rightharpoonup \mathbb{N}$, obtenida de f por minimización.

En la definición anterior, para simplificar la notación, hemos identificado las operaciones formales heterogéneas con sus realizaciones en el $\mathbb{N}$-conjunto $(\mathrm{Hom}_{\mathrm{p}}(\mathbb{N}^{n}, \mathbb{N}) \mid n \in \mathbb{N})$.

Puesto que disponemos del concepto de subálgebra de un álgebra heterogénea, para la $\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{pr}}$-álgebra heterogénea $\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\cdot}, \mathbb{N})$, un $\mathbb{N}$-subconjunto $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ del $\mathbb{N}$-conjunto subyacente $(\mathrm{Hom}_{\mathrm{p}}(\mathbb{N}^{n}, \mathbb{N}))_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\cdot}, \mathbb{N})$, será una subálgebra precisamente cuando cumpla las siguientes condiciones:

- $\kappa_{0,0} \in \mathcal{F}_0$.
- $\mathrm{sc} \in \mathcal{F}_1$.
- $\mathrm{pr}_{1,0} \in \mathcal{F}_1$.
- Para cada $n \geq 2$ y cada $i \in n$, $\mathrm{pr}_{n,i} \in \mathcal{F}_n$.

- Para cada $m \in \mathbb{N}-1$, cada $n \in \mathbb{N}$, cada $f \in \mathcal{F}_m$ y cada $(g_i \mid i \in m) \in (\mathcal{F}_n)^m$, $\Omega_{\mathrm{C}}^{m,n}(f, (g_i \mid i \in m)) \in \mathcal{F}_n$.
- Para cada $m \in \mathbb{N}$, cada $f \in \mathcal{F}_m$ y cada $g \in \mathcal{F}_{m+2}$, $\Omega_{\mathrm{R}}^{m}(f, g) \in \mathcal{F}_{m+1}$.
- Para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $f \in \mathcal{F}_{m+1}$, $\Omega_{\mu}^{m}(f) \in \mathcal{F}_m$.

Debido a que lo que es cierto para todas las álgebras heterogéneas, lo es de las de una signatura determinada, tenemos las siguientes proposiciones.

Proposición 4.112.

1. $(\mathrm{Hom}_{\mathrm{p}}(\mathbb{N}^n, \mathbb{N}) \mid)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una subálgebra de* $\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$.
2. *Si* $(\mathcal{F}^i)_{i\in I}$ *es una familia no vacía de subálgebras de* $\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$*, entonces* $\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}^i$ *es una subálgebra de* $\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$.
3. *Si* $(\mathcal{F}^i)_{i\in I}$ *es una familia no vacía de subálgebras de* $\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$*, y si dados* $i, j \in I$*, hay un* $k \in I$ *tal que* $\mathcal{F}^i \cup \mathcal{F}^j \subseteq_{\mathbb{N}} \mathcal{F}^k$*, entonces* $\bigcup_{i\in I} \mathcal{F}^i$ *es una subálgebra de* $\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$.

Corolario 4.113. *Para la* $\mathbf{\Sigma}^{\mathrm{pr}}$*-álgebra heterogénea* $\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$*, se cumple que la endoaplicación* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}$ *del conjunto* $\mathrm{Sub}_{\mathbb{N}}(\mathrm{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N}))$*, de los* $\mathbb{N}$*-subconjuntos de* $\mathrm{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$*, definida como:*

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})} \begin{cases} \mathrm{Sub}_{\mathbb{N}}(\mathrm{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})) \longrightarrow \mathrm{Sub}_{\mathbb{N}}(\mathrm{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})) \\ \qquad\qquad \mathcal{F} \qquad\qquad \longmapsto \bigcap\{\, \mathcal{C} \in \mathrm{S}(\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})) \mid \mathcal{F} \subseteq_{\mathbb{N}} \mathcal{C} \,\} \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{Im}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}) \subseteq \mathrm{S}(\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N}))$.
2. $\{\, \mathcal{X} \in \mathrm{Sub}(\mathrm{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})) \mid \mathcal{X} = \mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}(\mathcal{X}) \,\} = \mathrm{S}(\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N}))$.
3. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}$ *es extensiva, i.e., para cada* $\mathcal{X} \in \mathrm{Sub}_{\mathbb{N}}(\mathrm{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N}))$ *se cumple que* $\mathcal{X} \subseteq_{\mathbb{N}} \mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}(\mathcal{X})$.
4. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}$ *es isótona, i.e., para cada* $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathrm{Sub}_{\mathbb{N}}(\mathrm{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N}))$*, si* $\mathcal{X} \subseteq_{\mathbb{N}} \mathcal{Y}$*, entonces* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}(\mathcal{X}) \subseteq_{\mathbb{N}} \mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}(\mathcal{Y})$.
5. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}$ *es idempotente, i.e., para cada* $\mathcal{X} \in \mathrm{Sub}_{\mathbb{N}}(\mathrm{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N}))$ *se cumple que* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}(\mathcal{X}) = \mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}(\mathcal{X}))$.
6. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}$ *es algebraica, i.e., para cada familia no vacía* $(\mathcal{X}^i)_{i\in I}$ *en* $\mathrm{Sub}_{\mathbb{N}}(\mathrm{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N}))$*, si para cada* $i, j \in I$*, existe un* $k \in I$ *tal que* $\mathcal{X}^i \cup \mathcal{X}^j \subseteq_{\mathbb{N}} \mathcal{X}^k$*, entonces* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}(\bigcup_{i\in I} \mathcal{X}^i) = \bigcup_{i\in I} \mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}(\mathcal{X}^i)$.

Por consiguiente, para cada $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$*,* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}(\mathcal{X})$ *es el mínimo cerrado de* $\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$ *que contiene a* $\mathcal{X}$*, y lo denominamos el cerrado de* $\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$ generado *por* $\mathcal{X}$*.*

Demostración. □

Observemos que la propiedad de algebricidad del operador $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}$ equivale a que, para cada $\mathcal{X} \subseteq_{\mathbb{N}} \mathrm{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$, se cumpla que:

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}(\mathcal{X}) = \bigcup\nolimits_{\mathcal{F}\in \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{X})} \mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}(\mathcal{F}),$$

siendo $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{X})$ el conjunto formado por los $\mathbb{N}$-subconjuntos $\mathcal{F}$ de $\mathcal{X}$ tales que el soporte de $\mathcal{F}$, i.e., el conjunto $\mathrm{supp}(\mathcal{F}) = \{\, n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{F}_n \neq \varnothing \,\}$, es finito y, además, para cada $n \in \mathrm{supp}(\mathcal{F})$, $\mathcal{F}_n$ es finito.

Definición 4.114. Sea $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un $\mathbb{N}$-subconjunto finito de $\mathrm{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$. Entonces a las aplicaciones parciales pertenecientes a la unión de la subálgebra heterogénea de $\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$ generada por tal $\mathbb{N}$-subconjunto finito, las denominamos aplicaciones parciales *recursivas relativas a* $\mathcal{F}$, o aplicaciones parciales $\mathcal{F}$-*recursivas*, y al conjunto de todas ellas lo denotamos por $\mathrm{APR}(\mathcal{F})$.

En particular, el conjunto de las aplicaciones parciales *recursivas*, denotado por APR, es la unión de la subálgebra heterogénea de $\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})$ generada por el $\mathbb{N}$-conjunto $(\varnothing)_{n\in\mathbb{N}}$ (cuyas coordenadas son todas vacías).

No perdemos generalidad, si en lugar de definir el conjunto de las aplicaciones parciales recursivas respecto de un $\mathbb{N}$-subconjunto finito de $\mathrm{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})$, lo definimos respecto de una subálgebra heterogénea finitamente generada de $\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})$, ya que, debido a que el operador $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}$ es idempotente, para cada $\mathbb{N}$-subconjunto finito $\mathcal{F}$ de $\mathrm{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})$, se cumple que:

$$\mathrm{APR}(\mathcal{F}) = \mathrm{APR}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}(\mathcal{F})).$$

Además, si $\mathcal{F}$ es una subálgebra heterogénea finitamente generada de $\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})$, entonces $\mathrm{APR}(\mathcal{F})$ es, simplemente, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$.

Como consecuencia inmediata de las propiedades del operador $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}$, tenemos, por una parte, que para cada $\mathbb{N}$-subconjunto finito $\mathcal{F}$ de $\mathrm{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})$, $\mathrm{APR}\subseteq\mathrm{APR}(\mathcal{F})$, i.e., que toda aplicación parcial recursiva es una aplicación parcial $\mathcal{F}$-recursiva y, por otra, que si $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ son tres $\mathbb{N}$-subconjuntos finitos de $\mathrm{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})$ tales que $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{G}\subseteq\mathcal{H}$, y, además, toda aplicación parcial de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$ es parcial $\mathcal{G}$-recursiva y toda aplicación parcial de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{G}_n$ es parcial $\mathcal{H}$-recursiva, entonces toda aplicación parcial de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$ es parcial $\mathcal{H}$-recursiva.

Proposición 4.115. *Sea* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un* $\mathbb{N}$-*subconjunto finito de* $\mathrm{H}^{\mathrm{pr}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})$ *y además* $f\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Hom}_{\mathrm{p}}(\mathbb{N}^n,\mathbb{N})$. *Entonces una condición necesaria y suficiente para que* $f\in\mathrm{APR}(\mathcal{F})$ *es que exista un* $p\in\mathbb{N}-1$, *y una familia* $(f_i)_{i\in p}$ *en* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Hom}_{\mathrm{p}}(\mathbb{N}^n,\mathbb{N})$ *tal que* $f = f_{p-1}$ *y, para cada* $i\in p$, *se cumpla que:*

1. $f_i\in\mathcal{F}_n$, *para algún* $n\in\mathbb{N}$, *o*
2. $f_i = \kappa_{0,0}$, *o*
3. $f_i = \mathrm{sc}$, *o*
4. $f_i = \mathrm{pr}_{1,0}$, *o*
5. $f_i = \mathrm{pr}_{n,j}$, *para algún* $n\geq 2$ *y algún* $j\in n$, *o*
6. f_i *es* $m+1$-*aria y* $f_i = \Omega^m_{\mathrm{R}}(f_j,f_k)$, *para un* j *y un* $k\in i$ *tales que* f_j *sea* m-*aria y* f_k *sea* $m+2$-*aria, o*
7. f_i *es* m-*aria y* $f_i = \Omega^m_{\mu}(f_j)$, *para un* $j\in i$ *tal que* f_j *sea* $m+1$-*aria, o*
8. f_i *es* n-*aria y* $f_i = \Omega^{m,n}_{\mathrm{C}}(f_j,(f_{k_\alpha})_{\alpha\in m})$, *para un* $m\in\mathbb{N}-1$, *un* $j\in i$ *y una familia* $(k_\alpha)_{\alpha\in m}\in i^m$ *tal que* f_j *sea* m-*aria y, para cada* $\alpha\in p$, f_{k_α} *sea* n-*aria.*

Corolario 4.116. *Sea* $f\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Hom}_{\mathrm{p}}(\mathbb{N}^n,\mathbb{N})$. *Entonces una condición necesaria y suficiente para que* $f\in\mathrm{APR}$ *es que exista un* $p\in\mathbb{N}-1$, *y una familia* $(f_i)_{i\in p}$ *en* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Hom}_{\mathrm{p}}(\mathbb{N}^n,\mathbb{N})$ *tal que* $f = f_{p-1}$ *y, para cada* $i\in p$, *se cumpla que:*

1. $f_i = \kappa_{0,0}$, *o*
2. $f_i = \mathrm{sc}$, *o*
3. $f_i = \mathrm{pr}_{1,0}$, *o*
4. $f_i = \mathrm{pr}_{n,j}$, *para algún* $n\geq 2$ *y algún* $j\in n$, *o*
5. f_i *es* $m+1$-*aria y* $f_i = \Omega^m_{\mathrm{R}}(f_j,f_k)$, *para un* j *y un* $k\in i$ *tales que* f_j *sea* m-*aria y* f_k *sea* $m+2$-*aria, o*
6. f_i *es* m-*aria y* $f_i = \Omega^m_{\mu}(f_j)$, *para un* $j\in i$ *tal que* f_j *sea* $m+1$-*aria, o*
7. f_i *es* n-*aria y* $f_i = \Omega^{m,n}_{\mathrm{C}}(f_j,(f_{k_\alpha})_{\alpha\in m})$, *para un* $m\in\mathbb{N}-1$, *un* $j\in i$ *y una familia* $(k_\alpha)_{\alpha\in m}\in i^m$ *tal que* f_j *sea* m-*aria y, para cada* $\alpha\in p$, f_{k_α} *sea* n-*aria.*

Corolario 4.117. *El conjunto de las aplicaciones parciales recursivas es infinito numerable. Por consiguiente, la mayoría de las aplicaciones parciales numericas no son recursivas.*

Corolario 4.118. *Cada aplicación recursiva primitiva es una aplicación parcial recursiva.*

La llamada **Hipótesis fundamental de la teoría de la recursión de Church-Turing-Kleene** afirma que:

> Una aplicación parcial es mecánicamente computable exactamente si es una aplicación parcial recursiva.

Tal como dice Ouspenski en [**?**]:

> L'argument fondamental en faveur de l'Hypothèse Fondamentale est l'expérience séculaire de l'humanité ... l'Hypothèse Fondamentale a le même caractère que les autres lois des sciences de la nature. Elle est le résultat de la longue expérience humaine, la somme de beaucoup d'expériences, de vérifications mille fois éprouvées ... Et d'ailleurs remarquons ici même qu'il n'est pas particulièrement important pour nous, en un certain sens, que le lecteur soit d'accord avec l'Hypothèse Fondamentale ... Ainsi le lecteur qui n'est pas d'accord pour accepter l'Hypothèse Fondamentale "comprendra"et "admettra"tout plus loin. Mais pour un tel lecteur il est impossible de comprendre l'attention que nous prêtons à la notion de fonction partielle récursive. Pour ce lecteur, la théorie des fonctions partielles récursives ne sera que la théorie d'un certain sous-classe concrète de la classe de toutes les fonctions intuitivement calculables.

Por su parte, Shoenfield en [**?**] dice:

> Since the notion of a computable function has not been defined precisely, it may seem that it is impossible to give a proof of Church's Thesis. However, this is not necessarily the case. We understand the notion of a computable function well enough to make some statements about it. In other words, we can write down some axioms about computable functions which most people would agree are evidently true. It might be possible to prove Church's Thesis from such axioms. *However, despite strenuous efforts, no one has succeeded in doing this* (although some interesting partial results have been obtained). We are thus reduced to trying to give arguments for Church's Thesis which seem to be convincing.
>
> The first argument is that all the computable functions which have been produced have been shown to be recursive, ... Moreover, all the tecniques for producing new computable functions from old ones have been shown to lead from recursive functions to recursive functions. Another argument comes from various attempts to define computable precisely. .... This at least shows that the class of recursive functions is a very natural class; and it is hard to see why this should be so unless it is indeed the class of computable functions. .... The most convincing argument is that all of the results of recursion theory become quite rasonable (or even obvious) when recursive is replaced by computable.

Algo que no debemos hacer es identificar las aplicaciones parciales recursivas con las funciones parciales pragmáticamente computables, i.e., con las funciones parciales que sean computables físicamente, por ejemplo, mediante un ordenador, simplemente porque hay aplicaciones parciales recursivas tales que para calcular su valor en algún argumento no habría suficiente energía en el universo.

El concepto matemático de aplicación parcial recursiva no se deja agotar por el concepto informal de función parcial pragmáticamente computable, en el mejor de los casos, se deja aproximar asintóticamente por tal concepto, pero no se identifica con él. En última instancia no es lo mismo aceptar el conjunto de los números naturales como un todo acabado, completo, un infinito actual, que aceptar un sistema potencialmente infinito, un sistema abierto, susceptible de aumentar sin fin.

Hay algunos autores que se toman la libertad, injustificada, de identificar la hipótesis fundamental de la teoría de la recursión de Church-Turing-Kleene, que no es un teorema matemático y, por lo tanto, no tiene sentido plantearse la demostración de la misma, en todo caso justificarla o refutarla; con el teorema matemático que establece la equivalencia entre diferentes formalizaciones matemáticas del concepto no matemático de computabilidad, como, por ejemplo, que las máquinas matemáticas de Post-Turing, que en modo alguno son máquinas físicas, ya que se hace abstracción de las limitaciones espacio-temporales y energéticas, los algoritmos normales de Markoff, los sistemas canónicos de Post, etc, son equivalentes ente sí, i.e., definen el mismo conjunto de aplicaciones parciales de potencias de los números naturales en los números naturales. Con ello tales autores falsean la historia, al hacer una identificación que nadie ha sostenido, se confunden, al hacer la identificación entre una hipótesis y un teorema matemático, y, lo que es peor, inducen a error a los demás.

El autor de estas notas no ha leido en ninguno de los trabajos de los estudiosos de la teoría de la recursión, desde, e.g., Church, Gödel, Kleene, Kolmogoroff, Markoff, Post, Rosser, Shanin, Turing, etc, hasta, e.g., Davis, Friedman, Lacombe, Odifreddi, Saks, Shoenfield, Soare, etc, que alguno de ellos haga la identificación anterior, todos tratan de justificar la hipótesis haciendo girar sus argumentos, esencialmente, sobre la estabilidad del conjunto de las aplicaciones parciales recursivas, en el sentido de que las diferentes definiciones son equivalentes, salvo Kalmar que trata de refutarla.

Abundando en lo dicho conviene recordar lo dicho por Lacombe:

> Il est bien évident que beaucoup de théories mathématiques ont été construites (au moins initialment) pour "reproduir"- et, partant, pour approfondir- la structute de certains domains extra-mathématiques. Autrement dit, une notion mathématique donné constitue souvent une "traduction abstraite"(ou, comme on dit parfois, une "formalisation") de certains phénomènes "concretes". Dans le cas des fonctions récursives, ces phénomènes concrets sont d'ordre "périmathématique".
>
> Convenons de désigner par le mot *périmathématique* les questions qui portent sur la mathématique considérée comme un "fait". Ces questions, lorsqu'on les envisage directament, ne sont évidentment pas d'ordre mathématique, quelle que soit l'extension qu'on donne à ce dernier terme.
>
> On peut - très grossièrement - séparer les problèmes périmathématiques en deux groupes principaux: d'une part ceux qui concernent les notions ("intuitives") d'*énoncé mathématique* et de *démonstration* (d'où l'on déduit la notion de *théorème*), d'autre part ceux qui concernent les questions de *calculabilité effective* et de *décidabilité effective*. La reproduction mathématique des concepts du premier groupe s'effectue gràce à des *systèmes formels* adéquats; quant aux concepts du second groupe, nous nous proposons de montrer, comme la notion de récursivité en constitue une traduction mathématique satisfaisant.
>
> Il nous faut d'abord prèciser quelque peu, sur le plan "pratique"(ou "intuitive") le contenu concret de cette notion "périmathématique"d'"effectivité".
>
> Une application φ de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ est dite *effectivement calculable* s'il existe un procédé général et "uniforme", défini une fois pour toutes, permettant de passer de chaque p-uplet $(x_0, \ldots, x_{p-1})$ à la valeur $\varphi(x_0, \ldots, x_{p-1})$ au moyen d'une suite finie et effectivement déterminée d'opérations effectivement réalisables.
>
> Une telle "définition"n'offre évidentment aucun sens mathématique précis. Il ne saurait en être autrement, puisqu'il ne s'agit pas d'une notion

mathématique, mais d'un concept pratique qu'on peut seulement essayer de "décrire"ou de "circonscrire", ce qui ne peut guère s'effectuer que par voie d'exemples.

Une sous-ensemble E de $\mathbb{N}^p$ sera dit *effectivement décidable* s'il existe un procédé uniforme permettant de reconnaitre, pour chaque p-uplet $(x_0, \ldots, x_{p-1})$, au terme d'une suite fini et effectivement déterminée d'opérations élémentaires effectivement réalisables, si $(x_0, \ldots, x_{p-1})$ appartient ou non à E.

Une sous-ensemble E de $\mathbb{N}^p$ sera dit *effectivement semi-décidable* s'il existe un procédé uniforme permettant, pour chaque p-uplet $(x_0, \ldots, x_{p-1})$ de définir effectivement une suite d'opérations telle que: si $(x_0, \ldots, x_{p-1})$ appartient à E, la suite abouitesse à reconnaitre cette appartenance; mais si $(x_0, \ldots, x_{p-1})$ n'appartient pas à E, la suite se prolonge sans jamais aboutir.

Dans la mesure où les trois notions qui viennent d'être définies ont un sens intuitif, elles pssèdent les propriétés suivantes (parmi beaucoup d'autres analogues);

1. *Pour qu'un ensemble soit effectivement décidable, il faut et il suffit que sa fonction caractéristique soit effectivement calculable.*
2. *Pour qu'une fonction soit effectivement calculable, il faut que son graphe soit effectivement décidable, et il suffit que ce graphe soit effectivement semi-décidable.*
3. *Si un ensemble et son complémentaire sont tous deux effectivement semi-décidables, alors ils sont effectivement décidables.*

On peut donc en particulier affirmer l'énoncé (périmathématique et "intuitivement évident") suivant:

(B) Toutes les fonctions récursives sont effectivement calculables; tous les ensembles récursifs sont effectivement décidables; tous les ensembles récursivement énumérables sont effectivement semi-décidables.

Il est bien évident que l'adéquation d'une théorie mathématique à un domaine extra-mathématique ne peut faire l'objet ni d'un *énoncé* mathématique, ni *a fortiori* d'une *démonstration* mathématique. Une telle adéquation peut seulement se "justifier"expérimentalement.

Nous nous proposons donc d'établir l'adéquation de la notion mathématique de récursivité à la notion périmathématique d'effectivité. Cette adéquation, qui constitue la réciproque de l' ́énoncé (B), peut s'énoncer sous plusieurs formes équivalentes: Nous adopterons la forme (C) suivant:

(C) Toute fonction effectivement calculable est récursive.

Il s'agit-là, répétons-le, d'un énoncé *non mathématique*; en effet cette "thése", jointe à l'énoncé (B), exprime l'identité entre deux ensembles don l'un est mathématiquement défini, mais dont l'autre n'a qu'une existence purement pratique (ou "idéalement"pratique).

Il ne peut donc être question de *prouver* la proposition (C), mais seulement de la justifier par des arguments expérimentaux, aussi convaincants que possible

Teorema 4.119. *Sea $m \in \mathbb{N} - 1$, f una aplicación parcial de $\mathbb{N}^m$ en $\mathbb{N}$ tal que Γ_f sea recursivamente enumerable y φ una endoaplicación de $\mathbb{N}$ recursiva primitiva de gran amplitud. Entonces hay una aplicación recursiva primitiva ψ de $\mathbb{N}^{m+1}$ en $\mathbb{N}$ tal que $f = \varphi \circ \Omega^m_\mu(\psi)$. Por consiguiente f es una aplicación parcial recursiva.*

Demostración. □

Lema 4.120. *Sea $m \in \mathbb{N}$ y f una aplicación parcial de $\mathbb{N}^m$ en $\mathbb{N}$. Si Γ_f es una relación recursivamente enumerable, entonces* $\mathrm{Dom}(f)$ *es una relación recursivamente enumerable.*

Demostración. □

Lema 4.121. *Sea $m \in \mathbb{N}$ y f una aplicación parcial de $\mathbb{N}^m$ en $\mathbb{N}$ tal que Γ_f sea una relación recursivamente enumerable. Entonces la imagen inversa bajo f de un subconjunto recursivamente enumerable de $\mathbb{N}$ es una relación recursivamente enumerable.*

Demostración. □

Teorema 4.122 (del grafo)**.** *Sea $m \in \mathbb{N}$ y f una aplicación parcial de $\mathbb{N}^m$ en $\mathbb{N}$. Una condición necesaria y suficiente para que f sea una aplicación parcial recursiva es que Γ_f sea una relación recursivamente enumerable.*

Demostración. □

Teorema 4.123 (débil de la forma normal)**.** *Sea $m \in \mathbb{N} - 1$, f una aplicación parcial recursiva de $\mathbb{N}^m$ en $\mathbb{N}$ y φ una endoaplicación de $\mathbb{N}$ recursiva primitiva de gran amplitud. Entonces hay una aplicación recursiva primitiva ψ de $\mathbb{N}^{m+1}$ en $\mathbb{N}$ tal que $f = \varphi \circ \Omega^m_\mu(\psi)$*

Demostración. □

Definición 4.124. Sea $m \in \mathbb{N}$ y $n \geq 1$. Una *representación parcial recursiva* de $\mathbb{N}^m$ en $\mathbb{N}^n$ es una aplicación parcial f de $\mathbb{N}^m$ en $\mathbb{N}^n$ para la que existe una familia de aplicaciones parciales $(f_i)_{i\in n}$ en la que, para cada $i \in n$, f_i es una aplicación parcial recursiva de $\mathbb{N}^m$ en $\mathbb{N}$ tal que $f = \langle f_i \rangle_{i\in n}$, siendo $\langle f_i \rangle_{i\in n}$ la única aplicación parcial de $\mathbb{N}^m$ en $\mathbb{N}^n$ tal que:

1. Para cada $i \in n$, $\mathrm{pr}_{n,i} \circ \langle f_i \rangle_{i\in n} \leq f_i$.
2. Para cada aplicación parcial h de $\mathbb{N}^m$ en $\mathbb{N}^n$, si, para cada $i \in n$, $\mathrm{pr}_{n,i} \circ h \leq f_i$, entonces $h \leq \langle f_i \rangle_{i\in n}$.

Teorema 4.125 (generalizado del grafo)**.** *Sea $m \in \mathbb{N}$ $n \geq 1$ y f una representación parcial de $\mathbb{N}^m$ en $\mathbb{N}^n$. Una condición necesaria y suficiente para que f sea una representación parcial recursiva es que Γ_f sea una relación recursivamente enumerable.*

Demostración. □

Corolario 4.126. *Sea $m \in \mathbb{N}$ $n \geq 1$ y f una representación parcial recursiva de $\mathbb{N}^m$ en $\mathbb{N}^n$. Entonces se cumple que:*

1. *Si R es una relación m-aria recursivamente enumerable, entonces $f[R]$ es una relación n-aria recursivamente enumerable.*
2. *Si S es una relación n-aria recursivamente enumerable, entonces $f^{-1}[S]$ es una relación m-aria recursivamente enumerable.*
3. $\mathrm{Dom}(f)$ *es una relación m-aria recursivamente enumerable. En particular, el dominio de definición de una aplicación parcial recursiva es una relación recursivamente enumerable.*
4. $\mathrm{Im}(f)$ *es una relación n-aria recursivamente enumerable. En particular, la imagen de una aplicación parcial recursiva es un conjunto recursivamente enumerable.*
5. *Si $y \in \mathbb{N}^n$, entonces la fibra de f en y es una relación m-aria recursivamente enumerable. En particular, cada fibra de una aplicación parcial recursiva es una relación recursivamente enumerable.*
6. *Cada relación cuyo caracter sea una aplicación parcial recursiva es recursivamente enumerable.*

Proposición 4.127. *Sea $m \in \mathbb{N} - 1$, $n \in \mathbb{N}$, $(f_i)_{i\in m}$ una familia de aplicaciones parciales en la que, para cada $i \in m$, $f_i\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$, Q una relación m-aria y $\mathcal{F}$*

una subálgebra heterogénea de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\boldsymbol{\cdot}}, \mathbb{N})$*. Si, para cada* $i \in m$*,* f_i *es una aplicación parcial recursiva y* Q *es una relación recursivamente enumerable, entonces la relación* n*-aria* $\Pi_{\mathrm{C}}^{m,n}(Q, (f_i)_{i\in m})$ *en* $\mathbb{N}$ *es recursivamente enumerable.*

Demostración. $\square$

Proposición 4.128. *Sean* m*,* $n \in \mathbb{N}$*,* $(f_i)_{i\in m}$ *una familia de aplicaciones parciales en la que, para cada* $i \in m$*,* $f_i\colon \mathbb{N}^n \rightharpoonup \mathbb{N}$*,* $(R_i)_{i\in m}$ *una familia de relaciones* n*-arias tal que, para cada* i*,* $j \in m$*, si* $i \neq j$*, entonces* $R_i \cap R_j = \varnothing$ *y* $\bigcup_{i\in m} R_i = \mathbb{N}^n$*. Si, para cada* $i \in m$*,* f_i *es una aplicación parcial recursiva y* R_i *es recursivamente enumerable, entonces* $\Omega_{\mathrm{DC}}^{m,n}((f_i)_{i\in m}, (R_i)_{i\in m})$ *es una aplicación parcial recursiva.*

Demostración. $\square$

Corolario 4.129. *Las aplicaciones parciales* ξ_0, ξ_1*, que determinan la representación de* $\mathbb{N} - 1$ *sobre* $\mathbb{N}^{\star} - \{\lambda\}$*, para una representación recursiva primitiva de* $\mathbb{N}$ *sobre* $\mathbb{N}^{\star}$*, son parciales recursivas.*

Proposición 4.130. *Sea* $m \in \mathbb{N}$ *y* L *un subconjunto de* $\mathbb{N}^m$*. La relación* L *es recursivamente enumerable si y sólo si es una fibra de una aplicación parcial recursiva de* $\mathbb{N}^m$ *en* $\mathbb{N}$*.*

Proposición 4.131. *Sea* $m \in \mathbb{N}$ *y* L *un subconjunto de* $\mathbb{N}^m$*. La relación* L *es recursivamente enumerable si y sólo si es es el dominio de definición de una aplicación parcial recursiva de* $\mathbb{N}^m$ *en* $\mathbb{N}$*.*

Proposición 4.132. *Sea* L *un subconjunto de* $\mathbb{N}$*. Una condición necesaria y suficiente para que* L *sea recursivamente enumerable, es que sea la imagen de una endoaplicación parcial recursiva* f *de* $\mathbb{N}$*.*

Proposición 4.133. *Sea* $m \in \mathbb{N} - 1$ *y* L *un subconjunto de* $\mathbb{N}^m$*. La relación* L *es recursivamente enumerable si y sólo si es la imagen de una representación parcial recursiva* f *de* $\mathbb{N}$ *en* $\mathbb{N}^m$*.*

Proposición 4.134. *Sean* $m, n \in \mathbb{N} - 1$*,* f *una representación parcial de* $\mathbb{N}^m$ *en* $\mathbb{N}^n$ *y* g *una representación parcial de* $\mathbb{N}^n$ *en* $\mathbb{N}^m$ *tales que* $g \circ f \leq \mathrm{id}_{\mathbb{N}^m}$ *y* $f \circ g \leq \mathrm{id}_{\mathbb{N}^n}$*. Entonces* f *es una representación parcial recursiva si y sólo si* g *es una representación parcial recursiva.*

Corolario 4.135. *Sean* f *y* g *dos endoaplicaciones parciales de* $\mathbb{N}$ *tales que* $g \circ f \leq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ *y* $f \circ g \leq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$*. Entonces* f *es una aplicación parcial recursiva si y sólo si* g *es una aplicación parcial recursiva.*

4.6. La aplicación de Ackermann.

Presentamos una versión de la aplicación de Ackermann, basándonos en el trabajo de Hermes, que demuestra la existencia de aplicaciones computables que no son recursivas primitivas. Sin embargo la aplicación de Ackermann será recursiva general.

Proposición 4.136. *Si* $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *es recursiva primitiva, entonces, para cada* $x \in \mathbb{N}$*, la aplicación* $f^x\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *es recursiva primitiva, siendo* $f^0 = \mathrm{pr}_{1,0}$ *y, para* $0 \leq x$*,* $f^{x+1} = f^x \circ f$*, i.e., siendo* $(f^x)_{x\in\mathbb{N}}$ *la única aplicación de* $\mathbb{N}$ *en* $\mathrm{End}(\mathbb{N})$ *tal* *que el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{N} \arrow[dd, "(f^x)_{x\in\mathbb{N}}"'] & \mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{sc}"'] \arrow[dd, "(f^x)_{x\in\mathbb{N}}"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_0"] \arrow[dr, "\kappa_{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}}"'] & & \\
 & \mathrm{End}(\mathbb{N}) & \mathrm{End}(\mathbb{N}) \arrow[l, "F"]
\end{tikzcd}
$$

en el que κ_0 es la aplicación que al único miembro de 1 le asigna 0, $\kappa_{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}}$ la aplicación que al único miembro de 1 le asigna $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ y F la aplicación definida como:

$$
F\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{End}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathrm{End}(\mathbb{N}) \\ g & \longmapsto & g\circ f \end{array}\right.
$$

conmuta.

Demostración. $\square$

Definición 4.137. Denotamos por $(f_x)_{x\in\mathbb{N}}$ la única aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathrm{End}(\mathbb{N})$ tal que el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{N} \arrow[dd, "(f_x)_{x\in\mathbb{N}}"'] & \mathbb{N} \arrow[l, "\mathrm{sc}"'] \arrow[dd, "(f_x)_{x\in\mathbb{N}}"] \\
1 \arrow[ur, "\kappa_0"] \arrow[dr, "\kappa_{\mathrm{Sc}}"'] & & \\
 & \mathrm{End}(\mathbb{N}) & \mathrm{End}(\mathbb{N}) \arrow[l, "F"]
\end{tikzcd}
$$

en el que κ_0 es la aplicación que al único miembro de 1 le asigna 0, κ_{Sc} la aplicación que al único miembro de 1 le asigna Sc y F la aplicación definida como:

$$
F\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{End}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathrm{End}(\mathbb{N}) \\ t & \longmapsto & F(t)\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ y & \longmapsto & t^{y+1}(1) \end{array}\right. \end{array}\right.
$$

conmuta. De modo que $f_0 = \mathrm{sc}$ y, si $0 \leq x$, f_{x+1} asigna a un $y \in \mathbb{N}$, $f_{x+1}(y) = f_x^{y+1}(1)$.

A la composición de $(f_x)_{x\in\mathbb{N}} \times \mathrm{id}_{\mathbb{N}} \colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{N})\times\mathbb{N}$ con $\mathrm{ev}_{\mathbb{N},\mathbb{N}} \colon \mathrm{End}(\mathbb{N})\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, la denotamos por g, así que, para cada $(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $g(x,y) = f_x(y)$.

Proposición 4.138. *Para cada $x\in\mathbb{N}$, se cumple que $f_x \colon \mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ es una aplicación recursiva primitiva.*

Demostración. Observemos que f_{x+1} se obtiene por recursión a partir de la aplicación $\kappa_{f_x(1)} \colon \mathbb{N}^0 \longrightarrow \mathbb{N}$ y de $f_x \circ \mathrm{pr}_{2,1} \colon \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$. $\square$

Definición 4.139. Denotamos por Ack la correspondencia de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ definida como:

$$
\mathrm{Ack}(x,y) = \begin{cases} y+1, & \text{si } (x,y) = (0,y); \\ \mathrm{Ack}(x,1), & \text{si } (x,y) = (x+1,0); \\ \mathrm{Ack}(x,\mathrm{Ack}(x+1,y)), & \text{si } (x,y) = (x+1,y+1). \end{cases}
$$

Proposición 4.140. *La correspondencia Ack es una aplicación, i.e., para cada $(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, hay un único $z\in\mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Ack}(x,y) = z$.*

Demostración. Por inducción sobre x.

Para $x = 0$ se cumple que, para cada $y \in \mathbb{N}$, hay un único $z \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Ack}(x, y) = z$, ya que, en este caso, $\mathrm{Ack}(0, y) = y + 1$.

Supongamos que para $0 \leq x$ se cumpla que para cada $y \in \mathbb{N}$, hay un único $z \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Ack}(x, y) = z$. Demostramos entonces que para $x + 1$ también se tiene que para cada $y \in \mathbb{N}$, hay un único $z \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Ack}(x+1, y) = z$, por inducción sobre y.

Para $y = 0$ se cumple que hay un único $z \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Ack}(x + 1, 0) = z$, ya que en este caso, $\mathrm{Ack}(x + 1, 0) = \mathrm{Ack}(x, 1)$.

Supongamos que para $0 \leq y$ se cumpla que hay un único $z \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Ack}(x + 1, y) = z$. Entonces para $y + 1$ hay un único $z \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Ack}(x + 1, y + 1) = z$.

Por lo tanto, para cada $y \in \mathbb{N}$, hay un único $z \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Ack}(x + 1, y) = z$. De donde podemos afirmar que, para cada $x \in \mathbb{N}$ y para cada $y \in \mathbb{N}$, hay un único $z \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Ack}(x, y) = z$. □

Proposición 4.141. *Se cumple que* Ack *coincide con la aplicación g de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que a un $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, le asigna $f_x(y)$.*

Demostración. Por inducción sobre x.

Base de la inducción principal. Para $x = 0$ y para cada $y \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\begin{aligned} g(0, y) &= f_0(y) \\ &= y + 1 \\ &= \mathrm{Ack}(0, y). \end{aligned}$$

Hipótesis de la inducción principal. Supongamos que para $0 \leq x$ se cumpla que, para cada $y \in \mathbb{N}$, $g(x, y) = f_x(y) = \mathrm{Ack}(x, y)$. Demostramos entonces que para $x+1$ también se tiene que, para cada $y \in \mathbb{N}$, $g(x + 1, y) = \mathrm{Ack}(x + 1, y)$, por inducción sobre y.

Base de la inducción subordinada. Para $y = 0$ se cumple que

$$\begin{aligned} g(x + 1, 0) &= f_{x+1}(0) \\ &= f_x^1(1) \\ &= f_x(1) \\ &= g(x, 1) \\ &= \mathrm{Ack}(x, 1) \quad \text{Hipót. ind. prin..} \end{aligned}$$

Hipótesis de la inducción subordinada. Supongamos que para $0 \leq y$ se cumpla que $g(x + 1, y) = \mathrm{Ack}(x + 1, y)$. Entonces

$$\begin{aligned} g(x + 1, y + 1) &= f_{x+1}(y + 1) \\ &= f_x^{y+2}(1) \\ &= f_x(f_x^{y+1}(1)) \\ &= f_x(f_{x+1}(y)) \\ &= f_x(g(x + 1, y)) \\ &= \mathrm{Ack}(x, g(x + 1, y)) \qquad \text{(Hipót. ind. prin.)} \\ &= \mathrm{Ack}(x, \mathrm{Ack}(x + 1, y)) \quad \text{(Hipót. ind. sub.)} \\ &= \mathrm{Ack}(x + 1, y + 1). \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $y \in \mathbb{N}$, $g(x + 1, y) = \mathrm{Ack}(x + 1, y)$. De donde podemos afirmar que, para cada $x \in \mathbb{N}$ y para cada $y \in \mathbb{N}$, $g(x, y) = \mathrm{Ack}(x, y)$. □

Lema 4.142. *La aplicación de Ackermann es estrictamente creciente en ambas variables, i.e., se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Para cada* $a, b, y \in \mathbb{N}$*, si* $a < b$*, entonces* $\mathrm{Ack}(a, y) < \mathrm{Ack}(b, y)$.
2. *Para cada* $x, a, b, \in \mathbb{N}$*, si* $a < b$*, entonces* $\mathrm{Ack}(x, a) < \mathrm{Ack}(x, b)$.

Demostración. Es suficiente que demostremos que:

1. Para cada $x, y \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ack}(x, y) < \mathrm{Ack}(x + 1, y)$.
2. Para cada $x, y \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ack}(x, y) < \mathrm{Ack}(x, y + 1)$.

En *primer* lugar demostramos que, para cada $x, y \in \mathbb{N}$, $y < \mathrm{Ack}(x, y)$.

Si $x = 0$, entonces, para cada $y \in \mathbb{N}$, se cumple que $y < \mathrm{Ack}(0, y)$, porque $\mathrm{Ack}(0, y) = \mathrm{sc}(y)$.

Supongamos que para $0 \leq x$ se cumpla que $y < \mathrm{Ack}(x, y)$, para cada $y \in \mathbb{N}$. Vamos a demostrar que, para cada $y \in \mathbb{N}$, $y < \mathrm{Ack}(x+1, y)$. Si $y = 0$, entonces, por la definición de Ack, $\mathrm{Ack}(x+1, 0) = \mathrm{Ack}(x, 1)$, pero, por la hipótesis, $1 < \mathrm{Ack}(x, 1)$ y, ya que $0 < 1$, $0 < \mathrm{Ack}(x + 1, 0)$. Supongamos que para $0 \leq y$, $y < \mathrm{Ack}(x + 1, y)$. Entonces, por la definición de Ack, $\mathrm{Ack}(x + 1, y + 1) = \mathrm{Ack}(x, \mathrm{Ack}(x + 1, y))$, pero $\mathrm{Ack}(x + 1, y) \in \mathbb{N}$, luego, por la hipótesis de la inducción principal, $\mathrm{Ack}(x + 1, y) < \mathrm{Ack}(x, \mathrm{Ack}(x + 1, y))$, pero, por la hipótesis de la inducción subordinada, $y < \mathrm{Ack}(x+1, y)$, por lo tanto, de $y < \mathrm{Ack}(x+1, y)$ y $\mathrm{Ack}(x+1, y) < \mathrm{Ack}(x+1, y+1)$, obtenemos que $y + 1 < \mathrm{Ack}$, $\mathrm{Ack}(x + 1, y + 1)$, así que, para cada $y \in \mathbb{N}$, se cumple que $y < \mathrm{Ack}(x + 1, y)$, De donde, para cada $x, y \in \mathbb{N}$, $y < \mathrm{Ack}(x, y)$.

En *segundo* lugar demostramos que, para cada $x, y \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ack}(x, y) < \mathrm{Ack}(x, y + 1)$.

Si $x = 0$, entonces, para cada $y \in \mathbb{N}$, se cumple que $\mathrm{Ack}(0, y) = \mathrm{sc}(y) < y + 2 = \mathrm{Ack}(0, y + 1)$, luego, para cada $y \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ack}(0, y) < \mathrm{Ack}(0, y + 1)$.

Supongamos que para $0 \leq x$ se cumpla que, para cada $y \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ack}(x, y) < \mathrm{Ack}(x, y + 1)$. Vamos a demostrar que, para cada $y \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ack}(x + 1, y) < \mathrm{Ack}(x + 1, y + 1)$. Sea $y \in \mathbb{N}$, entonces, por la definición de Ack, tenemos que

$$\mathrm{Ack}(x + 1, y + 1) = \mathrm{Ack}(x, \mathrm{Ack}(x + 1, y)),$$

pero, por la primera parte, se cumple que

$$\mathrm{Ack}(x + 1, y) < \mathrm{Ack}(x, \mathrm{Ack}(x + 1, y)),$$

luego $\mathrm{Ack}(x + 1, y) < \mathrm{Ack}(x + 1, y + 1)$, así que, para cada $y \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Ack}(x + 1, y) < \mathrm{Ack}(x + 1, y + 1),$$

por lo tanto, para cada $x, y \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ack}(x, y) < \mathrm{Ack}(x, y + 1)$.

En *tercer* lugar demostramos que, para cada $x, y \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ack}(x, y + 1) \leq \mathrm{Ack}(x + 1, y)$.

Si $y = 0$, entonces, para cada $x \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\mathrm{Ack}(x + 1, 0) = \mathrm{Ack}(x, 1) = \mathrm{Ack}(x, 0 + 1),$$

luego, $\mathrm{Ack}(x, 1) \leq \mathrm{Ack}(x + 1, 0)$, por lo tanto, para cada $x \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ack}(x, 1) \leq \mathrm{Ack}(x + 1, 0)$.

Supongamos que para $0 \leq y$ se cumpla que, para cada $x \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Ack}(x, y + 1) \leq \mathrm{Ack}(x + 1, y).$$

Vamos a demostrar que, para cada $x \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Ack}(x, y + 2) \leq \mathrm{Ack}(x + 1, y + 1).$$

Sea $x \in \mathbb{N}$, entonces, por la primera parte, $y + 1 < \mathrm{Ack}(x, y + 1)$, luego $y + 2 \leq \mathrm{Ack}(x, y + 1)$. Ahora bien, por la hipótesis de inducción,

$$\mathrm{Ack}(x, y + 1) \leq \mathrm{Ack}(x + 1, y),$$

luego $y + 2 \leq \mathrm{Ack}(x + 1, y)$. Entonces, por la segunda parte,

$$\mathrm{Ack}(x, y + 2) \leq \mathrm{Ack}(x, \mathrm{Ack}(x + 1, y)) = \mathrm{Ack}(x + 1, y + 1),$$

i.e., para cada $x \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Ack}(x, y+2) \leq \mathrm{Ack}(x+1, y+1),$$

por lo tanto para cada $x, y \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ack}(x, y+1) \leq \mathrm{Ack}(x+1, y)$.

En *cuarto* lugar demostramos que, para cada $x, y \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ack}(x, y) < \mathrm{Ack}(x+1, y)$.

Sean $x, y \in \mathbb{N}$, entonces por la segunda parte, $\mathrm{Ack}(x, y) < \mathrm{Ack}(x, y+1)$, pero, por la tercera parte, $\mathrm{Ack}(x, y+1) \leq \mathrm{Ack}(x+1, y)$, luego $\mathrm{Ack}(x, y) < \mathrm{Ack}(x+1, y)$. □

Lema 4.143. *Para cada $r \in \mathbb{N}$ y cada $(c_j)_{j\in r} \in \mathbb{N}^r$, hay un $c \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $y \in \mathbb{N}$, se cumple que*

$$\textstyle\sum_{j\in r} \mathrm{Ack}(c_j, y) \leq \mathrm{Ack}(c, y).$$

Demostración. Si $r = 0$, es suficiente tomar $c = 0$, ya que $0 < \mathrm{sc}(0) = \mathrm{Ack}(0, y)$.

Si $r = 1$, es suficiente tomar $c = c_0$, ya que $\sum_{j\in 1} \mathrm{Ack}(c_j, y) = \mathrm{Ack}(c_0, y) \leq \mathrm{Ack}(c_0, y)$.

Para $r = 0, 1$, el resultado es obvio, así que la base de la inducción ha de ser $r = 2$. En este caso sea $d = \text{máx}\{c_0, c_1\}$ y $c = d+4$. Entonces $\mathrm{Ack}(c_0, y) \leq \mathrm{Ack}(d, y)$ y $\mathrm{Ack}(c_1, y) \leq \mathrm{Ack}(d, y)$, luego

$$\begin{aligned} \mathrm{Ack}(c_0, y) + \mathrm{Ack}(c_1, y) &\leq 2\mathrm{Ack}(d, y) \\ &< 2\mathrm{Ack}(d, y) + 3. \end{aligned}$$

Pero $2\mathrm{Ack}(d, y) + 3 = \mathrm{Ack}(2, \mathrm{Ack}(d, y))$, $\mathrm{Ack}(d, y) < \mathrm{Ack}(d+3, y)$, por ser Ack estrictamente creciente en la primera variable, $\mathrm{Ack}(2, \mathrm{Ack}(d, y)) < \mathrm{Ack}(2, \mathrm{Ack}(d+3, y))$, por ser Ack estrictamente creciente en la segunda variable, y $\mathrm{Ack}(2, \mathrm{Ack}(d+3, y)) < \mathrm{Ack}(2+d, \mathrm{Ack}(d+3, y))$. De las dos últimas desigualdades obtenemos que

$$\mathrm{Ack}(2, \mathrm{Ack}(d, y)) < \mathrm{Ack}(2+d, \mathrm{Ack}(d+3, y)).$$

Ahora bien, por la definición de Ack, tenemos que

$$\mathrm{Ack}(2+d, \mathrm{Ack}(d+3, y)) = \mathrm{Ack}(d+3, y+1),$$

y, puesto que $\mathrm{Ack}(x, y+1) \leq \mathrm{Ack}(x+1, y)$, $\mathrm{Ack}(d+3, y+1) \leq \mathrm{Ack}(d+4, y)$, pero $\mathrm{Ack}(d+4, y) = \mathrm{Ack}(c, y)$, así que $\mathrm{Ack}(c_0, y) + \mathrm{Ack}(c_1, y) \leq \mathrm{Ack}(\text{máx}\{c_0, c_1\} + 4, y)$.

Supongamos que para $2 \leq r$ y cada $(c_j)_{j\in r} \in \mathbb{N}^r$, exista un $c \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $y \in \mathbb{N}$, se cumpla que

$$\textstyle\sum_{j\in r} \mathrm{Ack}(c_j, y) \leq \mathrm{Ack}(c, y).$$

Sea $(c_j)_{j\in r+1} \in \mathbb{N}^{r+1}$. Entonces, para cada $y \in \mathbb{N}$,

$$\textstyle\sum_{j\in r+1} \mathrm{Ack}(c_j, y) = (\sum_{j\in r} \mathrm{Ack}(c_j, y)) + \mathrm{Ack}(c_r, y),$$

luego, por la hipótesis de inducción, hay un $c \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $y \in \mathbb{N}$, $\sum_{j\in r} \mathrm{Ack}(c_j, y) \leq \mathrm{Ack}(c, y)$, por lo tanto, para cada $y \in \mathbb{N}$,

$$\textstyle\sum_{j\in r} \mathrm{Ack}(c_j, y) + \mathrm{Ack}(c_r, y) \leq \mathrm{Ack}(c, y) + \mathrm{Ack}(c_r, y),$$

de donde, por la base de la inducción, hay un $d \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $y \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ack}(c, y) + \mathrm{Ack}(c_r, y) \leq \mathrm{Ack}(d, y)$, así que, para cada $y \in \mathbb{N}$, $\sum_{j\in r+1} \mathrm{Ack}(c_j, y) \leq \mathrm{Ack}(d, y)$. Podemos pués afirmar que, para cada $r \in \mathbb{N}$ y cada $(c_j)_{j\in r} \in \mathbb{N}^r$, hay un $c \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $y \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\textstyle\sum_{j\in r} \mathrm{Ack}(c_j, y) \leq \mathrm{Ack}(c, y).$$

□

Lema 4.144. *Para cada aplicación* $f\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$*, si hay un* $c \in \mathbb{N}$ *tal que, para cada* $(x_i)_{i\in n} \in \mathbb{N}^n$*, se cumple que*

$$f(x_i \mid i \in n) < \mathrm{Ack}(c, \textstyle\sum_{i\in n} x_i),$$

entonces hay un $d \in \mathbb{N}$ *tal que, para cada* $(x_i)_{i\in n} \in \mathbb{N}^n$*, se cumple que*

$$f(x_i \mid i \in n) + \textstyle\sum_{i\in n} x_i < \mathrm{Ack}(d, \sum_{i\in n} x_i).$$

Demostración. Sea $(x_i)_{i\in n} \in \mathbb{N}^n$, puesto que

$$f(x_i \mid i \in n) + \textstyle\sum_{i\in n} x_i = f(x_i \mid i \in n) + \sum_{i\in n} \mathrm{pr}_{n,i}(x_i \mid i \in n),$$

$f(x_i \mid i \in n) < \mathrm{Ack}(c, \sum_{i\in n} x_i)$ y, para cada $i \in n$, $\mathrm{pr}_{n,i}(x_i \mid i \in n) < \mathrm{Ack}(0, \sum_{i\in n} x_i)$, tenemos que

$$f(x_i \mid i \in n) + \textstyle\sum_{i\in n} \mathrm{pr}_{n,i}(x_i \mid i \in n) < \mathrm{Ack}(c, \sum_{i\in n} x_i) + n\mathrm{Ack}(0, \sum_{i\in n} x_i),$$

luego para un $d \in \mathbb{N}$ se cumple que, para cada $(x_i)_{i\in n} \in \mathbb{N}^n$,

$$\mathrm{Ack}(c, \textstyle\sum_{i\in n} x_i) + n\mathrm{Ack}(0, \sum_{i\in n} x_i) < \mathrm{Ack}(d, \sum_{i\in n} x_i),$$

así que, para cada $(x_i)_{i\in n} \in \mathbb{N}^n$,

$$f(x_i \mid i \in n) + \textstyle\sum_{i\in n} x_i < \mathrm{Ack}(d, \sum_{i\in n} x_i).$$

□

Lema 4.145. *Para cada aplicación recursiva primitiva* $f\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ *hay un* $c \in \mathbb{N}$ *tal que, para cada* $(x_i)_{i\in n} \in \mathbb{N}^n$*, se cumple que*

$$f(x_i \mid i \in n) < \mathrm{Ack}(c, \textstyle\sum_{j\in n} x_i).$$

Demostración. Sean $n, c \in \mathbb{N}$. Entonces denotamos por $\mathcal{F}_{n,c}$ el conjunto de las aplicaciones $f\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ para las que se cumple que, para cada$(x_i)_{i\in n} \in \mathbb{N}^n$, $f(x_i \mid i \in n) < \mathrm{Ack}(c, \sum_{j\in n} x_i)$. Además, denotamos por $\mathcal{F}_{\mathrm{Ack}}$ el conjunto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{c\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{n,c}$. Para demostrar el lema es suficiente que demostremos que $\mathcal{F}_{\mathrm{Ack}}$ contiene a las aplicaciones recursivas primitivas básicas y que está cerrado bajo los operadores de composición y de recursión primitiva.

Se cumple que $\kappa_{0,0} \in \mathcal{F}_{\mathrm{Ack}}$, porque, para $c = 0$, tenemos que $0 < \mathrm{Ack}(0,0) = 1$.

Se cumple que $\mathrm{sc} \in \mathcal{F}_{\mathrm{Ack}}$, porque, para $c = 1$, tenemos que, para cada $y \in \mathbb{N}$, $\mathrm{sc}(y) = \mathrm{Ack}(0, y)$ y además, para cada $y \in \mathbb{N}$, por ser Ack estrictamente creciente en la primera variable, $\mathrm{Ack}(0, y) < \mathrm{Ack}(1, y)$, luego, para cada $y \in \mathbb{N}$, $\mathrm{sc}(y) < \mathrm{Ack}(1, y)$.

Se cumple que, para cada $n \in \mathbb{N} - 1$ y cada $j \in n$, $\mathrm{pr}_{n,j} \in \mathcal{F}_{\mathrm{Ack}}$, porque, para $c = 0$, tenemos que, para cada $(y_i)_{i\in n} \in \mathbb{N}^n$, $\mathrm{pr}_{n,j}(y_i \mid i \in n) = y_j < \mathrm{Ack}(0, \sum_{i\in n} y_i) = \sum_{i\in n} y_i + 1$.

Demostramos ahora que $\mathcal{F}_{\mathrm{Ack}}$ está cerrado bajo los operadores de composición. Sea $1 \leq m$, $n \in \mathbb{N}$, $g \in \mathcal{F}_{\mathrm{Ack}} \cap \mathrm{Hom}(\mathbb{N}^m, \mathbb{N})$ y $(h_j)_{j\in m} \in \mathcal{F}_{\mathrm{Ack}}^m \cap \mathrm{Hom}(\mathbb{N}^n, \mathbb{N})^m$. Entonces hay un $c_g \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $(x_j)_{j\in m} \in \mathbb{N}^m$, $g(x_j \mid j \in m) < \mathrm{Ack}(c_g, \sum_{j\in m} x_j)$ y, para cada $j \in m$, hay un $c_{h_j} \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $(y_i)_{i\in n} \in \mathbb{N}^n$, $h_j(y_i \mid i \in n) < \mathrm{Ack}(c_{h_j}, \sum_{i\in n} y_i)$. Sea $\Omega_{\mathrm{C}}^{m,n}(g, (h_j)_{j\in m})$ la composición de g y $(h_j)_{j\in m}$. Puesto que, para cada $(y_i)_{i\in n} \in \mathbb{N}^n$ y cada $j \in m$, $h_j(y_i \mid i \in n) \in \mathbb{N}$ y $g \in \mathcal{F}_{\mathrm{Ack}}$, se cumple que

$$\Omega_{\mathrm{C}}^{m,n}(g, (h_j)_{j\in m})(y_i \mid i \in n) < \mathrm{Ack}(c_g, \textstyle\sum_{j\in m} h_j(y_i \mid i \in n)),$$

pero, ya que, para cada $j \in m$, hay un $c_{h_j} \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $(y_i)_{i\in n} \in \mathbb{N}^n$, $h_j(y_i \mid i \in n) < \mathrm{Ack}(c_{h_j}, \sum_{i\in n} y_i)$, tenemos que, para cada $(y_i)_{i\in n} \in \mathbb{N}^n$, $\sum_{j\in m} h_j(y_i \mid i \in n) < \sum_{j\in m} \mathrm{Ack}(c_{h_j}, \sum_{i\in n} y_i)$. Por lo tanto, por ser Ack estrictamente creciente en la segunda variable, también se cumple que

$$\mathrm{Ack}(c_g, \textstyle\sum_{j\in m} h_j(y_i \mid i \in n)) < \mathrm{Ack}(c_g, \sum_{j\in m} \mathrm{Ack}(c_{h_j}, \sum_{i\in n} y_i)).$$

Pero dado que, para cada $r \in \mathbb{N}$ y cada $(c_j)_{j\in r} \in \mathbb{N}^r$, hay un $c \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $y \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\textstyle\sum_{j\in r}\mathrm{Ack}(c_j, y) \leq \mathrm{Ack}(c, y),$$

para $r = m$ y $(c_j)_{j\in m} = (c_{h_j})_{j\in m})$, hay un $c \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $(y_i)_{i\in n} \in \mathbb{N}^n$, $\sum_{j\in m}\mathrm{Ack}(c_{h_j}, \sum_{i\in n} y_i) \leq \mathrm{Ack}(c, \sum_{i\in n} y_i)$, luego, para cada $(y_i)_{i\in n} \in \mathbb{N}^n$, $\mathrm{Ack}(c_g, \sum_{j\in m}\mathrm{Ack}(c_{h_j}, \sum_{i\in n} y_i)) \leq \mathrm{Ack}(c_g, \mathrm{Ack}(c, \sum_{i\in n} y_i))$, pero $c < c_g + c + 1$, así que, por ser Ack estrictamente creciente en la primera variable, para cada $(y_i)_{i\in n} \in \mathbb{N}^n$, $\mathrm{Ack}(c, \sum_{i\in n} y_i) < \mathrm{Ack}(c_g + c + 1, \sum_{i\in n} y_i)$, luego, por ser Ack estrictamente creciente en la segunda variable, para cada $(y_i)_{i\in n} \in \mathbb{N}^n$, tenemos que

$$\textstyle\mathrm{Ack}(c_g, \mathrm{Ack}(c, \sum_{i\in n}y_i)) < \mathrm{Ack}(c_g, \mathrm{Ack}(c_g + c + 1, \sum_{i\in n}y_i)).$$

Puesto que $c_g \leq c_g + c$, para cada $(y_i)_{i\in n} \in \mathbb{N}^n$, se cumple que

$$\textstyle\mathrm{Ack}(c_g, \mathrm{Ack}(c_g + c + 1, \sum_{i\in n}y_i)) \leq \mathrm{Ack}(c_g + c, \mathrm{Ack}(c_g + c + 1, \sum_{i\in n}y_i)),$$

así que

$$\textstyle\mathrm{Ack}(c_g, \mathrm{Ack}(c, \sum_{i\in n}y_i)) \leq \mathrm{Ack}(c_g + c, \mathrm{Ack}(c_g + c + 1, \sum_{i\in n}y_i)),$$

pero, por la definición de Ack, para cada $(y_i)_{i\in n} \in \mathbb{N}^n$, tenemos que

$$\textstyle\mathrm{Ack}(c_g + c, \mathrm{Ack}(c_g + c + 1, \sum_{i\in n}y_i) = \mathrm{Ack}(c_g + c + 1, (\sum_{i\in n}y_i) + 1).$$

Puesto que, para cada $x, y \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ack}(x, y + 1) \leq \mathrm{Ack}(x + 1, y)$, tenemos que, para cada $(y_i)_{i\in n} \in \mathbb{N}^n$, se cumple que

$$\textstyle\mathrm{Ack}(c_g + c + 1, (\sum_{i\in n}y_i) + 1) \leq \mathrm{Ack}(c_g + c + 2, \sum_{i\in n}y_i),$$

de donde $\Omega^{m,n}_{\mathrm{C}}(g, (h_j)_{j\in m}) \in \mathcal{F}_{\mathrm{Ack}}$.

Demostramos ahora que $\mathcal{F}_{\mathrm{Ack}}$ está cerrado bajo los operadores de recursión. Sea $m \in \mathbb{N}$, $g \in \mathcal{F}_{\mathrm{Ack}} \cap \mathrm{Hom}(\mathbb{N}^m, \mathbb{N})$ y $h \in \mathcal{F}_{\mathrm{Ack}} \cap \mathrm{Hom}(\mathbb{N}^n, \mathbb{N})^{m+2}$. Entonces hay un $c_g \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $(x_j)_{j\in m} \in \mathbb{N}^m$, $g(x_j \mid j \in m) < \mathrm{Ack}(c_g, \sum_{j\in m} x_j)$ y hay un $c_h \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $(x_j)_{j\in m+2} \in \mathbb{N}^{m+2}$, $h(x_j \mid j \in m + 2) < \mathrm{Ack}(c_h, \sum_{j\in m+2} x_j)$. Vamos a demostrar que $\Omega^m_{\mathrm{R}}(g, h) \in \mathcal{F}_{\mathrm{Ack}}$, i.e., que hay un $c \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $((x_j)_{j\in m}, y) \in \mathbb{N}^{m+1}$, se cumple que

$$\textstyle\Omega^m_{\mathrm{R}}(g, h)((x_j)_{j\in m}, y) < \mathrm{Ack}(c, \sum_{j\in m}x_j + y).$$

Por el lema anterior, para g, hay un $d_g \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $(x_j)_{i\in m} \in \mathbb{N}^m$, se cumple que

$$\textstyle g(x_j \mid j \in m) + \sum_{j\in m}x_j < \mathrm{Ack}(d_g, \sum_{j\in m}x_j),$$

y, por el mismo lema, para h, hay un $d_h \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $(x_j)_{i\in m+2} \in \mathbb{N}^{m+2}$, se cumple que

$$\textstyle h(x_j \mid j \in m + 2) + \sum_{j\in m+2}x_j < \mathrm{Ack}(d_h, \sum_{j\in m+2}x_j).$$

Vamos a demostrar que hay un $c \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $((x_j)_{j\in m}, y) \in \mathbb{N}^{m+1}$, $\Omega^m_{\mathrm{R}}(g, h)((x_j)_{j\in m}, y) + \sum_{j\in m} x_j + y < \mathrm{Ack}(c, \sum_{j\in m}x_j + y)$, por inducción sobre y.

Sea $(x_j)_{j\in m} \in \mathbb{N}^m$, arbitrario pero fijo.

Para $y = 0$ tenemos que

$$\textstyle\Omega^m_{\mathrm{R}}(g, h)((x_j)_{j\in m}, 0) + \sum_{j\in m}x_j + 0 = g(x_j \mid j \in m) + \sum_{j\in m}x_j + 0,$$

pero $g(x_j \mid j \in m)+\sum_{j\in m} x_j < \mathrm{Ack}(d_g, \sum_{j\in m}x_j)$ y, puesto que $d_g < \mathrm{máx}\{d_g, d_h\}+ 1$, tenemos que

$$\textstyle\mathrm{Ack}(d_g, \sum_{j\in m}x_j) < \mathrm{Ack}(\mathrm{máx}\{d_g, d_h\} + 1, \sum_{j\in m}x_j),$$

así que

$$\textstyle\Omega^m_{\mathrm{R}}(g, h)((x_j)_{j\in m}, 0) + \sum_{j\in m}x_j + 0 < \mathrm{Ack}(\mathrm{máx}\{d_g, d_h\} + 1, \sum_{j\in m}x_j + 0).$$

Supongamos que para $0 \leq y$, se cumpla que

$$\Omega^m_{\mathrm{R}}(g,h)((x_j)_{j\in m}, y) + \sum_{j\in m} x_j + y < \mathrm{Ack}(\mathrm{máx}\{d_g, d_h\} + 1, \textstyle\sum_{j\in m} x_j + y).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\Omega^m_{\mathrm{R}}(g,h)((x_j)_{j\in m}, y+1) &+ \textstyle\sum_{j\in m} x_j + y + 1 \\ &= h((x_j)_{j\in m}, y, \Omega^m_{\mathrm{R}}(g,h)((x_j)_{j\in m}, y)) + \textstyle\sum_{j\in m} x_j + y + 1.\end{aligned}$$

Ahora bien, tenemos que

$$\begin{aligned}h((x_j)_{j\in m}, y, \Omega^m_{\mathrm{R}}(g,h)((x_j)_{j\in m}, y)) &+ [\textstyle\sum_{j\in m} x_j + y + \Omega^m_{\mathrm{R}}(g,h)((x_j)_{j\in m}, y)] \\ &< \mathrm{Ack}(d_h, \textstyle\sum_{j\in m} x_j + y + \Omega^m_{\mathrm{R}}(g,h)((x_j)_{j\in m}, y)),\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}h((x_j)_{j\in m}, y, \Omega^m_{\mathrm{R}}(g,h)((x_j)_{j\in m}, y)) &+ [\textstyle\sum_{j\in m} x_j + y + \Omega^m_{\mathrm{R}}(g,h)((x_j)_{j\in m}, y) + 1] \\ &< \mathrm{Ack}(d_h, \textstyle\sum_{j\in m} x_j + y + \Omega^m_{\mathrm{R}}(g,h)((x_j)_{j\in m}, y)) + 1,\end{aligned}$$

pero también

$$\begin{aligned}&h((x_j)_{j\in m}, y, \Omega^m_{\mathrm{R}}(g,h)((x_j)_{j\in m}, y)) + [\textstyle\sum_{j\in m} x_j + y + 1] \\ &< h((x_j)_{j\in m}, y, \Omega^m_{\mathrm{R}}(g,h)((x_j)_{j\in m}, y)) + [\textstyle\sum_{j\in m} x_j + y + 1 + \Omega^m_{\mathrm{R}}(g,h)((x_j)_{j\in m}, y)],\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}h((x_j)_{j\in m}, y, \Omega^m_{\mathrm{R}}(g,h)((x_j)_{j\in m}, y)) &+ [\textstyle\sum_{j\in m} x_j + y + 1] \\ &< \mathrm{Ack}(d_h, \textstyle\sum_{j\in m} x_j + y + \Omega^m_{\mathrm{R}}(g,h)((x_j)_{j\in m}, y)) + 1.\end{aligned}$$

Por hipótesis,

$$\begin{aligned}\Omega^m_{\mathrm{R}}(g,h)((x_j)_{j\in m}, y) &+ \textstyle\sum_{j\in m} x_j + y \\ &< \mathrm{Ack}(\mathrm{máx}\{d_g, d_h\} + 1, \textstyle\sum_{j\in m} x_j + y),\end{aligned}$$

luego, por ser Ack estrictamente creciente en la segunda variable,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ack}(d_h, &\textstyle\sum_{j\in m} x_j + y + \Omega^m_{\mathrm{R}}(g,h)((x_j)_{j\in m}, y)) \\ &< \mathrm{Ack}(d_h, \mathrm{Ack}(\mathrm{máx}\{d_g, d_h\} + 1, \textstyle\sum_{j\in m} x_j + y)),\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathrm{Ack}(d_h, &\textstyle\sum_{j\in m} x_j + y + \Omega^m_{\mathrm{R}}(g,h)((x_j)_{j\in m}, y)) + 1 \\ &< \mathrm{Ack}(d_h, \mathrm{Ack}(\mathrm{máx}\{d_g, d_h\} + 1, \textstyle\sum_{j\in m} x_j + y)) + 1,\end{aligned}$$

pero como $d_h \leq \mathrm{máx}\{d_g, d_h\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{Ack}(d_h, &\mathrm{Ack}(\mathrm{máx}\{d_g, d_h\} + 1, \textstyle\sum_{j\in m} x_j + y)) \\ &\leq \mathrm{Ack}(\mathrm{máx}\{d_g, d_h\}, \mathrm{Ack}(\mathrm{máx}\{d_g, d_h\} + 1, \textstyle\sum_{j\in m} x_j + y)),\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathrm{Ack}(d_h, &\mathrm{Ack}(\mathrm{máx}\{d_g, d_h\} + 1, \textstyle\sum_{j\in m} x_j + y)) + 1 \\ &\leq \mathrm{Ack}(\mathrm{máx}\{d_g, d_h\}, \mathrm{Ack}(\mathrm{máx}\{d_g, d_h\} + 1, \textstyle\sum_{j\in m} x_j + y)) + 1,\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}\mathrm{Ack}(\mathrm{máx}\{d_g, d_h\}, &\mathrm{Ack}(\mathrm{máx}\{d_g, d_h\} + 1, \textstyle\sum_{j\in m} x_j + y)) \\ &= \mathrm{Ack}(\mathrm{máx}\{d_g, d_h\} + 1, \textstyle\sum_{j\in m} x_j + y + 1),\end{aligned}$$

así que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ack}(\text{máx}\{d_g, d_h\}, \mathrm{Ack}(\text{máx}\{d_g, d_h\} + 1, \textstyle\sum_{j\in m} x_j + y)) + 1 \\
= \mathrm{Ack}(\text{máx}\{d_g, d_h\} + 1, \textstyle\sum_{j\in m} x_j + y + 1) + 1,
\end{aligned}
$$

luego

$$
\begin{aligned}
\Omega^m_{\mathrm{R}}(g,h)((x_j)_{j\in m}, y) + \textstyle\sum_{j\in m} x_j + y + 1 \\
< \mathrm{Ack}(\text{máx}\{d_g, d_h\} + 1, \textstyle\sum_{j\in m} x_j + y + 1).
\end{aligned}
$$

Hemos demostrado pués que hay un $c \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $((x_j)_{j\in m}, y) \in \mathbb{N}^{m+1}$,

$$\Omega^m_{\mathrm{R}}(g,h)((x_j)_{j\in m}, y) + \textstyle\sum_{j\in m} x_j + y < \mathrm{Ack}(\text{máx}\{d_g, d_h\} + 1, \textstyle\sum_{j\in m} x_j + y),$$

pero

$$\Omega^m_{\mathrm{R}}(g,h)((x_j)_{j\in m}, y) \leq \Omega^m_{\mathrm{R}}(g,h)((x_j)_{j\in m}, y) + \textstyle\sum_{j\in m} x_j + y,$$

por lo tanto

$$\Omega^m_{\mathrm{R}}(g,h)((x_j)_{j\in m}, y) < \mathrm{Ack}(\text{máx}\{d_g, d_h\} + 1, \textstyle\sum_{j\in m} x_j + y).$$

□

Corolario 4.146. *La endoaplicación de* $\mathbb{N}$ *obtenida de la aplicación* Ack *por diagonalización no es recursiva primitiva.*

Demostración. Si la aplicación $\mathrm{Dg}(\mathrm{Ack})\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ que a un $x \in \mathbb{N}$ le asigna $\mathrm{Dg}(\mathrm{Ack})(x) = \mathrm{Ack}(x, x)$, fuera recursiva primitiva, entonces existiría un $c \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $x \in \mathbb{N}$, se cumpliría que

$$\mathrm{Dg}(\mathrm{Ack})(x) < \mathrm{Ack}(c, x).$$

Por lo tanto, para $x = c$, tendríamos que $\mathrm{Dg}(\mathrm{Ack})(c) < \mathrm{Ack}(c, c)$, i.e., que $\mathrm{Ack}(c, c) < \mathrm{Ack}(c, c)$, contradicción. □

Corolario 4.147. *La aplicación* Ack *no es recursiva primitiva.*

Demostración. Si Ack fuera recursiva primitiva, también lo sería Dg(Ack), contradicción. □

4.7. Aplicaciones recursivas generales.

Definiremos, en primer lugar, el conjunto de las aplicaciones recursivas generales como la intersección del conjunto de las aplicaciones (con argumentos y valores, números naturales) y del conjunto de las aplicaciones parciales recursivas. A continuación caracterizaremos tal conjunto como la unión de la mínima subálgebra heterogénea de una determinada álgebra heterogénea *parcial* y también constructivamente.

Después definiremos la noción de relación recursiva a través de la de relación recursivamente enumerable, daremos una condición necesaria y suficiente para que una relación sea recursiva en términos de la aplicación característica de la misma, demostraremos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto de las relaciones recursivas es un álgebra booleana que contiene a las partes finitas de $\mathbb{N}^n$, y por lo tanto a las relaciones n-arias cofinitas, y caracterizaremos a las relaciones recursivas mediante las fibras de las aplicaciones recursivas.

Además, demostraremos que el sistema de las relaciones recursivas está cerrado bajo el operador mixto de composición generalizada para aplicaciones recursivas y relaciones recursivas, cilindrificaciones, concatenación, los operadores relacionales de cuantificación existencial y universal limitada, así como que los operadores mixtos de minimización limitada transforman relaciones recursivas en aplicaciones recursivas y que el operador mixto de definición por casos transforma aplicaciones recursivas y relaciones recursivas en aplicaciones recursivas.

Por otra parte, demostraremos que las relaciones recursivas se conservan bajo las imágenes inversas mediante la aplicación determinada por una familia de aplicaciones recursivas, que la función subyacente de una aplicación recursiva es una relación recursiva y que las fibras de una aplicación recursiva son relaciones recursivas. Por último, caracterizaremos, para $n \geq 1$, las relaciones recursivamente enumerables como aquellas que son vacías o la imagen mediante la aplicación determinada por una n-familia de endoaplicaciones de $\mathbb{N}$ recursivas.

Definición 4.148. Sea $m \in \mathbb{N}$ y f una aplicación parcial de $\mathbb{N}^m$ en $\mathbb{N}$. Decimos que f es una *aplicación recursiva general* o, simplemente, una *aplicación recursiva* si es una aplicación parcial recursiva y $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{N}^m$. Al conjunto de las aplicaciones recursivas generales lo denotamos por ARG.

Introducimos a continuación el concepto de aplicación regular que nos permitirá, en definitiva, caracterizar a las aplicaciones recursivas algebraicamente, como con las otras clases de aplicaciones consideradas hasta ahora, pero haciendo uso de álgebras heterogéneas parciales y no totales.

Definición 4.149. Sea $m \in \mathbb{N}$ y f una aplicación de $\mathbb{N}^{m+1}$ en $\mathbb{N}$. Decimos que f es una *aplicación regular* si para cada $x \in \mathbb{N}^m$ existe un $y \in \mathbb{N}$ tal que $f(x, y) = 0$. Al conjunto de las aplicaciones regulares de $\mathbb{N}^{m+1}$ en $\mathbb{N}$ lo denotamos por $\mathrm{Hom}_{\mathrm{reg}}(\mathbb{N}^{m+1}, \mathbb{N})$.

Proposición 4.150. *Sea f una aplicación regular de $\mathbb{N}^{m+1}$ en $\mathbb{N}$. Entonces hay una única aplicación g de $\mathbb{N}^m$ en $\mathbb{N}$, obtenida por minimización a partir de la aplicación regular f tal que, para cada $x \in \mathbb{N}^m$, $g(x) = \min\{\, y \in \mathbb{N} \mid f(x, y) = 0 \,\}$.*

Definición 4.151. Sea $m \in \mathbb{N}$. Entonces denotamos por $\Omega^m_{\mu,\mathrm{reg}}$ la aplicación parcial de $\mathrm{Hom}(\mathbb{N}^{m+1}, \mathbb{N})$ en $\mathrm{Hom}(\mathbb{N}^m, \mathbb{N})$ cuyo dominio de definición es $\mathrm{Hom}_{\mathrm{reg}}(\mathbb{N}^{m+1}, \mathbb{N})$ y que a una aplicación regular f de $\mathbb{N}^{m+1}$ en $\mathbb{N}$ le asigna la aplicación $\Omega^m_{\mu,\mathrm{reg}}(f)$ de $\mathbb{N}^m$ en $\mathbb{N}$ obtenida por minimización a partir de la aplicación regular f.

Definición 4.152. Denotamos por $\mathbf{\Sigma}^{\mathrm{rg}}$ la $\mathbb{N}$-signatura algebraica heterogénea, para las aplicaciones recursivas generales, cuya coordenada (w, n)-ésima, con $(w, n) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}$, es la definida como:

$$\Sigma_{w,n} = \begin{cases} \{\kappa_{0,0}\}, & \text{si } w = \lambda \text{ y } n = 0; \\ \{\mathrm{sc}\} \cup \{\mathrm{pr}_{1,0}\}, & \text{si } w = \lambda \text{ y } n = 1; \\ \{\, \mathrm{pr}_{n,i} \mid i \in n \,\}, & \text{si } w = \lambda \text{ y } n \geq 2; \\ \{\Omega^{m,n}_{\mathrm{C}}\}, & \text{si } w = (m) \curlywedge (n \mid i \in m) \text{ y } m \geq 1; \\ \{\Omega^m_{\mathrm{R}}\}, & \text{si } w = (m) \curlywedge (m+2) \text{ y } n = m+1; \\ \{\Omega^m_{\mu,\mathrm{reg}}\}, & \text{si } w = (m+1) \text{ y } n = m; \\ \varnothing, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Definición 4.153. Denotamos por $\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\cdot}, \mathbb{N})$ la $\mathbf{\Sigma}^{\mathrm{rg}}$-álgebra heterogénea parcial cuyo $\mathbb{N}$-conjunto subyacente, $\mathrm{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\cdot}, \mathbb{N})$, es $(\mathrm{Hom}(\mathbb{N}^n, \mathbb{N}))_{n \in \mathbb{N}}$, de modo que la coordenada n-ésima es el conjunto de las aplicaciones de $\mathbb{N}^n$ en $\mathbb{N}$, y en la que las operaciones estructurales son:

1. $\kappa_{0,0}$, la aplicación constante 0-aria determinada por 0, que es la aplicación de $\mathbb{N}^0$ en $\mathbb{N}$, que al único miembro de $\mathbb{N}^0$ le asigna como valor 0.
2. sc, la aplicación sucesor.
3. $\mathrm{pr}_{1,0}$, la aplicación identidad de $\mathbb{N}$.
4. Para cada $n \geq 2$ y cada $i \in n$, $\mathrm{pr}_{n,i}$, la proyección canónica i-ésima de $\mathbb{N}^n$ en $\mathbb{N}$.

5. Para cada $m \in \mathbb{N}-1$ y cada $n \in \mathbb{N}$, $\Omega_{\mathrm{C}}^{m,n}$, el operador de composición (generalizada) de ariedad $(m) \curlywedge (n \mid i \in m)$ y coariedad n, que es la aplicación de $\mathrm{Hom}(\mathbb{N}^m, \mathbb{N}) \times (\mathrm{Hom}(\mathbb{N}^n, \mathbb{N}))^m$ en $\mathrm{Hom}(\mathbb{N}^n, \mathbb{N})$ que a un par $(f, (g_i \mid i \in m))$ del primero le asigna como valor la aplicación $\Omega_{\mathrm{C}}^{m,n}(f, (g_i \mid i \in m))$ de $\mathbb{N}^n$ en $\mathbb{N}$ obtenida componiendo $\langle g_i \mid i \in m \rangle$ y f.
6. Para cada $m \in \mathbb{N}$, Ω_{R}^{m}, el operador de recursión primitiva de ariedad $(m) \curlywedge (m+2)$ y coariedad $m+1$, que es la aplicación de $\mathrm{Hom}(\mathbb{N}^m, \mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}(\mathbb{N}^{m+2}, \mathbb{N})$ en $\mathrm{Hom}(\mathbb{N}^{m+1}, \mathbb{N})$ que a un par (f, g) del primero le asigna como valor la aplicación $\Omega_{\mathrm{R}}^{m}(f, g)$ de $\mathbb{N}^{m+1}$ en $\mathbb{N}$ obtenida de f y g por recursión primitiva.
7. Para cada $m \in \mathbb{N}$, $\Omega_{\mu,\mathrm{reg}}^{m}$, el *operador parcial de minimización* de ariedad $(m+1)$ y coariedad m, que es la aplicación parcial de $\mathrm{Hom}(\mathbb{N}^{m+1}, \mathbb{N})$ en $\mathrm{Hom}(\mathbb{N}^m, \mathbb{N})$ que a una aplicación regular $f\colon \mathbb{N}^{m+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ del primero le asigna como valor la aplicación $\Omega_{\mu,\mathrm{reg}}^{m}(f)\colon \mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{N}$, obtenida de f por minimización.

En la definición anterior, en virtud del isomorfismo natural que existe entre ambos, hemos identificado el conjunto $\mathrm{Hom}(\mathbb{N}^1, \mathbb{N})$ con el conjunto $\mathrm{End}(\mathbb{N})$, de las endoaplicaciones de $\mathbb{N}$. Además, para simplificar la notación, hemos identificado los símbolos de operación heterogéneos con sus realizaciones en el $\mathbb{N}$-conjunto $(\mathrm{Hom}(\mathbb{N}^n, \mathbb{N}))_{n\in\mathbb{N}}$.

Hasta ahora, para definir los conceptos de aplicación recursiva primitiva y de aplicación parcial recursiva, hemos considerado el concepto de subálgebra de un álgebra heterogénea cuyas operaciones están, todas, totalmente definidas, pero la $\mathbf{\Sigma}^{\mathrm{rg}}$-álgebra heterogénea $\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$ es parcial, i.e., tiene al menos una operación estructural parcial, y, por lo tanto, hemos de redefinir el concepto de subálgebra para este tipo de álgebras heterogéneas parciales. Convenimos que un $\mathbb{N}$-subconjunto $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ del $\mathbb{N}$-conjunto subyacente $\mathrm{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$ de $\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$, es una subálgebra precisamente cuando cumpla las siguientes condiciones:

- $\kappa_{0,0} \in \mathcal{F}_0$.
- $\mathrm{sc} \in \mathcal{F}_1$.
- $\mathrm{pr}_{1,0} \in \mathcal{F}_1$.
- Para cada $n \geq 2$ y cada $i \in n$, $\mathrm{pr}_{n,i} \in \mathcal{F}_n$.
- Para cada $m \in \mathbb{N}-1$, cada $n \in \mathbb{N}$, cada $f \in \mathcal{F}_m$ y cada $(g_i \mid i \in m) \in (\mathcal{F}_n)^m$, $\Omega_{\mathrm{C}}^{m,n}(f, (g_i \mid i \in m)) \in \mathcal{F}_n$.
- Para cada $m \in \mathbb{N}$, cada $f \in \mathcal{F}_m$ y cada $g \in \mathcal{F}_{m+2}$, $\Omega_{\mathrm{R}}^{m}(f, g) \in \mathcal{F}_{m+1}$.
- Para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $f \in \mathcal{F}_{m+1}$, si f es regular, entonces $\Omega_{\mu,\mathrm{reg}}^{m}(f) \in \mathcal{F}_m$.

Del mismo modo que para las álgebras heterogéneas, para el caso que nos ocupa tenemos las siguientes proposiciones.

Proposición 4.154.
1. $(\mathrm{Hom}(\mathbb{N}^n, \mathbb{N}))_{n\in\mathbb{N}}$ *es una subálgebra de* $\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$.
2. *Si* $(\mathcal{F}^i)_{i\in I}$ *es una familia no vacía de subálgebras de* $\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$*, entonces* $\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}^i$ *es una subálgebra de* $\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$.
3. *Si* $(\mathcal{F}^i)_{i\in I}$ *es una familia no vacía de subálgebras de* $\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$*, y si dados* $i, j \in I$*, hay un* $k \in I$ *tal que* $\mathcal{F}^i \cup \mathcal{F}^j \subseteq_{\mathbb{N}} \mathcal{F}^k$*, entonces* $\bigcup_{i\in I} \mathcal{F}^i$ *es una subálgebra de* $\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$.

Corolario 4.155. *Para la* $\mathbf{\Sigma}^{\mathrm{rg}}$*-álgebra heterogénea* $\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$*, se cumple que la endoaplicación* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}$ *del conjunto* $\mathrm{Sub}_{\mathbb{N}}(\mathrm{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N}))$*, de los* $\mathbb{N}$*-subconjuntos de* $\mathrm{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})$*, definida como:*

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})} \begin{cases} \mathrm{Sub}_{\mathbb{N}}(\mathrm{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})) & \longrightarrow \mathrm{Sub}_{\mathbb{N}}(\mathrm{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})) \\ \qquad\mathcal{F} & \longmapsto \bigcap\{\, \mathcal{C} \in \mathrm{S}(\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet}, \mathbb{N})) \mid \mathcal{F} \subseteq_{\mathbb{N}} \mathcal{C} \,\} \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{Im}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}) \subseteq \mathrm{Cl}(\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N}))$.
2. $\{\, \mathcal{X} \in \mathrm{Sub}_{\mathbb{N}}(\mathrm{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})) \mid \mathcal{X} = \mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}(\mathcal{X}) \,\} = \mathrm{Cl}(\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N}))$.
3. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}$ *es extensiva, i.e., para cada* $\mathcal{X} \in \mathrm{Sub}_{\mathbb{N}}(\mathrm{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N}))$*, se cumple que* $\mathcal{X} \subseteq_{\mathbb{N}} \mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}(\mathcal{X})$.
4. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}$ *es isótona, i.e., para cada* $\mathcal{X},\mathcal{Y} \in \mathrm{Sub}_{\mathbb{N}}(\mathrm{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N}))$*, si* $\mathcal{X} \subseteq_{\mathbb{N}} \mathcal{Y}$*, entonces* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}(\mathcal{X}) \subseteq_{\mathbb{N}} \mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}(\mathcal{Y})$.
5. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}$ *es idempotente, i.e., para cada* $\mathcal{X} \in \mathrm{Sub}_{\mathbb{N}}(\mathrm{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N}))$*, se cumple que* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}(\mathcal{X}) = \mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}(\mathcal{X}))$.
6. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}$ *es algebraica, i.e., para cada familia no vacía* $(\mathcal{X}^i \mid i \in I)$ *en* $\mathrm{Sub}_{\mathbb{N}}(\mathrm{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N}))$*, si para cada* $i,j \in I$*, existe un* $k \in I$ *tal que* $\mathcal{X}^i \cup \mathcal{X}^j \subseteq_{\mathbb{N}} \mathcal{X}^k$*, entonces* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}(\bigcup_{i\in I}\mathcal{X}^i) = \bigcup_{i\in I}\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}(\mathcal{X}^i)$.

Por consiguiente, para cada $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})$, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}(\mathcal{X})$*, al que también denotamos por* $\overline{\mathcal{X}}$*, es el mínimo cerrado de* $\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})$ *que contiene a* $\mathcal{X}$*, y lo denominamos el cerrado de* $\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})$ generado *por* $\mathcal{X}$.

Demostración. □

Observemos que la propiedad de algebricidad del operador $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}$ equivale a que, para cada $\mathcal{X} \subseteq_{\mathbb{N}} \mathrm{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})$, se cumpla que:

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}(\mathcal{X}) = \textstyle\bigcup_{\mathcal{F}\in\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{X})}\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}(\mathcal{F}),$$

siendo $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{X})$ el conjunto formado por los $\mathbb{N}$-subconjuntos $\mathcal{F}$ de $\mathcal{X}$ tales que el soporte de $\mathcal{F}$, i.e., el conjunto $\mathrm{supp}(\mathcal{F}) = \{\, n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{F}_n \neq \varnothing \,\}$, es finito y, además, para cada $n \in \mathrm{supp}(\mathcal{F})$, $\mathcal{F}_n$ es finito.

Definición 4.156. Sea $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un $\mathbb{N}$-subconjunto finito de $\mathrm{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})$. Entonces a las aplicaciones pertenecientes a la unión de la subálgebra heterogénea de $\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})$ generada por tal $\mathbb{N}$-subconjunto finito, las denominamos aplicaciones *recursivas generales relativas a* $\mathcal{F}$, o aplicaciones $\mathcal{F}$*-recursivas generales*, y al conjunto de todas ellas lo denotamos por $\mathrm{ARG}(\mathcal{F})$.

En particular, el conjunto de las aplicaciones *recursivas generales*, denotado por ARG, es la unión de la subálgebra heterogénea de $\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})$ generada por el $\mathbb{N}$-conjunto $(\varnothing)_{n\in\mathbb{N}}$ (cuyas coordenadas son todas vacías).

No perdemos generalidad, si en lugar de definir el conjunto de las aplicaciones recursivas generales respecto de un $\mathbb{N}$-subconjunto finito de $\mathrm{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})$, lo definimos respecto de una subálgebra heterogénea finitamente generada de $\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})$, ya que, debido a que el operador $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}$ es idempotente, para cada $\mathbb{N}$-subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathrm{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})$, se cumple que:

$$\mathrm{ARG}(\mathcal{F}) = \mathrm{ARG}(\overline{\mathcal{F}}).$$

Además, si $\mathcal{F}$ es una subálgebra heterogénea finitamente generada de $\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})$, entonces $\mathrm{ARG}(\mathcal{F})$ es, simplemente, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$.

Como consecuencia inmediata de las propiedades del operador $\mathrm{Sg}_{\mathbf{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})}$, tenemos, por una parte, que para cada $\mathbb{N}$-subconjunto finito $\mathcal{F}$ de $\mathrm{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})$, $\mathrm{ARG} \subseteq \mathrm{ARG}(\mathcal{F})$, i.e., que toda aplicación recursiva general es una aplicación $\mathcal{F}$-recursiva general y, por otra, que si $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ son tres $\mathbb{N}$-subconjuntos finitos de $\mathrm{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\bullet},\mathbb{N})$ tales que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$, y, además, toda aplicación de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$ es $\mathcal{G}$-recursiva general y toda aplicación de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{G}_n$ es $\mathcal{H}$-recursiva general, entonces toda aplicación de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$ es $\mathcal{H}$-recursiva general.

Proposición 4.157. *Sea $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un $\mathbb{N}$-subconjunto finito de $\mathrm{H}^{\mathrm{rg}}(\mathbb{N}^{\cdot}, \mathbb{N})$ y $f \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}(\mathbb{N}^n, \mathbb{N})$. Entonces una condición necesaria y suficiente para que $f \in \mathrm{ARG}(\mathcal{F})$ es que exista una sucesión de formación para f relativa a $\mathbf{\Sigma}^{\mathrm{rg}}$ y $\mathcal{F}$, i.e., que exista un $p \in \mathbb{N} - 1$, y una familia $(f_i)_{i\in p}$ en $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}(\mathbb{N}^n, \mathbb{N})$ tal que $f = f_{p-1}$ y, para cada $i \in p$, se cumpla que:*

1. *$f_i \in \mathcal{F}_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, o*
2. *$f_i = \kappa_{0,0}$, o*
3. *$f_i = \mathrm{sc}$, o*
4. *$f_i = \mathrm{pr}_{1,0}$, o*
5. *$f_i = \mathrm{pr}_{n,j}$, para algún $n \geq 2$ y algún $j \in n$, o*
6. *f_i es $m+1$-aria y $f_i = \Omega^m_{\mathrm{R}}(f_j, f_k)$, para un j y un $k \in i$ tales que f_j sea m-aria y f_k sea $m+2$-aria, o*
7. *f_i es m-aria y $f_i = \Omega^m_{\mu,\mathrm{reg}}(f_j)$, para un $j \in i$ tal que f_j sea $m+1$-aria regular, o*
8. *f_i es n-aria y $f_i = \Omega^{m,n}_{\mathrm{C}}(f_j, (f_{k_\alpha})_{\alpha\in m)})$, para un $m \in \mathbb{N} - 1$, un $j \in i$ y una familia $(k_\alpha)_{\alpha\in m} \in i^m$ tal que f_j sea m-aria y, para cada $\alpha \in p$, f_{k_α} sea n-aria.*

Corolario 4.158. *Sea $f \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}(\mathbb{N}^n, \mathbb{N})$. Entonces una condición necesaria y suficiente para que $f \in \mathrm{ARG}$ es que exista un $p \in \mathbb{N} - 1$, y una familia $(f_i)_{i\in p}$ en $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}(\mathbb{N}^n, \mathbb{N})$ tal que $f = f_{p-1}$ y, para cada $i \in p$, se cumpla que:*

1. *$f_i = \kappa_{0,0}$, o*
2. *$f_i = \mathrm{sc}$, o*
3. *$f_i = \mathrm{pr}_{1,0}$, o*
4. *$f_i = \mathrm{pr}_{n,j}$, para algún $n \geq 2$ y algún $j \in n$, o*
5. *f_i es $m+1$-aria y $f_i = \Omega^m_{\mathrm{R}}(f_j, f_k)$, para un j y un $k \in i$ tales que f_j sea m-aria y f_k sea $m+2$-aria, o*
6. *f_i es m-aria y $f_i = \Omega^m_{\mu,\mathrm{reg}}(f_j)$, para un $j \in i$ tal que f_j sea $m+1$-aria regular, o*
7. *f_i es n-aria y $f_i = \Omega^{m,n}_{\mathrm{C}}(f_j, (f_{k_\alpha})_{\alpha\in m})$, para un $m \in \mathbb{N} - 1$, un $j \in i$ y una familia $(k_\alpha)_{\alpha\in m} \in i^m$ tal que f_j sea m-aria y, para cada $\alpha \in p$, f_{k_α} sea n-aria.*

Proposición 4.159. *Toda aplicación recursiva primitiva es recursiva general y toda aplicación de esta última clase es una aplicación parcial recursiva.*

Corolario 4.160. *El conjunto de las aplicaciones recursivas generales es infinito numerable. Por consiguiente, la mayoría de las aplicaciones numericas no son recursivas primitivas.*

4.8. Relaciones recursivas generales.

Definición 4.161. Sea $n \in \mathbb{N}$ y R una relación n-aria sobre $\mathbb{N}$. Decimos que R es una *relación recursiva general*, si tanto R como $\mathbb{N}^n - R$ son recursivamente enumerables. Al conjunto de las relaciones recursivamente lo denotamos por REC.

Proposición 4.162. *Toda relación recursiva primitiva es recursiva y toda relación de esta última clase es recursivamente enumerable.*

Proposición 4.163. *Para cada $n \in \mathbb{N} - 1$, el conjunto de las relaciones n-arias en $\mathbb{N}$ recursivas es infinito numerable. Por consiguiente, el conjunto* REC *es infinito numerable. De donde se deduce que la mayoría de las relaciones en $\mathbb{N}$ no son recursivas.*

Demostración. □

Proposición 4.164. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y R una relación n-aria sobre $\mathbb{N}$. Una condición necesaria y suficiente para que R sea recursiva es que ch_R sea una aplicación recursiva.*

Demostración. □

Proposición 4.165. *Sea $m \in \mathbb{N}-1$, $n \in \mathbb{N}$, $(f_i)_{i\in m}$ una familia de aplicaciones en la que, para cada $i \in m$, $f_i\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$, Q una relación m-aria y $\mathcal{F}$ una subálgebra finitamente generada heterogénea de $\mathbf{H}^{\mathrm{rp}}(\mathbb{N}^{\boldsymbol{\cdot}}, \mathbb{N})$. Si, para cada $i \in m$, f_i es recursiva y Q es una relación recursiva, entonces la relación n-aria $\Pi^{m,n}_{\mathrm{C}}(Q, (f_i)_{i\in m})$ en $\mathbb{N}$ es recursiva.*

Demostración. □

Proposición 4.166. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y R una relación n-aria en $\mathbb{N}$. Si R es recursiva, entonces la relación n-aria $\mathrm{Ng}^n(R)$ en $\mathbb{N}$ es recursiva.*

Proposición 4.167. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y P y Q dos relaciones n-arias en $\mathbb{N}$. Si P y Q son recursivas, entonces la relación n-aria $\mathrm{Cj}^n(P, Q)$ en $\mathbb{N}$ es recursiva.*

Proposición 4.168. *Sean m, n y $t \in \mathbb{N}$ tales que $t > m, n$, $\alpha\colon m \rightarrowtail t$, $\beta\colon n \rightarrowtail t$, P una relación m-aria en $\mathbb{N}$, Q una relación n-aria en $\mathbb{N}$. Si P y Q son recursivas, entonces la relación t-aria $\mathrm{Cj}^{m,n}_{\alpha,\beta,t}(P, Q)$ en $\mathbb{N}$ es recursiva.*

Proposición 4.169. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y P y Q dos relaciones n-arias en $\mathbb{N}$. Si P y Q son recursivas, entonces la relación n-aria $\mathrm{Dj}^n(P, Q)$ en $\mathbb{N}$ es recursiva.*

Proposición 4.170. *Sean m, n y $t \in \mathbb{N}$ tales que $t > m, n$, $\alpha\colon m \rightarrowtail t$, $\beta\colon n \rightarrowtail t$, P una relación m-aria en $\mathbb{N}$, Q una relación n-aria en $\mathbb{N}$. Si P y Q son recursivas, entonces la relación t-aria $\mathrm{Dj}^{m,n}_{\alpha,\beta,t}(P, Q)$ en $\mathbb{N}$ es recursiva.*

Corolario 4.171. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces el conjunto de las relaciones n-arias en $\mathbb{N}$ recursivas es una subálgebra Booleana del álgebra Booleana $\mathrm{Sub}(\mathbb{N}^n)$. Además, $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}^n)$ está incluido en tal subálgebra Booleana.*

Proposición 4.172. *Sean q, $r \in \mathbb{N}$, φ una aplicación estrictamente creciente de q en $r + q$ y L una relación r-aria en $\mathbb{N}$. Si L es recursiva, entonces la relación $r + q$-aria $\mathrm{Cyl}_\varphi(L)$ en $\mathbb{N}$ (el cilindro en $\mathbb{N}^{r+q}$ elevado sobre L a lo largo de los ejes φ), es recursiva.*

Proposición 4.173. *Sean m, $n \in \mathbb{N}$, L una relación m-aria en $\mathbb{N}$ y M una relación n-aria en $\mathbb{N}$. Si L y M son recursivas, entonces la concatenación de L y M, $L \curlywedge M$, que es una relación $m + n$-aria en $\mathbb{N}$, es recursiva.*

Proposición 4.174. *Sea $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{N}^n, \mathbb{N})$. Si f es recursiva, entonces Γ_f, la función subyacente de f, es recursiva.*

Proposición 4.175. *Sea $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} - 1$ y $(f_i)_{i\in n}$ una familia de aplicaciones en la que, para cada $i \in n$, $f_i\colon \mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{N}$. Si, para cada $i \in n$, f_i es recursiva, entonces $\Gamma_{\langle f_i \mid i\in n\rangle}$ es recursiva.*

Proposición 4.176. *Sea $f\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{N}$. Si f es recursiva, entonces $f^{-1}[\{a\}]$, la fibra de f en a, es recursiva.*

Proposición 4.177. *Sea $L \subseteq \mathbb{N}^n$. Entonces una condición necesaria y suficiente para que L sea recursiva es que exista una aplicación $f\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que f sea recursiva y L sea la fibra de f en un $a \in \mathbb{N}$.*

Proposición 4.178. *Sean m, $n \in \mathbb{N}$, $(f_i)_{i\in m}$ una familia de aplicaciones en la que, para cada $i \in m$, $f_i\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$, $(R_i)_{i\in m}$ una familia de relaciones n-arias tal que, para cada i, $j \in m$, si $i \neq j$, entonces $R_i \cap R_j = \varnothing$ y $\bigcup_{i\in m} R_i = \mathbb{N}^n$. Si, para* *cada* $i \in m$, f_i *es recursiva y* R_i *es recursiva, entonces* $\Omega^{m,n}_{\mathrm{DC}}((f_i)_{i\in m}, (R_i)_{i\in m})$ *es una aplicación recursiva.*

Demostración. □

Proposición 4.179. *Sean* $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} - 1$, $(f_i)_{i\in n}$ *una familia de aplicaciones en la que, para cada* $i \in n$, $f_i \colon \mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{N}$ *y* $L \subseteq \mathbb{N}^n$. *Si, para cada* $i \in n$, f_i *es recursiva y* L *es recursiva, entonces* $\langle f_i\rangle_{i\in n}^{-1}[L]$, *la imagen inversa de* L *bajo* $\langle f_i\rangle_{i\in n}$, *es recursiva. En particular, si* f *es una aplicación* m*-aria recursiva y* L *un subconjunto recursivo de* $\mathbb{N}$, *entonces* $f^{-1}[L]$ *es una relación recursiva.*

La recursividad de las relaciones no se conserva, en general, bajo la formación de imágenes directas.

Proposición 4.180. *Sean* $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} - 1$, $(f_i)_{i\in n}$ *una familia de aplicaciones en la que, para cada* $i \in n$, $f_i \colon \mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{N}$ *y* $L \subseteq \mathbb{N}^n$. *Si, para cada* $i \in n$, f_i *es recursiva,* $\langle f_i\rangle_{i\in n}$ *es sobreyectiva,* L *es recursiva y las imágenes directas de* L *y* $\mathbb{N}^m - L$ *bajo* $\langle f_i\rangle_{i\in n}$ *son disjuntas, entonces* $\langle f_i\rangle_{i\in n}[L]$, *la imagen directa de* L *bajo* $\langle f_i\rangle_{i\in n}$, *es recursiva.*

Proposición 4.181. *Sean* $n \in \mathbb{N}$ *y* $f \colon \mathbb{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{N}$. *Si* f *es recursiva, entonces* $\sum^{n+1}_{<}(f)$, $\sum^{n+1}_{\leq}(f)$, $\prod^{n+1}_{<}(f)$ *y* $\prod^{n+1}_{\leq}(f)$ *son recursivas.*

Proposición 4.182. *Sean* $n \in \mathbb{N}$ *y* $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$. *Si* R *es recursiva, entonces* $\exists^{n+1}_{<}(R)$, $\exists^{n+1}_{\leq}(R)$, $\forall^{n+1}_{<}(R)$ *y* $\forall^{n+1}_{\leq}(R)$ *son recursivas.*

Proposición 4.183. *Sea* $n \in \mathbb{N}$ *y* $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$. *Si* R *es recursiva, entonces* $\mu^{n+1}_{<}(R)$ *y* $\mu^{n+1}_{\leq}(R)$ *son recursivas.*

Proposición 4.184. *Sea* $m \in \mathbb{N}$ *y* $R \subseteq \mathbb{N}^{m+1}$. *Si* R *es recursiva, entonces* $\Omega^{m}_{\mu}(\mathrm{ch}_R)$ *es una aplicación parcial recursiva.*

Proposición 4.185. *Sean* $n \in \mathbb{N} - 1$ *y* $L \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$. *Si* L *es recursiva, entonces* $\mathrm{Inf}^{n+1}(L)$ *es recursiva.*

Proposición 4.186. *Sean* $m \in \mathbb{N} - 1$ *y* $L \subseteq \mathbb{N}^m$. *Una condición necesaria y suficiente para que* L *sea recursivamente enumerable es que sea vacío o exista una familia de aplicaciones* $(f_i)_{i\in m}$ *en la que, para cada* $i \in m$, f_i *sea una endoaplicación de* $\mathbb{N}$ *recursiva tal que* $L = \mathrm{Im}(\langle f_i\rangle_{i\in m})$.

Proposición 4.187. *Sea* L *un subconjunto infinito de* $\mathbb{N}$ *y* f *una enumeración directa de* L. *Si* f *es recursiva, entonces* L *es recursivo.*

Corolario 4.188. *Si* L *es un subconjunto infinito de* $\mathbb{N}$ *recursivamente enumerable, entonces* L *contiene un subconjunto infinito recursivo.*

Proposición 4.189. *Sea* L *un subconjunto infinito de* $\mathbb{N}$. *Si* L *es recursivo, entonces existe una enumeración directa de* L *recursiva.*

Corolario 4.190. *Sea* L *un subconjunto infinito de* $\mathbb{N}$. *Si* L *es recursivo, entonces* L *es la imagen de una endoaplicación de* $\mathbb{N}$ *creciente y recursiva.*

Proposición 4.191. *Sea* L *un subconjunto infinito de* $\mathbb{N}$. *Si* L *es recursivamente enumerable, entonces* L *es la imagen de una endoaplicación de* $\mathbb{N}$ *inyectiva y recursiva.*

Proposición 4.192. *Sea* $m \in \mathbb{N} - 1$ *y* L *un subconjunto infinito de* $\mathbb{N}^m$. *Si* L *es recursivamente enumerable, entonces hay una familia de aplicaciones* $(f_i)_{i\in m}$ *en la que, para cada* $i \in m$, f_i *sea una endoaplicación recursiva de* $\mathbb{N}$ *tal que* $\langle f_i \mid i \in m\rangle$ *induce una biyección entre* $\mathbb{N}$ *y* L.

Proposición 4.193. *Sea L un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$. Si L es recursivamente enumerable, entonces hay una endoaplicación recursiva f de $\mathbb{N}$ tal que $L = \mathrm{Im}(f)$ y, para cada $n \in L$, la fibra de f en n es infinita numerable.*

4.9. La jerarquía aritmética.

Definición 4.194. Al conjunto de las relaciones recursivas lo denotamos por $\Delta^0_1 = \Sigma^0_0 = \Pi^0_0$. Si $R \subseteq \mathbb{N}^k$, decimos que R es Σ^0_{n+1} si hay una relación $Q \in \mathrm{Sub}(\mathbb{N}^{k+1}) \cap \Pi^0_n$ tal que

$$R = \{\, x \in \mathbb{N}^k \mid \exists y \in \mathbb{N}\, ((x, y) \in Q) \,\}.$$

Por último, si $R \subseteq \mathbb{N}^k$, decimos que R es Π^0_{n+1} si hay una relación $Q \in \mathrm{Sub}(\mathbb{N}^{k+1}) \cap \Sigma^0_n$ tal que

$$R = \{\, x \in \mathbb{N}^k \mid \forall y \in \mathbb{N}\, ((x, y) \in Q) \,\}.$$

El conjunto Σ^0_1 es el formado por las relaciones recursivamente enumerables. El concepto de relación recursivamente enumerable es la contrapartida matemática de la noción informal de semicomputabilidad, del mismo modo que el de relación recursiva es el de computabilidad.

La jerarquía aritmética es la contrapartida de la jerarquía de Borel en la teoría descriptiva de conjuntos. Recordemos que para un espacio metrizable $\mathbf{X} = (X, \mathcal{T})$ y para los ordinales α tales que $1 \leq \alpha < \omega_1$, $\Sigma^0_1(\mathbf{X})$ es $\mathcal{T}$, el conjunto de los abiertos del espacio metrizable, $\Pi^0_1(\mathbf{X})$ es el conjunto de los cerrados del mismo, y, para $1 < \alpha < \omega_1$, $\Sigma^0_\alpha(\mathbf{X}) = (\bigcup_{\beta\in\alpha} \Pi^0_\beta(\mathbf{X}))_\sigma$ y $\Pi^0_\alpha(\mathbf{X}) = (\bigcup_{\beta\in\alpha} \Sigma^0_\beta(\mathbf{X}))_\delta$. Por último, para los ordinales α tales que $1 \leq \alpha < \omega_1$, $\Delta^0_\alpha(\mathbf{X}) = \Sigma^0_\alpha(\mathbf{X}) \cap \Pi^0_\alpha(\mathbf{X})$. Por ejemplo, el conjunto $\Delta^0_1(\mathbf{X})$ está formado por los subconjuntos de X que son abiertos y cerrados (clopen).

Podemos representar la situación como:

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma^0_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & \Sigma^0_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & \Sigma^0_3 \arrow[r, dash] & \cdots \\
\Delta^0_1 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr] & & \Delta^0_2 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr] & & \Delta^0_3 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[r, dash] & \cdots & \\
 & \Pi^0_1 \arrow[rr] \arrow[ur] & & \Pi^0_2 \arrow[rr] \arrow[ur] & & \Pi^0_3 \arrow[r, dash] & \cdots
\end{tikzcd}$$

4.10. Reducibilidad.

Definición 4.195. Sean $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Decimos que A es $1-1$-reducible a B, y lo denotamos por $A \preccurlyeq_1 B$, si para alguna aplicación recursiva inyectiva $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ se cumple que

$$\forall x \in \mathbb{N}\, (x \in A \text{ si y sólo si } f(x) \in B).$$

Observemos que la condición definitoria equivale a que $A = f^{-1}[B]$.

Por otra parte, decimos que A es many-one reducible a B, y lo denotamos por $A \preccurlyeq_{\mathrm{m}} B$, si para alguna aplicación recursiva $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ se cumple que

$$\forall x \in \mathbb{N}\, (x \in A \text{ si y sólo si } f(x) \in B).$$

hay otros tipos de reducibilidad: la truth-table y la Turing-reducibilidad.

Proposición 4.196.

1. *$\preccurlyeq_1$ y $\preccurlyeq_{\mathrm{m}}$ son preórdenes.*
2. *$\preccurlyeq_1 \subset \preccurlyeq_{\mathrm{m}}$.*
3. *Si $A \preccurlyeq_1 B$, entonces $\mathbb{N} - A \preccurlyeq_1 \mathbb{N} - B$.*
4. *Si $A \preccurlyeq_{\mathrm{m}} B$, entonces $\mathbb{N} - A \preccurlyeq_{\mathrm{m}} \mathbb{N} - B$.*
5. *Si $A \preccurlyeq_{\mathrm{m}} B$ y B es recursivo, entonces A es recursivo.*

6. *Si* $A \preccurlyeq_1 B$ *y* B *es recursivo, entonces* A *es recursivo.*
7. *Si* $A \preccurlyeq_{\mathrm{m}} B$ *y* B *es recursivamente enumerable, entonces* A *es recursivamente enumerable.*
8. *Si* $A \preccurlyeq_1 B$ *y* B *es recursivamente enumerable, entonces* A *es recursivamente enumerable.*
9. *Hay conjuntos recursivos* A *y* B *tales que ni* $A \preccurlyeq_{\mathrm{m}} B$ *ni* $B \preccurlyeq_{\mathrm{m}} A$*.*
10. *Hay conjuntos no recursivos* A *y* B *tales que ni* $A \preccurlyeq_{\mathrm{m}} B$ *ni* $B \preccurlyeq_{\mathrm{m}} A$*.*
11. *Hay un conjunto recursivamente enumerable* A *tal que* $A \preccurlyeq_{\mathrm{m}} \mathbb{N} - A$*.*
12. *Si* A *es recursivo y* $\varnothing \subset A \subset \mathbb{N}$*, entonces* $A \preccurlyeq_{\mathrm{m}} \mathbb{N} - A$*.*

Definición 4.197. Denotamos por $\equiv_1$ la intersección de $\preccurlyeq_1$ y $\preccurlyeq_1^{-1}$, y por $\equiv_{\mathrm{m}}$ la intersección de $\preccurlyeq_{\mathrm{m}}$ y $\preccurlyeq_{\mathrm{m}}^{-1}$.

Proposición 4.198. *las relaciones* $\equiv_1$ *y* $\equiv_{\mathrm{m}}$ *son relaciones de equivalencia.*

Definición 4.199. A las clases de equivalencia de $\equiv_1$ las llamamos 1-grados, y a las de $\equiv_{\mathrm{m}}$, m-grados. Además, definimos las relaciones $\leq_1$ y $\leq_{\mathrm{m}}$, sobre los conjuntos cociente $\mathrm{Deg}_1 = \mathrm{Sub}(\mathbb{N})/\equiv_1$ y $\mathrm{Deg}_{\mathrm{m}} = \mathrm{Sub}(\mathbb{N})/\equiv_{\mathrm{m}}$, respectivamente, como:

$$[A]_{\equiv_1} \leq_1 [B]_{\equiv_1} \text{ si y sólo si } A \preccurlyeq_1 B,$$

y

$$[A]_{\equiv_{\mathrm{m}}} \leq_{\mathrm{m}} [B]_{\equiv_{\mathrm{m}}} \text{ si y sólo si } A \preccurlyeq_{\mathrm{m}} B,$$

respectivamente.

Proposición 4.200. *Las relaciones* $\leq_1$ *y* $\leq_{\mathrm{m}}$ *son órdenes sobre los conjuntos cociente* Deg_1 *y* $\mathrm{Deg}_{\mathrm{m}}$*, respectivamente.*

Proposición 4.201. *Las relaciones* $\leq_1$ *y* $\leq_{\mathrm{m}}$ *no son órdenes lineales y el conjunto ordenado* $(\mathrm{Deg}_{\mathrm{m}}, \leq_{\mathrm{m}})$ *es un sup-semi-retículo.*

Definición 4.202. A las biyecciones recursivas de $\mathbb{N}$ las llamamos permutaciones recursivas. Por otra parte, decimos que dos subconjuntos A y B de $\mathbb{N}^k$ son recursivamente isomorfos si hay una permutación recursiva f de $\mathbb{N}$ tal que $f^k[A] = B$. Por último, decimos que dos aplicaciones parciales g, h de$\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ son recursivamente isomorfas si lo son en tanto que partes de $\mathbb{N}^2$.

Proposición 4.203. *Dos aplicaciones parciales* g, h *de*$\mathbb{N}$ *en* $\mathbb{N}$ *son recursivamente isomorfas si y sólo si hay una permutación recursiva* f *tal que* $h = f^{-1}gf$ *(son recursivamente conjugadas).*

Proposición 4.204. *El conjunto de las permutaciones recursivas es un grupo.*

Hay un teorema de Cantor-Bernstein para los conjuntos recursivos, establecido por Myhill.

Teorema 4.205. *Si* $A \preccurlyeq_1 B$ *y* $B \preccurlyeq_1 A$*, entonces* A *y* B *son recursivamente isomorfos.*

Antes de pasar a ocuparnos, en la próxima sección, de las nociones imprescindibles de la teoría de modelos, señalamos que, por ejemplo, para las aplicaciones recursivas primitivas, generalizando de la manera apropiada, podemos obtener una categoría. Concretamente, podemos tomar como objetos las diferentes potencias del conjunto de los números naturales, $\{\mathbb{N}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, y como morfismos de $\mathbb{N}^m$ en $\mathbb{N}^n$ las aplicaciones $f\colon \mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{N}^n$ tales que, para cada $i \in n$, $\mathrm{pr}_{n,i} \circ f\colon \mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{N}$ es una aplicación recursiva primitiva.

5. Teoría de modelos.

En este sección definimos la noción de signatura, el concepto de álgebra y los homomorfismos entre las álgebras. También definimos las nociones de subálgebra de un álgebra, las álgebras libres sobre los conjuntos y las operaciones polinómicas sobre un álgebra. Además, una vez definidas las nociones de signatura de primer orden y de sistema algebraico, definimos los términos y las fórmulas de la lógica de predicados de primer orden con igualdad y la relación de satisfacción entre sistemas algebraicos, fórmulas y valoraciones, establecemos las nociones de modelo de un conjunto de fórmulas y de teoría de un conjunto de sistemas algebraicos; a continuación, exponemos la conexión de Galois contravariante (inducida por la relación de satisfacción) entre los retículos completos de los sistemas algebraicos (de una signatura dada) y de las fórmulas, definimos y estudiamos los conceptos de encajamiento elemental y equivalencia elemental, y demostramos el teorema de completud de Gödel-Mal'cev, previa presentación de un sistema deductivo, que afirma la identidad entre la relación de consecuencia sintáctica y la relación de consecuencia semántica.

La teoría de modelos es la rama de la lógica matemática que estudia la conexión que existe entre los conjuntos de fórmulas, relativas a cierto lenguaje formal, y conjuntos de sistemas algebraicos, adecuados al mismo lenguaje formal, inducida por la relación de satisfacibilidad de Tarski. También podría decirse, en tanto que ampliación del Programa de Erlangen de Klein, que la teoría de modelos se ocupa del estudio de los invariantes de los sistemas algebraicos, i.e., del estudio de las propiedades de los sistemas algebraicos que son preservadas bajo equivalencias elementales. Para ciertos autores, e.g., Chang & Keisler, la teoría de modelos es simplemente la "suma" del álgebra universal y de la lógica matemática.

El teorema de Löwenheim-Skolem, según el cual cualquier sentencia de la lógica de predicados de primer orden (abreviado como FOPL) que sea verdadera en un sistema algebraico lo es en uno que sea a lo sumo infinito-numerable, es el primer resultado de la FOPL que puede ser considerado como perteneciente a la teoría de modelos. Sin embargo, el primer resultado que establece un vínculo entre la noción de demostrabilidad y la de verdad es el teorema de completud de Gödel, según el cual una sentencia de FOPL es verdadera exactamente si es demostrable, estableciendo asi la identidad, para la FOPL, entre las relaciones de consecuencia sintáctica y semántica.

Cabe señalar también que Tarski, en su trabajo "The concept of truth in formalized languages", realizó un profundo análisis de la interpretación de las sentencias de un lenguaje formal en sistemas algebraicos adecuados al mismo. Además, Skolem, en la misma época, demostró la existencia de modelos no-standard de la aritmética, haciendo uso del método de los ultraproductos.

Estos desarrollos autónomos de la teoría de modelos, tuvieron su continuación con los trabajos de Mal'cev sobre el teorema de compacidad, según el cual una condición suficiente para que un conjunto de sentencias de FOPL tenga un modelo es que cada subconjunto finito del mismo tenga un modelo, y su aplicación a la demostración de teoremas de la teoría de grupos infinitos. Además, el teorema de compacidad proporciona un medio para demostrar teoremas de encajamiento en álgebra, e.g., si cualquier subanillo finito-generado de un anillo no conmutativo se puede encajar en un anillo con división, entonces el anillo se puede encajar en un anillo con división. También en esta línea algebraica, A. Robinson estudió a los conjuntos de modelos de conjuntos de sentencias de la FOPL en el mismo sentido que en la geometría algebraica se estudian los conjuntos de los ceros de ideales generados por polinomios y obtuvo resultados aplicables a la teoría de cuerpos.

Otro tipo de aplicación está relacionado con la completud, e.g., hay resultados acerca del cuerpo de los números reales que se pueden formular en FOPL pero que han sido demostrados usando métodos topológicos. Un resultado de Tarski demuestra que tales resultados son verdaderos en todos los cuerpos reales cerrados independientemente de sus propiedades topológicas. Un método relacionado ha sido usado por A. Robinson para dar una nueva demostración de un teorema de Artin relativo a un problema de Hilbert. El mismo A. Robinson, haciendo uso del método de los ultraproductos, aplicó la teoría de modelos para obtener nuevos resultados en el análisis matemático. También han sido obtenidos resultados acerca de la independencia y consistencia relativa, por parte de Cohen, mediante la construcción de modelos adecuados.

Además, los métodos de la teoría de modelos permiten obtener caracterizaciones de ciertas clases de sentencias mediante el estudio de las propiedades de clausura de los conjuntos de modelos de las mismas, asi e.g., como vimos en el capítulo anterior, las clases ecuacionalmente definibles son exactamente las clases de álgebra universales cerradas bajo imágenes homomorfas, subálgebras y productos.

5.1. Signaturas y álgebras.

Definición 5.1. Una *signatura algebraica* $\mathbf{\Sigma}$ es un par ordenado $\mathbf{\Sigma} = (\Sigma, \mathrm{ar})$ en el que Σ, el conjunto de los *símbolos de operación*, es un conjunto y ar, la *ariedad*, una aplicación de Σ en $\mathbb{N}$. Si $\sigma \in \Sigma$ y $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, entonces decimos que σ es un símbolo de operación n-ario, y, para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por Σ_n el conjunto de todos los símbolos de operación n-arios.

La ariedad de un símbolo de operación σ, indica el número de los argumentos que tendrá cualquier realización de σ como una operación sobre un conjunto.

Definición 5.2. Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y A un conjunto. Una $\mathbf{\Sigma}$-*estructura algebraica* sobre el conjunto A es una aplicación F de Σ en $\bigcup_{\sigma\in\Sigma} \mathrm{Hom}(A^{\mathrm{ar}(\sigma)}, A)$ tal que, para cada $\sigma \in \Sigma$, $F_\sigma \in \mathrm{Hom}(A^{\mathrm{ar}(\sigma)}, A)$.

En algunos casos, para evitar equivocaciones, denotaremos la $\mathbf{\Sigma}$-estructura algebraica que estemos considerando sobre un conjunto A por $F^{\mathbf{A}}$, y a las operaciones que la componen por $F^{\mathbf{A}}_\sigma$, con $\sigma \in \Sigma$. Además, cuando $\mathrm{ar}(\sigma) = 0$, denotaremos por $\sigma^{\mathbf{A}}$ el valor de $F^{\mathbf{A}}_\sigma \colon 1 \longrightarrow A$ en el único miembro de 1.

Una $\mathbf{\Sigma}$-*álgebra* es un par ordenado $\mathbf{A} = (A, F)$, en el que A es un conjunto y F una $\mathbf{\Sigma}$-estructura algebraica sobre A.

En la definición de $\mathbf{\Sigma}$-estructura algebraica sobre un conjunto no hemos exigido que a símbolos de operación distintos, de la misma ariedad, correspondan operaciones distintas sobre el conjunto en cuestión.

Presentamos a continuación algunos ejemplos de álgebras especialmente relevantes en las matemáticas, sin ánimo de ser exhaustivo.

5.1.1. Magmas. Un *magma* es un par $(A, \cdot)$ en el que A es un conjunto y $\cdot$ una operación binaria sobre A. Para cada conjunto A, los pares $(\mathrm{Rel}(A), \circ)$, $(\mathrm{End}_{\mathrm{p}}(A), \circ)$ y $(\mathrm{End}(A), \circ)$ son magmas.

5.1.2. Semigrupos. Un *semigrupo* es un par $(A, \cdot)$ en el que A es un conjunto y $\cdot$ una operación binaria sobre A tal que:

$$\forall x, y, z \in A,\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

Para cada conjunto A, los pares $(\mathrm{Rel}(A), \circ)$, $(\mathrm{End}_{\mathrm{p}}(A), \circ)$ y $(\mathrm{End}(A), \circ)$ son semigrupos.

5.1.3. Monoides. Un *monoide* es un triplo $(A, \cdot, 1)$ en el que A es un conjunto, $\cdot$ una operación binaria sobre A y 1 un elemento de A tal que:

1. $\forall x, y, z \in A,\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
2. $\forall x \in A,\ x \cdot 1 = x\ \text{ y }\ 1 \cdot x = x$.

Para cada conjunto A, $(\mathrm{Rel}(A), \circ, \Delta_A)$, $(\mathrm{End}_{\mathrm{p}}(A), \circ, \mathrm{id}_A)$ y $(\mathrm{End}(A), \circ, \mathrm{id}_A)$ son monoides. Además, si $\mathrm{Ml}(A)$, también denotado por $A^\star$, es el conjunto de todas las palabras sobre el alfabeto A, i.e., el conjunto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$, de todas las funciones cuyo dominio es un número natural y cuya imagen está incluida en A, entonces el par ordenado $(\curlywedge, \lambda)$, en el que $\curlywedge$, la operación (binaria) de *concatenación* de palabras construidas con las letras del alfabeto A, es la aplicación de $\mathrm{Ml}(A) \times \mathrm{Ml}(A)$ en $\mathrm{Ml}(A)$ definida como:

$$\curlywedge \begin{cases} \mathrm{Ml}(A) \times \mathrm{Ml}(A) \longrightarrow \mathrm{Ml}(A) \\ ((x_i)_{i \in m}, (y_j)_{j \in n}) \longmapsto (z_k)_{k \in m+n} = \begin{cases} x_k, & \text{si } 0 \leq k < m; \\ y_{k-m}, & \text{si } m \leq k < m+n, \end{cases} \end{cases}$$

y λ, la *palabra vacía* sobre el alfabeto A, la única función de 0 en A, es una estructura de monoide sobre $\mathrm{Ml}(A)$.

5.1.4. Monoides abelianos. Un *monoide abeliano* es un triplo $(A, +, 0)$ en el que A es un conjunto, $+$ una operación binaria sobre A y 0 un elemento de A tal que:

1. $\forall x, y, z \in A,\ x + (y + z) = (x + y) + z$.
2. $\forall x \in A,\ x + 0 = x\ \text{ y }\ 0 + x = x$.
3. $\forall x, y \in A,\ x + y = y + x$.

Para un conjunto A, si $\mathbb{N}^{(A)}$ es el conjunto de todas las funciones $(n_a)_{a \in A}$ de *soporte finito* de A en $\mathbb{N}$, i.e., el conjunto definido como:

$$\mathbb{N}^{(A)} = \{\, (n_a)_{a \in A} \in \mathbb{N}^A \mid \mathrm{card}(\{\, a \in A \mid n_a \neq 0 \,\}) < \aleph_0 \,\},$$

entonces el par ordenado $(+, \kappa_0)$, en el que $+$ es la aplicación de $\mathbb{N}^{(A)} \times \mathbb{N}^{(A)}$ en $\mathbb{N}^{(A)}$ definida como:

$$+ \begin{cases} \mathbb{N}^{(A)} \times \mathbb{N}^{(A)} \longrightarrow \mathbb{N}^{(A)} \\ ((m_a)_{a \in A}, (n_a)_{a \in A}) \longmapsto (m_a + n_a)_{a \in A} \end{cases}$$

y κ_0, la aplicación de A en $\mathbb{N}$ cuya imagen es $\{0\}$, es una estructura de monoide abeliano sobre $\mathbb{N}^{(A)}$.

5.1.5. Cuasigrupos. Un *cuasigrupo* es un cuádruplo $(A, \cdot, /, \backslash)$ en el que A es un conjunto y $\cdot$, $/$ y $\backslash$ operaciones binarias sobre A tales que:

1. $\forall x, y \in A,\ (x/y) \cdot y = x$.
2. $\forall x, y \in A,\ (x \cdot y)/y = x$.
3. $\forall x, y \in A,\ y \cdot (y \backslash x) = x$.
4. $\forall x, y \in A,\ y \backslash (y \cdot x) = x$.

5.1.6. Bucles. Un *bucle* es un quíntuplo $(A, \cdot, /, \backslash, 1)$ en el que $(A, \cdot, /, \backslash)$ es un cuasigrupo y $1 \in A$ tal que

$$\forall x, y \in A,\ x \cdot 1 = x \text{ y } 1 \cdot x = x.$$

5.1.7. Grupos. Un *grupo* es un cuádruplo $(A, \cdot, {}^{-1}, 1)$ en el que A es un conjunto, $\cdot$ una operación binaria sobre A, ${}^{-1}$ una operación unaria sobre A y 1 un elemento de A tal que:

1. $\forall x, y, z \in A,\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
2. $\forall x \in A,\ x \cdot 1 = x\ \text{ y }\ 1 \cdot x = x$.
3. $\forall x \in A,\ x \cdot x^{-1} = 1\ \text{ y }\ x^{-1} \cdot x = 1$.

Para cada conjunto A, el cuádruplo $(\mathrm{Aut}(A), \circ, {}^{-1}, \mathrm{id}_A)$ es un grupo.

5.1.8. Grupos abelianos. Un *grupo abeliano* es un cuádruplo $(A, +, -, 0)$ en el que A es un conjunto, $+$ una operación binaria sobre A, $-$ una operación unaria sobre A y 0 un elemento de A tal que:

1. $\forall x, y, z \in A,\ x + (y + z) = (x + y) + z.$
2. $\forall x \in A,\ x + 0 = x$ y $0 + x = x.$
3. $\forall x \in A,\ x + (-x) = 0$ y $(-x) + x = 0.$
4. $\forall x, y \in A,\ x + y = y + x.$

5.1.9. Anillos. Un *anillo* es un séxtuplo $(A, +, -, 0, \cdot, 1)$ tal que:

1. $(A, +, -, 0)$ es un grupo abeliano.
2. $(A, \cdot, 1)$ es un monoide.
3. $\forall x, y, z \in A,\ x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ y $(y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x).$

Para cada grupo abeliano $\mathbf{A} = (A, +, -, 0)$, el séxtuplo $(\mathrm{End}(\mathbf{A}), +, -, \kappa_0, \circ, \mathrm{id}_A)$, en el que $+$ es la operación binaria sobre $\mathrm{End}(\mathbf{A})$ que a un par de endomorfismos f, g del grupo abeliano $\mathbf{A} = (A, +, -, 0)$ le asigna el endomorfismo $f + g$ que, a cada $x \in A$, le asocia $f(x) + g(x)$, $-$ la operación unaria sobre $\mathrm{End}(\mathbf{A})$ que a un endomorfismo f del grupo abeliano $\mathbf{A} = (A, +, -, 0)$ le asigna el endomorfismo $-f$ que, a cada $x \in A$, le asocia $-f(x) = -(f(x))$, $\circ$ la composición de endomorfismos y κ_0 el endomorfismo de $\mathbf{A}$ cuya imagen es $\{0\}$, es un anillo.

5.1.10. Anillos conmutativos. Un *anillo conmutativo* es un séxtuplo $(A, +, -, 0, \cdot, 1)$ tal que:

1. $(A, +, -, 0)$ es un grupo abeliano.
2. $(A, \cdot, 1)$ es un monoide abeliano.
3. $\forall x, y, z \in A,\ x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ y $(y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x).$

5.1.11. Módulos. Si $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda, +, -, 0, \cdot, 1)$ es un anillo, un $\mathbf{\Lambda}$-*módulo a la izquierda* es un quíntuplo $(M, +, -, 0, (F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda))$ tal que:

1. $(M, +, -, 0)$ es un grupo abeliano.
2. $\forall \lambda \in \Lambda,\ \forall x, y \in M,\ F_\lambda(x + y) = F_\lambda(x) + F_\lambda(y).$
3. $\forall \lambda, \mu \in \Lambda,\ \forall x \in M,\ F_{\lambda+\mu}(x) = F_\lambda(x) + F_\mu(x).$
4. $\forall \lambda, \mu \in \Lambda,\ \forall x \in M,\ F_{\lambda\cdot\mu}(x) = F_\lambda(F_\mu(x)).$
5. $\forall x \in M,\ F_1(x) = x.$

5.1.12. Espacios vectoriales.

5.1.13. Grupos con multioperadores. Si $\mathbf{\Omega}$ es un dominio de operadores tal que $\Omega_0 = \varnothing$, entonces un $\mathbf{\Omega}$-*grupo* es un quíntuplo $(G, +, -, 0, (F_\omega \mid \omega \in \Omega))$ tal que:

1. $(G, +, -, 0)$ es un grupo (no necesariamente abeliano).
2. $\forall \omega \in \Omega$, si $\mathrm{ar}(\omega) = n$, entonces $F_\omega \colon G^n \longrightarrow G$ y $F_\omega(0, \dots, 0) = 0$.

5.1.14. Algebras lineales.

5.1.15. Semirretículos. Un *semirretículo* es un par $(A, \cdot)$ en el que A es un conjunto y $\cdot$ una operación binaria sobre A tal que:

1. $\forall x \in A,\ x \cdot x = x.$
2. $\forall x, y \in A,\ x \cdot y = y \cdot x.$
3. $\forall x, y, z \in A,\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$

Para cada conjunto A, $(\mathrm{Sub}(A), \cup)$ y $(\mathrm{Sub}(A), \cap)$ son semirretículos.

5.1.16. Retículos. Un *retículo* es un triplo $(A, \vee, \wedge)$ en el que A es un conjunto y $\vee$ y $\wedge$ operaciones binarias sobre A tales que:

1. $\forall x \in A,\ x \vee x = x$ y $x \wedge x = x$.
2. $\forall x, y \in A,\ x \vee y = y \vee x$ y $x \wedge y = y \wedge x$.
3. $\forall x, y, z \in A,\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ y $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.
4. $\forall x, y \in A,\ x \vee (x \wedge y) = x$ y $x \wedge (x \vee y) = x$.

Para cada conjunto A, $(\mathrm{Sub}(A), \cup, \cap)$ es un retículo.

5.1.17. Algebras Booleanas. Un *álgebra Booleana* es un séxtuplo $(A, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ en el que A es un conjunto, $\vee$ y $\wedge$ operaciones binarias sobre A, $-$ una operación unaria sobre A y 0, $1 \in A$ tales que:

1. $\forall x \in A,\ x \vee x = x$ y $x \wedge x = x$.
2. $\forall x, y \in A,\ x \vee y = y \vee x$ y $x \wedge y = y \wedge x$.
3. $\forall x, y, z \in A,\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ y $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.
4. $\forall x, y \in A,\ x \vee (x \wedge y) = x$ y $x \wedge (x \vee y) = x$.
5. $\forall x, y, z \in A,\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ y $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
6. $\forall x \in A,\ x \wedge -x = 0$ y $x \vee -x = 1$.
7. $\forall x \in A,\ x \wedge 0 = 0$ y $x \vee 1 = 1$.

Para cada conjunto A, $(\mathrm{Sub}(A), \cup, \cap, \complement_A, \varnothing, A)$ es un álgebra Booleana.

5.1.18. Algebras de Heyting.

5.1.19. Anillos ternarios planares. Un *anillo ternario planar* es un cuádruplo $(\Gamma, T, 0, 1)$ en el que Γ es un conjunto, T una operación ternaria sobre Γ y 0, 1 elementos de Γ, tal que:

1. $0 \neq 1$.
2. $\forall m, c \in \Gamma,\ T(0, m, c) = c$.
3. $\forall x, c \in \Gamma,\ T(x, 0, c) = c$.
4. $\forall x \in \Gamma,\ T(x, 1, 0) = x$.
5. $\forall m \in \Gamma,\ T(1, m, 0) = m$.
6. $\forall x, m, v \in \Gamma,\ \exists! c \in \Gamma$ tal que $T(x, m, c) = v$.
7. $\forall m, n, c, d \in \Gamma$, si $m \neq n$, entonces $\exists! x \in \Gamma$ tal que $T(x, m, c) = T(x, n, d)$.
8. $\forall x, y, v, w \in \Gamma$, si $x \neq y$, entonces $\exists!(m, c) \in \Gamma^2$ tal que $T(x, m, c) = v$ y $T(y, m, c) = w$.

Los anteriores ejemplos de álgebras muestran que, con la excepción de los anillos ternarios, las operaciones de que están dotadas son a lo sumo binarias, como dice Cohn:

> This is no accident, for in a certain sense all finitary operators may be built up from binary ones. However, there may be no particularly natural way of doing this in any given instance, and besides, the gain in simplicity would not be very great.

Además, salvo en el caso de los anillos ternarios, las álgebras consideradas están sujetas a cumplir ecuaciones.

Por otra parte, el concepto de álgebra considerado está sujeto a las siguientes limitaciones:

- Las álgebras tienen un único conjunto subyacente, i.e., son entidades homogéneas.
- Las operaciones son finitarias.
- Las operaciones están totalmente definidas.

De modo que objetos matemáticos tales como e.g., los *autómatas*, los *monoides con cancelación*, los *anillos con división*, los *cuerpos*, los *espacios topológicos*, los

$\mathcal{L}^*$-*espacios*, los *grupos topológicos*, los *espacios vectoriales topológicos* o las *variedades diferenciables*, no son objeto de estudio del álgebra universal, aunque sí del álgebra universal heterogénea o de la teoría de modelos (de primer orden u orden superior). Concretamente, los autómatas no son objeto de estudio del álgebra universal, pero sí del álgebra universal heterogénea, porque un autómata es una entidad heterogénea $(I, Q, O, \delta, \lambda, q_0)$ en la que I es el conjunto de las *entradas*, Q el de los *estados*, O el de las *salidas*, $\delta\colon I \times Q \longrightarrow Q$ la aplicación de *transición*, $\lambda\colon I \times Q \longrightarrow O$ la aplicación de *salida* y q_0 el estado inicial; los monoides con cancelación tampoco son objeto de estudio del álgebra universal, pero sí de la lógica implicacional, porque un monoide con cancelación es un monoide $(A, \cdot, 1)$ tal que, para cada $x, y, z \in A$, si $x \cdot y = x \cdot z$, entonces $y = z$ y si $y \cdot x = z \cdot x$, entonces $y = z$, que no son ecuaciones; los anillos con división tampoco son objeto de estudio del álgebra universal, pero sí de la teoría de modelos, porque un anillo con división es un anillo $(A, +, -, 0, \cdot, 1)$ tal que $0 \neq 1$ y, para cada $x \in A$, si $x \neq 0$, entonces existe un $y \in A$ tal que $x \cdot y = 1$ e $y \cdot x = 1$, que no son ecuaciones; los $\mathcal{L}^*$-espacios tampoco lo son, pero sí del álgebra universal infinitaria no determinista, porque un $\mathcal{L}^*$-espacio es un par (X, Λ) en el que X es un conjunto y $\Lambda\colon X^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathrm{Sub}(X)$ tal que:

1. Para cada $x \in X$, $x \in \Lambda(\kappa_x)$, siendo κ_x la aplicación de $\mathbb{N}$ en X cuya imagen es $\{x\}$.
2. Para cada $(x_n \mid n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbb{N}}$, si $\Lambda(x_n \mid n \in \mathbb{N}) \neq \varnothing$, entonces para cada subsucesión $(y_n \mid n \in \mathbb{N})$ de $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$, se cumple que
$$\Lambda(x_n \mid n \in \mathbb{N}) \subseteq \Lambda(y_n \mid n \in \mathbb{N}).$$
Recordamos que una sucesión $(y_n \mid n \in \mathbb{N})$ en X es una subsucesión de otra sucesión $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ en el mismo conjunto, si existe una aplicación estrictamente creciente $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_{\varphi_n}$.
3. Para cada $x \in X$ y cada $(x_n \mid n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbb{N}}$, si $x \notin \Lambda(x_n \mid n \in \mathbb{N})$, entonces existe una subsucesión $(y_n \mid n \in \mathbb{N})$ de $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ tal que, para cada subsucesión $(z_n \mid n \in \mathbb{N})$ de $(y_n \mid n \in \mathbb{N})$ se cumple que $x \notin \Lambda(z_n \mid n \in \mathbb{N})$,

que es una operación infinitaria no determinista.

Una vez definido el concepto de $\mathbf{\Sigma}$-álgebra, un medio para estudiarlas es el de compararlas entre sí, para ello definimos los homomorfismos entre las mismas, la composición de los homomorfismos y establecemos las propiedades básicas de la composición.

Definición 5.3. Un $\mathbf{\Sigma}$-*homomorfismo* o, para abreviar, un *homomorfismo* de $\mathbf{A} = (A, F^{\mathbf{A}})$ en $\mathbf{B} = (B, F^{\mathbf{B}})$ es un triplo ordenado $(\mathbf{A}, f, \mathbf{B})$, abreviado como f y denotado por $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, en el que f es una aplicación de A en B, tal que, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\Sigma) = n$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "F^{\mathbf{A}}_\sigma"'] & B^n \arrow[d, "F^{\mathbf{B}}_\sigma"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., para cada $x \in A^n$, $f(F^{\mathbf{A}}_\sigma(x)) = F^{\mathbf{B}}_\sigma(f^n(x))$. A los homomorfismos de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra en sí misma los denominamos *endomorfismos*.

Proposición 5.4. *Sean* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, $g\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ *y* $h\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ *tres homomorfismos de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras. Entonces:*

1. *Siendo* $\mathrm{id}_{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}, \mathrm{id}_A, \mathbf{A})$*, se cumple que* $\mathrm{id}_{\mathbf{A}}\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$*, el homomorfismo* identidad *de* $\mathbf{A}$*, es un endomorfismo de* $\mathbf{A}$*.*
2. *Siendo* $g\circ f = (\mathbf{A}, g\circ f, \mathbf{C})$*, se cumple que* $g\circ f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$*, el homomorfismo* composición *de* f *y* g*, es un homomorfismo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{C}$*.*
3. (Asociatividad)*. El diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] \arrow[drr, bend left=60, "(h\circ g)\circ f"] \arrow[drr, bend right=60, "h\circ(g\circ f)"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\
& \mathbf{C} \arrow[r, "h"'] & \mathbf{D}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

4. (Neutros)*. Los diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbf{A}}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{A} \arrow[d, "f"] \\
& \mathbf{B}
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbf{B}}"] \\
& \mathbf{B}
\end{tikzcd}$$

conmutan.

Demostración.

1. Puesto que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{id}_A^n = \mathrm{id}_{A^n}$, tenemos que $\mathrm{id}_{\mathbf{A}}\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ es un homomorfismo, ya que entonces, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A^n \arrow[r, "\mathrm{id}_A^n"] \arrow[d, "F_\sigma^{\mathbf{A}}"'] & A^n \arrow[d, "F_\sigma^{\mathbf{A}}"] \\
A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"'] & A
\end{tikzcd}$$

conmuta.

2. Puesto que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $g^n \circ f^n = (g\circ f)^n$, y, por hipótesis, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
A^n \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "F_\sigma^{\mathbf{A}}"'] & B^n \arrow[d, "F_\sigma^{\mathbf{B}}"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
B^n \arrow[r, "g^n"] \arrow[d, "F_\sigma^{\mathbf{B}}"'] & C^n \arrow[d, "F_\sigma^{\mathbf{C}}"] \\
B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

conmutan, entonces también conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "(g\circ f)^n"] \arrow[d, "F_\sigma^{\mathbf{A}}"'] & C^n \arrow[d, "F_\sigma^{\mathbf{C}}"] \\ A \arrow[r, "g\circ f"'] & C \end{tikzcd}$$

luego $g \circ f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ es un homomorfismo. □

En lo que sigue, salvo indicación expresa de lo contrario, supondremos elegido un universo de Grothendieck $\boldsymbol{\mathcal{U}}$, arbitrario pero fijo, y que todos los conjuntos que consideremos son elementos del mismo.

Corolario 5.5. *Las $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras $\mathbf{A}$ tales que $A \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, junto con los homomorfismos entre ellas constituyen una categoría, a la que denotamos por* $\mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma})$.

Definición 5.6.

1. Decimos que $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es un *monomorfismo* si, para cada $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{X}$ y cualesquiera homomorfismos $g, h\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A}$, si el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] \arrow[rr, bend left, "f\circ g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ h"'] & \mathbf{A} \arrow[r, "f"] & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $g = h$, i.e., si cuando $f \circ g = f \circ h$, entonces $g = h$; es por ello que a este tipo de homomorfismos también se los denomina *simplificables a la izquierda*. Denotamos al conjunto de los monomorfismos de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ por $\mathrm{Mono}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Convenimos entonces que $f\colon \mathbf{A} \rightarrowtail \mathbf{B}$ significa que el homomorfismo $f\colon \mathbf{A} \rightarrowtail \mathbf{B}$ es un monomorfismo.

2. Decimos que $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es un *epimorfismo* si, para cada $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{Y}$ y cualesquiera homomorfismos $g, h\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{Y}$, si el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] \arrow[rr, bend right, "h\circ f"'] & \mathbf{B} \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & \mathbf{Y} \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $g = h$, i.e., si cuando $g \circ f = h \circ f$, entonces $g = h$; es por ello que a este tipo de homomorfismos también se los denomina *simplificables a la derecha*. Convenimos entonces que $f\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$ significa que el homomorfismo $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es un epimorfismo, y denotamos al conjunto de los epimorfismos de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ por $\mathrm{Epi}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

3. Decimos que $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es un *isomorfismo* si existe un $g\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbf{A}}$ y $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbf{B}}$. A los isomorfismos de un álgebra en sí misma los denominamos *automorfismos*.

Si un homomorfismo $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es inyectivo, resp., sobreyectivo, entonces es un monomorfismo, resp., epimorfismo.

Un homomorfismo $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es un isomorfismo precisamente si es un homomorfismo biyectivo.

5.2. Subálgebras.

> The concept of a subgroup is fundamental in the theory of groups. The entire content of group theory is more or less linked up with questions about the existence, in a group, of subgroups having one or another special property, about groups that can be embedded in a given group, about properties that characterise the mutual disposition of subgroups in a group, about methods of constructing a group from its subgroups, etc. The classification of various special types of groups also depends mainly on the concept of a subgroup.
>
> *Kurosh.*

Del mismo modo que para estudiar los conjuntos es imprescindible considerar los subconjuntos de los mismos, para el estudio de las álgebras hay que considerar las subálgebras de las mismas, y que son las partes que tienen la propiedad de estar cerradas bajo las operaciones estructurales de las que están dotadas las álgebras.

Definición 5.7. Sean $\mathbf{A} = (A, F^{\mathbf{A}})$ y X un subconjunto de A.

1. Si $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, decimos que X está *cerrado bajo la operación* $F^{\mathbf{A}}_{\sigma} \colon A^n \longrightarrow A$ si, para cada $a \in X^n$, $F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a) \in X$, i.e., si $F^{\mathbf{A}}_{\sigma}[X^n] \subseteq X$.
2. Decimos que X es un *cerrado* o una *subálgebra* de $\mathbf{A}$ si, para cada $\sigma \in \Sigma$ con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, y cada $a \in X^n$, $F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a) \in X$, i.e., si X está cerrado bajo cada una de las operaciones estructurales de $\mathbf{A}$. Al conjunto de los cerrados de $\mathbf{A}$ lo denotamos por $\mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.

Proposición 5.8. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra. Entonces el conjunto de los cerrados de* $\mathbf{A}$*,* $\mathrm{Cl}(\mathbf{A})$*, es un sistema de clausura algebraico sobre* A*, i.e., tiene las siguientes propiedades:*

1. $A \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.
2. *Si* $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$ *y* $\mathcal{C} \neq \varnothing$*, entonces* $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.
3. *Si* $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$*,* $\mathcal{C} \neq \varnothing$ *y si dados* $X, Y \in \mathcal{C}$*, hay un* $Z \in \mathcal{C}$ *tal que* $X \cup Y \subseteq Z$*, entonces* $\bigcup_{C\in\mathcal{C}} C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.

Demostración. Debido a que es evidente que A es un cerrado de $\mathbf{A}$, nos limitamos a demostrar las dos últimas propiedades.

2. Sea $\mathcal{C}$ un conjunto no vacío de cerrados de $\mathbf{A}$, $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$ y $a \in (\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C)^n$. Entonces, para cada $C \in \mathcal{C}$, se cumple que $F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a) \in C$, luego $F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a) \in \bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$.

3. Sea $\mathcal{C}$ un conjunto no vacío de cerrados de $\mathbf{A}$ tal que dados $X, Y \in \mathcal{C}$, exista un $Z \in \mathcal{C}$ tal que $X \cup Y \subseteq Z$, $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$ y $a \in (\bigcup_{C\in\mathcal{C}} C)^n$. Entonces, para cada $i \in n$, hay un $C_i \in \mathcal{C}$ tal que $a_i \in C_i$. Ahora bien, por estar la familia de cerrados $\mathcal{C}$ dirigida superiormente, hay un $C \in \mathcal{C}$ tal que, para cada $i \in n$, $C_i \subseteq C$, luego, para cada $i \in n$, $a_i \in C$, pero, por ser C un cerrado de $\mathbf{A}$, se cumple que $F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a) \in C$, por lo tanto que $F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a) \in \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C$. □

Corolario 5.9. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra. Entonces la endoaplicación* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *del conjunto* $\mathrm{Sub}(A)$*, definida como:*

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(A) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \\ \quad X \quad\ \longmapsto \bigcap\{\, C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid X \subseteq C \,\} \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{Im}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}) \subseteq \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.
2. $\{\, X \in \mathrm{Sub}(A) \mid X = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \,\} = \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.
3. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es extensiva o inflacionaria, i.e., para cada* $X \in \mathrm{Sub}(A)$*,* $X \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.
4. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es isótona, i.e., para cada* $X, Y \in \mathrm{Sub}(A)$*, si* $X \subseteq Y$*, entonces se cumple que* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(Y)$.

5. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es idempotente, i.e., para cada* $X \in \mathrm{Sub}(A)$, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X))$.
6. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es algebraica, i.e., para cada* $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sub}(A)$, *si* $\mathcal{X} \neq \varnothing$ *y para cada* $X, Y \in \mathcal{X}$, *existe un* $Z \in \mathcal{X}$ *tal que* $X \cup Y \subseteq Z$, *entonces* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\bigcup \mathcal{X}) = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

Por consiguiente, para cada $X \subseteq A$, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ *es el mínimo cerrado de* $\mathbf{A}$ *que contiene a* X, *y lo denominamos el cerrado de* $\mathbf{A}$ generado *por* X. *Además, a la subálgebra de* $\mathbf{A}$ *canónicamente asociada a* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, *la denotamos por* $\mathbf{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ *y la denominamos, también, la subálgebra de* $\mathbf{A}$ *generada por* X.

Demostración. Nos limitamos a demostrar las cuatro últimas propiedades, dejando las dos primeras como ejercicios.

3. Sea $X \in \mathrm{Sub}(A)$. Puesto que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, por definición, es $\bigcap\{\, C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid X \subseteq C \,\}$, es evidente que $X \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

4. Sean $X, Y \in \mathrm{Sub}(A)$ tales que $X \subseteq Y$. Entonces $\{\, C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid Y \subseteq C \,\}$ está incluido en $\{\, C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid X \subseteq C \,\}$, luego $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ lo está en $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(Y)$.

5. Sea $X \in \mathrm{Sub}(A)$. En virtud de la extensividad y de la isotonía, se cumple que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X))$. Recíprocamente, debido a que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X))$ es el mínimo cerrado de $\mathbf{A}$ que contiene a $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ y $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ es un cerrado de $\mathbf{A}$ que se contiene a sí mismo, se cumple que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

6. Sea $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sub}(A)$, tal que $\mathcal{X} \neq \varnothing$ y para cada $X, Y \in \mathcal{X}$, existe un $Z \in \mathcal{X}$ tal que $X \cup Y \subseteq Z$. Puesto que, para cada $X \in \mathcal{X}$, $X \subseteq \bigcup_{X \in \mathcal{X}} X$, podemos afirmar, en virtud de la isotonía, que, para cada $X \in \mathcal{X}$, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X)$, por lo tanto $\bigcup_{X \in \mathcal{X}} \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X)$. Recíprocamente, por ser la familia de conjuntos $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sub}(A)$ no vacía y estar dirigida superiormente, la familia de subálgebras de $\mathbf{A}$, $(\mathbf{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \mid X \in \mathcal{X})$ no es vacía y está dirigida superiormente, por lo tanto $\bigcup_{X \in \mathcal{X}} \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ es una subálgebra de $\mathbf{A}$ que, además, contiene a $\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X$, luego también contiene a $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X)$.

□

Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Entonces, para cada subconjunto X de A, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \bigcup_{K \subseteq_{\mathrm{fin}} X} \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(K)$. En general no se cumple que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \bigcup_{x \in X} \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x\})$.

Proposición 5.10. *Si* $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$ *y* $X \subseteq B$, *entonces* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(X) = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$

Demostración. □

La proposición anterior nos autoriza, para una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ y un subconjunto X de A, a escribir simplemente $\mathrm{Sg}(X)$ en lugar de $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

A continuación, introducimos unas nociones que nos permitirán obtener una descripción más *constructiva* de la subálgebra generada por un conjunto.

Definición 5.11. Sea $\mathbf{A} = (A, F)$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Entonces:

1. Denotamos por $\mathrm{E}_{\mathbf{A}}$ el operador sobre $\mathrm{Sub}(A)$, definido como:
$$\mathrm{E}_{\mathbf{A}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(A) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \\ \quad X \quad\ \longmapsto X \cup \left(\bigcup_{\sigma \in \Sigma} F_{\sigma}[X^{\mathrm{ar}(\sigma)}] \right). \end{cases}$$
2. Si $X \subseteq A$, entonces denotamos por $(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X) \mid n \in \mathbb{N})$ la familia en $\mathrm{Sub}(A)$ definida por recursión como:
$$\begin{aligned} \mathrm{E}^0_{\mathbf{A}}(X) &= X, \\ \mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X) &= \mathrm{E}_{\mathbf{A}}(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)),\ n \geq 0. \end{aligned}$$
Además, convenimos que:
$$\mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X) = \bigcup (\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X) \mid n \in \mathbb{N})$$

Proposición 5.12. *Si* $\mathbf{A}$ *es una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y* $X \subseteq A$*, entonces* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X)$.

Demostración. Demostramos en primer lugar que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X)$. Para ello, debido a que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ es el mínimo cerrado de $\mathbf{A}$ que contiene a X, es suficiente que demostremos que $\mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X)$ es un cerrado de $\mathbf{A}$ y que contiene a X. Ahora bien, $\mathrm{E}^{0}_{\mathbf{A}}(X) = X$, luego $X \subseteq \mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X)$. Por otra parte, si $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = m$ y $a \in (\mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X))^m$, entonces, para cada $\alpha \in m$, hay un $n_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $a_\alpha \in \mathrm{E}^{n_\alpha}_{\mathbf{A}}(X)$, pero la familia $(\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X) \mid n \in \mathbb{N})$ es una cadena ascendente, luego hay un $\beta \in m$ tal que, para cada $\alpha \in m$, $\mathrm{E}^{n_\alpha}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{E}^{n_\beta}_{\mathbf{A}}(X)$, por lo tanto, para cada $\alpha \in m$, $a_\alpha \in \mathrm{E}^{n_\beta}_{\mathbf{A}}(X)$, de donde $F^{\mathbf{A}}_\sigma(a) \in \mathrm{E}^{n_\beta+1}_{\mathbf{A}}(X)$, por consiguiente $F^{\mathbf{A}}_\sigma(a) \in \mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X)$.

Para demostrar que $\mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ procedemos por inducción finita. Puesto que $\mathrm{E}^{0}_{\mathbf{A}}(X) = X$ y $X \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, se cumple que $\mathrm{E}^{0}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$. Supongamos que, para $n \geq 0$, se cumpla que $\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$. Entonces, ya que $\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{E}_{\mathbf{A}}(\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X))$, para demostrar que $\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, es suficiente que demostremos que $\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ y que $\bigcup_{\sigma\in\Sigma} F_\sigma[(\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X))^{\mathrm{ar}(\sigma)}] \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$. Ahora bien, lo primero se cumple por la hipótesis de inducción. Sea pues $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = m$ y $a \in (\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X))^m$, entonces, para cada $\alpha \in m$, $a_\alpha \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, luego $F^{\mathbf{A}}_\sigma(a) \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, por lo tanto $F_\sigma[(\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X))^m] \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$. □

Proposición 5.13. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* X *un cerrado de* $\mathbf{A}$ *e* $Y \subseteq A$*. Entonces hay un cerrado* Z *de* $\mathbf{A}$ *tal que* $X \subseteq Z$ *y* $Z \cap Y = X \cap Y$ *y* Z *es maximal con dichas propiedades.*

Demostración. Sea $\mathcal{X}_{X,Y} = \{\, C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid X \subseteq C \text{ y } C \cap Y = X \cap Y \,\}$. El conjunto $\mathcal{X}_{X,Y}$ no es vacío, porque $X \in \mathcal{X}_{X,Y}$. Por otra parte, si $(C_i \mid i \in I)$ es una cadena no vacía en $(\mathcal{X}_{X,Y}, \subseteq)$, entonces $\bigcup_{i\in I} C_i$ es, obviamente, el supremo de $(C_i \mid i \in I)$ en $(\mathcal{X}_{X,Y}, \subseteq)$, luego, en virtud del lema de Zorn, en el conjunto ordenado $(\mathcal{X}_{X,Y}, \subseteq)$ hay un maximal Z. □

Definición 5.14. Sea $\mathbf{A}$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $X \subseteq A$. Decimos que X es un *conjunto de generadores* de $\mathbf{A}$, o que X *genera* $\mathbf{A}$, si $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = A$ y que es un *conjunto de generadores minimal* de $\mathbf{A}$ si es un conjunto de generadores y si ningún subconjunto estricto de X genera $\mathbf{A}$. Además, decimos que $\mathbf{A}$ está *finitamente generada*, o que es de *generación finita*, si hay un subconjunto X de A tal que $\mathrm{card}\, X < \aleph_0$ y X genera $\mathbf{A}$. En particular, decimos que $\mathbf{A}$ es *cíclica* si hay un $a \in A$ tal que $\{a\}$ genera $\mathbf{A}$.

En el estudio de las álgebras, como tendremos oportunidad de comprobar, e.g., al estudiar todo lo referente a las operaciones polinómicas sobre un álgebra, nos encontraremos ante situaciones en las que queremos demostrar que todos los elementos de la subálgebra generada por un subconjunto de un álgebra tiene una cierta propiedad. En tal caso, generalizando el principio de la demostración por inducción finita, procederemos mediante el principio de la demostración por *inducción algebraica*, que pasamos a establecer a continuación.

Proposición 5.15. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* $X \subseteq A$ *e* $Y \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$*. Una condición suficiente para que* $Y = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$*, es que* $X \subseteq Y$ *y que* Y *sea un cerrado de* $\mathbf{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ *(o, lo que es equivalente, un cerrado de* $\mathbf{A}$*). En particular, si* X *es un conjunto de generadores de* $\mathbf{A}$*, una condición suficiente para que* $Y = A$*, es que* $X \subseteq Y$ *y que* Y *sea un cerrado de* $\mathbf{A}$*.*

Demostración. Supongamos que $X \subseteq Y$ y que Y sea un cerrado de $\mathbf{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$. Entonces, en virtud de la isotonía, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(Y) = Y$, luego, ya que $Y \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, $Y = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$. □

Del mismo modo que en el caso del conjunto de los números naturales, considerado como un álgebra de Dedekind-Peano, en el estudio de las álgebras, también surge la necesidad de definir homomorfismos desde ciertas álgebras, concretamente las álgebras libres sobre los conjuntos, hasta otras álgebras, e.g., para determinar la conexión de Galois entre las álgebras y las ecuaciones, y, así como en el caso de los números naturales demostramos el principio de la definición por recursión finita, aquí, cuando estudiemos las álgebras libres, demostraremos el principio de la definición por recursión algebraica, que nos permitirá definir homomorfismos desde las álgebras libres, y que estará íntimamente ligado al principio de la demostración por inducción algebraica.

Proposición 5.16. *Sean $f, g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ dos homomorfismos y X un subconjunto de A. Si f y g coinciden en X, entonces también coinciden en* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

Demostración. Supongamos que, para cada $x \in X$, $f(x) = g(x)$. Puesto que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X)$, para demostrar que f y g coinciden en $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, será suficiente que procedamos por inducción finita. Para $n = 0$, se cumple que f y g coinciden en $\mathrm{E}^{0}_{\mathbf{A}}(X) = X$, por hipótesis. Supongamos que para $n \geq 0$, f y g coincidan en $\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X)$. Puesto que $\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{E}_{\mathbf{A}}(\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X))$, para demostrar que f y g coinciden en $\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X)$, será suficiente que demostremos que, dado un $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = m$ y un $a \in (\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X))^m$, entonces $f(F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a)) = g(F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a))$. Sean pues $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = m$ y $a \in (\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X))^m$. Por ser f y g homomorfismos, se cumple que

$$f(F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a)) = F^{\mathbf{B}}_{\sigma}(f^m(a)) \quad \text{y} \quad g(F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a)) = F^{\mathbf{B}}_{\sigma}(g^m(a)),$$

pero $f^m(a) = g^m(a)$, porque $a \in (\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X))^m$ y f y g coinciden, por hipótesis, en $\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X)$, luego $f(F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a)) = g(F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a))$, luego coinciden en $\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X)$. Por lo tanto f y g coinciden en $\mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X)$, i.e., en $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$. $\square$

Proposición 5.17. *Sea f una aplicación de un subconjunto X de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ en el conjunto subyacente de otra $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{B}$. Entonces hay a lo sumo una extensión g de f que sea un homomorfismo de $\mathbf{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ en $\mathbf{B}$.*

Demostración. $\square$

A continuación establecemos el llamado *principio de la prolongación de las identidades*, que es formalmente idéntico al principio del mismo nombre de la teoría de espacios métricos (dos aplicaciones contínuas entre dos espacios métricos que coincidan en una parte densa del dominio de las mismas, coinciden en todo el dominio).

Corolario 5.18. *Sean $f, g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ dos homomorfismos y X un subconjunto de A tal que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = A$. Si f y g coinciden en X, entonces $f = g$.*

Demostración. En virtud de la proposición 5.16, por coincidir f y g en X, coinciden en $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, pero $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = A$, luego coinciden en A. $\square$

Proposición 5.19. *Sea $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras, X un cerrado de $\mathbf{A}$ e Y uno de $\mathbf{B}$. Entonces $f[X] \in \mathrm{Cl}(\mathbf{B})$ y $f^{-1}[Y] \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$. En particular,* $\mathrm{Im}(f) \in \mathrm{Cl}(\mathbf{B})$.

Demostración. $\square$

La proposición que establecemos a continuación afirma, por comparación con la situación en topología, que los homomorfismos entre álgebras son además *cerrados*, i.e., conmutan con el operador de formación de subálgebras.

Proposición 5.20. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras y* $X \subseteq A$. *Entonces* $f[\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)] = \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$, *i.e., el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sub}(A) \arrow[r, "f[\cdot]"] \arrow[d, "\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}"'] & \mathrm{Sub}(B) \arrow[d, "\mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}"] \\ \mathrm{Sub}(A) \arrow[r, "f[\cdot]"'] & \mathrm{Sub}(B) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Puesto que $X \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, $f[X] \subseteq f[\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)]$. Ahora bien, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$ es la mínima subálgebra de $\mathbf{B}$ que contiene a $f[X]$ y $f[\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)]$ es una subálgebra de $\mathbf{B}$ que contiene a $f[X]$, por lo tanto $\mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X]) \subseteq f[\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)]$.

Para demostrar la inversa, ya que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)$ y $f[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)]$, es suficiente que demostremos, por inducción finita, que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)] \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$.

Para $n = 0$, se cumple que $f[\mathrm{E}^0_{\mathbf{A}}(X)] \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$, porque $f[\mathrm{E}^0_{\mathbf{A}}(X)] = f[X]$. Supongamos que, para $n \geq 0$, se cumpla que $f[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)] \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$. Entonces, ya que $\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X) \cup \bigcup_{\sigma\in\Sigma} F^{\mathbf{A}}_{\sigma}[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)^{\mathrm{ar}(\sigma)}]$ y

$$f[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X) \cup \bigcup\nolimits_{\sigma\in\Sigma} F^{\mathbf{A}}_{\sigma}[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)^{\mathrm{ar}(\sigma)}]] = f[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)] \cup \bigcup\nolimits_{\sigma\in\Sigma} f[F^{\mathbf{A}}_{\sigma}[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)^{\mathrm{ar}(\sigma)}]]$$

para demostrar que $f[\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X)] \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$, es suficiente que demostremos que $f[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)] \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$ y que $\bigcup_{\sigma\in\Sigma} f[F^{\mathbf{A}}_{\sigma}[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)^{\mathrm{ar}(\sigma)}]] \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$. Ahora bien, lo primero se cumple por la hipótesis de inducción. Sea pues $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = m$ y $a \in (\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X))^m$, entonces, ya que $f(F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a)) = F^{\mathbf{B}}_{\sigma}(f^m(a))$, y $f^m(a) \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$, se cumple que $f(F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a)) \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$, por lo tanto $\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$. □

5.3. Extensión de una signatura por un conjunto.

Para un conjunto X y una signatura algebraica $\mathbf{\Sigma} = (\Sigma, \mathrm{ar})$, denotamos por $\Sigma \coprod X$, el coproducto de Σ y X, i.e., el conjunto $(\Sigma \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$, por in_{Σ} la inclusión canónica de Σ en $\Sigma \coprod X$, i.e., la aplicación de Σ en $\Sigma \coprod X$ que a un $\sigma \in \Sigma$ le asigna $(\sigma, 0)$, y por in_X la inclusión canónica de X en $\Sigma \coprod X$, i.e., la aplicación de X en $\Sigma \coprod X$ que a un $x \in X$ le asigna $(x, 1)$. Además, convenimos, para abreviar, en denotar por (σ) el valor de la aplicación $\eta_{\Sigma \coprod X} \circ \mathrm{in}_{\Sigma}$ de Σ en $\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$, en $\sigma \in \Sigma$, y por (x) el valor de la aplicación $\eta_{\Sigma \coprod X} \circ \mathrm{in}_X$ de X en $\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$, en $x \in X$. Obsérvese que si no hiciéramos tales convenios notacionales, deberíamos escribir $((\sigma, 0))$ en lugar de (σ), y $((x, 1))$ en lugar de (x).

Proposición 5.21. *Sea* $\mathbf{\Sigma} = (\Sigma, \mathrm{ar})$ *una signatura algebraica,* X *un conjunto y* κ_0 *la aplicación de* X *en* $\mathbb{N}$ *que a cada* $x \in X$ *le asigna como valor* 0. *Entonces hay una única aplicación* $\mathrm{ar}[X]$ *de* $\Sigma \coprod X$ *en* $\mathbb{N}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[r, "\mathrm{in}_{\Sigma}"] \arrow[dr, "\mathrm{ar}"'] & \Sigma \coprod X \arrow[d, "\mathrm{ar}[X]"] & X \arrow[l, "\mathrm{in}_X"'] \arrow[dl, "\kappa_0"] \\ & \mathbb{N} & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Es suficiente tomar como aplicación $\mathrm{ar}[X]$ de $\Sigma \coprod X$ en $\mathbb{N}$, la que asigna a $(\sigma, 0)$, con $\sigma \in \Sigma$, como valor $\mathrm{ar}(\sigma)$, y a $(x, 1)$, con $x \in X$, como valor 0. □

La proposición anterior afirma simplemente que una signatura algebraica $\mathbf{\Sigma} = (\Sigma, \mathrm{ar})$ y un conjunto de variables X, determinan, unívocamente, otra signatura algebraica $\mathbf{\Sigma}[X] = (\Sigma \coprod X, \mathrm{ar}[X])$, la *extensión de $\mathbf{\Sigma}$ por X*, cuyo conjunto de símbolos de operación, se obtiene agregando, de manera disjunta, al conjunto de símbolos de operación dado Σ, el conjunto de las variables X, pero consideradas, ahora, como símbolos de operación 0-arios.

Proposición 5.22. *Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica, X un conjunto y $\mathrm{ar}[X]$ la única aplicación de $\Sigma \coprod X$ en $\mathbb{N}$ tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[r, "\mathrm{in}_\Sigma"] \arrow[dr, "\mathrm{ar}"'] & \Sigma \coprod X \arrow[d, "{\mathrm{ar}[X]}"] & X \arrow[l, "\mathrm{in}_X"'] \arrow[dl, "\kappa_0"] \\
& \mathbb{N} &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Entonces hay un único morfismo $\mathrm{ar}[X]^\sharp \colon \mathbf{Ml}(\Sigma \coprod X) \longrightarrow (\mathbb{N}, +, 0)$ que extiende a la aplicación $\mathrm{ar}[X]$, i.e., $\mathrm{ar}[X]^\sharp$ es el único morfismo del monoide $\mathbf{Ml}(\Sigma \coprod X)$ en el monoide $(\mathbb{N}, +, 0)$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \coprod X \arrow[r, "\eta_{\Sigma \coprod X}"] \arrow[dr, "{\mathrm{ar}[X]}"'] & \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X) \arrow[d, "{\mathrm{ar}[X]^\sharp}"] \\
& \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposición 5.23. *Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica, X un conjunto y κ_1 la aplicación de $\Sigma \coprod X$ en $\mathbb{N}$ que a cada miembro de $\Sigma \coprod X$ le asigna como valor 1. Entonces hay un único morfismo $|\cdot| \colon \mathbf{Ml}(\Sigma \coprod X) \longrightarrow (\mathbb{N}, +, 0)$ que extiende a la aplicación κ_1 de $\Sigma \coprod X$ en $\mathbb{N}$, i.e., $|\cdot|$ es el único morfismo del monoide $\mathbf{Ml}(\Sigma \coprod X)$ en el monoide $(\mathbb{N}, +, 0)$ tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \coprod X \arrow[r, "\eta_{\Sigma \coprod X}"] \arrow[dr, "\kappa_1"'] & \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X) \arrow[d, "|\cdot|"] \\
& \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

5.4. Existencia del álgebra libre sobre un conjunto.

Nos proponemos demostrar, en lo que sigue, que dada una signatura algebraica $\mathbf{\Sigma}$ y un conjunto X, existe una $\mathbf{\Sigma}$-algebra $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, la $\mathbf{\Sigma}$-algebra *absolutamente libre* sobre X, y una aplicación η_X de X en $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, la *inclusión de los generadores*, tal que para cada $\mathbf{\Sigma}$-algebra $\mathbf{A}$ y cada aplicación $f\colon X \longrightarrow A$, hay un único $\mathbf{\Sigma}$-homomorfismo $f^\sharp$ de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ en $\mathbf{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[d, "f^\sharp"] \\ & A \end{tikzcd}$$

conmuta.

Para obtener la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra absolutamente libre sobre un conjunto X, definimos en primer lugar, explícitamente, una $\mathbf{\Sigma}$-algebra $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, la $\mathbf{\Sigma}$-algebra de las *palabras sobre* X, cuyo conjunto subyacente estará formado por todas las palabras sobre el alfabeto $\Sigma \coprod X$.

Definición 5.24. Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y X un conjunto. Denotamos por $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ la $\mathbf{\Sigma}$-algebra cuyo conjunto subyacente, $\mathrm{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, es el conjunto $\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$, formado por todas las palabras sobre el alfabeto $\Sigma \coprod X$, y cuyas operaciones estructurales, F_σ, para cada $\sigma \in \Sigma$, son las definidas como:

$$F_\sigma \begin{cases} (\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X))^{\mathrm{ar}(\sigma)} & \longrightarrow \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X) \\ (P_j \mid j \in \mathrm{ar}(\sigma)) & \longmapsto (\sigma) \curlywedge \curlywedge(P_j \mid j \in \mathrm{ar}(\sigma)) \end{cases},$$

i.e., como la concatenación de la palabra (σ) y de las palabras P_j, con $j \in \mathrm{ar}(\sigma)$.

A la $\mathbf{\Sigma}$-algebra $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ la denominamos la $\mathbf{\Sigma}$-algebra de las *palabras sobre* X. Además, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, y con el fin de abreviar, denotaremos la acción de F_σ sobre la familia finita de palabras $(P_j \mid j \in n)$ como $(\sigma)P_0 \cdots P_{n-1}$.

En lo anterior, las operaciones estructurales, F_σ, se han podido definir, de cierta manera canónica, esencialmente, porque $\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$ además de ser un conjunto, está dotado de una estructura de monoide, gracias, en particular, a la operación de concatenación de palabras. Es por ello, entre otras razones, por lo que el concepto de monoide es tan importante.

Ahora que disponemos de la $\mathbf{\Sigma}$-algebra $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, así como del concepto de subálgebra de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra, definimos la $\mathbf{\Sigma}$-algebra absolutamente libre sobre un conjunto.

Definición 5.25. Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y X un conjunto. Entonces la $\mathbf{\Sigma}$-algebra *absolutamente libre* sobre X, denotada por $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, es la subálgebra de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ canónicamente asociada a $\mathrm{Sg}_{\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)}(\{\, (x) \mid x \in X \,\})$, i.e., al cerrado de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ generado por $\{\, (x) \mid x \in X \,\}$. A los miembros del conjunto $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, subyacente de la $\mathbf{\Sigma}$-algebra $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, los denominamos *símbolos de operación polinómica* o *términos con variables en* X.

En virtud de la definición, sabemos que $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ es la subálgebra de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ canónicamente asociada al cerrado de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ generado por $\{\, (x) \mid x \in X \,\}$, pero desconocemos, en principio, si los términos o símbolos de operación polinómica con variables en X, admiten alguna representación canónica. Vamos a demostrar, siguiendo a Bourbaki, que, de hecho, los términos sí tienen una representación canónica. Pero antes de ello, introducimos el concepto de *sucesión de formación* de una palabra, relativa a una signatura algebraica y a un conjunto de variables, mediante el cual daremos otra caracterización del conjunto $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, que no será, esencialmente, mas que otra versión del hecho de que $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) = \mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)}(\{\, (x) \mid x \in X \,\})$.

Definición 5.26. Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica, X un conjunto y $P \in \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$. Una *sucesión de formación* para P, relativa a $\mathbf{\Sigma}$ y X, es una familia finita no vacía

$(P_i \mid i \in n)$ en $\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$, i.e., un miembro de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}-1} \mathrm{Fnc}(n, \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X))$ que tiene las siguientes propiedades:

1. $P = P_{n-1}$.
2. $\forall i \in n$, $\exists x \in X$ tal que $P_i = (x)$, o $\exists \sigma \in \Sigma_0$ tal que $P_i = (\sigma)$, o $\exists p \in \mathbb{N} - 1$, $\exists \sigma \in \Sigma_p$ y $\exists(i_\alpha \mid \alpha \in p) \in i^p$ tal que $P_i = (\sigma)P_{i_0} \cdots P_{i_{p-1}}$.

Denotamos por $\mathrm{L}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$ el conjunto de todas las palabras $P \in \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$ para las que existe alguna sucesión de formación, i.e., $\mathrm{L}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$ es el subconjunto de $\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$ que consta precisamente de las palabras $P \in \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$ para las que $\exists n \in \mathbb{N} - 1$, $\exists(P_i \mid i \in n) \in \mathrm{Fnc}(n, \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X))$ tal que $P = P_{n-1}$ y $\forall i \in n$, $\exists x \in X$ tal que $P_i = (x)$, o $\exists \sigma \in \Sigma_0$ tal que $P_i = (\sigma)$, o $\exists p \in \mathbb{N} - 1$, $\exists \sigma \in \Sigma_p$ y $\exists(i_\alpha \mid \alpha \in p) \in i^p$ tal que $P_i = (\sigma)P_{i_0} \cdots P_{i_{p-1}}$.

Proposición 5.27. *Sea* $\boldsymbol{\Sigma}$ *una signatura algebraica y* X *un conjunto. Entonces se cumple que* $\mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X) = \mathrm{L}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$.

Demostración. Puesto que $\mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$ es el mínimo cerrado de $\mathbf{W}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$ que contiene a $\{\, (x) \mid x \in X \,\}$, para demostrar que $\mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X) \subseteq \mathrm{L}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$, será suficiente que demostremos que $\mathrm{L}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$ es un cerrado de $\mathbf{W}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$ y que contiene a $\{\, (x) \mid x \in X \,\}$.

Se cumple que $\{\, (x) \mid x \in X \,\} \subseteq \mathrm{L}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$, porque, dado un $x \in X$, la familia $(P_i \mid i \in 1)$ con $P_0 = (x)$, es una sucesión de formación para (x). Además, dado un $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = p$, y una familia $(Q_j \mid j \in p)$ en $\mathrm{L}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$, en virtud de la definición de $\mathrm{L}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$, tenemos que, para cada $j \in p$, $\exists n_j \in \mathbb{N} - 1$, $\exists(P_{j,i} \mid i \in n_j) \in \mathrm{Fnc}(n_j, \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X))$ tal que $Q_j = P_{j,n_j-1}$ y $\forall i \in n_j$, $\exists x \in X$ tal que $P_{j,i} = (x)$, o $\exists \sigma \in \Sigma_0$ tal que $P_{j,i} = (\sigma)$, o $\exists q \in \mathbb{N} - 1$, $\exists \tau \in \Sigma_q$ y $\exists(k_\alpha \mid \alpha \in q) \in i^q$ tal que $P_{j,i} = (\tau)P_{j,k_0} \cdots P_{j,k_{q-1}}$. Situación que resumimos, parcialmente, mediante la matriz:

$$\begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & \dots & P_{0,n_0-1} = Q_0 \\ P_{1,0} & P_{1,1} & \dots & P_{1,n_1-1} = Q_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{p-1,0} & P_{p-1,1} & \dots & P_{p-1,n_{p-1}-1} = Q_{p-1} \end{pmatrix}$$

Luego para $n = \left(\sum_{j\in p} n_j\right) + 1$ y tomando como $(P_i \mid i \in n)$ la familia cuyo último término es $(\sigma)Q_0 \cdots Q_{p-1}$ y siendo los otros términos los formado por los de la matriz, recorridos de izquierda a derecha y de arriba abajo, se cumple que $(P_i \mid i \in n)$ es una sucesión de formación para $(\sigma)Q_0 \cdots Q_{p-1}$, luego $(\sigma)Q_0 \cdots Q_{p-1} \in \mathrm{L}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$. Por consiguiente $\mathrm{L}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$ es un cerrado de $\mathbf{W}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$. De todo ello concluimos que $\mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X) \subseteq \mathrm{L}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$.

Demostramos ahora que $\mathrm{L}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X) \subseteq \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$. Sea $P \in \mathrm{L}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$. Entonces, por definición, $P \in \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$ para el que $\exists n \in \mathbb{N} - 1$, $\exists(P_i \mid i \in n) \in \mathrm{Fnc}(n, \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X))$ tal que $P = P_{n-1}$ y $\forall i \in n$, $\exists x \in X$ tal que $P_i = (x)$, o $\exists \sigma \in \Sigma_0$ tal que $P_i = (\sigma)$, o $\exists p \in \mathbb{N} - 1$, $\exists \sigma \in \Sigma_p$ y $\exists(i_\alpha \mid \alpha \in p) \in i^p$ tal que $P_i = (\sigma)P_{i_0} \cdots P_{i_{p-1}}$. Demostramos que $P = P_{n-1} \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$, por inducción sobre $i \in n$. Para $i = 0$, $P_0 \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$, porque, en este caso, P_0 o bien es de la forma (x), para algún $x \in X$, y entonces $P_0 \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$, porque $\{\, (x) \mid x \in X \,\} \subseteq \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$, o bien es de la forma (σ), para algún $\sigma \in \Sigma_0$, y entonces $P_0 \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$, porque $\mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$ es un cerrado de $\mathbf{W}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$. Sea $k \in n$ y supongamos que $\forall i \in k$, $P_i \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$. Entonces, por definición, $\exists x \in X$ tal que $P_k = (x)$, o $\exists \sigma \in \Sigma_0$ tal que $P_k = (\sigma)$, o $\exists p \in \mathbb{N} - 1$, $\exists \sigma \in \Sigma_p$ y $\exists(i_\alpha \mid \alpha \in p) \in i^p$ tal que $P_k = (\sigma)P_{i_0} \cdots P_{i_{p-1}}$. Es evidente que en los dos primeros casos $P_k \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$. En el último caso también $P_k \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$, porque al ser, por hipótesis, $P_0, \dots, P_{k-1} \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$, también $P_{i_0}, \dots, P_{i_{p-1}} \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$, luego, ya que $\mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$ es un cerrado de $\mathbf{W}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$, $P_k = (\sigma)P_{i_0} \cdots P_{i_{p-1}} \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$. Así que, para cada $k \in n$, $P_k \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$, luego, para $k = n - 1$, $P = P_{n-1} \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$. Por lo tanto $\mathrm{L}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X) \subseteq \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$. $\square$

Antes de demostrar que los símbolos de operación polinómica tienen una representación canónica, introducimos unas nociones auxiliares de la teoría de monoides, y unas propiedades especiales del monoide libre sobre un conjunto, que nos serán de utilidad para alcanzar el objetivo mencionado.

Definición 5.28. Sea A un conjunto y $P, Q \in \mathrm{Ml}(A)$.

1. Decimos que Q un *segmento* de P si hay dos palabras $X, Y \in \mathrm{Ml}(A)$ tales que $P = X \curlywedge Q \curlywedge Y$. Además, si $|X| = k$, entonces decimos que la palabra Q empieza en el $k+1$-ésimo lugar.
2. Decimos que Q un *segmento inicial* de P, y lo denotamos por $Q \leq_{\mathrm{pre}} P$, si hay una palabra $Y \in \mathrm{Ml}(A)$ tal que $P = Q \curlywedge Y$, y que es un *segmento inicial estricto* de P, y lo denotamos por $Q <_{\mathrm{pre}} P$, si es un segmento inicial de P y si $Q \neq P$.

Proposición 5.29. *Sea A un conjunto. Entonces* $\mathbf{Ml}(A)$ *es* regular *o* cancelativo*, i.e., el monoide libre sobre A tiene las siguientes propiedades:*

1. $\forall X, P, Q \in \mathrm{Ml}(A)\,((X \curlywedge P = X \curlywedge Q) \rightarrow P = Q)$.
2. $\forall X, P, Q \in \mathrm{Ml}(A)\,((P \curlywedge X = Q \curlywedge X) \rightarrow P = Q)$.

Demostración. □

Proposición 5.30. *Sea A un conjunto, $P \in \mathrm{Ml}(A)$ y X e Y dos segmentos iniciales de P. Entonces X es un segmento inicial de Y, o Y es un segmento inicial de X.*

Demostración. □

Definición 5.31. Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica, X un conjunto y $P \in \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$. Decimos que P es una *palabra equilibrada*, relativa a $\mathbf{\Sigma}$ y X, si cumple las siguientes condiciones:

1. $|P| = \mathrm{ar}[X]^\sharp(P) + 1$.
2. Para cada segmento inicial estricto Q de P, $|Q| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(Q)$

Denotamos por $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ el conjunto de todas las palabras equilibradas, relativas a $\mathbf{\Sigma}$ y X.

Proposición 5.32. *Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y X un conjunto. Entonces se cumple que* $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \subseteq \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$.

Demostración. Puesto que $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ es el mínimo cerrado de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ que contiene a $\{\,(x) \mid x \in X\,\}$, para demostrar que $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \subseteq \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, será suficiente que demostremos que $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ es un cerrado de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ y que contiene a $\{\,(x) \mid x \in X\,\}$.

Se cumple que $\{\,(x) \mid x \in X\,\} \subseteq \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, porque, para cada $x \in X$, la palabra (x) es equilibrada, ya que, por una parte, al ser $|(x)| = 1$ y $\mathrm{ar}[X]^\sharp((x)) = 0$, tenemos que $|(x)| = \mathrm{ar}[X]^\sharp((x)) + 1$, y, por otra, si Q es un segmento inicial propio de (x), entonces, necesariamente, $Q = \lambda$, y para la palabra vacía tenemos que $|\lambda| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(\lambda)$, ya que $0 \leq 0$.

Demostramos a continuación que, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = p$, y cada familia $(P_j \mid j \in p)$ en $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, la palabra $(\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$ es equilibrada.

Si $p = 0$, entonces la palabra (σ) es equilibrada ya que, por una parte, al ser $|(\sigma)| = 1$ y $\mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) = 0$, tenemos que $|(\sigma)| = \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) + 1$, y, por otra, si Q es un segmento inicial propio de (σ), entonces, necesariamente, $Q = \lambda$, y para la palabra vacía tenemos que $|\lambda| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(\lambda)$, ya que $0 \leq 0$.

Si $p \neq 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
|(\sigma)P_0\cdots P_{p-1}| &= |(\sigma)| + \textstyle\sum_{j\in p}|P_j| && \text{(porque } |\cdot| \text{ es morfismo)}\\
&= 1 + \textstyle\sum_{j\in p}|P_j| \\
&= 1 + \textstyle\sum_{j\in p}(\mathrm{ar}[X]^\sharp(P_j)+1) && \text{(porque } P_j \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X))\\
&= 1 + p + \textstyle\sum_{j\in p}\mathrm{ar}[X]^\sharp(P_j) \\
&= 1 + \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) + \textstyle\sum_{j\in p}\mathrm{ar}[X]^\sharp(P_j) && \text{(porque } \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) = p)\\
&= 1 + \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)P_0\cdots P_{p-1}) && \text{(porque } \mathrm{ar}[X]^\sharp \text{ es morfismo).}
\end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple, para la palabra $(\sigma)P_0\cdots P_{p-1}$, la primera condición definitoria del concepto de palabra equilibrada.

Sea Q un segmento inicial estricto de $(\sigma)P_0\cdots P_{p-1}$. Entonces, o bien hay un $i \in p-1$ para el cual la palabra P_i es un segmento de Q, o bien no es ése el caso.

Si no hay ningún $i \in p-1$ para el cual P_i sea un segmento de Q, entonces, o bien $Q = \lambda$, o bien $Q = (\sigma)$, o bien $Q = (\sigma)R$, siendo R un segmento inicial estricto de P_0. Si $Q = \lambda$, entonces $|\lambda| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(\lambda)$; si $Q = (\sigma)$, entonces $|(\sigma)| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma))$, ya que $|(\sigma)| = 1$, $\mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) = p$ y, por hipótesis $1 \leq p$; si $Q = (\sigma)R$, siendo R un segmento inicial estricto de P_0, entonces

$$\begin{aligned}
|Q| &= |(\sigma)| + |R| && \text{(porque } |\cdot| \text{ es morfismo)}\\
&\leq 1 + \mathrm{ar}[X]^\sharp(R) && \text{(porque } P_0 \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \text{ y } R <_{\mathrm{pre}} P_0)\\
&\leq p + \mathrm{ar}[X]^\sharp(R) \\
&= \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) + \mathrm{ar}[X]^\sharp(R) \\
&= \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)R) \\
&= \mathrm{ar}[X]^\sharp(Q).
\end{aligned}$$

De modo que si Q un segmento inicial estricto de $(\sigma)P_0\cdots P_{p-1}$ y no hay ningún $i \in p-1$ para el cual P_i sea un segmento de Q, entonces $|Q| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(Q)$.

Bajo la misma hipótesis de que Q sea un segmento inicial estricto de $(\sigma)P_0\cdots P_{p-1}$, supongamos que exista un $i \in p-1$ para el cual P_i sea un segmento de Q. Sea entonces q el máximo de entre los $i \in p-1$ para los cuales se cumple que la palabra P_i sea un segmento de Q. Entonces $Q = (\sigma)P_0\cdots P_qR$, siendo R un segmento inicial estricto de P_{q+1} (ya que si R no fuera un segmento inicial estricto de P_{q+1}, q no sería el máximo con la propiedad indicada), y tenemos que:

$$\begin{aligned}
|Q| &= |(\sigma)| + \Big(\textstyle\sum_{j\in q+1}|P_j|\Big) + |R| && \text{(porque } |\cdot| \text{ es morfismo)}\\
&= 1 + \Big(\textstyle\sum_{j\in q+1}(\mathrm{ar}[X]^\sharp(P_j)+1)\Big) + |R| \\
&= 1 + (q+1) + \Big(\textstyle\sum_{j\in q+1}\mathrm{ar}[X]^\sharp(P_j)\Big) + |R| \\
&\leq p + \Big(\textstyle\sum_{j\in q+1}\mathrm{ar}[X]^\sharp(P_j)\Big) + \mathrm{ar}[X]^\sharp(R) && \text{(porque } q \leq p-2 \text{ y } R <_{\mathrm{pre}} P_{q+1})\\
&= \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)P_0\cdots P_qR) && \text{(porque } \mathrm{ar}[X]^\sharp \text{ es morfismo)}\\
&= \mathrm{ar}[X]^\sharp(Q).
\end{aligned}$$

De modo que si Q un segmento inicial estricto de $(\sigma)P_0\cdots P_{p-1}$ y hay un $i \in p-1$ para el cual P_i sea un segmento de Q, entonces $|Q| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(Q)$.

Por consiguiente, para cada segmento inicial estricto Q de $(\sigma)P_0\cdots P_{p-1}$, se cumple que $|Q| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(Q)$. Luego $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ es un cerrado de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, y por lo tanto $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ está incluido en $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. □

Antes de demostrar, por inducción sobre la longitud, que $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ está incluido en $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, demostramos que para cada palabra equilibrada P, o bien hay un único $x \in X$ tal que $P = (x)$, o bien hay un único $\sigma \in \Sigma_0$ tal que $P = (\sigma)$, o bien hay un único $p \in \mathbb{N} - 1$, un único $\sigma \in \Sigma_p$ y una única familia $(P_j \mid j \in p)$ en $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ tal que $P = (\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$. Para ello demostramos los lemas que siguen.

Lema 5.33. *Si $P \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, entonces ningún segmento inicial estricto de P es una palabra equilibrada.*

Demostración. Sea $P \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ y Q un segmento inicial estricto de P. Entonces $|Q| \leq \mathrm{ar}[X]^{\sharp}(Q)$. Ahora bien, $\mathrm{ar}[X]^{\sharp}(Q) < \mathrm{ar}[X]^{\sharp}(Q)+1$, luego $|Q| < \mathrm{ar}[X]^{\sharp}(Q)+1$, por lo tanto no puede ser $|Q| = \mathrm{ar}[X]^{\sharp}(Q) + 1$. □

Lema 5.34. *Si $P \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ y $k \in |P|$, entonces existe un único segmento equilibrado Q de P que empieza en el $k+1$-ésimo lugar, i.e., hay un triplo ordenado (U, Q, V) en $\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X) \times \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \times \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$ tal que $P = U \curlywedge Q \curlywedge V$, $|U| = k$ y, para cada $(Q', V') \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \times \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$, si $P = U \curlywedge Q' \curlywedge V'$, entonces $Q' = Q$.*

Demostración. Unicidad. Supongamos que para un triplo (U, Q, V) en $\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X) \times \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \times \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$ se cumpla que $P = U \curlywedge Q \curlywedge V$ y que $|U| = k$, y sea $(Q', V') \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \times \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$ tal que $P = U \curlywedge Q' \curlywedge V'$. Entonces de la ecuación $U \curlywedge Q \curlywedge V = U \curlywedge Q' \curlywedge V'$ obtenemos que $Q \curlywedge V = Q' \curlywedge V'$, porque los monoides libres son cancelativos, luego, por la prop. 5.30, o bien Q es un segmento inicial estricto de Q', o bien Q' es un segmento inicial estricto de Q, o bien $Q = Q'$. Pero, en virtud del lema 5.33, no puede ocurrir ni que Q sea un segmento inicial estricto de Q' ni que Q' lo sea de Q, así que $Q = Q'$

Existencia. Sea $P \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, $k \in |P|$ y $P = B \curlywedge C$, siendo $B \in \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$ tal que $|B| = k$ (así que B es un segmento inicial estricto de P). Para cada $i \in |C|+1$, sea C_i el segmento inicial de C cuya longitud es precisamente i (en particular, C_0 es la palabra vacía, y $C_{|C|}$ es la propia palabra C).

Para el segmento inicial $C_{|C|}$ de la palabra C, que es la propia C, se cumple que:

$$\begin{aligned} |C_{|C|}| &= |P| - |B| && \text{(porque } P = B \curlywedge C\text{)} \\ &= (\mathrm{ar}[X]^{\sharp}(P) + 1) - |B| \\ &\geq (\mathrm{ar}[X]^{\sharp}(P) + 1) - \mathrm{ar}[X]^{\sharp}(R) && \text{(porque } B <_{\mathrm{pre}} P\text{).} \end{aligned}$$

Pero debido a que $\mathrm{ar}[X]^{\sharp}(P) = \mathrm{ar}[X]^{\sharp}(B) + \mathrm{ar}[X]^{\sharp}(C)$, también $(\mathrm{ar}[X]^{\sharp}(P) + 1) - \mathrm{ar}[X]^{\sharp}(B) = \mathrm{ar}[X]^{\sharp}(C) + 1$, luego $|C_{|C|}| \geq \mathrm{ar}[X]^{\sharp}(C_{|C|}) + 1$. Así que la palabra C tiene al menos un segmento inicial T, e.g., ella misma, para el que $|T| \geq \mathrm{ar}[X]^{\sharp}(T) + 1$.

Por otra parte, hay al menos un $j \in |C|$ para el que se cumple que, para cada $h \leq j$, $|C_h| \leq \mathrm{ar}[X]^{\sharp}(C_h)$, e.g., para $j = 0$, se cumple que, para cada $h \leq 0$, $|C_h| \leq \mathrm{ar}[X]^{\sharp}(C_h)$. Sea i el máximo del conjunto

$$\{\, j \in |C| \mid \forall h \leq j\, (|C_h| \leq \mathrm{ar}[X]^{\sharp}(C_h))\,\}.$$

Entonces $|C_i| \leq \mathrm{ar}[X]^{\sharp}(C_i)$ y $|C_{i+1}| \geq \mathrm{ar}[X]^{\sharp}(C_{i+1}) + 1$. La palabra C_{i+1} es una palabra equilibrada. En efecto, tenemos que $|C_{i+1}| \geq \mathrm{ar}[X]^{\sharp}(C_{i+1}) + 1$, pero también:

$$\begin{aligned} |C_{i+1}| &= |C_i| + 1 \\ &\leq \mathrm{ar}[X]^{\sharp}(C_i) + 1 \\ &\leq \mathrm{ar}[X]^{\sharp}(C_{i+1}) + 1, \end{aligned}$$

así que $|C_{i+1}| = \mathrm{ar}[X]^{\sharp}(C_{i+1}) + 1$. Además, si D es un segmento inicial estricto de C_{i+1}, entonces $D = C_j$, para algún $j \in i + 1$, luego $|D| \leq \mathrm{ar}[X]^{\sharp}(D)$.

De modo que C_{i+1} es una palabra equilibrada que empieza en el $k+1$-ésimo lugar. □

Lema 5.35. *Si $P \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, entonces $P = (x)$, para un $x \in X$, o $P = (\sigma)$, para un $\sigma \in \Sigma_0$, o $P = (\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$, para un $p \in \mathbb{N} - 1$, un $\sigma \in \Sigma_p$ y una familia $(P_j \mid j \in p)$ en $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$.*

Demostración. Por ser $P \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, se cumple que $|P| = \mathrm{ar}[X]^\sharp(P) + 1$, luego $|P| \geq 1$, i.e., P no es la palabra vacía.

Si $|P| = 1$, entonces $\mathrm{ar}[X]^\sharp(P) = 0$, luego $P = (x)$, para un $x \in X$, o $P = (\sigma)$, para un $\sigma \in \Sigma_0$.

Supongamos que $|P| \geq 2$ y sea σ la primera letra de la palabra P. Para $k = 1$, en virtud del lema anterior, hay un único segmento equilibrado P_0 de P que empieza en el $k+1$-ésimo lugar, i.e., en este caso, en el segundo lugar. Por lo tanto, o bien $|(\sigma)| + |P_0| = |P|$, o bien $|(\sigma)| + |P_0| < |P|$. Si lo primero, entonces $P = (\sigma) \curlywedge P_0$, y tenemos que:

$$\begin{aligned}
1 + |P_0| &= |P| \\
&= \mathrm{ar}[X]^\sharp(P) + 1 \\
&= \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) + \mathrm{ar}[X]^\sharp(P_0) + 1 \\
&= \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) + (|P_0| - 1) + 1 \\
&= \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) + |P_0|,
\end{aligned}$$

luego $\mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) = 1$, así que $\sigma \in \Sigma_1$. Si lo segundo, entonces, para $k = 1 + |P_0|$, en virtud del lema anterior, hay un único segmento equilibrado P_1 de P que empieza en el $k+1$-ésimo lugar, i.e., en este caso, en el $(1 + |P_0|) + 1$-ésimo lugar. Por lo tanto, o bien $|(\sigma)| + |P_0| + |P_1| = |P|$, o bien $|(\sigma)| + |P_0| + |P_1| < |P|$. Si lo primero, entonces $P = (\sigma) \curlywedge P_0 \curlywedge P_1$, y tenemos que $\mathrm{ar}[X]^\sharp((\xi)) = 2$, así que $\sigma \in \Sigma_2$. Si lo segundo, entonces se prosigue del mismo modo, hasta que para un $p \in \mathbb{N} - 1$ y una familia $(P_j \mid j \in p)$ en $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, $P = (\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
1 + \textstyle\sum_{j \in p} |P_j| &= |P| \\
&= \mathrm{ar}[X]^\sharp(P) + 1 \\
&= \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) + \left(\textstyle\sum_{j \in p} \mathrm{ar}[X]^\sharp(P_j)\right) + 1 \\
&= \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) + \left(\textstyle\sum_{j \in p} (|P_j| - 1)\right) + 1 \\
&= \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) + \left(\textstyle\sum_{j \in p} |P_j|\right) + (1 - p),
\end{aligned}$$

luego $\mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) = p$, así que $\sigma \in \Sigma_p$. □

Corolario 5.36. *Si $P \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, entonces $P = (x)$, para un único $x \in X$, o $P = (\sigma)$, para un único $\sigma \in \Sigma_0$, o $P = (\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$, para un único $p \in \mathbb{N} - 1$, un único $\sigma \in \Sigma_p$ y una única familia $(P_j \mid j \in p)$ en $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$.*

Proposición 5.37. *Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y X un conjunto. Entonces se cumple que $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \subseteq \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre la longitud de las palabras. Sea $P \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ tal que $|P| = 1$. Entonces $\mathrm{ar}[X]^\sharp(P) = 0$, luego $P = (x)$, para un único $x \in X$, o $P = (\sigma)$, para un único $\sigma \in \Sigma_0$; en cualquiera de los dos casos $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$.

Supongamos que todas las palabras equilibradas cuya longitud sea a lo sumo n, con $n \geq 1$, pertenezcan a $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Sea $P \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ tal que $|P| = n + 1$. Entonces $P = (\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$, para un único $p \in \mathbb{N} - 1$, un único $\sigma \in \Sigma_p$ y una única familia

$(P_j \mid j \in p)$ en $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Ahora bien, $|P| = |(\sigma)| + \sum_{j\in p}|P_j| = 1 + \sum_{j\in p}|P_j|$, por lo tanto, para cada $j \in p$, $|P_j| < |P| = n+1$, luego, por la hipótesis de inducción, para cada $j \in p$, $P_j \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, así que $P = (\sigma)P_0 \cdots P_{p-1} \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Queda demostrado que todas las palabras equilibradas cuya longitud sea $n+1$, son miembros de $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Por consiguiente $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \subseteq \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. □

Corolario 5.38 (Menger-Hall-Schröter)**.** *Sea* $\mathbf{\Sigma}$ *una signatura algebraica y* X *un conjunto. Entonces se cumple que* $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X) = \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$.

Proposición 5.39. *Sea* $\mathbf{\Sigma}$ *una signatura algebraica y* X *un conjunto. Entonces el par ordenado* $(\eta_X, \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X))$ *en el que* η_X *es la única aplicación de* X *en* $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\mathrm{in}_X"] \arrow[ddl, "\eta_X"'] \\ & \Sigma \coprod X \arrow[d, "\eta_{\Sigma \coprod X}"] \\ \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)}"'] & \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X) \end{tikzcd}$$

conmuta, tiene la propiedad de que, para cada $\mathbf{\Sigma}$*-algebra* $\mathbf{A}$ *y cada aplicación* $f\colon X \longrightarrow A$*, existe un único homomorfismo* $f^\sharp$ *de* $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ *en* $\mathbf{A}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[d, "f^\sharp"] \\ & A \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Procedemos por inducción sobre la longitud de las palabras equilibradas. Sea $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ tal que $|P| = 1$. Entonces $P = (x)$, para un único $x \in X$, o $P = (\sigma)$, para un único $\sigma \in \Sigma_0$. Si $P = (x)$, entonces definimos la acción de $f^\sharp$ sobre (x) como:

$$f^\sharp((x)) = f(x).$$

Si $P = (\sigma)$, entonces definimos la acción de $f^\sharp$ sobre (σ) como:

$$f^\sharp((\sigma)) = \sigma^{\mathbf{A}}.$$

Supongamos $f^\sharp$ definida para todas las palabras equilibradas cuya longitud sea a lo sumo n, con $n \geq 1$, y sea $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ tal que $|P| = n+1$. Entonces $P = (\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$, para un único $p \in \mathbb{N} - 1$, un único $\sigma \in \Sigma_p$ y una única familia $(P_j \mid j \in p)$ en $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Ahora bien, para cada $j \in p$, $|P_j| < |P| = n+1$, luego, por la hipótesis de inducción, para cada $j \in p$, $f^\sharp$ está definida sobre P_j. Entonces definimos la acción de $f^\sharp$ sobre $P = (\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$ como:

$$f^\sharp((\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}) = F_\sigma^{\mathbf{A}}(f^\sharp(P_0), \ldots, f^\sharp(P_{p-1})).$$

Así definido, $f^\sharp$, cumple todas las condiciones de la proposición. □

Corolario 5.40. *Sea* $\mathbf{\Sigma}$ *una signatura algebraica y* X *un conjunto. Entonces el par ordenado* $(\eta_X, \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X))$ *es único salvo un único isomorfismo.*

Demostración. □

Corolario 5.41. *Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y $f\colon X \longrightarrow Y$. Entonces hay un único homomorfismo $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(f)\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \longrightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(Y)$ tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[d, "\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(f)"] \\ Y \arrow[r, "\eta_Y"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(Y) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposición 5.42. *Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y X e Y dos conjuntos. Una condición necesaria y suficiente para que X e Y sean isomorfos es que $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ y $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(Y)$ lo sean.*

Demostración. □

Como una aplicación del concepto de álgebra libre, mostramos a continuación cómo obtener, de forma canónica, el conjunto de las diferentes variables que ocurren en un término.

Definición 5.43. Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y X un conjunto. Entonces denotamos por Var el único homomorfismo de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ en $\mathbf{Fin}(X)$ tal que, para cada $x \in X$, $\mathrm{Var}((x)) = \{x\}$, siendo $\mathbf{Fin}(X)$ la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra cuyo conjunto subyacente es $\mathrm{Sub_{fin}}(X)$ y en la que, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, F_σ, la operación estructural de $\mathbf{Fin}(X)$ asociada a σ, asigna a una familia $(X_i \mid i \in n)$ en $\mathrm{Sub_{fin}}(X)$, $\bigcup_{i\in n} X_i$.

Recordemos que para los conjuntos definimos el concepto de conjunto proyectivo y que, de hecho, todos los conjuntos tienen la propiedad de ser proyectivos. Tal concepto también puede definirse para las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras, pero, a diferencia de lo que ocurre con los conjuntos, no toda $\mathbf{\Sigma}$-álgebra es proyectiva, pero se cumple que toda $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre es proyectiva.

Definición 5.44. Una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{P}$ es *proyectiva* si dado un homomorfismo sobreyectivo $f\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$ y un homomorfismo$g\colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{B}$, hay un homomorfismo $t\colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{P} \arrow[dl, "t"'] \arrow[d, "g"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, two heads, "f"'] & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Proposición 5.45. *Toda $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre es proyectiva.*

Demostración. Sea $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre sobre el conjunto X, $f\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo sobreyectivo y $g\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo. Entonces, por ser X un conjunto proyectivo, hay una aplicación $t\colon X \longrightarrow A$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "t"'] \arrow[d, "g \circ \eta_X"] \\ A \arrow[r, two heads, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta. Luego, por ser $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ libre sobre el conjunto X, existe un único homomorfismo $t^{\sharp}$ de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ en $\mathbf{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "t"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[d, "t^{\sharp}"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto, ya que $f \circ t^{\sharp} \circ \eta_X = g \circ \eta_X$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[dl, "t^{\sharp}"'] \arrow[d, "g"] \\
\mathbf{A} \arrow[r, "f"', tail] & \mathbf{B}
\end{tikzcd}$$

conmuta. $\square$

Proposición 5.46. *Si X es un conjunto no vacío, entonces $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ es un separador, i.e., dadas dos $\mathbf{\Sigma}$-álgebras $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y dos homomorfismos distintos f y g de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$, existe un homomorfismo h de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ en $\mathbf{A}$ tal que $f \circ h \neq g \circ h$.*

Demostración. $\square$

Corolario 5.47. *La categoría $\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})$ tiene separadores proyectivos.*

Proposición 5.48. *Cada $\mathbf{\Sigma}$-álgebra es isomorfa a un cociente de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre sobre un conjunto.*

Demostración. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Puesto que $\mathbf{A}$ tiene un conjunto de generadores, sea X uno de ellos. Entonces, para la inclusión canónica in_X de X en A, en virtud de la propiedad universal del álgebra libre sobre X, existe un único homomorfismo $\mathrm{in}_X^{\sharp}$ de $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ en $\mathbf{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "\mathrm{in}_X"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[d, "\mathrm{in}_X^{\sharp}"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

conmuta. Ahora bien, por ser X un conjunto de generadores de $\mathbf{A}$ y estar X contenido en la imagen de $\mathrm{in}_X^{\sharp}$, el homomorfismo $\mathrm{in}_X^{\sharp}$ es sobreyectivo. Por lo tanto $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Ker}(\mathrm{in}_X^{\sharp}) \cong \mathbf{A}$ $\square$

5.5. Operaciones polinómicas.

Ahora nos ocupamos del estudio de las operaciones polinómicas sobre las álgebras y de algunas de sus propiedades. Además, establecemos las relaciones entre las álgebras libres y las álgebras de operaciones polinómicas sobre las álgebras, así como otra manera de obtener la subálgebra generada por una parte de un álgebra, a través de las operaciones polinómicas sobre el álgebra en cuestión. Pero antes demostramos que en la categoría $\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})$ existen las potencias de las álgebras para cualesquiera conjuntos.

Proposición 5.49. *Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y X un conjunto. Entonces hay una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}^X$, la* potencia *de $\mathbf{A}$ para X, y una familia de homomorfismos $(\mathrm{pr}_x)_{x\in X}$, con $\mathrm{pr}_x\colon \mathbf{A}^X \longrightarrow \mathbf{A}$, para cada $x \in X$, tal que, para cada $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{B}$ y cada* *familia de homomorfismos* $(f_x)_{x\in X}$*, con* $f_x\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$*, para cada* $x \in X$*, existe un único homomorfismo* $\langle f_x \mid x \in X\rangle : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}^X$ *tal que, para cada* $x \in X$*, el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{B} \arrow[d, "\langle f_x \mid x\in X\rangle"'] \arrow[dr, "f_x"] & \\
\mathbf{A}^X \arrow[r, "\mathrm{pr}_x"'] & \mathbf{A}
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Demostración. Sea $\mathbf{A}^X$ la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra cuyo conjunto subyacente es el producto cartesiano de la familia de conjuntos $(A \mid x \in X)$, i.e., el conjunto, A^X, de las funciones de X en A, y en la que, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, la operación estructural F_σ, correspondiente a σ, es la aplicación de $(A^X)^n$ en A^X definida como:

$$
F_\sigma \begin{cases} (A^X)^n & \longrightarrow A^X \\ (a_\alpha \mid \alpha \in n) & \longmapsto (F_\sigma(a_\alpha(x) \mid \alpha\in n) \mid x \in X), \end{cases}
$$

siendo F_σ la operación estructural de $\mathbf{A}_i$ correspondiente a σ; y, para cada $x \in X$, sea pr_x el triplo ordenado $(\mathbf{A}^X, \mathrm{pr}_x, \mathbf{A})$, denotado por $\mathrm{pr}_x\colon \mathbf{A}^X \longrightarrow \mathbf{A}$, en el que pr_x es la aplicación de A^X en A definida como:

$$
\mathrm{pr}_x \begin{cases} A^X & \longrightarrow A \\ a & \longmapsto a_x. \end{cases}
$$

Entonces se cumple que, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
(A^X)^n \arrow[r, "\mathrm{pr}_x^n"] \arrow[d, "F_\sigma"'] & A^n \arrow[d, "F_\sigma"] \\
A^X \arrow[r, "\mathrm{pr}_x"'] & A
\end{tikzcd}
$$

conmuta, i.e., que pr_x es un homomorfismo de $\mathbf{A}^X$ en $\mathbf{A}$.

Por otra parte, dado un par ordenado $(\mathbf{B}, (f_x \mid x \in X))$, en el que $\mathbf{B}$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y, para cada $x \in X$, $f_x\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ un homomorfismo, sea $\langle f_x \mid x \in X\rangle$ la aplicación de B en A^X definida como:

$$
\langle f_x \mid x \in X\rangle \begin{cases} B & \longrightarrow A^X \\ b & \longmapsto (f_x(b) \mid x \in X). \end{cases}
$$

Es evidente que, para cada $x \in X$, $\mathrm{pr}_x \circ \langle f_x \mid x \in X\rangle = f_x$ y que $\langle f_x \mid x \in X\rangle$ es un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}^X$. Con ello queda demostrada la existencia de al menos un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}^X$ con la propiedad indicada. Dejamos, como ejercicio, la demostración de la unicidad. □

Definición 5.50 (McKinsey-Tarski)**.** Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})$ es la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra determinada por el cerrado de $\mathbf{A}^{A^n}$ generado por las n proyecciones canónicas de A^n en A, i.e., por $\{\, \mathrm{pr}_{n,i} \mid i \in n \,\}$ y la denominamos la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra de las *operaciones polinómicas n-arias* sobre $\mathbf{A}$. Además, $\mathbf{Pol}_\omega(\mathbf{A})$ es la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra determinada por el cerrado de $\mathbf{A}^{A^{\mathbb{N}}}$ generado por las proyecciones canónicas de $A^{\mathbb{N}}$ en A, i.e., por $\{\, \mathrm{pr}_{\mathbb{N},i} \mid i \in \mathbb{N} \,\}$ y la denominamos la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra de las *operaciones polinómicas finitarias* sobre $\mathbf{A}$.

Demostramos a continuación que cada operación polinómica n-aria sobre una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra se puede obtener a partir de, al menos, un símbolo de operación polinómica con n variables.

Proposición 5.51. *Sea $V = \{\, v_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ un conjunto infinito numerable, $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{A}$ una $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra. Entonces hay un único homomorfismo $\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}$ de $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\downarrow v_n)$ en $\mathbf{A}^{A^n}$ tal que, para cada $i \in n$, $\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}((v_i)) = \mathrm{pr}_{n,i}$, i.e., tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \downarrow v_n \arrow[r, "\eta_{\downarrow v_n}"] \arrow[dr, "(\mathrm{pr}_{n,i} \mid i \in n)"'] & \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\downarrow v_n) \arrow[d, "\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}"] \\ & A^{A^n} \end{tikzcd}$$

conmuta, y $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A}) = \mathbf{Im}(\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}})$, i.e., cada operación polinómica n-aria sobre la $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ se puede obtener a partir de, al menos, un símbolo de operación polinómica con n variables. Por consiguiente, la $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})$ es isomorfa a $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\downarrow v_n)/\mathrm{Ker}(\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}})$. Además, hay un único homomorfismo $\mathrm{Pd}_{\omega,\mathbf{A}}$ de $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(V)$ en $\mathbf{A}^{A^{\mathbb{N}}}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Pd}_{\omega,\mathbf{A}}((v_n)) = \mathrm{pr}_{\mathbb{N},n}$, i.e., tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[dr, "(\mathrm{pr}_{\mathbb{N},n} \mid n \in \mathbb{N})"'] & \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(V) \arrow[d, "\mathrm{Pd}_{\omega,\mathbf{A}}"] \\ & A^{A^{\mathbb{N}}} \end{tikzcd}$$

conmuta, y $\mathbf{Pol}_\omega(\mathbf{A}) = \mathbf{Im}(\mathrm{Pd}_{\omega,\mathbf{A}})$, i.e., cada operación polinómica ω-aria sobre la $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ se puede obtener a partir de, al menos, un símbolo de operación polinómica finitaria. Por consiguiente, la $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{Pol}_\omega(\mathbf{A})$ es isomorfa a $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(V)/\mathrm{Ker}(\mathrm{Pd}_{\omega,\mathbf{A}})$.

Si $P \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\downarrow v_n)$, denotamos por $P^{\mathbf{A}}$ la imagen bajo $\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}$ de P, y lo mismo si $P \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(V)$, y lo denominamos el polinomio determinado por *(el símbolo de operación polinómica) P* en *$\mathbf{A}$.*

Demostración. Se cumple que $\mathrm{Pol}_n(\mathbf{A}) \subseteq \mathrm{Im}(\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}})$, porque $\mathrm{Im}(\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}})$ es un cerrado de $\mathbf{A}^{A^n}$ que contiene al conjunto $\{\, \mathrm{pr}_{n,i} \mid i \in n \,\}$ y $\mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$ es el mínimo cerrado de $\mathbf{A}^{A^n}$ con dicha propiedad.

Para demostrar que $\mathrm{Im}(\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}) \subseteq \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$, i.e., que si $P \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\downarrow v_n)$, entonces $P^{\mathbf{A}} \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$, procedemos por inducción algebraica. Para cada $i \in n$, $(v_i)^{\mathbf{A}} = \mathrm{pr}_{n,i}$, luego $(v_i)^{\mathbf{A}} \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$. Para cada símbolo de operación 0-ario σ, $(\sigma)^{\mathbf{A}} = \sigma^{\mathbf{A}^{A^n}}$, luego $(\sigma)^{\mathbf{A}} \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$. Por último, para cada $m \in \mathbb{N} - \{0\}$, cada $\sigma \in \Sigma_m$ y cada familia $(P_i)_{i\in m}$ en $\mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\downarrow v_n)$, si, para cada $i \in m$, $P_i^{\mathbf{A}} \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$, entonces, ya que $((\sigma)P_0 \cdots P_{m-1})^{\mathbf{A}} = F_\sigma \circ \langle P_i \mid i \in m \rangle$, y $\mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$ es un cerrado de $\mathbf{A}^{A^n}$, $((\sigma)P_0 \cdots P_{m-1})^{\mathbf{A}} \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$. Por consiguiente, $\mathrm{Im}(\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}) \subseteq \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$. □

Convenimos en denotar por el mismo símbolo la correstricción de $\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}$ a $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})$, y lo mismo para $\mathrm{Pd}_{\omega,\mathbf{A}}$.

A continuación demostramos que la conducta de los homomorfismos respecto de las operaciones polinómicas de las $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras es la misma que tienen respecto de las operaciones estructurales.

Proposición 5.52. *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *dos* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras,* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *y* $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n)$*. Entonces el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "P^{\mathbf{A}}"'] & B^n \arrow[d, "P^{\mathbf{B}}"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta. Además, si $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$*, entonces el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A^{\mathbb{N}} \arrow[r, "f^{\mathbb{N}}"] \arrow[d, "P^{\mathbf{A}}"'] & B^{\mathbb{N}} \arrow[d, "P^{\mathbf{B}}"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposición 5.53. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra. Entonces se cumple que:*

1. *Si* $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in A^n$, $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n)$, $\mathrm{Var}(P) = \{\, v_{i_\alpha} \mid \alpha \in p \,\}$ *y, para cada* $\alpha \in p$, $x(i_\alpha) = y(i_\alpha)$*, entonces* $P^{\mathbf{A}}(x) = P^{\mathbf{A}}(y)$.
2. *Si* $x, y \in A^{\mathbb{N}}$, $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$ $\mathrm{Var}(P) = \{\, v_{n_\alpha} \mid \alpha \in p \,\}$ *y, para cada* $\alpha \in p$, $x(n_\alpha) = y(n_\alpha)$*, entonces* $P^{\mathbf{A}}(x) = P^{\mathbf{A}}(y)$.

Demostración. □

Proposición 5.54. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra. Entonces, para cada* $\sigma \in \Sigma$*, con* $\mathrm{ar}(\sigma) = n$*, se cumple que* $F_\sigma \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$.

Demostración. □

Proposición 5.55. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* $m, n \in \mathbb{N}$*,* $P \in \mathrm{Pol}_m(\mathbf{A})$ *y* $(Q_j \mid j \in m) \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})^m$*. Entonces* $P \circ \langle Q_j \mid j \in m \rangle \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ el subconjunto de A^{A^m} definido como:

$$\mathcal{F} = \{\, P \in A^{A^m} \mid \forall (Q_j \mid j \in m) \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})^m \,(\, P \circ \langle Q_j \mid j \in m \rangle \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A}) \,)\,\}.$$

Vamos a demostrar que $\mathrm{Pol}_m(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{F}$. Para lo cual será suficiente, en virtud de la definición de $\mathbf{Pol}_m(\mathbf{A})$, que demostremos que:

1. Para cada $j \in m$, $\mathrm{pr}_{m,j} \in \mathcal{F}$.
2. Para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = q$ y cada $(P_k \mid k \in q) \in \mathcal{F}^q$, $F_\sigma(P_k \mid k \in q) \in \mathcal{F}$.

Dado un $i \in m$ y una familia $(Q_j \mid j \in m) \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})^m$, ya que $\mathrm{pr}_{m,j} \circ \langle Q_j \mid j \in m \rangle = Q_j \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$), se cumple que $\mathrm{pr}_{m,j} \in \mathcal{F}$.

Por otra parte, dado un $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = q$ y una familia $(P_k \mid k \in q) \in \mathcal{F}^q$, tenemos, para cada $k \in q$ y cada familia $(Q_j \mid j \in m) \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})^m$, que $P_k \circ \langle Q_j \mid j \in m \rangle \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$, luego, dada una familia $(Q_j \mid j \in m) \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})^m$, ya que

$$\begin{aligned} F_\sigma(P_k \mid k \in q) \circ \langle Q_j \mid j \in m\rangle &= (F_\sigma^{\mathbf{A}} \circ \langle P_k \mid k \in q\rangle) \circ \langle Q_j \mid j \in m\rangle \\ &= F_\sigma^{\mathbf{A}} \circ (\langle P_k \mid k \in q\rangle \circ \langle Q_j \mid j \in m\rangle) \\ &= F_\sigma^{\mathbf{A}} \circ \langle P_k \circ \langle Q_j \mid j \in m\rangle \mid k \in q\rangle \\ &= F_\sigma^{\mathbf{A}}(P_k \circ \langle Q_j \mid j \in m\rangle \mid k \in q), \end{aligned}$$

se cumple que $F_\sigma(P_k \mid k \in q) \in \mathcal{F}$. □

Proposición 5.56. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra,* $m, n \in \mathbb{N}$ *y* $\xi\colon m \longrightarrow n$*. Entonces hay un único homomorfismo* $\mathrm{Pol}_\xi(\mathbf{A})$ *de* $\mathbf{Pol}_m(\mathbf{A})$ *en* $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\downarrow v_m) \arrow[r, "\mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\xi)"] \arrow[d, "\mathrm{Pd}_{m,\mathbf{A}}"'] & \mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\downarrow v_n) \arrow[d, "\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}"] \\ \mathbf{Pol}_m(\mathbf{A}) \arrow[r, "\mathrm{Pol}_\xi(\mathbf{A})"'] & \mathbf{Pol}_n(\mathbf{A}) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. En efecto, $\mathrm{Pol}_\xi(\mathbf{A})$ definido como

$$\mathrm{Pol}_\xi(\mathbf{A}) \begin{cases} \mathbf{Pol}_m(\mathbf{A}) & \longrightarrow \ \mathbf{Pol}_n(\mathbf{A}) \\ \quad P & \longmapsto \ (P(x \circ \xi) \mid x \in A^n) \end{cases}$$

es un homomorfismo de □

Proposición 5.57. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra. Entonces:*

1. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Pol}_{\mathrm{id}_n}(\mathbf{A}) = \mathrm{id}_{\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})}$.
2. *Para cada* $\varphi\colon m \longrightarrow n$ *y* $\psi\colon n \longrightarrow p$, $\mathrm{Pol}_{\psi\circ\varphi}(\mathbf{A}) = \mathrm{Pol}_\psi(\mathbf{A}) \circ \mathrm{Pol}_\varphi(\mathbf{A})$.

Demostración. □

Proposición 5.58. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra,* $0 < m < n \in \mathbb{N}$, $P\colon A^m \longrightarrow A$ *y* $Q\colon A^n \longrightarrow A$*. Si, para cada* $x \in A^n$, $Q(x) = P(x{\restriction}m)$*, entonces* $P \in \mathrm{Pol}_m(\mathbf{A})$ *precisamente si* $Q \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$

Demostración. □

Como aplicación de los conceptos que acabamos de introducir, damos una caracterización de la subálgebra generada por una parte de una $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra.

Proposición 5.59. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra. Entonces:*

1. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y cada* $x \in A^n$*, se cumple que*
$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x)) = \{\, P(x) \mid P \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A}) \,\}.$$
2. *Para cada* $X \subseteq A$*, se cumple que*
$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \{\, P(x) \mid n \in \mathbb{N}, P \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A}) \text{ y } x \in X^n \,\}.$$

Demostración. Se cumple que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x)) \subseteq \{\, P(x) \mid P \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A}) \,\}$, porque el conjunto $\{\, P(x) \mid P \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A}) \,\}$ es un cerrado de $\mathbf{A}$ que contiene al conjunto $\mathrm{Im}(x)$ y $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x))$ es el mínimo cerrado de $\mathbf{A}$ con dicha propiedad.

Para demostrar que $\{\, P(x) \mid P \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A}) \,\} \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x))$, i.e., que si $P \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$, entonces $P(x) \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x))$, procedemos por inducción algebraica. Para cada $i \in n$, $\mathrm{pr}_{n,i}(x) = x_i$, luego $\mathrm{pr}_{n,i}(x) \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x))$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, cada $\sigma \in \Sigma_m$ y cada familia $(P_i)_{i\in m}$ en $\mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$, si, para cada $i \in m$, $P_i(x) \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x))$, entonces, ya que $(F_\sigma \circ \langle P_i \mid i \in m\rangle)(x) = F_\sigma(P_0(x), \ldots, P_{m-1}(x))$, y $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x))$ es un cerrado de $\mathbf{A}$, $(F_\sigma \circ \langle P_i \mid i \in m\rangle)(x) \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x))$. Por consiguiente, $\{\, P(x) \mid P \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A}) \,\} \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x))$.

La demostración de que, para cada $X \subseteq A$, se cumple que

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \{\, P(x) \mid n \in \mathbb{N}, P \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A}) \text{ y } x \in X^n \,\},$$

se deduce de la primera parte y del hecho de que el operador $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ es algebraico. □

Proposición 5.60. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra,* X *un cerrado de* $\mathbf{A}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *y* $P \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$*. Entonces, para cada* $x \in X^n$*,* $P(x) \in X$*.*

Demostración. □

Proposición 5.61. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$*. Entonces hay un único homomorfismo sobreyectivo* $\mathrm{Pol}_n(f)$ *de* $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})$ *en* $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{B})$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\downarrow v_n) \arrow[dl, "\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}"'] \arrow[dr, "\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{B}}"] & \\ \mathbf{Pol}_n(\mathbf{A}) \arrow[rr, "\mathrm{Pol}_n(f)"'] & & \mathbf{Pol}_n(\mathbf{B}) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

La proposición que sigue afirma simplemente que tenemos un functor

$$\mathrm{Pd}\colon \mathbf{Ens}_{\mathbb{N}} \times \mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma})_{\mathrm{epi}} \longrightarrow \mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma})^{\to}.$$

Proposición 5.62. *Sea* $\xi\colon m \longrightarrow n$ *y* $f\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$*. Entonces, siendo* $\mathrm{Pol}_\xi(f)$ *la diagonal del diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Pol}_m(\mathbf{A}) \arrow[r, "\mathrm{Pol}_m(f)"] \arrow[d, "\mathrm{Pol}_\xi(\mathbf{A})"'] \arrow[dr, "\mathrm{Pol}_\xi(f)"] & \mathbf{Pol}_m(\mathbf{B}) \arrow[d, "\mathrm{Pol}_\xi(\mathbf{B})"] \\ \mathbf{Pol}_n(\mathbf{A}) \arrow[r, "\mathrm{Pol}_n(f)"'] & \mathbf{Pol}_n(\mathbf{B}) \end{tikzcd}$$

se cumple que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\downarrow v_m) \arrow[r, "\mathrm{Pd}_{m,\mathbf{A}}"] \arrow[d, "\mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\xi)"'] & \mathbf{Pol}_m(\mathbf{A}) \arrow[d, "\mathrm{Pol}_\xi(f)"] \\ \mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\downarrow v_n) \arrow[r, "\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{B}}"'] & \mathbf{Pol}_n(\mathbf{B}) \end{tikzcd}$$

conmuta. Además, para los homomorfismos del tipo $\mathrm{Pol}_\xi(f)$ *tenemos que:*

1. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y cada* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{A}$*,*

$$\mathrm{Pol}_{\mathrm{id}_n}(\mathrm{id}_{\mathbf{A}}) = \mathrm{id}_{\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})}.$$

2. *Para cada* $\varphi\colon m \longrightarrow n$*,* $\psi\colon n \longrightarrow p$*,* $f\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$ *y* $g\colon \mathbf{B} \twoheadrightarrow \mathbf{C}$*,*

$$\mathrm{Pol}_{\psi\circ\varphi}(g \circ f) = \mathrm{Pol}_\psi(g) \circ \mathrm{Pol}_\varphi(f).$$

Demostración. La definición de $\mathrm{Pol}_\xi(f)$ como la diagonal del primer diagrama de la proposición es correcta, ya que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Pol}_m(\mathbf{A}) \arrow[rr, "\mathrm{Pol}_m(f)"] \arrow[ddd, "\mathrm{Pol}_\xi(\mathbf{A})"'] & & \mathbf{Pol}_m(\mathbf{B}) \arrow[ddd, "\mathrm{Pol}_\xi(\mathbf{B})"] \\
& \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_m) \arrow[ul, "\mathrm{Pd}_{m,\mathbf{A}}"'] \arrow[ur, "\mathrm{Pd}_{m,\mathbf{B}}"] \arrow[d, "\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\xi)"] & \\
& \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n) \arrow[dl, "\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}"'] \arrow[dr, "\mathrm{Pd}_{m,\mathbf{B}}"] & \\
\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A}) \arrow[rr, "\mathrm{Pol}_n(f)"'] & & \mathbf{Pol}_n(\mathbf{B})
\end{tikzcd}$$

conmuta □

Proposición 5.63. *Sea* $f\colon \mathbf{B} \mathrel{+\!\!\!\longrightarrow} \mathbf{A}$. *Entonces hay un único homomorfismo sobreyectivo* $\mathrm{Pol}_n(f)$ *de* $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})$ *en* $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{B})$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n) \arrow[dl, "\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}"'] \arrow[dr, "\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{B}}"] & \\
\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A}) \arrow[rr, "\mathrm{Pol}_n(f)"'] & & \mathbf{Pol}_n(\mathbf{B})
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

La proposición que sigue afirma simplemente que tenemos un functor

$$\mathrm{Pd}\colon \mathbf{Ens}_{\mathbb{N}} \times (\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})_{\mathrm{mon}})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})^{\to}.$$

Proposición 5.64. *Sea* $\xi\colon m \longrightarrow n$ *y* $f\colon \mathbf{B} \mathrel{+\!\!\!\longrightarrow} \mathbf{A}$. *Entonces el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_m) \arrow[r, "\mathrm{Pd}_{m,\mathbf{A}}"] \arrow[d, "\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\xi)"'] & \mathbf{Pol}_m(\mathbf{A}) \arrow[d, "\mathrm{Pol}_\xi(f)"] \\
\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n) \arrow[r, "\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{B}}"'] & \mathbf{Pol}_n(\mathbf{B})
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, para los homomorfismos del tipo $\mathrm{Pol}_\xi(f)$ *tenemos que:*

1. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y cada* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{A}$,
$$\mathrm{Pol}_{\mathrm{id}_n}(\mathrm{id}_{\mathbf{A}}) = \mathrm{id}_{\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})}.$$
2. *Para cada* $\varphi\colon m \longrightarrow n$, $\psi\colon n \longrightarrow p$, $f\colon \mathbf{B} \mathrel{+\!\!\!\longrightarrow} \mathbf{A}$ *y* $g\colon \mathbf{C} \mathrel{+\!\!\!\longrightarrow} \mathbf{B}$,
$$\mathrm{Pol}_{\psi\circ\varphi}(f \circ g) = \mathrm{Pol}_\psi(g) \circ \mathrm{Pol}_\varphi(f).$$

Demostración. □

5.6. Signaturas y sistemas algebraicos.

Definición 5.65. Una *signatura de primer orden* es un par $((\Sigma, \mathrm{ar}), (\Pi, \mathrm{rk}))$, abreviado como $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$ en el que Σ, el conjunto de los *símbolos de operación*, es un conjunto, ar, la *ariedad*, una aplicación de Σ en $\mathbb{N}$, Π, el conjunto de los *símbolos de relación*, es un conjunto, rk, el *rango*, una aplicación de Π en $\mathbb{N} - 1$. Si $\sigma \in \Sigma$ y $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, entonces decimos que σ es un símbolo de operación n-ario, y, para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por Σ_n el conjunto de todos los símbolos de operación n-arios. Del mismo modo, si $\pi \in \Pi$ y $\mathrm{rk}(\pi) = n$, entonces decimos que π es un símbolo de relación n-ario, y, para cada $n \in \mathbb{N} - 1$, denotamos por Π_n el conjunto de todos los símbolos de relación n-arios.

La ariedad de un símbolo de operación σ, indica el número de los argumentos que tendrá cualquier realización de σ como una operación sobre un conjunto. Por otra parte, el rango de un símbolo de relación π, indica el número de los argumentos que tendrá cualquier realización de π como una relación sobre un conjunto.

Definición 5.66. Sea $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$ una signatura de primer orden y A un conjunto. Una $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$-*estructura* sobre el conjunto A es un par (F, R) en el que F es una aplicación de Σ en $\bigcup_{\sigma\in\Sigma} \mathrm{Hom}(A^{\mathrm{ar}(\sigma)}, A)$ tal que, para cada $\sigma \in \Sigma$, $F_\sigma \in \mathrm{Hom}(A^{\mathrm{ar}(\sigma)}, A)$ y R una aplicación de Π en $\bigcup_{\pi\in\Pi} \mathrm{Sub}(A^{\mathrm{rk}(\pi)})$ tal que, para cada $\pi \in \Pi$, $R_\pi \in \mathrm{Sub}(A^{\mathrm{rk}(\pi)})$.

En algunos casos, para evitar equivocaciones, denotaremos la $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$-estructura que estemos considerando sobre un conjunto A por $(F^{\mathbf{A}}, R^{\mathbf{A}})$, a las operaciones que la componen por $F^{\mathbf{A}}_\sigma$, con $\sigma \in \Sigma$ y a las relaciones por $R^{\mathbf{A}}_\pi$. Además, cuando $\mathrm{ar}(\sigma) = 0$, denotaremos por $\sigma^{\mathbf{A}}$ el valor de $F^{\mathbf{A}}_\sigma \colon 1 \longrightarrow A$ en el único miembro de 1.

Un $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$-*sistema algebraico* o, para abreviar, un *sistema algebraico* es un triplo ordenado $\mathbf{A} = (A, F, R)$, en el que A es un conjunto y (F, R) una $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$-estructura sobre A.

Si $\Sigma = \varnothing$, entonces a los $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$-sistemas algebraicos los denominamos $\mathbf{\Pi}$-*sistemas relacionales*. Además, si $\mathbf{A} = (A, F, R)$ es un $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$-sistema algebraico, el par (A, F) es la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra subyacente del mismo y, del mismo modo, el par (A, R), el $\mathbf{\Pi}$-sistema relacional subyacente de dicho sistema algebraico.

5.7. Lenguajes de primer orden.

Definición 5.67. Un *lenguaje de primer orden* es un cuádruplo

$$\mathcal{L} = (V, \mathbf{\Lambda}, (\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi}), =),$$

en el que $V = \{\, v_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ es un conjunto infinito numerable, arbitrario pero fijo, $\mathbf{\Lambda}$ una signatura algebraica, a la que denominamos la signatura *lógica*, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, los conjuntos Λ_n, de símbolos de operación lógicos, están definidos como:

1. $\Lambda_1 = \{\neg\} \cup \{\, \forall v_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$.
2. $\Lambda_2 = \{\, \wedge, \vee, \rightarrow \,\}$.
3. $\Lambda_n = \varnothing$, si $n \neq 1, 2$,

$(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$ una signatura de primer orden y $=$ el símbolo de la igualdad.

Definición 5.68. El conjunto $\mathrm{Tm}(\mathcal{L})$, de los $\mathcal{L}$-*términos* es:

$$\mathrm{Tm}(\mathcal{L}) = \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V),$$

i.e., el conjunto subyacente de la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre sobre el conjunto de las variables V.

Los miembros de $\mathrm{Tm}(\mathcal{L})$, i.e., los símbolos de operación polinómica, o términos, denotan operaciones, esencialmente, finitarias, que se realizan como tales sobre conjuntos que estén dotados de una estructura de $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Además, para un término $P \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})$, tenemos que $P = (v_n)$, para un único $n \in \mathbb{N}$, o $P = (\sigma)$, para un único $\sigma \in \Sigma_0$, o $P = (\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$, para un único $p \in \mathbb{N} - 1$, un único $\sigma \in \Sigma_p$ y una única familia $(P_j \mid j \in p)$ en $\mathrm{Tm}(\mathcal{L})$.

En virtud de la definición del conjunto de los $\mathcal{L}$-términos, como el conjunto subyacente de la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre sobre el conjunto de las variables V, disponemos de un principio de demostración por inducción algebraica y de un principio de definición por recursión algebraica sobre los $\mathcal{L}$-términos.

Antes de establecer ambos principios, recordamos que $\mathrm{W}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$ es la $\mathbf{\Sigma}$-algebra cuyo conjunto subyacente, $\mathrm{W}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$, es el conjunto $\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod V)$, formado por todas las palabras sobre el alfabeto $\Sigma \coprod V$, y cuyas operaciones estructurales, F_σ, para cada $\sigma \in \Sigma$, son las definidas como:

$$F_\sigma \left\{ \begin{array}{lcl} (\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod V))^{\mathrm{ar}(\sigma)} & \longrightarrow & \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod V) \\ (P_j \mid j \in \mathrm{ar}(\sigma)) & \longmapsto & (\sigma) \curlywedge \curlywedge(P_j \mid j \in \mathrm{ar}(\sigma)), \end{array} \right.$$

i.e., como la concatenación de la palabra (σ) y de las palabras P_j, con $j \in \mathrm{ar}(\sigma)$.

Corolario 5.69. *Sea $T \subseteq \mathrm{W}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$. Si T es un cerrado de la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$ y T contiene al conjunto $\{\, (v_n) \mid n \in \mathbb{N} \,\}$, entonces $\mathrm{Tm}(\mathcal{L}) \subseteq T$.*

Corolario 5.70. *El par ordenado $(\eta_V, \mathbf{Tm}(\mathcal{L}))$ en el que η_V es la única aplicación de V en $\mathrm{Tm}(\mathcal{L})$ tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[d, "\mathrm{in}_V"] \arrow[ddl, "\eta_V"'] \\
 & \Sigma \coprod V \arrow[d, "\eta_{\Sigma \coprod V}"] \\
\mathrm{Tm}(\mathcal{L}) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\mathrm{Tm}(\mathcal{L})}"'] & \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod V)
\end{tikzcd}$$

conmuta, tiene la propiedad de que, para cada $\mathbf{\Sigma}$-algebra $\mathbf{A}$ y cada aplicación $f\colon V \longrightarrow A$, existe un único homomorfismo $f^\sharp$ de $\mathbf{Tm}(\mathcal{L})$ en $\mathbf{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Tm}(\mathcal{L}) \arrow[d, "f^\sharp"] \\
 & A
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Definición 5.71. Denotamos por Var el único homomorfismo de $\mathbf{Tm}(\mathcal{L})$ en $\mathbf{Fin}(V)$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Var}((v_n)) = \{v_n\}$, siendo $\mathbf{Fin}(V)$ la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra cuyo conjunto subyacente es $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(V)$ y en la que, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, F_σ, la operación estructural de $\mathbf{Fin}(V)$ asociada a σ, asigna a una familia $(X_i \mid i \in n)$ en $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(V)$, $\bigcup_{i \in n} X_i$.

Definición 5.72. El conjunto de los $\mathcal{L}$-*términos cerrados*, denotado por $\mathrm{ClTm}(\mathcal{L})$, es:

$$\mathrm{ClTm}(\mathcal{L}) = \{\, P \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L}) \mid \mathrm{Var}(P) = \varnothing \,\}.$$

El conjunto $\mathrm{ClTm}(\mathcal{L})$ es, esencialmente, el conjunto subyacente de la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre sobre el conjunto vacío.

Definición 5.73. El conjunto de las $\mathcal{L}$-*fórmulas atómicas* es el conjunto definido (explícitamente, y no por recursión) como:

$$\mathrm{At}(\mathcal{L}) = (\{=\} \times \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^2) \cup \bigcup\nolimits_{\pi \in \Pi} \{\pi\} \times \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^{\mathrm{rk}(\pi)}.$$

De modo que una $\mathcal{L}$-fórmula atómica es o bien un par ordenado de la forma $(=, (P_i \mid i \in 2))$, para algún $(P_i \mid i \in 2) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^2$, o bien un par ordenado de la forma $(\pi, (P_i \mid i \in n))$, para algún $n \in \mathbb{N} - 1$, algún $\pi \in \Pi_n$ y alguna familia $(P_i \mid i \in n) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^n$. Para simplificar la escritura, convenimos en denotar a las $\mathcal{L}$-fórmulas atómicas del primer tipo por $P_0 = P_1$ y a las del segundo por $\pi(P_i \mid i \in n)$ o por $\pi(P_0, \ldots, P_{n-1})$.

Definimos a continuación el conjunto de las variables de las $\mathcal{L}$-fórmulas atómicas. Tal definición será explícita, i.e., no recursiva, ya que la definición de las $\mathcal{L}$-fórmulas atómicas es explícita.

Definición 5.74. Sea $n \in \mathbb{N} - 1$, $\pi \in \Pi_n$, $(P_i \mid i \in n) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^n$ y $(P_i \mid i \in 2) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^2$. Entonces:

$$\mathrm{Var}_{\mathrm{At}(\mathcal{L})}(P_0 = P_1) = \mathrm{Var}(P_0) \cup \mathrm{Var}(P_1).$$
$$\mathrm{Var}_{\mathrm{At}(\mathcal{L})}(\pi(P_0, \ldots, P_{n-1})) = \textstyle\bigcup_{i \in n} \mathrm{Var}(P_i).$$

Definición 5.75. El conjunto $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, de las $\mathcal{L}$-*fórmulas* es:

$$\mathrm{Fm}(\mathcal{L}) = \mathrm{T}_{\mathbf{\Lambda}}(\mathrm{At}(\mathcal{L})),$$

i.e., el conjunto subyacente de la $\mathbf{\Lambda}$-álgebra libre sobre el conjunto $\mathrm{At}(\mathcal{L})$, de las $\mathcal{L}$-fórmulas atómicas.

De modo que para cada $\mathcal{L}$-fórmula φ o bien $\varphi = (P_0 = P_1)$, para un único par $(P_i \mid i \in 2) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^2$, o bien $\varphi = (\pi(P_0, \ldots P_{n-1}))$, para un único $n \in \mathbb{N} - 1$, un único $\pi \in \Pi_n$ y una única familia $(P_i \mid i \in n) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^n$, o bien $\varphi = (\neg)\psi$, para una única fórmula ψ, o bien $\varphi = (\wedge)\psi\xi$, para un único par de fórmulas ψ y ξ, o bien $\varphi = (\vee)\psi\xi$, para un único par de fórmulas ψ y ξ, o bien $\varphi = (\rightarrow)\psi\xi$, para un único par de fórmulas ψ y ξ, o bien $\varphi = (\forall v_n)\psi$, para un único $n \in \mathbb{N}$ y una única fórmula ψ.

Para abreviar, convenimos en denotar $(P_0 = P_1)$, resp., $(\pi(P_0, \ldots P_{n-1}))$, $(\neg)\psi$, $(\wedge)\psi\xi$, $(\vee)\psi\xi$, $(\rightarrow)\psi\xi$ y $(\forall v_n)\psi$ por $P_0 = P_1$, resp., $\pi(P_0, \ldots P_{n-1})$, $\neg\psi$, $\psi \wedge \xi$, $\psi \vee \xi$, $\psi \rightarrow \xi$ y $\forall v_n \psi$.

Los miembros de $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, y en particular los de $\mathrm{At}(\mathcal{L})$, i.e., tanto las fórmulas, como las fórmulas atómicas, denotan relaciones, esencialmente, finitarias, que se realizan como tales sobre conjuntos que estén dotados de una estructura de $\mathbf{\Lambda}$-álgebra.

En virtud de la definición del conjunto de las $\mathcal{L}$-fórmulas, como el conjunto subyacente de la $\mathbf{\Lambda}$-álgebra libre sobre el conjunto $\mathrm{At}(\mathcal{L})$, disponemos de un principio de demostración por inducción algebraica y de un principio de definición por recursión algebraica sobre las $\mathcal{L}$-fórmulas.

Corolario 5.76. *Sea* $F \subseteq \mathrm{W}_{\mathbf{\Lambda}}(\mathrm{At}(\mathcal{L}))$*. Si* F *es un cerrado de la* $\mathbf{\Lambda}$*-álgebra* $\mathbf{W}_{\mathbf{\Lambda}}(\mathrm{At}(\mathcal{L}))$ *y además* $\{\,(\varphi) \mid \varphi \in \mathrm{At}(\mathcal{L})\} \subseteq F$*, entonces* $\mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \subseteq F$*.*

Corolario 5.77. *El par ordenado* $(\eta_{\mathrm{At}(\mathcal{L})}, \mathbf{Fm}(\mathcal{L}))$ *en el que* $\eta_{\mathrm{At}(\mathcal{L})}$ *es la única aplicación de* $\mathrm{At}(\mathcal{L})$ *en* $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{At}(\mathcal{L}) \arrow[d, "\mathrm{in}_{\mathrm{At}(\mathcal{L})}"] \arrow[ddl, "\eta_{\mathrm{At}(\mathcal{L})}"'] \\
 & \Lambda \coprod \mathrm{At}(\mathcal{L}) \arrow[d, "\eta_{\Lambda \coprod \mathrm{At}(\mathcal{L})}"] \\
\mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}"'] & \mathrm{Ml}(\Lambda \coprod \mathrm{At}(\mathcal{L}))
\end{tikzcd}$$

conmuta, tiene la propiedad de que, para cada $\mathbf{\Lambda}$*-algebra* $\mathbf{A}$ *y cada aplicación* $f\colon \mathrm{At}(\mathcal{L}) \longrightarrow A$*, existe un único homomorfismo* $f^\sharp$ *de* $\mathbf{Fm}(\mathcal{L})$ *en* $\mathbf{A}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{At}(\mathcal{L}) \arrow[r, "\eta_{\mathrm{At}(\mathcal{L})}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \arrow[d, "f^\sharp"] \\
 & A
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Definición 5.78. Denotamos por $\mathrm{Var}_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}$ el único homomorfismo de $\mathbf{Fm}(\mathcal{L})$ en $\mathbf{Fin}_{\mathbf{\Lambda}}(V)$ tal que, para cada $\varphi \in \mathrm{At}(\mathcal{L})$, $\mathrm{Var}_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}((\varphi)) = \mathrm{Var}_{\mathrm{At}(\mathcal{L})}(\varphi)$, siendo $\mathbf{Fin}_{\mathbf{\Lambda}}(V)$ la $\mathbf{\Lambda}$-álgebra cuyo conjunto subyacente es $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(V)$ y en la que las operaciones estructurales son:

1. $F_\neg = \mathrm{id}_{\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(V)}$.
2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_{\forall v_n} = \bigcup \circ \langle \kappa_{\{v_n\}}, \mathrm{id}_{\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(V)} \rangle$.
3. $F_\vee = F_\wedge = F_\to = \cup$.

A continuación vamos a dotar al conjunto $2 = \{ 0, 1 \}$ de una estructura de $\mathbf{\Lambda}$-álgebra que nos permitirá, en última instancia, definir el conjunto de las variables libres de una fórmula, conjunto del cual haremos uso cuando definamos la relación en un sistema algebraico asociada a la misma.

Definición 5.79. Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces denotamos por $\mathbf{2}_{v_n}$ la $\mathbf{\Lambda}$-álgebra cuyo conjunto subyacente es 2 y en la que las operaciones estructurales son:

1. $F_\neg = \mathrm{id}_2$.
2. Para cada $m \in \mathbb{N} - \{n\}$, $F_{\forall v_m} = \mathrm{id}_2$.
3. $F_{\forall v_n} = \kappa_0$.
4. $F_\vee = F_\wedge = F_\to = \text{máx}$.

Entonces denotamos por Foc_{v_n} el único homomorfismo de $\mathbf{Fm}(\mathcal{L})$ en $\mathbf{2}_{v_n}$ tal que, para cada $\mathcal{L}$-fórmula atómica $\varphi \in \mathrm{At}(\mathcal{L})$, $\mathrm{Foc}_{v_n}((\varphi)) = 1$ precisamente si $v_n \in \mathrm{Var}_{\mathrm{At}(\mathcal{L})}(\varphi)$. Además, denotamos por Foc el subconjunto de $V \times \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ definido como:

$$\mathrm{Foc} = \{ (v_n, \varphi) \in V \times \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \mid \mathrm{Foc}_{v_n}(\varphi) = 1 \}.$$

Si entre la variable individual v_n y la $\mathcal{L}$-fórmula φ se da la relación Foc, entonces decimos que la variable individual v_n *ocurre libre* en la $\mathcal{L}$-fórmula φ.

Definición 5.80. Denotamos por $\mathrm{Fvar}_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}$ la aplicación de $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ en $\mathrm{Fin}_{\mathbf{\Lambda}}(V)$ que a una fórmula φ le asigna:

$$\mathrm{Fvar}_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}(\varphi) = \{ v_n \in \mathrm{Var}_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}(\varphi) \mid (v_n, \varphi) \in \mathrm{Foc} \}.$$

A los elementos del conjunto $\mathrm{Fvar}_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}(\varphi)$ los denominamos las variables *libres* de la fórmula φ.

Definición 5.81. El conjunto de las *$\mathcal{L}$-fórmulas cerradas*, denotado por $\mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, es:

$$\mathrm{Sent}(\mathcal{L}) = \{ \varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \mid \mathrm{Fvar}_{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}(\varphi) = \varnothing \}.$$

5.8. El concepto de verdad de Tarski.

Para una signatura de primer orden $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$ y un sistema algebraico $\mathbf{A} = (A, F, R)$, una vez dotado el conjunto $\mathrm{Sub}(A^{\mathbb{N}})$ de una estructura de $\mathbf{\Lambda}$-álgebra, definimos, haciendo uso del principio de la definición por recursión algebraica, la relación, de rango $\mathbb{N}$, en A asociada a una fórmula. Entonces, una vez definida la relación ternaria de satisfacibilidad entre sistemas algebraicos, fórmulas y valoraciones de las variables, definimos la relación binaria de validez entre sistemas algebraicos y fórmulas, obteniendo de este modo una conexión de Galois contravariante para la lógica de predicados de primer orden con igualdad. También definimos la noción de diagrama de un sistema algebraico y demostramos que los modelos del diagrama de un sistema algebraico, son los sistemas algebraicos en los que tal sistema algebraico se puede encajar. Por último, demostramos que toda fórmula es semánticamente equivalente a una fórmula prenexa.

Definición 5.82. Sea A un conjunto, $a \in A$, $n \in \mathbb{N}$ y $x\colon \mathbb{N} \longrightarrow A$. Entonces $x^{(n|a)}$ denota la aplicación de $\mathbb{N}$ en A definida como:

$$x^{(n|a)} \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow A \\ m \longmapsto x^{(n|a)}(m) = \begin{cases} x(m), & \text{si } m \in \mathbb{N} - \{n\}; \\ a, & \text{si } m = n. \end{cases} \end{cases}$$

Así pues, la aplicación $x^{(n|a)}$ coincide con x en $\mathbb{N} - \{n\}$ y en n toma como valor a.

Definición 5.83. Sea $\mathbf{A} = (A, F, R)$ un sistema algebraico y $P \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})$. Entonces denotamos por $P^{\mathbf{A}}$ la imagen bajo $\mathrm{Pd}_{\omega,\mathbf{A}}$ de P, y lo denominamos el *polinomio determinado* por (el símbolo de operación polinómica) P en $\mathbf{A}$, siendo $\mathrm{Pd}_{\omega,\mathbf{A}}$ el único homomorfismo de la $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{Tm}(\mathcal{L})$ en la $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra $(A, F)^{A^{\mathbb{N}}}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Pd}_{\omega,\mathbf{A}}((v_n)) = \mathrm{pr}_{\mathbb{N},n}$, i.e., tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[dr, "(\mathrm{pr}_{\mathbb{N},n})_{n\in\mathbb{N}}"'] & \mathrm{Tm}(\mathcal{L}) \arrow[d, "\mathrm{Pd}_{\omega,\mathbf{A}}"] \\ & A^{A^{\mathbb{N}}} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Proposición 5.84. *Sea* $\mathbf{A}$ *un sistema algebraico ,* $x, y \in A^{\mathbb{N}}$*,* $P \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})$ *y* $\mathrm{Var}(P) = \{\, v_{n_\alpha} \mid \alpha \in p \,\}$*. Si, para cada* $\alpha \in p$*,* $x(n_\alpha) = y(n_\alpha)$*, entonces* $P^{\mathbf{A}}(x) = P^{\mathbf{A}}(y)$*.*

Demostración. □

Definición 5.85. Sea $\mathbf{A}$ un sistema algebraico, $P \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(V)$ y $n(P) = \min\{\, n \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Var}(P) \subseteq \downarrow v_n \,\}$. Entonces $P^{n(P),\mathbf{A}}$ denota la operación $n(P)$-aria sobre A que a un $x \in A^{n(P)}$ le asigna $P^{n(P),\mathbf{A}}(x) = P^{\mathbf{A}}(y)$, siendo y cualquier miembro de $A^{\mathbb{N}}$ tal que $y{\restriction}n(P) = x$.

Definición 5.86 (Tarski)**.** Sea $\mathbf{A}$ un sistema algebraico. Entonces

1. Denotamos por $\mathbf{Sub}_{\boldsymbol{\Lambda}}(A^{\mathbb{N}})$ la $\boldsymbol{\Lambda}$-álgebra cuyas operaciones estructurales están definidas como:
   a)
   $$F_\neg \begin{cases} \mathrm{Sub}(A^{\mathbb{N}}) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A^{\mathbb{N}}) \\ \quad\mathcal{X} \quad\longmapsto F_\neg(\mathcal{X}) = A^{\mathbb{N}} - \mathcal{X}. \end{cases}$$
   b)
   $$F_{\forall v_n} \begin{cases} \mathrm{Sub}(A^{\mathbb{N}}) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A^{\mathbb{N}}) \\ \quad\mathcal{X} \quad\longmapsto F_{\forall v_n}(\mathcal{X}) = \{\, y \in A^{\mathbb{N}} \mid \forall a \in A\,(y^{(n|a)} \in \mathcal{X}) \,\}. \end{cases}$$
   c)
   $$F_\wedge \begin{cases} \mathrm{Sub}(A^{\mathbb{N}})^2 \longrightarrow \mathrm{Sub}(A^{\mathbb{N}}) \\ \quad\mathcal{X} \quad\longmapsto F_\wedge(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}. \end{cases}$$

d)

$$F_{\vee}\begin{cases}\mathrm{Sub}(A^{\mathbb{N}})^2 \longrightarrow \mathrm{Sub}(A^{\mathbb{N}})\\ \mathcal{X} \longmapsto F_{\vee}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \mathcal{X}\cup\mathcal{Y}.\end{cases}$$

e)

$$F_{\rightarrow}\begin{cases}\mathrm{Sub}(A^{\mathbb{N}})^2 \longrightarrow \mathrm{Sub}(A^{\mathbb{N}})\\ \mathcal{X} \longmapsto F_{\rightarrow}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = (A^{\mathbb{N}}-\mathcal{X})\cup\mathcal{Y}.\end{cases}$$

2. Denotamos por $\mathrm{Rd}_{\omega,\mathbf{A}}$ el único homomorfismo de la $\mathbf{\Lambda}$-álgebra libre $\mathbf{Fm}(\mathcal{L})$ en la $\mathbf{\Lambda}$-álgebra $\mathbf{Sub_{\Lambda}}(A^{\mathbb{N}})$ tal que a cada $\mathcal{L}$-fórmula atómica de la forma $P = Q$, con $P, Q \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})$, le asigna
$$\mathrm{Rd}_{\omega,\mathbf{A}}(P = Q) = \mathrm{Eq}(P^{\mathbf{A}}, Q^{\mathbf{A}})$$
y a cada $\mathcal{L}$-fórmula atómica de la forma $\pi(P_i \mid i \in n)$, siendo $\pi \in \Pi$ tal que $\mathrm{rk}(\pi) = n$ y $(P_i \mid i \in n) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^n$, le asigna
$$\mathrm{Rd}_{\omega,\mathbf{A}}(\pi(P_i \mid i \in n)) = \{\, x \in A^{\mathbb{N}} \mid (P_i^{\mathbf{A}}(x) \mid i \in n) \in R_\pi \,\}.$$
Al valor de $\mathrm{Rd}_{\omega,\mathbf{A}}$ en una $\mathcal{L}$-fórmula φ, que es un subconjunto de $A^{\mathbb{N}}$, lo denominamos la *relación determinada* por φ en $\mathbf{A}$ y lo denotamos por $\varphi^{\mathbf{A}}$.

A partir del homomorfismo $\mathrm{Rd}_{\omega,\mathbf{A}}$ de la $\mathbf{\Lambda}$-álgebra libre $\mathbf{Fm}(\mathcal{L})$ en la $\mathbf{\Lambda}$-álgebra $\mathbf{Sub_{\Lambda}}(A^{\mathbb{N}})$ definimos la relación ternaria de satisfacibilidad entre sistemas algebraicos, fórmulas y valoraciones de las variables.

Definición 5.87 (Tarski)**.** Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Entonces la relación de *satisfacibilidad* entre sistemas algebraicos, fórmulas y valoraciones de las variables, a la que denotamos por $\cdot \models_{\mathcal{L}} \cdot[\cdot]$, es la definida como:
$$\cdot \models_{\mathcal{L}} \cdot[\cdot] = \{\, (\mathbf{A},\varphi,x) \in \textstyle\bigcup_{\mathbf{A}\in\mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Pi})}\{\mathbf{A}\}\times\mathrm{Fm}(\mathcal{L})\times A^{\mathbb{N}} \mid x \in \varphi^{\mathbf{A}} \,\}.$$
Convenimos que $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x]$ significa que el triplo $(\mathbf{A},\varphi,x) \in \bigcup_{\mathbf{A}\in\mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Pi})}\{\mathbf{A}\}\times \mathrm{Fm}(\mathcal{L})\times A^{\mathbb{N}}$ está en $\cdot \models_{\mathcal{L}} \cdot[\cdot]$, y decimos, en ese caso, que la valoración x satisface a φ en $\mathbf{A}$.

Definición 5.88 (Tarski)**.** Sea $\mathbf{A}$ un sistema algebraico, $x \in A^{\mathbb{N}}$ y $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$.

1. Decimos que la fórmula φ es *satisfacible* en $\mathbf{A}$ si existe un $x \in A^{\mathbb{N}}$ tal que $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x]$, i.e., si $\varphi^{\mathbf{A}} \neq \varnothing$.
2. La fórmula φ es *satisfacible* si existe un sistema algebraico $\mathbf{A}$ tal que φ es satisfacible en $\mathbf{A}$.
3. Un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas Φ es *satisfacible* si existe un sistema algebraico $\mathbf{A}$ y un $x \in A^{\mathbb{N}}$ tal que, para cada $\varphi \in \Phi$, $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x]$.

Sea $\mathbf{A}$ un sistema algebraico, $P, Q \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})$, $\varphi, \psi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, $n \in \mathbb{N}$ y $x \in A^{\mathbb{N}}$. Entonces:

1. $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} P = Q[x]$ precisamente si $x \in \mathrm{Eq}(P^{\mathbf{A}}, Q^{\mathbf{A}})$.
2. $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \pi(P_i \mid i \in n)[x]$ precisamente si $(P_i^{\mathbf{A}}(x) \mid i \in n) \in R_\pi$.
3. $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \neg\varphi[x]$ si y sólo si no ocurre que $\mathbf{A} \models_{\mathcal{S}} \varphi[x]$.
4. $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi \wedge \psi[x]$ si y sólo si $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x]$ y $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \psi[x]$.
5. $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi \vee \psi[x]$ si y sólo si $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x]$ o $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \psi[x]$.
6. $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi \rightarrow \psi[x]$ si y sólo si no es el caso que $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x]$ o $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \psi[x]$.
7. $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \forall v_n\varphi[x]$ exactamente si, para cada $a \in A$, $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x^{(n|a)}]$.
8. $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\varphi[x]$ exactamente si, existe un $a \in A$ tal que $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x^{(n|a)}]$.

Proposición 5.89. *Sea* $\mathbf{A}$ *un sistema algebraico,* $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$*,* $x, y \in A^{\mathbb{N}}$ *y* $\mathrm{Fvar}(\varphi) = \{\, v_{n_\alpha} \mid \alpha \in p \,\}$*. Si, para cada* $\alpha \in p$*,* $x(n_\alpha) = y(n_\alpha)$*, entonces* $x \in \varphi^{\mathbf{A}}$ *si y sólo si* $y \in \varphi^{\mathbf{A}}$*, i.e.,* $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x]$ *precisamente si* $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[y]$*. En particular, si* $\varphi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$*, entonces o bien* $\varphi^{\mathbf{A}} = A^{\mathbb{N}}$ *o bien* $\varphi^{\mathbf{A}} = \varnothing$*, i.e., o bien, para cada* $x \in A^{\mathbb{N}}$*,* $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x]$ *o bien, para cada* $x \in A^{\mathbb{N}}$*,* $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \neg\varphi[x]$*.*

Demostración. $\square$

Definición 5.90. Sea $\mathbf{A}$ un sistema algebraico, $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ y $n(\varphi) = \min\{\, n \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Fvar}(\varphi) \subseteq\downarrow v_n \,\}$. Entonces $\varphi^{n(\varphi),\mathbf{A}}$ denota la relación $n(P)$-aria sobre A definida como:

$$\varphi^{n(\varphi),\mathbf{A}} = \{\, x \in A^{n(\varphi)} \mid \exists y \in A^{\mathbb{N}}\, (y{\restriction}n(\varphi) = x \;\;\&\;\; y \in \varphi^{\mathbf{A}}) \,\}.$$

Si $x \in \varphi^{n(\varphi),\mathbf{A}}$, decimos que x *satisface* a φ en $\mathbf{A}$ y lo denotamos por $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[[x]]$.

Definición 5.91. Sea $\mathbf{A}$ un sistema algebraico, $n \in \mathbb{N} - 1$ y $R \subseteq A^n$. Decimos que R es *definible* en $\mathbf{A}$ si hay una fórmula φ tal que $\mathrm{Fvar}(\varphi) \subseteq\downarrow v_n$ y $\varphi^{n(\varphi),\mathbf{A}} = R$.

Proposición 5.92. *Sea $n \in \mathbb{N} - 1$ y $\mathbf{A}$ un sistema algebraico. Entonces el conjunto $\mathrm{Def}_n(\mathbf{A})$ de las relaciones de rango n definibles en $\mathbf{A}$ está cerrado bajo la unión binaria, intersección binaria y complementación. Además, $\varnothing$ y $A^n \in \mathrm{Def}_n(\mathbf{A})$. Por lo tanto $\mathbf{Def}_n(\mathbf{A}) = (\mathrm{Def}_n(\mathbf{A}), \cup, \cap, \complement, \varnothing, A^n)$ es un álgebra booleana.*

Demostración. $\square$

Definición 5.93. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Entonces la relación de *validez* entre sistemas algebraicos y fórmulas, a la que denotamos por $\models_{\mathcal{L}}$, es la definida como:

$$\models_{\mathcal{L}} = \{\, (\mathbf{A}, \varphi) \in \mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi}) \times \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \mid \forall x \in A^{\mathbb{N}}\, (\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x]) \,\}.$$

Convenimos que $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi$ significa que el par $(\mathbf{A}, \varphi) \in \mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi}) \times \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ está en $\models_{\mathcal{L}}$, y decimos, en ese caso, que la fórmula φ es *verdadera* en $\mathbf{A}$ o que $\mathbf{A}$ es un *modelo* de φ; además, decimos que una fórmula φ es *universalmente válida* si, para cada sistema algebraico $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi$. Entonces el triplo ordenado $(\mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi}), \mathrm{Fm}(\mathcal{L}), \models_{\mathcal{L}})$ es el *contexto de Galois de la $\mathcal{L}$-lógica de predicados de primer orden con igualdad* y a la situación de Galois contravariante $(\mathbf{Sub}(\mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})), \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}, \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}, \mathbf{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L})))$, asociada al anterior contexto de Galois, la denominamos la *situación de Galois contravariante de la $\mathcal{L}$-lógica de predicados de primer orden con igualdad.*

La aplicación $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}$ asigna a cada conjunto A de sistemas algebraicos, el conjunto de fórmulas $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$ definido como:

$$\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(\mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L})) \\ \qquad \mathsf{A} \qquad\qquad \longmapsto \{\, \varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \mid \forall \mathbf{A} \in \mathsf{A}\, (\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi) \,\}, \end{cases}$$

de modo que $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$ es el conjunto de las fórmulas válidas, o verdaderas, en A. A cualquier fórmula *cerrada* de $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$ la denominamos un *teorema* de A y al conjunto de los teoremas de A, i.e., a $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}) \cap \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, lo denotamos por $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$.

La aplicación $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}$ asigna a cada conjunto Φ de fórmulas, el conjunto de sistemas algebraicos $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)$ definido como:

$$\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L})) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})) \\ \qquad \oplus \qquad\quad \longmapsto \{\, \mathbf{A} \in \mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi}) \mid \forall \varphi \in \Phi\, (\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi) \,\}. \end{cases}$$

A cualquier sistema algebraico de $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)$ lo denominamos *modelo* de Φ.

Decimos que un conjunto A de sistemas algebraicos es *axiomatizable* si hay un conjunto de *fórmulas cerradas* Φ tal que $\mathsf{A} = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)$, en cuyo caso decimos que Φ es un conjunto de *axiomas* de $\mathcal{A}$. Si Φ es finito, entonces decimos que A es *finitamente axiomatizable.* Decimos que un conjunto de fórmulas Φ está *modelísticamente cerrado* si hay un conjunto de sistemas algebraicos A tal que $\Phi = \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$.

Proposición 5.94. *Para el contexto de Galois $(\mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi}), \mathrm{Fm}(\mathcal{L}), \models_{\mathcal{L}})$, dados $\mathsf{A}, \mathsf{A}' \subseteq \mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$, una familia no vacía $(\mathsf{A}_i \mid i \in I)$ de subconjuntos de $\mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$, $\Phi, \Phi' \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ y una familia no vacía $(\Phi_i \mid i \in I)$ de subconjuntos de $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ se cumple que:*

1. $\mathsf{A} \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}))$.
2. $\Phi \subseteq \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))$.
3. *Si* $\mathsf{A} \subseteq \mathsf{A}'$, *entonces* $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}') \subseteq \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$.
4. *Si* $\Phi \subseteq \Phi'$, *entonces* $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi') \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)$.
5. $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}) = \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})))$.
6. $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi')))$.
7. $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}\big(\bigcup_{i\in I} \mathsf{A}_i\big) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}_i)$.
8. $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}\big(\bigcup_{i\in I} \Phi_i\big) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi_i)$.

Demostración. □

Definición 5.95. Sea $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tal que $\mathrm{Fvar}(\varphi) = \{\, v_{n_\alpha} \mid \alpha \in p \,\}$. Una *clausura universal* de φ es cualquier fórmula de la forma $\forall v_{n_{\sigma(0)}} \ldots v_{n_{\sigma(p-1)}} \varphi$, para alguna permutación $(\sigma(\alpha) \mid \alpha \in p)$ de p. A cualquiera de ellas la denotamos por $\mathrm{cl}_\forall(\varphi)$.

Proposición 5.96. *Sea* $\mathbf{A}$ *un sistema algebraico y* $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ *tal que* $\mathrm{Fvar}(\varphi) = \{\, v_{n_\alpha} \mid \alpha \in p \,\}$. *Entonces* $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi$ *si y sólo si* $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \mathrm{cl}_\forall(\varphi)$.

Demostración. □

Lema 5.97. *Para cada* $\mathsf{A} \subseteq \mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$, *se cumple que*

$$\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}) = \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}))).$$

Demostración. Puesto que $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$ está incluido en $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$, ya que, por definición, $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}) = \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}) \cap \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, y por ser $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}$ antítona, tenemos que

$$\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})) \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})),$$

luego, por ser $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}$ antítona, se cumple que

$$\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}))) \subseteq \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}))),$$

pero $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}) = \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})))$, por lo tanto

$$\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}))) \subseteq \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}).$$

Demostramos por último que $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})))$. Sea $\varphi \in \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$. Para demostrar que $\varphi \in \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})))$ hemos de establecer que, para cada $\mathbf{B} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}))$, $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \varphi$. Sea pues $\mathbf{B} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}))$ i.e., $\mathbf{B}$ cumple que

$$\forall \psi\, ((\psi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L}) \;\;\&\;\; (\forall \mathbf{A} \in \mathcal{A}\, (\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \psi))) \rightarrow \mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \psi),$$

entonces, ya que $\mathrm{cl}_\forall(\varphi) \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$ y, para cada $\mathbf{A} \in \mathsf{A}$, $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \mathrm{cl}_\forall(\varphi)$, porque $\varphi \in \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$ y en virtud de la proposición 5.96, tenemos que $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \mathrm{cl}_\forall(\varphi)$, luego, por la misma proposición, $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \varphi$. Por lo tanto

$$\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}) \subseteq \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}))).$$

□

Lema 5.98. *Para cada* $\Phi \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, *se cumple que*

$$\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))).$$

Demostración. Puesto que $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))$ está incluido en $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))$, ya que, por definición $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)) = \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)) \cap \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, y por ser $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}$ antítona, tenemos que

$$\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))) \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))),$$

pero $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)))$, por lo tanto

$$\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))).$$

Demostramos por último que $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))) \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)$. Sea pues $\mathbf{A}$ un modelo de $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))$ i.e., $\mathbf{A}$ cumple que

$$\forall\psi\,((\psi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})\ \ \&\ \ (\forall \mathbf{C} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)\,(\mathbf{C} \models_{\mathcal{L}} \psi))) \rightarrow \mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \psi),$$

entonces, dado un $\varphi \in \Phi$, ya que $\mathrm{cl}_{\forall}(\varphi) \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$ y, para cada $\mathbf{C} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)$, se cumple, en virtud de la proposición 5.96, que $\mathbf{C} \models_{\mathcal{L}} \mathrm{cl}_{\forall}(\varphi)$, tenemos que $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \mathrm{cl}_{\forall}(\varphi)$, luego, por la misma proposición, $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi$. Por lo tanto

$$\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))) \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi).$$

□

Proposición 5.99. *El conjunto*

$$\mathrm{Im}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}) = \{\, \Phi \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \mid \exists \mathsf{A} \subseteq \mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})\,(\Phi = \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}))\,\},$$

de todos los conjuntos de fórmulas modelísticamente cerrados, es un sistema de clausura y es isomorfo al conjunto

$$\mathrm{Im}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}{\restriction}\mathrm{Sub}(\mathrm{Sent}(\mathcal{L}))) = \{\, \mathsf{A} \subseteq \mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi}) \mid \exists \Phi \subseteq \mathrm{Sent}(\mathcal{L})\,(\mathsf{A} = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))\,\},$$

de todos los conjuntos de sistemas algebraicos axiomatizables.

Demostración. Veamos que el conjunto $\mathrm{Im}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}})$ es un sistema de clausura sobre $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$. Se cumple que $\mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \in \mathrm{Im}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}})$ porque, para $\mathsf{A} = \varnothing$, $\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\varnothing) = \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$. Además, si $(\Phi_i \mid i \in I)$ es una familia no vacía en $\mathrm{Im}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}})$, entonces $\bigcap_{i\in I} \Phi_i \in \mathrm{Im}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}})$, porque, para cada $i \in I$, existe un subconjunto A_i de $\mathbf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$ tal que $\Phi_i = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}_i)$ y $\bigcap_{i\in I} \Phi_i = \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\bigcup_{i\in I} \mathsf{A}_i)$.

Para establecer que el conjunto de todos los conjuntos de fórmulas modelísticamente cerrados es isomorfo al conjunto de todos los conjuntos de sistemas algebraicos axiomatizables, es suficiente tomar en consideración que las aplicaciones:

$$\mathrm{M}_{\mathcal{L}} \begin{cases} \mathrm{Im}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}) \longrightarrow \mathrm{Im}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}{\restriction}\mathrm{Sub}(\mathrm{Sent}(\mathcal{L}))) \\ \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}) \longmapsto \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})) \end{cases}$$

y

$$\mathrm{V}_{\mathcal{L}} \begin{cases} \mathrm{Im}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}{\restriction}\mathrm{Sub}(\mathrm{Sent}(\mathcal{L}))) \longrightarrow \mathrm{Im}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}) \\ \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) \longmapsto \mathrm{Vd}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)) \end{cases}$$

son inversas una de otra, debido a los lemas 5.97 y 5.98. □

En la próxima sección, cuando dispongamos del teorema de Łoś, demostraremos que $\mathrm{Im}(\mathrm{Vd}_{\mathcal{L}})$, y por lo tanto $\mathrm{Im}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}{\restriction}\mathrm{Sub}(\mathrm{Sent}(\mathcal{L})))$, es un sistema de clausura algebraico.

Tal como señala Cohn en [**?**], la anterior conexión de Galois se puede usar, bien para estudiar las fórmulas a través de sus modelos, bien para estudiar los sistemas algebraicos mediante sus teoremas. Sin embargo, este método tiene ciertas limitaciones; porque no nos permite distinguir entre dos fórmulas que tengan los mismos modelos, ni entre dos sistemas algebraicos que tengan los mismos teoremas.

Esto conduce a definir dos relaciones de equivalencia, una sobre el conjunto de las fórmulas y otra sobre el conjunto de los sistemas algebraicos. Nos ocupamos ahora de la primera relación de equivalencia, y para ello, pero no sólo para ello, definimos la relación de consecuencia semántica entre conjuntos de fórmulas y fórmulas.

Definición 5.100. La *relación de consecuencia semántica* entre los conjuntos de fórmulas y las fórmulas, denotada por $\Vdash_{\mathcal{L}}$, es el subconjunto de $\mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L}))\times\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ que consta de los pares (Γ, φ) tales que, para cada sistema algebraico $\mathbf{A}$ y cada $x \in A^{\mathbb{N}}$, si, para cada $\gamma \in \Gamma$, $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \gamma[x]$, entonces $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi[x]$.

Si $\Gamma \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, decimos que φ es *consecuencia semántica* de Γ. En particular, si $\{\psi\} \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, denotado simplemente por $\psi \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, entonces decimos que φ es *consecuencia semántica* de ψ y si tanto $\psi \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ como $\varphi \Vdash_{\mathcal{L}} \psi$, situación que denotamos por $\varphi \approx_{\mathcal{L}} \psi$, que φ y ψ son *semánticamente equivalentes.*

Si $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, entonces

$$\Gamma \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi \,\text{si y sólo si}\, \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Gamma) \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\varphi).$$

Proposición 5.101. *La endoaplicación* $\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}$ *de* $\mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L}))$ *definida como*

$$\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L})) & \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathrm{Fm}(\mathcal{L})) \\ \quad\Gamma & \longmapsto \{\, \varphi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \mid \Gamma \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi \,\}, \end{cases}$$

es un operador clausura sobre $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$.

Demostración. □

Si $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, entonces

$$\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma) \cap \mathrm{Sent}(\mathcal{L}) = \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Gamma)).$$

Definición 5.102. Una $\mathcal{L}$-*teoría* o también, para abreviar, una *teoría*, es un subconjunto Γ de $\mathrm{Sent}(\mathcal{L})$ tal que, para cada $\varphi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, si $\Gamma \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, entonces $\varphi \in \Gamma$

Si $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, entonces Γ es una teoría precisamente si $\Gamma = \mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}(\Gamma)$.

Proposición 5.103. *Para cada conjunto de sistemas algebraicos* A*,* $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$ *es una teoría. En particular, para cada sistema algebraico* $\mathbf{A}$*,* $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A})$ *es una teoría.*

Demostración. □

Teorema 5.104 (Herbrand-Tarski)**.** *Sea* $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ *y* $\varphi, \psi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$*. Entonces* $\Gamma \cup \{\varphi\} \Vdash_{\mathcal{L}} \psi$ *exactamente si* $\Gamma \Vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi$

Demostración. □

Proposición 5.105. *Una condición necesaria y suficiente para que dos fórmulas cerradas* φ *y* ψ *sean semánticamente equivalentes es que* $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\varphi) = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\psi)$*. Por lo tanto* $\approx_{\mathcal{L}}$*, es una relación de equivalencia sobre* $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$*. Además, la relación* $\approx_{\mathcal{L}}$ *retringida al subconjunto* $\mathrm{Sent}(\mathcal{L})$ *de* $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ *es compatible con los operadores booleanos y el conjunto cociente* $\mathrm{Sent}(\mathcal{L})/\approx_{\mathcal{L}}$ *está dotado de una estructura de álgebra booleana, a la que denotamos por* $\mathbf{LT}(\mathcal{L})$ *y denominamos el álgebra de* Lindenbaum-Tarski *de la lógica de predicados de primer orden. Por último, cada elemento de* $\mathrm{LT}(\mathcal{L})$ *determina un conjunto finitamente axiomatizable, siendo tal asociación inyectiva.*

Demostración. □

5.9. Extensiones y equivalencias elementales.

> The "objects" of model theory are the structures. The "maps" of first order model theory are not the monomorphisms, which preserve merely the atomic structural properties, but rather the elementary monomorphisms, which preserve all first order properties.
>
> *G. Sacks.*

En esta subección definimos la relación de equivalencia elemental y la de encajamiento elemental entre sistemas algebraicos y estudiamos tanto las propiedades de las mismas, como las relaciones que subsisten entre ellas y la relación de isomorfía. Además, demostramos el teorema de Tarski-Vaught sobre la clausura del conjunto de los sistemas algebraicos, relativos a una signatura de primer orden, arbitraria pero fija, respecto de la unión de cadenas ascendentes de sistemas algebraicos, en las que cada término de la cadena es un subsistema elemental de su sucesor, el teorema de Tarski-Vaught sobre la caracterización de los subsistemas elementales, el teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente y ascendente, el teorema de Łoś y el teorema de compacidad. Además, dotamos al conjunto de los conjuntos axiomatizables minimales de una estructura de espacio topológico compacto, Hausdorff y cero-dimensional y demostramos un teorema de Taimanov que caracteriza el operador clausura, en el espacio topológico mencionado, mediante la noción de ultraproducto.

Definición 5.106 (Tarski)**.** Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos sistemas algebraicos. Decimos que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son *elementalmente equivalentes*, y lo denotamos por $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$, si, para cada $\phi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, si $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \phi$, entonces $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \phi$.

La definición de equivalencia elemental entre dos sistemas algebraicos puede parecer asimétrica, pero no es ése el caso, como pone de manifiesto el siguiente corolario.

Corolario 5.107. *Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos sistemas algebraicos. Entonces $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ precisamente si, para cada $\phi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \phi$, si y sólo si $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \phi$ o, lo que es equivalente, exactamente si $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A}) = \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{B})$. Por consiguiente, la relación binaria $\equiv$ en $\mathsf{SAlg}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Pi})$ es simétrica. Además, $\equiv$ es reflexiva y transitiva, por lo tanto, es una relación de equivalencia sobre $\mathsf{SAlg}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Pi})$ y es menos fina que la relación de isomorfía $\cong$ sobre el mismo conjunto, i.e., $\cong \subseteq \equiv$.*

Demostración. □

Definición 5.108. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos sistemas algebraicos. Un *encajamiento elemental* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ es un triplo ordenado $(\mathbf{A}, f, \mathbf{B})$, abreviado como f y denotado por $f\colon \mathbf{A} \rightarrowtail \mathbf{B}$, en el que f es una aplicación de A en B tal que, para cada fórmula ϕ y cada $x \in A^{\mathrm{N}}$, $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[x]$ exactamente si $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \phi[f \circ x]$, i.e., $x \in \phi^{\mathbf{A}}$ sí y sólo si $f \circ x \in \phi^{\mathbf{B}}$.

Proposición 5.109. *Si $f\colon \mathbf{A} \rightarrowtail \mathbf{B}$ es un encajamiento elemental, entonces f es un encajamiento de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$.*

Demostración. □

Proposición 5.110.

1. *Si $f\colon \mathbf{A} \rightarrowtail \mathbf{B}$ y $g\colon \mathbf{B} \rightarrowtail \mathbf{C}$ son encajamientos elementales, entonces también lo es $g \circ f\colon \mathbf{A} \rightarrowtail \mathbf{C}$.*
2. *Si $g \circ f\colon \mathbf{A} \rightarrowtail \mathbf{C}$ y $g\colon \mathbf{B} \rightarrowtail \mathbf{C}$ son encajamientos elementales, entonces también lo es $f\colon \mathbf{A} \rightarrowtail \mathbf{B}$.*
3. $\mathrm{id}_{\mathbf{A}}$ *es un encajamiento elemental.*
4. *Si $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es un isomorfismo, entonces también es un encajamiento elemental.*
5. *Si $f\colon \mathbf{A} \rightarrowtail \mathbf{B}$ es un encajamiento elemental, entonces $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.*

Demostración. □

Definición 5.111 (Tarski)**.** Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos sistemas algebraicos. Decimos que $\mathbf{A}$ es un *subsistema elemental* de $\mathbf{B}$, y lo denotamos por $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{B}$, si $A \subseteq B$ y si $\mathrm{in}_{\mathbf{A}}$ es un encajamiento elemental de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$.

Proposición 5.112. *Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos sistemas algebraicos. Si $\mathbf{A}$ es un subsistema elemental de $\mathbf{B}$, entonces $\mathbf{A}$ es un subsistema de $\mathbf{B}$ y $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.*

Demostración. □

Los grupos $\mathbf{Z} = (Z, +, -, 0)$ y $\mathbf{P} = (P, +, -, 0)$, siendo P el conjunto de los números enteros pares, son isomorfos, luego son elementalmente equivalentes; pero $\mathbf{P}$, que es un subgrupo de $\mathbf{Z}$, *no es un subsistema elemental* de $\mathbf{Z}$ (esto no entra en contradicción con el que todo isomorfismo sea un encajamiento elemental, porque las inclusiones son distintas de los isomorfismos). De hecho, el único subsistema elemental de $\mathbf{Z}$ es él mismo.

Teorema 5.113. *Sea $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ un sistema inductivo de sistemas algebraicos. Si los homomorfismos de transición $a_{s,s'}\colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \mathbf{A}_{s'}$ son encajamientos elementales, entonces, para cada $s \in S$, a_s, la inclusión canónica s-ésima, es un encajamiento elemental de $\mathbf{A}_s$ en $\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$. Además, si $\Phi\colon (\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ es un morfismo inductivo, en el que $\Phi = (\phi, f)$, con $\phi\colon \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{T}$ y $f = (f_s \mid s \in S)$, siendo, para cada $s \in S$, $f_s\colon \mathbf{A}_s \rightarrowtail \mathbf{B}_{\phi(s)}$, entonces*

$$\varinjlim \Phi\colon \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \rightarrowtail \varinjlim(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}}).$$

Demostración. □

Corolario 5.114 (Tarski-Vaught)**.** *Sea I un conjunto no vacío y $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia de sistemas algebraicos tal que, para cada $i, j \in I$ exista un $k \in I$ tal que $\mathbf{A}_i \preccurlyeq \mathbf{A}_k$ y $\mathbf{A}_j \preccurlyeq \mathbf{A}_k$. Entonces, para cada $i \in I$, $\mathbf{A}_i \preccurlyeq \bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i$.*

Demostración. Antes de proceder a demostrar el teorema recordamos que para una familia de sistemas algebraicos dirigida superiormente $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$, el sistema algebraico $\bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i$ es el definido como:

1. El conjunto subyacente de $\bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i$ es $\bigcup_{i\in I} A_i$.
2. Para cada $n \in \mathrm{N}$ y cada $\sigma \in \Sigma$, la operación estructural F_σ es la aplicación definida como:
$$F_\sigma \begin{cases} (\bigcup_{i\in I} A_i)^n & \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \\ (x_\alpha \mid \alpha \in n) & \longmapsto F_\sigma^{\mathbf{A}_i}(x_\alpha \mid \alpha \in n), \end{cases}$$
siendo i un índice tal que, para cada $\alpha \in n$, $x_\alpha \in A_i$.
3. Para cada $n \in \mathrm{N} - 1$ y cada $\pi \in \Pi$, la relación estructural R_π es $\bigcup_{i\in I} R_\pi^{\mathbf{A}_i}$.

Es evidente que, para cada $i \in I$, $\mathbf{A}_i$ es un subsistema de $\bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i$.

La demostración del teorema es por inducción algebraica. Concretamente, vamos a demostrar que el conjunto de fórmulas Φ definido como:

$$\Phi = \{\, \phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \mid \forall i \in I\, \forall x \in A_i^{\mathrm{N}}\, (\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[x] \leftrightarrow \textstyle\bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[\mathrm{in}_i \circ x])\,\},$$

contiene al conjunto $\mathrm{At}(\mathcal{L})$ de las fórmulas atómicas y está cerrado bajo las operaciones estructurales definidas sobre $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$.

Sabemos que las $\mathcal{L}$-fórmulas atómicas, o bien son de la forma $P_0 = P_1$, para algún $(P_i \mid i \in 2) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^2$, o bien de la forma $\pi(P_i \mid i \in n)$, para algún $n \in \mathrm{N} - 1$, algún $\pi \in \Pi_n$ y alguna familia $(P_i \mid i \in n) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^n$.

Sea $i \in I$ y $x \in A_i^{\mathrm{N}}$. Vamos a demostrar que $\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} P_0 = P_1[x]$ precisamente si $\bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} P_0 = P_1[\mathrm{in}_i \circ x]$, i.e., que $x \in \mathrm{Eq}(P_0^{\mathbf{A}_i}, P_1^{\mathbf{A}_i})$ si y sólo si $\mathrm{in}_i \circ x \in \mathrm{Eq}(P_0^{\bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i}, P_1^{\bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i})$, o lo que es equivalente, que $P_0^{\mathbf{A}_i}(x) = P_1^{\mathbf{A}_i}(x)$ si y sólo si $P_0^{\bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i}(\mathrm{in}_i \circ x) = P_1^{\bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i}(\mathrm{in}_i \circ x)$. Ahora bien, para $\alpha \in 2$ el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A_i^{\mathrm{N}} \arrow[r, "\mathrm{in}_i^{\mathrm{N}}"] \arrow[d, "P_\alpha^{\mathbf{A}_i}"'] & (\bigcup_{i\in I} A_i)^{\mathrm{N}} \arrow[d, "P_\alpha^{\bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i}"] \\ A_i \arrow[r, "\mathrm{in}_i"'] & \bigcup_{i\in I} A_i \end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto, para $\alpha \in 2$, $\mathrm{in}_i(P_\alpha^{\mathbf{A}_i}(x)) = P_\alpha^{\bigcup_{i\in I}\mathbf{A}_i}(\mathrm{in}_i^{\mathrm{N}}(x))$.

De manera que si $P_0^{\mathbf{A}_i}(x) = P_1^{\mathbf{A}_i}(x)$, entonces $\mathrm{in}_i(P_0^{\mathbf{A}_i}(x)) = \mathrm{in}_i(P_1^{\mathbf{A}_i}(x))$, i.e., $P_0^{\bigcup_{i\in I}\mathbf{A}_i}(\mathrm{in}_i^{\mathrm{N}}(x)) = P_1^{\bigcup_{i\in I}\mathbf{A}_i}(\mathrm{in}_i^{\mathrm{N}}(x))$.

Por otra parte, si $P_0^{\bigcup_{i\in I}\mathbf{A}_i}(\mathrm{in}_i^{\mathrm{N}}(x)) = P_1^{\bigcup_{i\in I}\mathbf{A}_i}(\mathrm{in}_i^{\mathrm{N}}(x))$, entonces $\mathrm{in}_i(P_0^{\mathbf{A}_i}(x)) = \mathrm{in}_i(P_1^{\mathbf{A}_i}(x))$, luego, ya que in_i es inyectiva, $P_0^{\mathbf{A}_i}(x) = P_1^{\mathbf{A}_i}(x)$. Para las fórmulas atómicas de la forma $\pi(P_i \mid i \in n)$ se procede del mismo modo y lo dejamos como ejercicio.

Veamos que Φ esta cerrado bajo los operadores lógicos.

Sea $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tal que $\phi \in \Phi$. Vamos a demostrar que $\neg\phi \in \Phi$, i.e., que para cada $i \in I$ y cada $x \in A_i^{\mathrm{N}}$, $\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[x]$ precisamente si $\bigcup_{i\in I}\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[\mathrm{in}_i \circ x]$. Sea $i \in I$ y $x \in A_i^{\mathrm{N}}$. Supongamos que $\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[x]$, entonces $x \in (\neg\phi)^{\mathbf{A}_i} = \complement\phi^{\mathbf{A}_i}$, luego $x \notin \phi^{\mathbf{A}_i}$, i.e., no es el caso que $\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[x]$, luego, por la hipótesis, no es el caso que $\bigcup_{i\in I}\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[\mathrm{in}_i \circ x]$, por lo tanto $\bigcup_{i\in I}\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[\mathrm{in}_i \circ x]$. Del mismo modo se demuestra la recíproca.

Sea $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tal que $\phi \in \Phi$. Vamos a demostrar que, para cada $n \in \mathrm{N}$, $\exists v_n\phi \in \Phi$, i.e., que para cada $n \in \mathrm{N}$, se cumple que, para cada $i \in I$ y cada $x \in A_i^{\mathrm{N}}$, $\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\phi[x]$ precisamente si $\bigcup_{i\in I}\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\phi[\mathrm{in}_i \circ x]$. Sea $n \in \mathrm{N}$, $i \in I$ y $x \in A_i^{\mathrm{N}}$. Supongamos que $\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\phi[x]$, entonces hay un $a \in A_i$ tal que $\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[x^{(n|a)}]$, luego, por la hipótesis, $\bigcup_{i\in I}\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[(\mathrm{in}_i \circ x)^{(n|a)}]$, así que $\bigcup_{i\in I}\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\phi[\mathrm{in}_i \circ x]$. Recíprocamente, si $\bigcup_{i\in I}\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\phi[\mathrm{in}_i \circ x]$, entonces hay un $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$ tal que $\bigcup_{i\in I}\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[(\mathrm{in}_i \circ x)^{(n|a)}]$. Por lo tanto para un $j \in I$ tenemos que $a \in A_j$, luego hay un $k \in I$ tal que $\mathbf{A}_i \preccurlyeq \mathbf{A}_k$ y $\mathbf{A}_j \preccurlyeq \mathbf{A}_k$, entonces, por la hipótesis de inducción algebraica, $\mathbf{A}_k \models_{\mathcal{L}} \phi[x^{(n|a)}]$, i.e., $\mathbf{A}_k \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\phi[x]$, luego $\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\phi[x]$, porque $\mathbf{A}_i \preccurlyeq \mathbf{A}_k$.

Dejamos como ejercicio la demostración de que Φ está cerrado para el resto de los operadores lógicos.

□

Presentamos a continuación un teorema de Tarski-Vaught de caracterización de las extensiones elementales.

Teorema 5.115 (Tarski-Vaught). *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *dos sistemas algebraicos. Entonces las dos condiciones*

1. $\mathbf{A}$ *es un subsistema de* $\mathbf{B}$.
2. *Para cada* $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, *cada* $n \in \mathrm{N}$, *cada* $x \in A^{\mathrm{N}}$, *si* $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\phi[x]$, *entonces existe un* $a \in A$ *tal que* $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \phi[x^{(n|a)}]$.

son necesarias y suficientes para que $\mathbf{A}$ *sea un subsistema elemental de* $\mathbf{B}$.

Demostración. Necesidad. Si $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{B}$, entonces es obvio que $\mathbf{A}$ es un subsistema de $\mathbf{B}$. Veamos que se cumple 2. Sea $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, $n \in \mathrm{N}$, $x \in A^{\mathrm{N}}$ y supongamos que $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\phi[x]$. Entonces, en virtud de la definición de $\preccurlyeq$, $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\phi[x]$, luego, por la definición de la relación $\models_{\mathcal{L}}$, hay un $a \in A$ tal que $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[x^{(n|a)}]$, por lo tanto, por la definición de $\preccurlyeq$, $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \phi[x^{(n|a)}]$.

Suficiencia. Es obvio que de 1 se deduce que $A \subseteq B$. Para demostrar que, para cada $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ y cada $x \in A^{\mathrm{N}}$, $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[x]$ precisamente si $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \phi[x]$, procedemos por inducción algebraica. Concretamente, vamos a demostrar que el conjunto de fórmulas Φ definido como:

$$\Phi = \{\, \phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \mid \forall x \in A^{\mathrm{N}}\, (\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[x] \leftrightarrow \mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \phi[x])\,\},$$

contiene al conjunto $\mathrm{At}(\mathcal{L})$ de las fórmulas atómicas y está cerrado bajo las operaciones estructurales definidas sobre $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$. Es evidente, en virtud de 1, que $\mathrm{At}(\mathcal{L}) \subseteq \Phi$.

Sea $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tal que $\phi \in \Phi$. Vamos a demostrar que $\neg\phi \in \Phi$, i.e., que para cada $x \in A^{\mathrm{N}}$, $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[x]$ precisamente si $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[x]$. Sea $x \in A^{\mathrm{N}}$ y supongamos que $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[x]$, entonces no es el caso que $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[x]$, luego, por la hipótesis, no es el caso que $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \phi[x]$, por lo tanto $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[x]$. Del mismo modo se demuestra la recíproca.

Sea $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tal que $\phi \in \Phi$. Vamos a demostrar que, para cada $n \in \mathrm{N}$, $\exists v_n\phi \in \Phi$, i.e., que para cada $n \in \mathrm{N}$, se cumple que, para cada $x \in A^{\mathrm{N}}$, $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\phi[x]$ precisamente si $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\phi[\mathrm{in}_i \circ x]$. Sea $n \in \mathrm{N}$ y $x \in A^{\mathrm{N}}$. Supongamos que $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\phi[x]$, entonces hay un $a \in A$ tal que $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[x^{(n|a)}]$, luego, por la hipótesis, $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \phi[x^{(n|a)}]$, así que $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\phi[x]$. Recíprocamente, si $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\phi[x]$, entonces, por 2, hay un $a \in A$ tal que $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \phi[x^{(n|a)}]$,luego, por la hipótesis de inducción, $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \phi[x^{(n|a)}]$, por lo tanto $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\phi[x]$.

Dejamos como ejercicio la demostración de que Φ está cerrado para el resto de los operadores lógicos. □

Teorema 5.116 (Löwenheim-Skolem-Tarski descendente)**.** *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, $\mathbf{B} = (B, F^{\mathbf{B}}, R^{\mathbf{B}})$ un $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$-sistema algebraico, $X \subseteq B$ y $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito tal que* $\mathrm{card}(X) \leq \mathfrak{m} \leq \mathrm{card}(B)$ *y* $\mathrm{card}(\Sigma \coprod \Pi) \leq \mathfrak{m}$. *Entonces* $\mathbf{B}$ *tiene un subsistema elemental $\mathbf{A} = (A, F^{\mathbf{A}}, R^{\mathbf{A}})$ tal que $X \subseteq A$ y* $\mathrm{card}(A) = \mathfrak{m}$.

Demostración. Puesto que una $\mathcal{L}$-fórmula es una sucesión finita de símbolos de operación lógicos, variables, símbolos de operación y símbolos de relación, el número de fórmulas es a lo sumo $\sum_{n\in\mathrm{N}} \mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}$. Sea Y un subconjunto de B tal que $X \subseteq Y$ y $\mathrm{card}(Y) = \mathfrak{m}$. Por otra parte, sea f una función de elección para los subconjuntos no vacíos de B. Vamos a asociar a cada par $(\phi, i) \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \times \mathrm{N}$ una operación finitaria $G_{\phi,i}$ sobre B, la *operación de Skolem* para (ϕ, i). Sea m el primer número natural tal que las variables libres de ϕ estén incluidas en $\downarrow v_{m+1} = \{ v_0, \ldots, v_m \}$ e $i \leq m$. Entonces $G_{\phi,i}$ es la operación $m + 1$-aria sobre B definida como:

$$G_{\phi,i} \begin{cases} B^{m+1} \longrightarrow B \\ \quad b \quad \longmapsto \begin{cases} f(\{ u \in B \mid \mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \phi[b^{(i|u)}] \}), & \text{si } \{ u \in B \mid \mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \phi[b^{(i|u)}] \} \neq \varnothing; \\ f(B), & \text{en caso contrario.} \end{cases} \end{cases}$$

Sea A el cerrado de $(B, (G_{\phi,i} \mid (\phi, i) \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L}) \times \mathrm{N}))$ generado por Y. El conjunto A es tal que $\mathrm{card}(A) = \mathfrak{m}$. Ahora vamos a dotar al conjunto A de una estructura de $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$-sistema algebraico. Para un símbolo de relación π de rango m convenimos que $R^{\mathbf{A}} = R^{\mathbf{B}} \cap A^m$. Por otra parte, para un símbolo de operación σ de ariedad m, vamos a ver que A está cerrado bajo la operación $F^{\mathbf{B}}_{\sigma}$. Sea ϕ la fórmula $\sigma(v_0, \ldots, v_{m-1}) = v_m$ y $a_0, \ldots, a_{m-1} \in A$, entonces

$$G_{\phi,m}(a_0, \ldots, a_{m-1}, a_0) = F^{\mathbf{B}}_{\sigma}(a_0, \ldots, a_{m-1}),$$

porque $F^{\mathbf{B}}_{\sigma}(a_0, \ldots, a_{m-1})$ es el único elemento u de B tal que, tomando como $a = (a_0, \ldots, a_{m-1}, a_0)$, $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \phi[a^{(m|u)}]$. Luego definimos

$$F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a_0, \ldots, a_{m-1}) = F^{\mathbf{B}}_{\sigma}(a_0, \ldots, a_{m-1}).$$

Obviamente se cumple que $\mathbf{A} = (A, F^{\mathbf{A}}, R^{\mathbf{A}})$ es un subsistema de $\mathbf{B} = (B, F^{\mathbf{B}}, R^{\mathbf{B}})$. Para demostrar que $\mathbf{A} = (A, F^{\mathbf{A}}, R^{\mathbf{A}})$ es un subsistema elemental de $\mathbf{B} = (B, F^{\mathbf{B}}, R^{\mathbf{B}})$ aplicamos el teorema 5.115. Sea $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$, $n \in \mathrm{N}$, $x \in A^{\mathrm{N}}$ y supongamos que $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \exists v_n\phi[x]$. Sea m un número natural tal que las variables libres de ϕ estén incluidas en $\downarrow v_{m+1} = \{ v_0, \ldots, v_m \}$ y $n \leq m$. Entonces para $u = G_{\phi,n}(a_0, \ldots, a_m)$ se cumple que $u \in A$, porque A está cerrado bajo las operaciones $G_{\phi,n}$. Además, por la definición de $G_{\phi,n}$, tenemos que $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \phi[(x{\restriction}m+1)^{(n|u)}]$, luego $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \phi[x^{(n|u)}]$. □

Teorema 5.117 (Łoś)**.** *Sea I un conjunto, $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre I y $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia de sistemas algebraicos. Entonces, para cada $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ y cada $x \in \left(\prod_{i\in I} A_i\right)^{\mathrm{N}}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}}\models_{\mathcal{L}}\phi[\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}}\circ x]$, *siendo* $\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}}$ *la proyección canónica de* $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i$ *en* $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}}$.
2. *El conjunto* $\{\, i\in I \mid \mathbf{A}_i\models_{\mathcal{L}}\phi[\mathrm{pr}_i\circ x]\,\}\in\mathcal{F}$.

Demostración. Para la demostración conviene que tengamos presente el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{N} \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}}\circ x"] & \\
\prod_{i\in I}A_i \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}}"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_i"'] & \prod_{i\in I}A_i/\equiv_{\mathcal{F}} \\
A_i &
\end{tikzcd}$$

Para demostrar que, para cada $\phi\in\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ y cada $x\in\left(\prod_{i\in I}A_i\right)^{\mathrm{N}}$, $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}}\models_{\mathcal{L}}\phi[\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}}\circ x]$ precisamente si $\{\, i\in I\mid \mathbf{A}_i\models_{\mathcal{L}}\phi[\mathrm{pr}_i\circ x]\,\}\in\mathcal{F}$, procedemos por inducción algebraica. Concretamente, vamos a demostrar que el conjunto de fórmulas Φ definido como:

$$\Phi=\left\{\phi\in\mathrm{Fm}(\mathcal{L})\;\middle|\;\forall x\in\left(\textstyle\prod_{i\in I}A_i\right)^{\mathrm{N}}\begin{pmatrix}\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}}\models_{\mathcal{L}}\phi[\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}}\circ x]\text{ si y sólo}\\ \text{si }\{\, i\in I\mid \mathbf{A}_i\models_{\mathcal{L}}\phi[\mathrm{pr}_i\circ x]\,\}\in\mathcal{F}\end{pmatrix}\right\},$$

contiene al conjunto $\mathrm{At}(\mathcal{L})$ de las fórmulas atómicas y está cerrado bajo las operaciones estructurales definidas sobre $\mathrm{Fm}(\mathcal{L})$.

Sabemos que las $\mathcal{L}$-fórmulas atómicas, o bien son de la forma $P_0=P_1$, para algún $(P_i\mid i\in 2)\in\mathrm{Tm}(\mathcal{L})^2$, o bien de la forma $\pi(P_i\mid i\in n)$, para algún $n\in\mathrm{N}-1$, algún $\pi\in\Pi_n$ y alguna familia $(P_i\mid i\in n)\in\mathrm{Tm}(\mathcal{L})^n$.

Sea $x\in\left(\prod_{i\in I}A_i\right)^{\mathrm{N}}$. Vamos a demostrar que $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}}\models_{\mathcal{L}}P_0=P_1[\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}}\circ x]$ precisamente si $\{\, i\in I\mid \mathbf{A}_i\models_{\mathcal{L}}P_0=P_1[\mathrm{pr}_i\circ x]\,\}\in\mathcal{F}$. Si $\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}}\circ x$ satisface a $P_0=P_1$ en $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}}$, entonces $\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}}\circ x$ pertenece al igualador de $P_0^{\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}}}$ y $P_1^{\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}}}$. Ahora bien, para $\alpha\in 2$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\left(\prod_{i\in I}A_i\right)^{\mathrm{N}} \arrow[r, "\mathrm{pr}^{\mathrm{N}}_{\equiv_{\mathcal{F}}}"] \arrow[d, "P_\alpha^{\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i}"'] & \left(\prod_{i\in I}A_i/\equiv_{\mathcal{F}}\right)^{\mathrm{N}} \arrow[d, "P_\alpha^{\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}}}"] \\
\prod_{i\in I}A_i \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}}"'] & \prod_{i\in I}A_i/\equiv_{\mathcal{F}}
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto, para $\alpha\in 2$, $P_\alpha^{\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}}}(\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}}\circ x)=\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}}(P_\alpha^{\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i}(x))$.

Luego $\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}}(P_0^{\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i}(x))=\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}}(P_1^{\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i}(x))$, por consiguiente el conjunto $\{\, i\in I\mid \mathrm{pr}_i(P_0^{\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i}(x))=\mathrm{pr}_i(P_1^{\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i}(x))\,\}\in\mathcal{F}$.

Ahora bien, para $\alpha\in 2$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\left(\prod_{i\in I}A_i\right)^{\mathrm{N}} \arrow[r, "\mathrm{pr}_i^{\mathrm{N}}"] \arrow[d, "P_\alpha^{\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i}"'] & A_i^{\mathrm{N}} \arrow[d, "P_\alpha^{\mathbf{A}_i}"] \\
\prod_{i\in I}A_i \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"'] & A_i
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto, para $\alpha \in 2$, $\mathrm{pr}_i(P_\alpha^{\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i}(x)) = P_\alpha^{\mathbf{A}_i}(\mathrm{pr}_i \circ x))$

Luego, $\{\, i \in I \mid P_0^{\mathbf{A}_i}(\mathrm{pr}_i \circ x) = P_1^{\mathbf{A}_i}(\mathrm{pr}_i \circ x) \,\} \in \mathcal{F}$, pero $\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} P_0 = P_1[\mathrm{pr}_i \circ x]$ precisamente si $P_0^{\mathbf{A}_i}(\mathrm{pr}_i \circ x) = P_1^{\mathbf{A}_i}(\mathrm{pr}_i \circ x)$, así que $\{\, i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} P_0 = P_1[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\} \in \mathcal{F}$. La recíproca es similar.

Dejamos como ejercicio la demostración del caso en el que la fórmula atómica sea de la forma $\pi(P_i \mid i \in n)$, para algún $n \in \mathrm{N} - 1$, algún $\pi \in \Pi_n$ y alguna familia $(P_i \mid i \in n) \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L})^n$.

Sea $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tal que $\phi \in \Phi$. Vamos a demostrar que $\neg\phi \in \Phi$, i.e., que para cada $x \in \left(\prod_{i\in I} A_i\right)^{\mathrm{N}}$, $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x]$ precisamente si $\{\, i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\} \in \mathcal{F}$.

Sea $x \in \left(\prod_{i\in I} A_i\right)^{\mathrm{N}}$ y supongamos que $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x]$, entonces no es el caso que $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \phi[\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x]$, luego, por la hipótesis, $\{\, i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\} \notin \mathcal{F}$. Pero, por ser $\mathcal{F}$ un ultrafiltro, entonces $I - \{\, i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\} \in \mathcal{F}$. Ahora bien, este último conjunto es $\{\, j \in I \mid \mathbf{A}_j \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[\mathrm{pr}_j \circ x] \,\}$, luego $\{\, j \in I \mid \mathbf{A}_j \models_{\mathcal{L}} \neg\phi[\mathrm{pr}_j \circ x] \,\} \in \mathcal{F}$. La recíproca es obvia.

Sea $\phi \in \mathrm{Fm}(\mathcal{L})$ tal que $\phi \in \Phi$. Vamos a demostrar que, para cada $k \in \mathrm{N}$, $\exists v_k\phi \in \Phi$. Sea $k \in \mathrm{N}$ y $x \in \left(\prod_{i\in I} A_i\right)^{\mathrm{N}}$. Supongamos que $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \exists v_k\phi[\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x]$, entonces hay un $y \in \prod_{i\in I} A_i$ tal que $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \phi[(\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x)^{(k|[y]_{\equiv_{\mathcal{F}}})}]$. Ahora bien, puesto que $\phi \in \Phi$, obtenemos que $\{\, i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[\mathrm{pr}_i \circ x^{(k|\mathrm{pr}_i(y))}] \,\} \in \mathcal{F}$. Pero se cumple que este último conjunto está incluido en $\{\, i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_k\phi[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\}$, porque si $i \in I$ es tal que $\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[\mathrm{pr}_i \circ x^{(k|\mathrm{pr}_i(y))}]$, entonces, para $a = y(i)$, tenemos que $\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[(\mathrm{pr}_i \circ x)^{(k|y(i))}]$, porque $(\mathrm{pr}_i \circ x)^{(k|y(i))} = \mathrm{pr}_i \circ x^{(k|\mathrm{pr}_i(y))}$, luego $\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_k\phi[\mathrm{pr}_i \circ x]$. Por lo tanto $\{\, i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_k\phi[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\} \in \mathcal{F}$. Recíprocamente, si $J = \{\, i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_k\phi[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\} \in \mathcal{F}$, entonces, para cada $j \in J$, hay un $a_j \in A_j$ tal que $\mathbf{A}_j \models_{\mathcal{L}} \exists v_k\phi[\mathrm{pr}_j \circ x]$. Sea y la función de elección para $(A_i \mid i \in I)$ cuya coordenada j-ésima, con $j \in J$, es a_j, y cuya coordenada i-ésima, con $i \in I - J$, es un $b_i \in A_i$, arbitrario, pero fijo. Se cumple que $\{\, i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \exists v_k\phi[\mathrm{pr}_i \circ x] \,\}$ está incluido en $\{\, i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[\mathrm{pr}_i \circ x^{(k|y)}] \,\}$. Por lo tanto $\{\, i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi[\mathrm{pr}_i \circ x^{(k|y)}] \,\} \in \mathcal{F}$, luego, ya que $\phi \in \mathcal{F}$, $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \phi[(\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x)^{(k|[y]_{\equiv_{\mathcal{F}}})}]$. Por consiguiente $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \exists v_k\phi[\mathrm{pr}_{\equiv_{\mathcal{F}}} \circ x]$. Dejamos como ejercicio la demostración de que Φ está cerrado para el resto de los operadores lógicos. □

Corolario 5.118. *Sea I un conjunto, $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre I, $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia de sistemas algebraicos y $\phi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$. Entonces $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \phi$ si y sólo si el conjunto $\{\, i \in I \mid \mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi \,\} \in \mathcal{F}$.*

Corolario 5.119. *Sea I un conjunto, $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre I, $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia de sistemas algebraicos y $\phi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$. Si, para cada $i \in I$, $\mathbf{A}_i \models_{\mathcal{L}} \phi$ entonces $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i/\equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \phi$.*

Corolario 5.120 (Teorema de compacidad)**.** *Sea Φ un conjunto infinito de sentencias. Si cada subconjunto finito de Φ tiene un modelo, entonces Φ tiene un modelo.*

Demostración. Sea $I = \{\, \Delta \subseteq \Phi \mid \mathrm{card}(\Delta) < \aleph_0 \,\}$. Entonces, dada una parte finita Δ de Φ, hay un sistema algebraico $\mathbf{A}_\Delta$ tal que, para cada $\delta \in \Delta$, $\mathbf{A}_\Delta \models_{\mathcal{L}} \delta$. Por otra parte, para cada $\Delta \in I$, sea $G_\Delta = \{\, \Theta \in I \mid \Delta \subseteq \Theta \,\}$. Entonces el subconjunto $\mathcal{G} = \{\, G_\Delta \mid \Delta \in I \,\}$ de $\mathrm{Sub}(I)$, es una subbase de filtro sobre I, i.e., se cumple que:

1. $\mathcal{G} \neq \varnothing$.
2. $\varnothing \notin \mathcal{G}$.
3. Para cada $n \in \mathrm{N} - 1$ y cada $(\Delta_j \mid j \in n) \in I^n$, $\bigcap_{j\in n} G_{\Delta_j} \neq \varnothing$.

En efecto, el conjunto $\mathcal{G} \neq \varnothing$, porque $I \neq \varnothing$. El conjunto vacío no pertenece a $\mathcal{G}$ porque, dado un $\Delta \in I$, $\Delta \in G_\Delta$. Por último, dado un $n \in \mathrm{N} - 1$ y una familia

$(\Delta_j \mid j \in n) \in I^n$, $\bigcap_{j\in n} G_{\Delta_j} \neq \varnothing$, porque $\bigcap_{j\in n} G_{\Delta_j} = G_{\bigcup_{j\in n}\Delta_j}$ y se cumple que $\bigcup_{j\in n}\Delta_j \in I$. Por lo tanto, en virtud del axioma de elección, hay un ultrafiltro $\mathcal{F}$ sobre I tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, i.e., tal que, para cada $\Delta \in I$, $, G_\Delta \in \mathcal{F}$. Veamos que, para cada $\phi \in \Phi$, $\prod_{\Delta\in I} \mathbf{A}_\Delta / \equiv_{\mathcal{F}} \models_{\mathcal{L}} \phi$. Para ello es suficiente que demostremos, en virtud del corolario 5.118 que, para cada $\phi \in \Phi$, $\{\, \Delta \in I \mid \mathbf{A}_\Delta \models_{\mathcal{L}} \phi \,\} \in \mathcal{F}$. Ahora bien, dado un $\phi \in \Phi$, el conjunto $\{\, \Delta \in I \mid \mathbf{A}_\Delta \models_{\mathcal{L}} \phi \,\}$ pertenece a $\mathcal{F}$, porque contiene al conjunto $G_{\{\phi\}} \in \mathcal{F}$. □

Proposición 5.121. *El teorema de compacidad equivale a que, para cada* $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$*, si* $\Gamma \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$*, entonces hay un subconjunto finito* Δ *de* Γ *tal que* $\Delta \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$*.*

Demostración. Supongamos el teorema de compacidad y sea $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$ tal que $\Gamma \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$. Si, contrariamente a lo enunciado, para cada subconjunto finito Δ de Γ, existiera un sistema algebraico $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Delta)$ pero $\mathbf{A} \notin \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\phi)$, entonces, para cada subconjunto finito Δ de Γ, existiría un sistema algebraico $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Delta)$ y $\mathbf{A} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\neg\phi)$. Por lo tanto, para el conjunto de fórmulas cerradas $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$, tendríamos que, para cada subconjunto finito Θ de $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$, $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Theta) \neq \varnothing$, pero $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Gamma \cup \{\neg\phi\}) = \varnothing$, ya que en caso contrario, i.e., si existiera un sistema algebraico $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Gamma \cup \{\neg\phi\})$, entonces $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \phi$ y $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \neg\phi$, lo cual es absurdo. De modo que hay un subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$.

Ahora supongamos que, para cada $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, si $\Gamma \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$, entonces hay un subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$. Si no se cumpliera el teorema de compacidad, i.e., si existiera un $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$ tal que, para cada subconjunto finito Δ de Γ, $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Delta) \neq \varnothing$ pero $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Gamma) = \varnothing$, entonces, para la fórmula cerrada $\exists x\,(x \neq x)$, tendríamos que $\Gamma \Vdash_{\mathcal{L}} \exists x\,(x \neq x)$, porque $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Gamma) = \varnothing$, y, para cada subconjunto finito Δ de Γ, $\Delta \nVdash_{\mathcal{L}} \exists x\,(x \neq x)$, porque $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Delta) \neq \varnothing$ pero $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\exists x\,(x \neq x)) = \varnothing$. □

Corolario 5.122. *Tanto los functores de formación de ultraproductos como los de formación de ultrapotencias preservan encajamientos elementales. Además, las componentes de las transformaciones naturales del functor identidad en los functores de ultrapotencia, son encajamientos elementales.*

Corolario 5.123. *Cualquier sistema algebraico se puede encajar en un ultraproducto de sus subsistemas finitamente generados.*

Demostración. □

Proposición 5.124. *Sea* A *un conjunto infinito y* $\mathfrak{m}$ *un cardinal transfinito. Entonces hay un conjunto* I *tal que* $\mathrm{card}(I) = \mathfrak{m}$ *y un ultrafiltro* $\mathcal{F}$ *sobre* I *tal que* $2^{\mathfrak{m}} \leq \mathrm{card}(A^I / \equiv_{\mathcal{F}})$.

Demostración. Sea $I = \{\, X \subseteq \mathfrak{m} \mid \mathrm{card}(X) < \aleph_0 \,\}$. Para cada $X \in I$, sea $G_X = \{\, Y \in I \mid X \subseteq Y \,\}$. Entonces el subconjunto $\mathcal{G} = \{\, G_X \mid X \in I \,\}$ de $\mathrm{Sub}(I)$, es una subbase de filtro sobre I, i.e., se cumple que:

1. $\mathcal{G} \neq \varnothing$.
2. $\varnothing \notin \mathcal{G}$.
3. Para cada $n \in \mathrm{N} - 1$ y cada $(X_j \mid j \in n) \in I^n$, $\bigcap_{j\in n} G_{X_j} \neq \varnothing$.

En efecto, el conjunto $\mathcal{G} \neq \varnothing$, porque $I \neq \varnothing$. El conjunto vacío no pertenece a $\mathcal{G}$ porque, dado un $X \in I$, $X \in G_X$. Por último, dado un $n \in \mathrm{N} - 1$ y una familia $(X_j \mid j \in n) \in I^n$, $\bigcap_{j\in n} G_{X_j} \neq \varnothing$, porque $\bigcap_{j\in n} G_{X_j} = G_{\bigcup_{j\in n} X_j}$ y se cumple que $\bigcup_{j\in n} X_j \in I$. Por lo tanto, en virtud del axioma de elección, hay un ultrafiltro $\mathcal{F}$ sobre I tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, i.e., tal que, para cada $X \in I$, $, G_X \in \mathcal{F}$. Ahora vamos a demostrar que existe una aplicación inyectiva de $\mathrm{Sub}(\mathfrak{m})$ en $A^I / \equiv_{\mathcal{F}}$. Para ello, una vez elegida una familia $f = (f_X \mid X \in I)$ en $\prod_{X \in I} \mathrm{Mono}(\mathrm{Sub}(X), A)$, definimos la aplicación H_f de $\mathrm{Sub}(\mathfrak{m})$ en A^I como:

$$H_f \begin{cases} \mathrm{Sub}(\mathfrak{m}) \longrightarrow A^I \\ \quad Y \quad\;\; \longmapsto (f_X(Y \cap X) \mid X \in I). \end{cases}$$

Entonces la aplicación H de $\mathrm{Sub}(\mathfrak{m})$ en $A^I / \equiv_{\mathcal{F}}$ definida como:

$$H \begin{cases} \mathrm{Sub}(\mathfrak{m}) \longrightarrow A^I / \equiv_{\mathcal{F}} \\ \quad Y \quad\;\; \longmapsto [H_f(Y)]_{\equiv_{\mathcal{F}}}, \end{cases}$$

es inyectiva. En efecto, dados dos subconjuntos distintos Y y Z de $\mathfrak{m}$, si $\alpha \in Y \oplus Z$, entonces, ya que $G_{\{\alpha\}} \subseteq \{\, X \in I \mid f_X(Y \cap X) \neq f_X(Z \cap X) \,\}$ y $G_{\{\alpha\}} \in \mathcal{F}$, se cumple que $\{\, X \in I \mid f_X(Y \cap X) \neq f_X(Z \cap X) \,\} \in \mathcal{F}$, luego $H(Y) \neq H(Z)$.

□

Teorema 5.125 (Löwenheim-Skolem-Tarski ascendente)**.** *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden,* $\mathbf{A}$ *un* $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})$*-sistema algebraico y* $\mathfrak{m}$ *un cardinal infinito tal que* $\mathrm{card}(A) \leq \mathfrak{m}$ *y* $\mathrm{card}(\Sigma \coprod \Pi) \leq \mathfrak{m}$*. Entonces* $\mathbf{A}$ *tiene una extensión elemental* $\mathbf{B}$ *diferente de* $\mathbf{A}$ *y tal que* $\mathrm{card}(B) = \mathfrak{m}$*.*

Demostración. Sea $\mathbf{C}$ una extensión elemental de $\mathbf{A}$ tal que $\mathrm{card}(C) \geq 2^{\mathfrak{m}}$ y $c \in C - A$. Entonces, en virtud del teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente, sea $\mathbf{B}$ un subsistema elemental de $\mathbf{C}$ tal que $\mathrm{card}(B) = \mathfrak{m}$ y $A \cup \{c\} \subseteq B$. Es evidente que $\mathbf{B}$ cumple las condiciones del teorema. □

La ruptura con la tradición, que arrancó con Aristóteles, en virtud de la cual para el despliegue de cualquier ciencia deductiva es imprescindible que sus conceptos deban ser significativos, se produjo a partir de 1882, por obra del geómetra Pasch. Según este autor el proceso deductivo debe ser independiente del significado de los conceptos y sólo debe retenerse como básico las relaciones que subsistan entre los mismos, expresadas mediante axiomas.

Como Hilbert le comunica a Frege el 29 de Diciembre de 1899:

> Naturalmente, cada teoría es sólo un andamiaje o esquema de conceptos con sus necesarias relaciones mutuas, y los elementos básicos pueden pensarse como se quiera. Si pienso que mis puntos son cualquier sistema de cosas, vgr., el sistema *amor*, *ley*, *deshollinador*, ..., con que luego sólo postule la totalidad de mis axiomas como relaciones entre estas cosas, mis teoremas –el de Pitágoras, por ejemplo– valen también para ellas. En otras palabras: cada teoría puede siempre aplicarse a infinitos sistemas de elementos básicos. Basta aplicar una transformación unívoca inversible y estipular que los axiomas homólogos valen para las transformadas

Definición 5.126. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Decimos que una teoría T es *completa* si, para cada $\phi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, o bien $\phi \in T$ o bien $\neg\phi \in T$; que T es *consistente* si $\mathrm{Mod}(T) \neq \varnothing$; por último, siendo $\mathfrak{m}$ un cardinal, decimos que T es una teoría $\mathfrak{m}$-*categórica* si, salvo isomorfismo, tiene exactamente un modelo de cardinal $\mathfrak{m}$, i.e., si, para cada $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{Mod}(T)$, si la cardinalidad de A y B es $\mathfrak{m}$, entonces $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$, y que es *categórica* si dos modelos cualesquiera de T son isomorfos.

La teoría de grupos, Grp, no es una teoría completa, porque para la sentencia $\phi = \forall x, y\,(x \cdot y = y \cdot x)$, se cumple que ni $\mathsf{Grp} \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$ ni $\mathsf{Grp} \Vdash_{\mathcal{L}} \neg\phi$, i.e., que tanto $\mathsf{Grp} \cup \{\neg\phi\}$ como $\mathsf{Grp} \cup \{\phi\}$ son consistentes. Sin embargo la teoría de grupos triviales, $\mathsf{Grp} \cup \{\forall x\,(x = 1)\}$, es completa. Porque, por una parte, salvo isomorfismo, el grupo trivial es el único modelo de $\mathsf{Grp} \cup \{\forall x\,(x = 1)\}$ y, por otra, si fuera incompleta, entonces ....

Proposición 5.127. *Una teoría T es completa si y sólo si dos modelos cualesquiera de T son elementalmente equivalentes.*

Demostración. Supongamos que dos modelos cualesquiera de T son elementalmente equivalentes. Si T no fuera completa, existiría un $\phi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$ tal que ni $T \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$ ni $T \Vdash_{\mathcal{L}} \neg\phi$. Luego $T \cup \{\neg\phi\}$ y $T \cup \{\phi\}$ serían teorías consistentes. Por lo tanto, para cada $\mathbf{A} \in \mathrm{Mod}(T \cup \{\neg\phi\})$ y cada $\mathbf{B} \in \mathrm{Mod}(T \cup \{\phi\})$, tendríamos que $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{Mod}(T)$, luego, por la hipótesis, $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$. Pero éso es absurdo, porque $\mathbf{A} \in \mathrm{Mod}(\{\neg\phi\})$ y $\mathbf{B} \in \mathrm{Mod}(\{\phi\})$. De modo que T es completa. Recíprocamente, si T es completa y $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ son dos modelos de T, entonces dada $\phi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$ tal que $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \phi$, se cumple que $\phi \in T$, ya que en caso contrario, por ser T completa, $\neg\phi \in T$, luego $\mathbf{A} \models_{\mathcal{L}} \neg\phi$, que sería una contradicción. Por lo tanto $\mathbf{B} \models_{\mathcal{L}} \phi$. De modo que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son elementalmente equivalentes. $\square$

Corolario 5.128. *Cualquier teoría categórica es completa.*

Proposición 5.129. *Si una teoría completa tiene un modelo finito, entonces es categórica.*

El test de Łoś-Vaught es otro método para establecer la completud de las teorías.

Teorema 5.130 (Test de Łoś-Vaught)**.** *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden tal que $\mathrm{card}(\Sigma \coprod \Pi) = \mathfrak{m}$ y $\mathfrak{n}$ un cardinal infinito tal que $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$. Si una teoría consistente T es tal que todos sus modelos son infinitos y es $\mathfrak{n}$-categórica, entonces T es completa.*

Demostración. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos modelos de T. Entonces ambos modelos son infinitos y entonces, en virtud de los teoremas de Löwenheim-Skolem-Tarski, existen modelos $\mathbf{A}'$ y $\mathbf{B}'$ de T tales que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}'$, así como $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}'$, son elementalmenta equivalentes y, además, A' y B' tienen cardinalidad $\mathfrak{n}$. Por lo tanto, al ser T $\mathfrak{n}$-categórica, $\mathbf{A}'$ y $\mathbf{B}'$ son isomorfos, luego $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son elementalmente equivalentes. $\square$

Usando el test de Łoś-Vaught demostramos que la teoría de los órdenes lineales densos y sin máximo ni mínimo, Dlone, es completa. En primer lugar, cualquier modelo de Dlone es infinito (demuéstrese). Además, en virtud de un teorema de Cantor, Dlone es $\aleph_0$-categórica. Por lo tanto es completa.

Otro modo de demostrar la completud de la teoría Dlone es: Si Dlone no fuera completa, existiría una sentencia ϕ tal que ni $\mathsf{Dlone} \Vdash_{\mathcal{L}} \phi$ ni $\mathsf{Dlone} \Vdash_{\mathcal{L}} \neg\phi$. Luego $\mathsf{Dlone} \cup \{\neg\phi\}$ y $\mathsf{Dlone} \cup \{\phi\}$ serían teorías consistentes. Por lo tanto, puesto que el conjunto de los símbolos no lógicos, que es $\{\leq\}$, es numerable, en virtud del teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente, existiría un $\mathbf{A} \in \mathrm{Mod}(T \cup \{\neg\phi\})$ infinito numerable y un $\mathbf{B} \in \mathrm{Mod}(T \cup \{\phi\})$ infinito numerable. Ahora bien, puesto que Dlone, en virtud de un teorema de Cantor, es $\aleph_0$-categórica, $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$. Pero éso es absurdo, porque $\mathbf{A} \in \mathrm{Mod}(\{\neg\phi\})$ y $\mathbf{B} \in \mathrm{Mod}(\{\phi\})$.

La teoría de los órdenes lineales densos y sin máximo ni mínimo, como acabamos de ver, es completa pero no es categórica, en el sentido de que dos modelos cualesquiera de tal teoría sean isomorfos. Porque tanto $(Q, \leq)$ como $(R, \leq)$ son modelos de Dlone y, obviamente, $(Q, \leq) \ncong (R, \leq)$.

El conjunto linealmente ordenado $(R, \leq)$ es Dedekind-completo, pero el conjunto linealmente ordenado $(Q, \leq)$, como es bien sabido, no es Dedekind-completo. Esto significa que la Dedekind-completud es una propiedad que distingue a los conjuntos linealmente ordenados $(R, \leq)$ y $(Q, \leq)$. Pero tanto $(R, \leq)$ como $(Q, \leq)$ son modelos de Dlone, y Dlone es una teoría completa, por lo tanto $(R, \leq)$ y $(Q, \leq)$ satisfacen a las mismas sentencias, i.e., son elementalmente equivalentes. En particular, cualquier sentencia, del lenguaje de ambos sistemas relacionales, que exprese la Dedekind-completud debe ser verdadera en los dos modelos o falsa en los dos. De este modo, aparentemente, parece que hemos llegado a una situación contradictoria, porque los conjuntos linealmente ordenados $(R, \leq)$ y $(Q, \leq)$ satisfacen a las mismas sentencias, pero la Dedekind-completud es una propiedad que los distingue. De hecho no hay ninguna contradicción, simplemente porque no hay ninguna sentencia, del lenguaje de ambos sistemas relacionales, que exprese la Dedekind-completud (esta última es una sentencia de segundo orden, no de primer orden).

El test de Łoś-Vaught también puede usarse para demostrar la completud de la teoría de los grupos abelianos divisibles sin torsión y no triviales. Pero antes recordemos algunos de los términos acabados de mencionar.

Definición 5.131. Sea $\mathbf{A}$ un grupo abeliano. Decimos que $\mathbf{A}$ es *divisible* si, para cada $n \in \mathbb{N} - 1$, se cumple que:

$$\forall x \in A \, \exists y \in A \, (\, ny = x \,).$$

Obsérvese que la definición del concepto de divisibilidad, para los grupos abelianos, consta de una infinidad numerable de axiomas, uno por cada número natural no nulo.

Definición 5.132. Sea $\mathbf{A}$ un grupo abeliano. Decimos que $\mathbf{A}$ es *aperiódico* o *sin torsión* si, para cada $n \in \mathbb{N} - 1$, se cumple que:

$$\forall x \in A \, (\, nx = 0 \rightarrow x = 0 \,).$$

Lo mismo que en el caso anterior, el concepto de carencia de torsión viene determinado por una infinidad numerable de axiomas.

Conviene señalar que los grupos abelianos *periódicos* no se definen como los que no son aperiódicos, i.e., aquellos $\mathbf{A}$ para los que se cumple que, para al menos un número natural no nulo n, existe un $x \in A$ tal que $x \neq 0$ pero $nx = 0$, sino como los que tienen la propiedad de que, para cada $x \in A$, existe un $n \in \mathbb{N} - 1$ tal que $nx = 0$.

Proposición 5.133. *El grupo abeliano subyacente de cualquier espacio vectorial no trivial sobre el cuerpo de los racionales es divisible y sin torsión. Además, cualquier grupo abeliano divisible sin torsión no trivial es el grupo abeliano subyacente de un espacio vectorial sobre el cuerpo* $\mathbf{Q}$.

Demostración. Sea $\mathbf{A} = (A, +, -, 0)$ un grupo abeliano divisible sin torsión no trivial. Vamos a definir una acción de $\mathbf{Q}$ sobre $\mathbf{A}$, de modo que dote al grupo abeliano $\mathbf{A}$ de una estructura de $\mathbf{Q}$-espacio vectorial. Sea $a \in A$ y $q = m/n \in \mathrm{Q}$, con $m \in \mathrm{Z}$ y $n > 0$. Entonces $ma \in A$, por ser $\mathbf{A}$ grupo abeliano, luego para $n > 0$, por ser $\mathbf{A}$ divisible, hay un $b \in A$ tal que $nb = ma$. Además, si $c \in A$ fuera tal que $nc = ma$, entonces $n(b - c) = 0$, luego, ya que $n > 0$, por ser $\mathbf{A}$ sin torsión, $b - c = 0$, i.e., $b = c$. Podemos afirmar, por lo tanto, que hay un único $b \in A$ tal que $nb = ma$. Definimos, en consecuencia, la acción de $q = m/n$ sobre a, como el único $b \in A$ tal que $nb = ma$. Dejamos como ejercicio la demostración de que tal acción dota al grupo abeliano $\mathbf{A}$ de una estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbf{Q}$. $\square$

Demuéstrese que los grupos abelianos $\mathbf{R} = (R, +, -, 0)$ y $\mathbf{Q} = (Q, +, -, 0)$, de los reales y los racionales, resp., son grupos abelianos divisibles sin torsión (y no triviales).

Evidentemente, todos los grupos abelianos divisibles sin torsión y no triviales son infinitos. Además, para cada cardinal $\mathfrak{n}$ tal que $\aleph_0 < \mathfrak{n}$, la teoría de los grupos abelianos divisibles sin torsión y no triviales es $\mathfrak{n}$-categórica. En efecto, si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos grupos abelianos divisibles sin torsión y no triviales de cardinal $\mathfrak{n}$, con $\aleph_0 < \mathfrak{n}$, entonces, en tanto que $\mathbf{Q}$-espacios vectoriales, tienen bases infinitas X e Y, resp. Si $\mathrm{card}(X) = \mathfrak{m}$, entonces, por una parte, $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$, y, por otra $\mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}\aleph_0 = \mathfrak{m}$, luego $\mathfrak{n} = \mathrm{card}(X)$. Del mismo modo obtenemos que $\mathfrak{n} = \mathrm{card}(Y)$. Por lo tanto, en tanto que $\mathbf{Q}$-espacios vectoriales, son isomorfos. De donde, en virtud del test de Łoś-Vaught, podemos afirmar la completud de la teoría de los grupos abelianos divisibles sin torsión y no triviales.

Observemos que entonces los grupos abelianos $\mathbf{R} = (R, +, -, 0)$ y $\mathbf{Q} = (Q, +, -, 0)$, por ser grupos abelianos divisibles sin torsión y no triviales, son elementalmente equivalentes, pero no isomorfos.

Por otra parte, la teoría de los grupos abelianos divisibles sin torsión no triviales, no es $\aleph_0$-categórica, debido a que tal teoría tiene (una infinidad de) modelos infinito numerables, que no son isomorfos, por ejemplo, las potencias finitas de $\mathbf{Q} = (Q, +, -, 0)$, considerado como $\mathbf{Q}$-espacio vectorial.

Haciendo uso del test de Łoś-Vaught, también se puede demostrar que la teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados de característica p, siendo $p = 0$ o un número primo, es completa.

Definición 5.134. Decimos que un cuerpo $\mathbf{K}$ es algebraicamente cerrados si, para cada $n \in \mathbb{N} - 1$, se cumple que:

$$\forall x_0, \ldots, x_n \in K\, (\, x_n \neq 0 \rightarrow \exists y \in K\, (x_n y^n + \cdots + x_1 y + x_0 = 0)).$$

Una vez más, observemos que la propiedad de un cuerpo de estar algebraicamente cerrado, viene determinado por una infinidad numerable de axiomas.

Veamos que la teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados de característica p, es para cada cardinal $\mathfrak{n}$ tal que $\aleph_0 < \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}$-categórica.

Lema 5.135. *Sea* $\mathbf{A}$ *un sistema algebraico y* Φ *un conjunto de fórmulas cerradas tal que* $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) \subseteq [\mathbf{A}]_{\equiv}$. *Entonces*

1. $[\mathbf{A}]_{\equiv} = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A}))$.
2. $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A}) \subseteq \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))$.

Demostración. □

Proposición 5.136. *Las clases de equivalencia* $[\mathbf{A}]_{\equiv} \in \mathsf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})/\equiv$ *son los conjuntos (de sistemas algebraicos) axiomatizables minimales.*

Demostración. Puesto que, por el lema 5.135, $[\mathbf{A}]_{\equiv} = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A}))$, podemos afirmar que $[\mathbf{A}]_{\equiv}$ es axiomatizable.

Veamos que $[\mathbf{A}]_{\equiv}$ es minimal. Sea Φ un conjunto de fórmulas cerradas tal que $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) \subseteq [\mathbf{A}]_{\equiv}$. Sea $\mathbf{B}$ un sistema algebraico tal que $\mathbf{B} \in [\mathbf{A}]_{\equiv}$, i.e., tal que $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{B}) = \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A})$ y supongamos que $\mathbf{B} \notin \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)$. Entonces hay una fórmula cerrada $\phi \in \Phi$ tal que $\phi \notin \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{B})$, por lo tanto $\phi \notin \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A})$, luego $\neg\phi \in \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A})$ (porque $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A})$ es completa). Pero, ya que $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) \subseteq [\mathbf{A}]_{\equiv}$, por el lema 5.135, se cumple que

$$\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A}) \subseteq \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi)),$$

luego $\neg\phi \in \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi))$, por lo tanto todo modelo de Φ, que, en particular, lo será de ϕ, es modelo de $\neg\phi$, lo cual es absurdo. De modo que $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Phi) = [\mathbf{A}]_{\equiv}$. □

Proposición 5.137. *El subconjunto* $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ *de* $\mathrm{Sub}(\mathsf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi}))/\equiv)$ *definido como:*

$$\mathcal{B}_{\mathcal{L}} = \{\, \mathrm{B}_{\phi} \mid \phi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L}) \,\},$$

siendo, para cada $\phi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})$, B_{ϕ} *el conjunto definido como:*

$$\mathrm{B}_{\phi} = \{\, [\mathbf{A}]_{\equiv} \in \mathsf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})/\equiv \mid \mathbf{A} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\phi) \,\},$$

es una base para una topología sobre $\mathsf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})/\equiv$.

Demostración. Es evidente que $\bigcup_{\phi \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L})} \mathrm{B}_\phi \subseteq \mathsf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})/\equiv$. Por otra parte, si $[\mathbf{A}]_\equiv \in \mathsf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})/\equiv$, entonces $[\mathbf{A}]_\equiv \in \mathrm{B}_\phi$, siendo ϕ cualquier fórmula cerrada de $\mathrm{Th}_\mathcal{L}(\mathbf{A})$.

Por último, si $[\mathbf{A}]_\equiv \in \mathrm{B}_\phi \cap \mathrm{B}_\psi$, entonces $[\mathbf{A}]_\equiv \in \mathrm{B}_{\phi\wedge\psi} \subseteq \mathrm{B}_\phi \cap \mathrm{B}_\psi$. □

Proposición 5.138. *El espacio topológico* $(\mathsf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})/\equiv, \mathrm{Tg}_X(\mathcal{B}_\mathcal{L}))$ *es Hausdorff, compacto y cero-dimensional, luego* totalmente desconectado*, i.e., las componentes conexas son puntuales, y normal.*

Demostración. □

Demuéstrese que los cerrados de $(\mathsf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})/\equiv, \mathrm{Tg}_X(\mathcal{B}_\mathcal{L}))$ son precisamente los subconjuntos de $\mathsf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})/\equiv$ que se pueden representar, para algún conjunto de fórmulas cerradas Φ, como $\mathrm{B}_\Phi = \{\, [\mathbf{A}]_\equiv \mid \mathbf{A} \in \mathrm{Mod}_\mathcal{L}(\Phi) \,\}$.

Ahora establecemos un teorema de Taimanov([?]) de caracterización del operador clausura del espacio topológico $(\mathsf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})/\equiv, \mathrm{Tg}_X(\mathcal{B}_\mathcal{L}))$, mediante el concepto de ultraproducto.

Teorema 5.139 (Taimanov)**.** *Sea* $\mathbf{A}$ *un sistema algebraico y* $\{\, [\mathbf{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda \in \Lambda \,\}$ *un subconjunto de* $\mathsf{SAlg}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi})/\equiv$*. Entonces* $[\mathbf{A}]_\equiv \in \overline{\{\, [\mathbf{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda \in \Lambda \,\}}$ *precisamente si hay un conjunto* I*, una familia* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *de sistemas algebraicos en* $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv$ *y un ultrafiltro* $\mathcal{F}$ *sobre* I *tal que* $\mathbf{A} \equiv \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\equiv_\mathcal{F}$*.*

Demostración. Veamos en primer lugar que $[\mathbf{A}]_\equiv \in \overline{\{\, [\mathbf{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda \in \Lambda \,\}}$ exactamente si, para cada $\phi \in \mathrm{Th}_\mathcal{L}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv)$, $\mathbf{A} \models_\mathcal{L} \phi$ o, lo que es equivalente, si, para cada $\phi \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Th}_\mathcal{L}(\mathbf{A}_\lambda)$, $\mathbf{A} \models_\mathcal{L} \phi$, ya que se cumple que

$$\mathrm{Th}_\mathcal{L}(\bigcup\nolimits_{\lambda\in\Lambda}[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv) = \bigcap\nolimits_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Th}_\mathcal{L}(\mathbf{A}_\lambda).$$

Supongamos que, para cada $\phi \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Th}_\mathcal{L}(\mathbf{A}_\lambda)$, $\mathbf{A} \models_\mathcal{L} \phi$. Entonces, para cualquier conjunto de fórmulas cerradas Φ, si $\{\, [\mathbf{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda \in \Lambda \,\} \subseteq \mathrm{B}_\Phi$, tenemos que, para cada $\lambda \in \Lambda$, $[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv \in \mathrm{B}_\Phi$, luego, para cada $\lambda \in \Lambda$, $\mathbf{A}_\lambda \models_\mathcal{L} \Phi$, así que, para cada $\lambda \in \Lambda$, $\Phi \subseteq \mathrm{Th}_\mathcal{L}(\mathbf{A}_\lambda)$, i.e., $\Phi \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Th}_\mathcal{L}(\mathbf{A}_\lambda)$, por consiguiente $\mathbf{A} \models_\mathcal{L} \Phi$, de modo que $[\mathbf{A}]_\equiv \in \mathrm{B}_\Phi$ y, por lo tanto, $[\mathbf{A}]_\equiv \in \overline{\{\, [\mathbf{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda \in \Lambda \,\}}$. Recíprocamente, supongamos que $[\mathbf{A}]_\equiv$ esté en la clausura de $\{\, [\mathbf{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda \in \Lambda \,\}$. Si existiera un $\phi \in \mathrm{Th}_\mathcal{L}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv)$ tal que $\mathbf{A} \notin \mathrm{Mod}_\mathcal{L}(\phi)$, entonces $[\mathbf{A}]_\equiv$ no estaría en la clausura de $\{\, [\mathbf{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda \in \Lambda \,\}$, porque, para el cerrado B_ϕ se cumpliría que $[\mathbf{A}]_\equiv \notin \mathrm{B}_\phi$, pero que $\{\, [\mathbf{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda \in \Lambda \,\} \subseteq \mathrm{B}_\phi$. Por lo tanto, para cada $\phi \in \mathrm{Th}_\mathcal{L}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv)$, $\mathbf{A} \models_\mathcal{L} \phi$.

Ahora que ya sabemos que $[\mathbf{A}]_\equiv \in \overline{\{\, [\mathbf{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda \in \Lambda \,\}}$ si y sólo si para cada $\phi \in \mathrm{Th}_\mathcal{L}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv)$, $\mathbf{A} \models_\mathcal{L} \phi$, si existiera un conjunto I, una familia $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ de sistemas algebraicos en $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv$ y un ultrafiltro $\mathcal{F}$ sobre I tal que $\mathbf{A} \equiv \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i/\equiv_\mathcal{F}$, entonces, en virtud del teorema de Łoś, $[\mathbf{A}]_\equiv \in \overline{\{\, [\mathbf{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda \in \Lambda \,\}}$.

Recíprocamente, sea $[\mathbf{A}]_\equiv \in \overline{\{\, [\mathbf{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda \in \Lambda \,\}}$ y elijamos un sistema algebraico $\mathbf{A}_\lambda$ en cada clase de equivalencia de $\{\, [\mathbf{A}_\lambda]_\equiv \mid \lambda \in \Lambda \,\}$. Puesto que para cada $\phi \in \mathrm{Th}_\mathcal{L}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv)$, $\mathbf{A} \models_\mathcal{L} \phi$, para cualquier fórmula cerrada ψ válida en $\mathbf{A}$, existe un $\mathbf{B} \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv$ tal que $\mathbf{B} \models_\mathcal{L} \psi$ (porque sino, i.e., si existiera una fórmula cerrada ψ tal que $\mathbf{A} \models_\mathcal{L} \psi$ pero, para cada $\mathbf{B} \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv$, $\mathbf{B} \not\models_\mathcal{L} \psi$, entonces, para cada $\mathbf{B} \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv$, $\mathbf{B} \models_\mathcal{L} \neg\phi$, luego $\mathbf{A} \models_\mathcal{L} \neg\phi$, absurdo). Para cada $[\psi]_\approx \in \mathrm{LT}(\mathcal{L})$ tal que $\mathbf{A} \models_\mathcal{L} \psi$, sea $E_{[\psi]_\approx} = \{\, \lambda \in \Lambda \mid \mathbf{A}_\lambda \models_\mathcal{L} \psi \,\}$. Entonces $E_{[\psi]_\approx} \neq \varnothing$, porque para cualquier fórmula cerrada ψ válida en $\mathbf{A}$, existe un $\mathbf{B} \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\mathbf{A}_\lambda]_\equiv$ tal que $\mathbf{B} \models_\mathcal{L} \psi$; y $E_{[\psi]_\approx} \cap E_{[\xi]_\approx} = E_{[\psi\wedge\xi]_\approx}$. Por lo tanto hay un ultrafiltro $\mathcal{F}$ sobre Λ que contiene a todos los conjuntos de la forma $E_{[\psi]_\approx}$, cuando ψ recorre el conjunto de las fórmulas cerradas. Se cumple que $\mathbf{A} \equiv \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{A}_i/\equiv_\mathcal{F}$ □

6. El primer teorema de incompletud de Gödel.

Para la demostración del primer teorema de incompletud de Gödel procedemos como sigue:

1. En primer lugar, especificamos el sistema formal, que será la lógica de predicados de primer orden con igualdad junto con los axiomas de Dedekind-Peano.
2. En segundo lugar, establecemos una Gödelización, i.e., una asignación inyectiva de números naturales a los objetos formales del sistema formal. Esto tiene como consecuencia el que relaciones y funciones que se aplican a objetos del sistema formal, tengan réplicas numéricas que se aplican a los números de Gödel de tales objetos formales.
3. En tercer lugar, definimos relaciones y aplicaciones numéricas, precisamente las recursivas, y demostramos que son expresables en el sistema formal.
4. En cuarto lugar, demostramos que ciertas relaciones y aplicaciones numéricas asociadas, mediante la Gödelización, a relaciones y funciones sobre el sistema formal, son recursivas (primitivas). Esto tiene como consecuencia, en virtud del punto anterior, que tales relaciones y aplicaciones numéricas, sean representables en el sistema formal.
5. En quinto lugar, demostramos el primer teorema de incompletud de Gödel. Para ello, se define una relación recursiva primitiva $R \subseteq \mathbb{N}^2$ tal que, para cada $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, en el caso de que y sea el número de Gödel de una fórmula, digamos $\varphi_y(v)$, con v como única variable libre, dice lo siguiente: x no es el número de Gödel de una demostración en el sistema formal de $\varphi_y(\underline{v})$. Entonces, por un punto anterior, la relación recursiva primitiva R es representable en el sistema formal, luego hay una fórmula $\rho(v_0, v_1)$, con dos variables libres, que la representa. Ahora consideramos la fórmula $\forall v_0 \rho(v_0, v_1)$, que tiene como única variable libre a v_1. Sea m el número de Gödel de $\forall v_0 \rho(v_0, v_1)$. Entonces la sentencia $\forall v_0 \rho(v_0, \underline{m})$ hará incompleto al sistema formal.

6.1. Los axiomas de Dedekind-Peano.

A partir del conjunto infinito numerable $V = \{ v_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ de las variables y de los símbolos de operación $\mathsf{0}$, sc, $\oplus$ y $\otimes$, obtenemos los términos. Por otra parte, a partir de las fórmulas atómicas, que son en este caso las ecuaciones formadas a partir de los términos, y mediante los símbolos lógicos obtenemos las fórmulas de la aritmética de primer orden de Dedekind-Peano, cuyos axiomas, denotados por $\mathcal{DP}$, son los siguientes

Axiomas de Dedekind-Peano.

AP$_0$ $\forall v_0(\neg \mathsf{sc}(v_0) = \mathsf{0})$.
AP$_1$ $\forall v_0 \, \exists v_1(\neg v_0 = \mathsf{0} \rightarrow \mathsf{sc}(v_1) = v_0)$.
AP$_2$ $\forall v_0, v_1(\mathsf{sc}(v_0) = \mathsf{sc}(v_1) \rightarrow v_0 = v_1)$.
AP$_3$ $\forall v_0(v_0 \oplus \mathsf{0} = v_0)$.
AP$_4$ $\forall v_0, v_1(v_0 \oplus \mathsf{sc}(v_1) = \mathsf{sc}(v_0 \oplus v_1)$.
AP$_5$ $\forall v_0(v_0 \otimes \mathsf{0} = \mathsf{0})$.
AP$_6$ $\forall v_0, v_1(v_0 \otimes \mathsf{sc}(v_1) = (v_0 \otimes v_1) \oplus v_1$.
Ind. *Si $\varphi(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ es una fórmula cuyas variables libres están incluidas en el conjunto $\{ v_0, \ldots, v_n \}$, entonces*

$$\forall v_1, \ldots, v_n \, ([\, \varphi(\mathsf{0}, v_1 \ldots, v_n) \wedge \forall v_0 \, (\, \varphi(v_0, v_1, \ldots, v_n) \rightarrow \varphi(\mathsf{sc} v_0, v_1, \ldots, v_n)\,] \rightarrow \forall v_0 \, (\, \varphi(v_0, v_1, \ldots, v_n)\,)).$$

El sistema algebraico $(\mathbb{N}, \mathrm{sc}, 0, +, \times)$ es un modelo del sistema de axiomas de Peano. No obstante hay modelos de los axiomas de Peano que no son isomorfos a $(\mathbb{N}, \mathsf{sc}, \mathsf{0}, +, \times)$.

6.2. Las aplicaciones representables.

Definición 6.1. Sea $f\colon \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N}$ y $\varphi(v_0, \ldots, v_p)$ una fórmula cuyas variables libres están incluidas en el conjunto $\{ v_0, \ldots, v_p \}$. Decimos que $\varphi(v_0, \ldots, v_p)$ representa a f si, para cada $(n_0, \ldots, n_{p-1}) \in \mathbb{N}^p$, se cumple que

$$\mathcal{P}_0 = \mathcal{P} - \{\mathrm{Ind}\} \vdash \forall v_p(v_p = \underline{f(n_0, \ldots, n_{p-1})} \leftrightarrow \varphi(\underline{n_0}, \ldots, \underline{n_{p-1}}, v_p))$$

Recordamos que, para cada número natural n, denotamos por $\underline{n}$ el término

$$\mathsf{sc}(\ldots(\mathsf{sc}(\mathsf{0}))\ldots),$$

en el que hay n ocurrencias del símbolo de operación sc, o, lo que es equivalente, $\underline{n}$ es el valor en n del único homomorfismo de $(\mathbb{N}, \mathrm{sc}, 0)$ en $(\mathrm{T}_{\underline{\Sigma}}(V), \mathsf{sc}, \mathsf{0})$.

Decimos que una aplicación $f\colon \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N}$ es representable si hay una fórmula $\varphi(v_0, \ldots, v_p)$ que la representa.

Puesto que, para cada número natural $p \in \mathbb{N}$, hay una infinidad numerable de fórmulas con a lo sumo $p+1$ variables libres, y, por otra parte, hay tantas aplicaciones de $\mathbb{N}^p$ en $\mathbb{N}$ como números reales, concluimos que “casi ninguna”aplicación de $\mathbb{N}^p$ en $\mathbb{N}$ es representable, de hecho, las aplicaciones representables son exactamente las aplicaciones recursivas.

Definición 6.2. Sea $R \subseteq \mathbb{N}^p$ y $\varphi(v_0, \ldots, v_{p-1})$ una fórmula cuyas variables libres están incluidas en el conjunto $\{ v_0, \ldots, v_{p-1} \}$. Decimos que $\varphi(v_0, \ldots, v_{p-1})$ representa a R si, para cada $(n_0, \ldots, n_{p-1}) \in \mathbb{N}^p$, se cumple que

1. Si $(n_0, \ldots, n_{p-1}) \in R$, entonces $\mathcal{P}_0 \vdash \varphi(\underline{n_0}, \ldots, \underline{n_{p-1}})$.
2. Si $(n_0, \ldots, n_{p-1}) \notin R$, entonces $\mathcal{P}_0 \vdash \neg\varphi(\underline{n_0}, \ldots, \underline{n_{p-1}})$.

Decimos que una relación $R \subseteq \mathbb{N}^p$ es representable si hay una fórmula $\varphi(v_0, \ldots, v_{p-1})$ que la representa.

Si $\mathcal{DP}$ fuera completa, la definición de relación representable se podría simplificar, combinando las dos partes de la misma en un sólo “si y sólo si”, porque $\varphi(\underline{n_0}, \ldots, \underline{n_{p-1}})$ o $\neg\varphi(\underline{n_0}, \ldots, \underline{n_{p-1}})$ debería ser un $\mathcal{DP}$-teorema. Pero puede haber una fórmula φ y números $\underline{n_0}, \ldots, \underline{n_{p-1}}$ tales que ni $\varphi(\underline{n_0}, \ldots, \underline{n_{p-1}})$ ni $\neg\varphi(\underline{n_0}, \ldots, \underline{n_{p-1}})$ sean $\mathcal{DP}$-teoremas.

Teorema 6.3. *Una relación $R \subseteq \mathbb{N}^p$ es representable si y sólo si su aplicación característica es representable.*

Demostración. Si $\varphi(v_1, \ldots, v_p)$ representa a R, la fórmula $(\varphi(v_1, \ldots, v_p) \wedge v_1 = \underline{1}) \vee (\neg\varphi(v_1, \ldots, v_p) \wedge v_1 = \underline{0})$ representa a ch_R. Recíprocamente, si $\varphi(v_0, \ldots, v_p)$ representa a ch_R, entonces $\varphi(\underline{1}, v_1, \ldots, v_p)$ representa a R. □

Teorema 6.4. *Una aplicación $f\colon \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N}$ es representable exactamente si es recursiva.*

Demostración. La demostración de que todas las aplicaciones recursivas son representables se realiza por inducción algebraica, i.e., demostrando que las aplicaciones $\kappa_{0,0}\colon \mathbb{N}^0 \longrightarrow \mathbb{N}$, $\mathrm{sc}\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ y, para cada $n \in \mathbb{N} - 1$ y cada $i \in n$, $\mathrm{pr}_{n,i}\colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ son representables, y que los operadores de composición, minimización para las regulares y recursión primitiva preservan la representabilidad cuando se aplican a aplicaciones representables.

□

Para la demostración de que el operador de recursión preserva la representabilidad, se usa la función β de Gödel que codifica sucesiones finitas no vacías de números naturales mediante pares de números naturales. A su vez, la función β de Gödel depende del teorema chino del resto

Proposición 6.5 (Teorema Chino del resto). *Sea $n \in \mathbb{N}$, $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tal que, para cada $i, j \in n+1$, si $i \neq j$, entonces b_i y b_j son coprimos, y $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$. Entonces hay un $a \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $i \in n+1$, $a \equiv a_i \pmod{b_i}$, i.e., para cada $i \in n+1$, a y a_i dan lugar al mismo resto cuando se dividen entre b_i.*

Demostración. Por inducción sobre n. Para $n = 0$, tenemos b_0 y $a_0 \in \mathbb{N}$. Tomando $a = a_0$, tenemos que $a_0 \equiv a_0 \pmod{b_0}$.

Para $n = 1$, puesto que b_0 y b_1 son primos entre sí, por el teorema de Bézout, hay dos números enteros γ_0 y γ_1 tales que $\gamma_0 b_0 + \gamma_1 b_1 = 1$, luego, multiplicando por $a_1 - a_0$, tenemos que $(a_1 - a_0)(\gamma_0 b_0 + \gamma_1 b_1) = a_1 - a_0$, por lo tanto, para el entero, $m = (a_1 - a_0)\gamma_0 b_0 + a_0 = (a_1 - a_0)\gamma_1 b_1 + a_1$ tenemos que $m \equiv a_0 \pmod{b_0}$ y que $m \equiv a_1 \pmod{b_1}$. Por lo tanto, para tener un número natural con la misma propiedad que tiene el entero m es suficiente añadirle kb_0b_1, para un k suficientemente grande.

Supongamos el teorema para $n \geq 1$ y demostrémoslo para $n+1$. Por la hipótesis de inducción hay un número natural c tal que, para cada $i \in n+1$, $c \equiv a_i \pmod{b_i}$. Pero b_{n+1} y $b_0 \cdot \ldots \cdot b_n$ son coprimos, luego hay un número natural a tal que $a \equiv c \pmod{b_0 \cdot \ldots \cdot b_n}$ y $a \equiv a_{n+1} \pmod{b_{n+1}}$. Por lo tanto, para cada $i \in n+2$, $a \equiv a_i \pmod{b_i}$. □

Proposición 6.6 (Aplicación β de Gödel). *Hay una aplicación $\beta\colon \mathbb{N}^3 \longrightarrow \mathbb{N}$ que es recursiva primitiva y representable y tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $(k_0, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$, existen $b, c \in \mathbb{N}$ tales que, para cada $i \in n+1$, $\beta(b, c, i) = k_i$.*

Demostración. Para $(b, c, i) \in \mathbb{N}^3$, sea $\beta(b, c, i)$ el resto de la división de b entre $c(i+1)+1$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $(k_0, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$. Queremos demostrar que existen $b, c \in \mathbb{N}$ tales que, para cada $i \in n+1$, $\beta(b, c, i) = k_i$. Sea $j = \max\{n, k_0, \ldots, k_n\}$. Entonces los números naturales $u_s = 1 + j!(s+1)$, para $s \in n+1$, son dos a dos coprimos, i.e., si $0 \leq s < t \leq n$, entonces $\mathrm{mcd}(u_s, u_t) = 1$. Sea p un número primo que divida a $u_s = 1 + j!(s+1)$ y a $u_t = 1 + j!(t+1)$, con $0 \leq s < t \leq n$. Entonces $p \mid u_t - u_s$, i.e., $p \mid j!(t-s)$. Pero p no divide a $j!$, ya que si lo dividiera, $p \mid j!(s+1)$ y puesto que $p \mid 1 + j!(s+1)$, $p \mid 1$, que es imposible. El número primo p tampoco divide a $t - s$, porque al ser $t - s \leq n \leq j$, tenemos que $t - s \mid j!$ y si $p \mid t - s$, entonces $p \mid j!$. Por lo tanto p no divide a $j!(t-s)$, contradicción. Así que $\mathrm{mcd}(u_s, u_t) = 1$. Luego, por el teorema chino del resto, hay un número natural b tal que, para cada $i \in n+1$, $b \equiv k_i \pmod{u_i}$, i.e., tal que, para cada $i \in n+1$, $\mathrm{rt}(u_i, k_i) = \mathrm{rt}(u_i, b) = k_i$. Pero, para cada $i \in n+1$, $\beta(b, j!, i) = \mathrm{rt}(1 + j!(i+1), b) = \mathrm{rt}(u_i, b) = k_i$, porque $k_i \leq j \leq j! < 1 + j!(i+1) = u_i$, i.e., $k_i < u_i$. □

6.3. Aritmetización de la metamatemática.

Una gödelización de un sistema formal consiste en asignar, de manera inyectiva, números naturales a los términos, fórmulas y demostraciones del mismo, todo ello de modo que se cumplan las siguientes condiciones:

1. Para cada término, fórmula o demostración, el número natural asociado ha de poder ser calculado de manera efectiva.
2. Para cada número natural ha de existir un procedimiento mecánico que permita determinar si tal número es o no el número de Gödel de un término, fórmula o demostración y, en el caso de que lo sea, permita determinarlo de manera efectiva.

Por medio de una gödelización cualquier propiedad o relación acerca de los términos, fórmulas o demostraciones del sistema formal, se transforma en una propiedad o relación acerca de los números. Por ejemplo, el concepto de polinomio formal o término, que es un concepto sintáctico, se transforma en el subconjunto $\mathrm{Term}_{\mathbf{N}}$ del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales que consta precisamente de los $n \in \mathbb{N}$ para los que n es el número de Gödel de un polinomio formal. El concepto de fórmula, que es un concepto sintáctico, se transforma en el subconjunto $\mathrm{Form}_{\mathbf{N}}$ del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales que consta precisamente de los $n \in \mathbb{N}$ para los que n es el número de Gödel de una formula. La relación Dem que se dá entre el conjunto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}-1} \mathrm{Form}(\mathcal{L})^n$, de las sucesiones finitas no vacías de fórmulas del lenguaje del sistema formal, y el conjunto $\mathrm{Form}(\mathcal{L})$, de las fórmulas del mismo, cuando la sucesión $(\varphi_i)_{i\in n}$ es una demostración de la sentencia φ en el sistema formal en cuestión, se transforma en la relación binaria $\mathrm{Dem}_{\mathbf{N}}$ sobre $\mathbb{N}$ que consta precisamente de los pares de números naturales (m, n) para los que se cumple que n es el número de Gödel de una sentencia φ y m el número de Gödel de una sucesión de fórmulas $(\varphi_i)_{i\in n}$ que sea una demostración de φ en el sistema formal. La demostrabilidad de una sentencia, que es una propiedad de las fórmulas y constituye el conjunto Bew, se transforma en el subconjunto $\mathrm{Bew}_{\mathbf{N}}$ de los números naturales que consta de los $n \in \mathbb{N}$ tales que n es el número de Gödel de una sentencia demostrable.

Al procedimiento descrito se le llama la *aritmetización de la metamatemática*. Si el sistema formal contiene, además, a un fragmento de la aritmética de Dedekind-Peano, entonces algunos de los subconjuntos del conjunto de los números naturales y algunas de las relaciones sobre el mismo, tienen contrapartidas formales en el sistema formal, i.e., son representables en el sistema formal mediante fórmulas. Por ejemplo hay una fórmula $\mathrm{Term}_{\mathcal{DP}}$ que representa al conjunto de números naturales $\mathrm{Term}_{\mathbf{N}}$, otra formula $\mathrm{Form}_{\mathcal{DP}}$ que representa al conjunto de números naturales $\mathrm{Form}_{\mathbf{N}}$, otra fórmula $\mathrm{Dem}_{\mathcal{DP}}$ que representa a la relación binaria $\mathrm{Dem}_{\mathbf{N}}$, etc.

$$\begin{array}{c}\text{Nociones y relaciones}\\ \text{metamatemáticas sobre el}\\ \text{sistema formal}\end{array} \xRightarrow{\text{göd.}} \begin{array}{l}\text{Nociones y}\\ \text{relaciones}\\ \text{numéricas}\end{array} \xRightarrow{\text{rep.}} \begin{array}{c}\text{Fórmulas del}\\ \text{sistema formal}\end{array}$$

De este modo a una noción o relación acerca de un cierto tipo de sistema formal le hemos asociado, a través de la gödelización y, después, por medio de la representabilidad formal de las relaciones recursivas, una fórmula en el sistema formal, que es su contrapartida interna. Así, a partir de la relación metamatemática Dem hemos obtenido, por gödelización, la relación numérica $\mathrm{Dem}_{\mathbf{N}}$ y de esta, por la representabilidad de las relaciones recursivas, la fórmula $\mathrm{Dem}_{\mathcal{DP}}$:

$$\text{(Relación externa) Dem} \xRightarrow{\text{göd.}} \mathrm{Dem}_{\mathbf{N}} \xRightarrow{\text{rep.}} \mathrm{Dem}_{\mathcal{DP}} \text{ (Fórmula interna)}$$

A partir de la relación numérica $\mathrm{Dem}_{\mathbf{N}}$ obtenemos la relación numérica $\mathrm{W}_{\mathbf{N}}$ que consta de los pares $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tales que m es el número de Gödel de uma fórmula $\varphi(v_0)$ con v_0 como única variable libre, y n es el número de Gödel de una demostración en $\mathcal{DP}$ de la sentencia $\binom{v_0}{\mathsf{sc}^m(0)}\varphi(v_0)$. Entonces se cumple que $\mathrm{W}_{\mathbf{N}}$ es una relación recursiva, luego representable por una fórmula $\mathrm{W}(v_0, v_1)_{\mathcal{DP}}$ con dos variables libres. Ahora se considera la fórmula $\forall v_1 \neg \mathrm{W}(v_0, v_1)_{\mathcal{DP}}$, con sólo una variable libre, la v_0. Sea p el número de Gödel de $\forall v_1 \neg \mathrm{W}(v_0, v_1)_{\mathcal{DP}}$ y ψ la sentencia $\binom{v_0}{\mathsf{sc}^p(0)}\forall v_1 \neg \mathrm{W}(v_0, v_1)_{\mathcal{DP}}$. La sentencia ψ se puede interpretar como:

> Para cada $n \in \mathbb{N}$, no es el caso que p sea el número de Gödel de una fórmula $\xi(v_0)$ en la que v_0 ocurra libre y n sea el número de Gödel de una demostración en $\mathcal{DP}$ de $\xi(\mathsf{sc}^p(0))$.

Ahora bien, p es el número de Gödel de $\forall v_1 \neg \mathrm{W}(v_0, v_1)_{\mathcal{DP}}$ y si a esta fórmula la denotamos por $\xi(v_0)$, entonces $\xi(\mathsf{sc}^p(\mathsf{0}))$ es ψ, por lo tanto la sentencia ψ se puede interpretar como:

> Para cada $n \in \mathbb{N}$, n no es el número de Gödel de una demostración en $\mathcal{DP}$ de ψ.

En un cierto sentido la sentencia ψ afirma su propia indemostrabilidad. La fórmula ψ es tal que ni ella ni su negación son demostrables a partir de $\mathcal{DP}$, luego $\mathcal{DP}$ es incompleta.

La codificación hace uso de la existencia de situaciones de Cantor para m que son recursivas primitivas, i.e., hay un par ordenado $(\gamma^m, (\gamma^m_j)_{j\in m})$ en el que γ^m es una aplicación recursiva primitiva de $\mathbb{N}^m$ en $\mathbb{N}$ y, para cada $j \in m$, γ^m_j una endoaplicación recursiva primitiva de $\mathbb{N}$ tal que:

1. $\gamma^m \circ \langle \gamma^m_j \rangle_{j\in m} = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
2. $\langle \gamma^m_j \rangle_{j\in m} \circ \gamma^m = \mathrm{id}_{\mathbb{N}^m}$.

Además, necesitamos el siguiente lema

Lema 6.7. *Sean $p, n \in \mathbb{N}$ y $t_0, \ldots, t_{n-1} \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $g \colon \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N}$ y $h \colon \mathbb{N}^{p+n+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ aplicaciones recursivas primitivas. Si, para cada $y > 0$ y cada $i \in n$, $t_i(y) < y$, entonces la aplicación $f \colon \mathbb{N}^{p+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida como:*

$$
\begin{aligned}
&f(x,0) = g(x)\\
&f(x,y) = h(x, f(x, t_0(y)), \ldots, f(x, t_{n-1}(y)), y), \ \text{si } y > 0.
\end{aligned}
$$

es recursiva primitiva.

Para codificar un término P se usan tres números naturales (a, b, c), siendo la función del último la de determinar si es simple o compuesto, i.e., si es una variable, la constante $\mathsf{0}$, o de una de las formas $\mathsf{sc}(Q)$, $\mathsf{sc}(Q) \oplus \mathsf{sc}(R)$ o $\mathsf{sc}(Q) \otimes \mathsf{sc}(R)$, mientras que la de los dos primeros será la de codificar, según el caso, el término o los términos a partir de los cuales se construye el término en cuestión. Entonces, mediante $\gamma^3 \colon \mathbb{N}^3 \longrightarrow \mathbb{N}$, el triplo (a, b, c) se reducirá a un número natural. Denotamos por $G_{\boldsymbol{\Sigma}}$ la aplicación de $\mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(V)$ en $\mathbb{N}$ definida como:

$$
G_{\boldsymbol{\Sigma}}(P) = \begin{cases}
\gamma^3(0,0,0), & \text{si } P = \mathsf{0};\\
\gamma^3(n+1,0,0), & \text{si } P = v_n;\\
\gamma^3(G_{\boldsymbol{\Sigma}}(Q),0,1), & \text{si } P = \mathsf{sc}(Q);\\
\gamma^3(G_{\boldsymbol{\Sigma}}(Q),G_{\boldsymbol{\Sigma}}(R),2), & \text{si } P = \mathsf{sc}(Q) \oplus \mathsf{sc}(R);\\
\gamma^3(G_{\boldsymbol{\Sigma}}(Q),G_{\boldsymbol{\Sigma}}(R),3), & \text{si } P = \mathsf{sc}(Q) \otimes \mathsf{sc}(R).
\end{cases}
$$

Lema 6.8. *El conjunto* $\mathrm{Ter} = \{\, G_{\boldsymbol{\Sigma}}(P) \mid P \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(V) \,\}$ *es recursivo primitivo.*

Para codificar una fórmula φ se usan también tres números naturales (a, b, c), siendo la función del último la de determinar si es simple o compuesta, i.e., si es una fórmula atómica, o de una de las formas $\neg\psi$, $\psi \wedge \xi$, $\psi \vee \xi$, $\psi \to \xi$, $\psi \leftrightarrow \xi$, $\forall v_n \psi$ o $\exists v_n \psi$, mientras que la de los dos primeros será la de codificar, según el caso, la fórmula o las fórmulas a partir de las cuales se construye la fórmula en cuestión. Entonces, mediante $\gamma^3 \colon \mathbb{N}^3 \longrightarrow \mathbb{N}$, el triplo (a, b, c) se reducirá a un número natural.

Denotamos por $G_{\mathbf{\Lambda}}$ la aplicación de $\mathrm{T}_{\mathbf{\Lambda}}(\mathcal{L})$ en $\mathbb{N}$ definida como:

$$G_{\mathbf{\Lambda}}(\varphi) = \begin{cases} \gamma^3(G_{\mathbf{\Sigma}}(P), G_{\mathbf{\Sigma}}(Q), 0), & \text{si } \varphi = P = Q; \\ \gamma^3(G_{\mathbf{\Lambda}}(\psi), 0, 1), & \text{si } \varphi = \neg\psi; \\ \gamma^3(G_{\mathbf{\Lambda}}(\psi), G_{\mathbf{\Lambda}}(\xi), 2), & \text{si } \varphi = \psi \wedge \xi; \\ \gamma^3(G_{\mathbf{\Lambda}}(\psi), G_{\mathbf{\Lambda}}(\xi), 3), & \text{si } \varphi = \psi \vee \xi; \\ \gamma^3(G_{\mathbf{\Lambda}}(\psi), G_{\mathbf{\Lambda}}(\xi), 4), & \text{si } \varphi = \psi \rightarrow \xi; \\ \gamma^3(G_{\mathbf{\Lambda}}(\psi), G_{\mathbf{\Lambda}}(\xi), 5), & \text{si } \varphi = \psi \leftrightarrow \xi; \\ \gamma^3(G_{\mathbf{\Lambda}}(\psi), n, 6), & \text{si } \varphi = \forall v_n \psi; \\ \gamma^3(G_{\mathbf{\Lambda}}(\psi), n, 7), & \text{si } \varphi = \exists v_n \psi. \end{cases}$$

Lema 6.9. *El conjunto* $\mathrm{For} = \{\, G_{\mathbf{\Lambda}}(P) \mid P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Lambda}}(\mathcal{L}) \,\}$ *es recursivo primitivo.*

A continuación vamos a asociar a las nociones y operaciones fundamentales relativas a las fórmulas, tales como la determinación de las variables libres o ligadas de las mismas, o la substitución en una fórmula de una variable por un término, relaciones y aplicaciones recursivas primitivas

6.4. El primer teorema de incompletud de Gödel.

Proposición 6.10. *Si* T *es* $\begin{cases} \textit{completa} \\ \& \\ \textit{recursiva} \end{cases}$, *entonces* T *es decidible o, lo que es equivalente si* T *es* $\begin{cases} \textit{indecidible} \\ \& \\ \textit{recursiva} \end{cases}$, *entonces* T *es incompleta*

Proposición 6.11. *Si* T *es* $\begin{cases} \supseteq \mathcal{DP}_0 \\ \& \\ \textit{consistente} \end{cases}$, *entonces* T *es indecidible.*

Demostración. En lugar de demostrar que si T es $\begin{cases} \supseteq \mathcal{DP}_0 \\ \& \\ \text{consistente} \end{cases}$, entonces T es indecidible, demostramos que si T es $\begin{cases} \supseteq \mathcal{DP}_0 \\ \& \\ \text{decidible} \end{cases}$, entonces T es inconsistente. □

Establecemos a continuación el primer teorema de incompletabilidad de Gödel.

Proposición 6.12. *Si* T *es* $\begin{cases} \supseteq \mathcal{DP}_0 \\ \& \\ \textit{consistente} \\ \& \\ \textit{recursiva} \end{cases}$, *entonces* T *es incompleta. En particular,* $\mathcal{DP}$ *es incompleta.*

Demostración. Por ser T consistente y contener a $\mathcal{DP}_0$, T es indecidible, luego, por ser, además, recursiva, es incompleta □

Observemos que por ser la teoría T consistente, está incluida en una teoría T' consistente y completa. Ahora bien, T' no puede ser recursiva, ya que si lo fuera, por ser, además, completa sería decidible. Pero, por ser T' consistente y contener a T, es consistente y contiene a $\mathcal{DP}_0$, luego es indecidible, contradicción. Por lo tanto T' no puede ser recursiva. De modo que la completud de T' se alcanza a costa de la recursividad de la misma. Ahora bien, el que una teoría sea recursiva, i.e., que el conjunto de los números de Gödel de las sentencias que le pertenecen sea recursivo, es razonable, ya que ello significa que hay un procedimiento mecánico que nos permite reconocer los axiomas y, por lo tanto, usarlos en las demostraciones.

La sentencia φ mostrada por Gödel y para la cual $\mathcal{DP} \nvdash \varphi$ y $\mathcal{DP} \nvdash \neg\varphi$ es la que afirma la consistencia de $\mathcal{DP}$. Ahora bien, tal sentencia es verdadera en el modelo standard $\mathbf{N}$ de $\mathcal{DP}$, luego, por no ser demostrable a partir de $\mathcal{DP}$, hay modelos de $\mathcal{DP}$ en los que dicha sentencia no es verdadera, así que $\mathrm{Cn}(\mathcal{DP}) \subset \mathrm{Th}(\mathbf{N})$, i.e., hay verdades aritméticas que no son demostrables desde la aritmética de Dedekind-Peano. Por lo tanto, el que una sentencia sea verdadera en un sistema algebraico que sea modelo de una cierta teoría, no significa en modo alguno que sea demostrable a parir de la teoría, ya que éso se cumple, en virtud del teorema de completud, si y sólo si la sentencia es verdadera en *todos* los modelos de la teoría.

Por otra parte, puesto que cuando una sentencia φ no es demostrable a partir de una teoría consistente T, también $T \cup \{\varphi\}$ es consistente, tenemos que, para cualquier sentencia φ tal que $\mathcal{DP} \nvdash \varphi$ y $\mathcal{DP} \nvdash \neg\varphi$, las teorías $\mathcal{DP} \cup \{\neg\varphi\}$ y $\mathcal{DP} \cup \{\varphi\}$ son consistentes, luego tienen modelos $\mathbf{M}_{\neg\varphi}$ y $\mathbf{M}_{\varphi}$, que también son modelos de $\mathcal{DP}$, luego $\mathcal{DP}$ tiene modelos esencialmente diferentes.

Proposición 6.13. *Si T es consistente y la sentencia φ es tal que $T \nvdash \varphi$, entonces $T \cup \{\neg\varphi\}$ es consistente.*

Demostración. Supongamos que $T \cup \{\neg\varphi\}$ sea inconsistente. Entonces hay un γ tal que $T \cup \{\neg\varphi\} \vdash \gamma$ y $T \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\gamma$. Ahora bien, ya que $\vdash \neg\gamma \to (\gamma \to \varphi)$, también $T \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\gamma \to (\gamma \to \varphi)$, luego, por modus ponens, $T \cup \{\neg\varphi\} \vdash \gamma \to \varphi$ y, otra vez por modus ponens, $T \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$. Entonces, por el teorema de la deducción, $T \vdash \neg\varphi \to \varphi$, pero, ya que $\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$, también $T \vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$, luego, por modus ponens, $T \vdash \varphi$, pero eso contradice el que φ no se deduzca del conjunto de sentencias T, por lo tanto $T \cup \{\neg\varphi\}$ es consistente. $\square$

Referencias

[1] M. Barr and Ch. Wells, *Toposes, triples, and theories*, Springer-Verlag, 1985.
[2] J.Y. Girard, *Proof theory and logical complexity*, vol. I, Bibliopolis, 1987.
[3] K. Gödel, *Obras completas*, Alianza Editorial, 1981.
[4] S.C. Kleene, *Introducción a la metamatemática*, Tecnos, 1974.
[5] J. Lambek and P. Scott, *Introduction to higher order categorical logic*, Cambridge University Press, 1988.
[6] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, 1971.
[7] M. Makkai and G. Reyes, *First order categorical logic*, Springer-Verlag, 1977.
[8] J. Meseguer, *General logics*, en Logic Coll. (H.D. Ebbinghaus et alli., ed.) North-Holland, 1989, pp. 275–329.
[9] G. Takeuti, *Proof theory*, North-Holland, 1975.
[10] A. Troelstra and H. Schwichtenberg, *Basic proof theory*, Cambridge University Press, 1996.

Universidad de Valencia, Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia, Apt. 22.109 E-46071 Valencia, Spain
E-mail address: Juan.B.Climent@uv.es