LÓGICA ECUACIONAL

J. CLIMENT VIDAL

Resumen. En este capítulo definimos las nociones de signatura algebraica homogénea y de morfismo entre ellas, el concepto de estructura algebraica homogénea sobre un conjunto, las álgebras homogéneas y los homomorfismos entre ellas; además, introducimos las teorías algebraicas de Lawvere y los morfismos entre ellas, así como las álgebras y los morfismos entre ellas, estableciendo la equivalencia entre esta versión del álgebra universal, sin dependencia de las signaturas, y la versión clásica de la misma. También definimos las nociones de subálgebra y congruencia de un álgebra y estudiamos las propiedades de los conjuntos de todas las subálgebras y congruencias de un álgebra, caracterizamos los monomorfismos y los epimorfismos y demostramos los teoremas de Noether. Por otra parte, demostramos la existencia y establecemos las propiedades de los productos, igualadores, coigualadores, límites proyectivos, límites inductivos, productos reducidos y ultraproductos. Por último, una vez definidas las operaciones polinómicas y algebraicas y estudiadas las propiedades de tales nociones, demostramos la existencia de álgebras homogéneas (absolutamente) libres, la propiedad universal de las mismas y establecemos las relaciones entre las álgebras libres y las álgebras de operaciones polinómicas sobre un álgebra. Por otra parte, consideramos la noción de álgebra funcionalmente completa y, una vez definida la noción de identidad o ley y la relación de satisfacción, establecemos la nocion de variedad homogénea y demostramos el teorema de Birkhoff de caracterización de las variedades homogéneas mediante ciertos operadores clausura; a continuación, exponemos la conexión de Galois contravariante (inducida por la relación de satisfacción) entre los retículos completos de las álgebras homogéneas (de una signatura dada) y de las leyes y demostramos el teorema de completud de Birkhoff, previa presentación de un sistema deductivo, que afirma la identidad entre la relación de consecuencia sintáctica y la relación de consecuencia semántica.

Índice

Date: 24 de febrero de 2008.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary: ; Secondary:

> ... la mathématique est l'art de donner le même nome à des choses différentes. Il faut s'entendre. Il convient que ces choses différentes par la matière soient semblables par la forme. Quand le langage a été bien choisi, on est tout étonné de voir que toutes les démonstrations faites pour un object connu s'appliquent immédiatement à beaucoup d'objects nouveaux, on n'a rien à changer, pas même les mots, puisque les noms sont devenus les mêmes.
>
> *H. Poincaré.*

1. Algebras homogéneas

1.1. Signaturas y álgebras.

Definition 1.1. Una *signatura algebraica* $\mathbf{\Sigma}$ es un par ordenado $\mathbf{\Sigma} = (\Sigma, \mathrm{ar})$ en el que Σ, el conjunto de los *símbolos de operación*, es un conjunto y ar, la *ariedad*, una aplicación de Σ en $\mathbb{N}$. Si $\sigma \in \Sigma$ y $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, entonces decimos de σ que es un símbolo de operación n-ario, y, para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por Σ_n el conjunto de todos los símbolos de operación n-arios.

La ariedad de un símbolo de operación σ, indica el número de los argumentos que tendrá cualquier realización de σ como una operación sobre un conjunto.

Definition 1.2. Sea $\boldsymbol{\Sigma}$ una signatura algebraica y A un conjunto. Una $\boldsymbol{\Sigma}$-*estructura algebraica* sobre el conjunto A es una aplicación F de Σ en $\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\mathrm{Hom}(A^{\mathrm{ar}(\sigma)}, A)$ tal que, para cada $\sigma \in \Sigma$, $F_\sigma \in \mathrm{Hom}(A^{\mathrm{ar}(\sigma)}, A)$.

En algunos casos, para evitar equivocaciones, denotaremos la $\boldsymbol{\Sigma}$-estructura algebraica que estemos considerando sobre un conjunto A por $F^{\mathbf{A}}$, y a las operaciones que la componen por $F^{\mathbf{A}}_\sigma$, con $\sigma \in \Sigma$. Además, cuando $\mathrm{ar}(\sigma) = 0$, denotaremos por $\sigma^{\mathbf{A}}$ el valor de $F^{\mathbf{A}}_\sigma\colon 1 \longrightarrow A$ en el único miembro de 1.

Una $\boldsymbol{\Sigma}$-*álgebra* es un par ordenado $\mathbf{A} = (A, F)$, en el que A es un conjunto y F una $\boldsymbol{\Sigma}$-estructura algebraica sobre A.

En la definición de $\boldsymbol{\Sigma}$-estructura algebraica sobre un conjunto no hemos exigido que a símbolos de operación distintos, de la misma ariedad, correspondan operaciones distintas sobre el conjunto en cuestión.

Determínese el número máximo de estructuras de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra sobre un conjunto.

Sea $\boldsymbol{\Sigma}$ una signatura algebraica. Demuéstrese que:

1. Una condición necesaria y suficiente para que exista una estructura de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra sobre el conjunto vacío es que $\Sigma_0 = \varnothing$. Por consiguiente, sobre el conjunto vacío hay a lo sumo una estructura de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra.
2. Sobre un conjunto final hay exactamente una estructura de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra.
3. Sobre un conjunto con dos o más elementos hay al menos una estructura de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra.

1.2. Ejemplos de álgebras.

1.2.1. Magmas. Un *magma* es un par $(A, \cdot)$ en el que A es un conjunto y $\cdot$ una operación binaria sobre A. Para cada conjunto A, los pares $(\mathrm{Rel}(A), \circ)$, $(\mathrm{End}_{\mathrm{p}}(A), \circ)$ y $(\mathrm{End}(A), \circ)$ son magmas.

1.2.2. Semigrupos. Un *semigrupo* es un par $(A, \cdot)$ en el que A es un conjunto y $\cdot$ una operación binaria sobre A tal que:

$$\forall x, y, z \in A,\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

Para cada conjunto A, los pares $(\mathrm{Rel}(A), \circ)$, $(\mathrm{End}_{\mathrm{p}}(A), \circ)$ y $(\mathrm{End}(A), \circ)$ son semigrupos.

1.2.3. Monoides. Un *monoide* es un triplo $(A, \cdot, 1)$ en el que A es un conjunto, $\cdot$ una operación binaria sobre A y 1 un elemento de A tal que:

1. $\forall x, y, z \in A,\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
2. $\forall x \in A,\ x \cdot 1 = x\ \text{ y }\ 1 \cdot x = x$.

Para cada conjunto A, los triplos $(\mathrm{Rel}(A), \circ, \Delta_A)$, $(\mathrm{End}_{\mathrm{p}}(A), \circ, \mathrm{id}_A)$ y $(\mathrm{End}(A), \circ, \mathrm{id}_A)$ son monoides. Además, si $\mathrm{Ml}(A)$, también denotado por $A^\star$, es el conjunto de todas las palabras sobre el alfabeto A, i.e., el conjunto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n$, de todas las funciones cuyo dominio es un número natural y cuya imagen está incluida en A, entonces el par ordenado $(\curlywedge, \lambda)$, en el que $\curlywedge$, la operación (binaria) de *concatenación* de palabras construidas con las letras del alfabeto A, es la aplicación de $\mathrm{Ml}(A) \times \mathrm{Ml}(A)$ en $\mathrm{Ml}(A)$ definida como:

$$\curlywedge \begin{cases} \mathrm{Ml}(A) \times \mathrm{Ml}(A) & \longrightarrow \mathrm{Ml}(A) \\ ((x_i)_{i\in m}, (y_j)_{j\in n}) & \longmapsto (z_k)_{k\in m+n} = \begin{cases} x_k, & \text{si } 0 \leq k < m; \\ y_{k-m}, & \text{si } m \leq k < m+n, \end{cases} \end{cases}$$

y λ, la *palabra vacía* sobre el alfabeto A, la única función de 0 en A, es una estructura de monoide sobre $\mathrm{Ml}(A)$.

1.2.4. Monoides abelianos. Un *monoide abeliano* es un triplo $(A, +, 0)$ en el que A es un conjunto, $+$ una operación binaria sobre A y 0 un elemento de A tal que:

1. $\forall x, y, z \in A,\ x + (y + z) = (x + y) + z$.
2. $\forall x \in A,\ x + 0 = x$ y $0 + x = x$.
3. $\forall x, y \in A,\ x + y = y + x$.

Para un conjunto A, si $\mathbb{N}^{(A)}$ es el conjunto de todas las funciones $(n_a)_{a\in A}$ de *soporte finito* de A en $\mathbb{N}$, i.e., el conjunto definido como:

$$\mathbb{N}^{(A)} = \{\, (n_a)_{a\in A} \in \mathbb{N}^A \mid \operatorname{card}(\{\, a \in A \mid n_a \neq 0 \,\}) < \aleph_0 \,\},$$

entonces el par ordenado $(+, \kappa_0)$, en el que $+$ es la aplicación de $\mathbb{N}^{(A)} \times \mathbb{N}^{(A)}$ en $\mathbb{N}^{(A)}$ definida como:

$$+ \begin{cases} \mathbb{N}^{(A)} \times \mathbb{N}^{(A)} & \longrightarrow \mathbb{N}^{(A)} \\ ((m_a)_{a\in A}, (n_a)_{a\in A}) & \longmapsto (m_a + n_a)_{a\in A} \end{cases}$$

y κ_0, la aplicación de A en $\mathbb{N}$ cuya imagen es $\{0\}$, es una estructura de monoide abeliano sobre $\mathbb{N}^{(A)}$.

1.2.5. Cuasigrupos. Un *cuasigrupo* es un cuádruplo $(A, \cdot, /, \backslash)$ en el que A es un conjunto y $\cdot$, $/$ y $\backslash$ operaciones binarias sobre A tales que:

1. $\forall x, y \in A,\ (x/y) \cdot y = x$.
2. $\forall x, y \in A,\ (x \cdot y)/y = x$.
3. $\forall x, y \in A,\ y \cdot (y\backslash x) = x$.
4. $\forall x, y \in A,\ y\backslash(y \cdot x) = x$.

1.2.6. Bucles. Un *bucle* es un quíntuplo $(A, \cdot, /, \backslash, 1)$ en el que $(A, \cdot, /, \backslash)$ es un cuasigrupo y $1 \in A$ tal que

$$\forall x, y \in A,\ x \cdot 1 = x \text{ y } 1 \cdot x = x.$$

1.2.7. Grupos. Un *grupo* es un cuádruplo $(A, \cdot, {}^{-1}, 1)$ en el que A es un conjunto, $\cdot$ una operación binaria sobre A, ${}^{-1}$ una operación unaria sobre A y 1 un elemento de A tal que:

1. $\forall x, y, z \in A,\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
2. $\forall x \in A,\ x \cdot 1 = x$ y $1 \cdot x = x$.
3. $\forall x \in A,\ x \cdot x^{-1} = 1$ y $x^{-1} \cdot x = 1$.

Para cada conjunto A, el cuádruplo $(\operatorname{Aut}(A), \circ, {}^{-1}, \operatorname{id}_A)$ es un grupo.

1.2.8. Grupos abelianos. Un *grupo abeliano* es un cuádruplo $(A, +, -, 0)$ en el que A es un conjunto, $+$ una operación binaria sobre A, $-$ una operación unaria sobre A y 0 un elemento de A tal que:

1. $\forall x, y, z \in A,\ x + (y + z) = (x + y) + z$.
2. $\forall x \in A,\ x + 0 = x$ y $0 + x = x$.
3. $\forall x \in A,\ x + (-x) = 0$ y $(-x) + x = 0$.
4. $\forall x, y \in A,\ x + y = y + x$.

1.2.9. Anillos. Un *anillo* es un séxtuplo $(A, +, -, 0, \cdot, 1)$ tal que:

1. $(A, +, -, 0)$ es un grupo abeliano.
2. $(A, \cdot, 1)$ es un monoide.
3. $\forall x, y, z \in A,\ x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ y $(y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x)$.

Para cada grupo abeliano $\mathbf{A} = (A, +, -, 0)$, el séxtuplo $(\operatorname{End}(\mathbf{A}), +, -, \kappa_0, \circ, \operatorname{id}_A)$, en el que $+$ es la operación binaria sobre $\operatorname{End}(\mathbf{A})$ que a un par de endomorfismos f, g del grupo abeliano $\mathbf{A} = (A, +, -, 0)$ le asigna el endomorfismo $f + g$ que, a cada $x \in A$, le asocia $f(x) + g(x)$, $-$ la operación unaria sobre $\operatorname{End}(\mathbf{A})$ que a un endomorfismo f del grupo abeliano $\mathbf{A} = (A, +, -, 0)$ le asigna el endomorfismo $-f$

que, a cada $x \in A$, le asocia $-f(x) = -(f(x))$, $\circ$ la composición de endomorfismos y κ_0 el endomorfismo de $\mathbf{A}$ cuya imagen es $\{0\}$, es un anillo.

1.2.10. Anillos conmutativos. Un *anillo conmutativo* es un séxtuplo $(A, +, -, 0, \cdot, 1)$ tal que:

1. $(A, +, -, 0)$ es un grupo abeliano.
2. $(A, \cdot, 1)$ es un monoide abeliano.
3. $\forall x, y, z \in A,\ x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ y $(y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x)$.

1.2.11. Módulos. Si $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda, +, -, 0, \cdot, 1)$ es un anillo, un $\mathbf{\Lambda}$-*módulo a la izquierda* es un quíntuplo $(M, +, -, 0, (F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda))$ tal que:

1. $(M, +, -, 0)$ es un grupo abeliano.
2. $\forall \lambda \in \Lambda,\ \forall x, y \in M,\ F_\lambda(x + y) = F_\lambda(x) + F_\lambda(y)$.
3. $\forall \lambda, \mu \in \Lambda,\ \forall x \in M,\ F_{\lambda+\mu}(x) = F_\lambda(x) + F_\mu(x)$.
4. $\forall \lambda, \mu \in \Lambda,\ \forall x \in M,\ F_{\lambda\cdot\mu}(x) = F_\lambda(F_\mu(x))$.
5. $\forall x \in M,\ F_1(x) = x$.

1.2.12. Espacios vectoriales.

1.2.13. Grupos con multioperadores. Si $\mathbf{\Omega}$ es un dominio de operadores tal que $\Omega_0 = \varnothing$, entonces un $\mathbf{\Omega}$-*grupo* es un quíntuplo $(G, +, -, 0, (F_\omega \mid \omega \in \Omega))$ tal que:

1. $(G, +, -, 0)$ es un grupo (no necesariamente abeliano).
2. $\forall \omega \in \Omega$, si $\mathrm{ar}(\omega) = n$, entonces $F_\omega \colon G^n \longrightarrow G$ y $F_\omega(0, \ldots, 0) = 0$.

1.2.14. Algebras lineales.

1.2.15. Semirretículos. Un *semirretículo* es un par $(A, \cdot)$ en el que A es un conjunto y $\cdot$ una operación binaria sobre A tal que:

1. $\forall x \in A,\ x \cdot x = x$.
2. $\forall x, y \in A,\ x \cdot y = y \cdot x$.
3. $\forall x, y, z \in A,\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

Para cada conjunto A, $(\mathrm{Sub}(A), \cup)$ y $(\mathrm{Sub}(A), \cap)$ son semirretículos.

1.2.16. Retículos. Un *retículo* es un triplo $(A, \vee, \wedge)$ en el que A es un conjunto y $\vee$ y $\wedge$ operaciones binarias sobre A tales que:

1. $\forall x \in A,\ x \vee x = x$ y $x \wedge x = x$.
2. $\forall x, y \in A,\ x \vee y = y \vee x$ y $x \wedge y = y \wedge x$.
3. $\forall x, y, z \in A,\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ y $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.
4. $\forall x, y \in A,\ x \vee (x \wedge y) = x$ y $x \wedge (x \vee y) = x$.

Para cada conjunto A, $(\mathrm{Sub}(A), \cup, \cap)$ es un retículo.

1.2.17. Algebras Booleanas. Un *álgebra Booleana* es un séxtuplo $(A, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ en el que A es un conjunto, $\vee$ y $\wedge$ operaciones binarias sobre A, $-$ una operación unaria sobre A y 0, $1 \in A$ tales que:

1. $\forall x \in A,\ x \vee x = x$ y $x \wedge x = x$.
2. $\forall x, y \in A,\ x \vee y = y \vee x$ y $x \wedge y = y \wedge x$.
3. $\forall x, y, z \in A,\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ y $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.
4. $\forall x, y \in A,\ x \vee (x \wedge y) = x$ y $x \wedge (x \vee y) = x$.
5. $\forall x, y, z \in A,\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ y $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
6. $\forall x \in A,\ x \wedge -x = 0$ y $x \vee -x = 1$.
7. $\forall x \in A,\ x \wedge 0 = 0$ y $x \vee 1 = 1$.

Para cada conjunto A, $(\mathrm{Sub}(A), \cup, \cap, \complement_A, \varnothing, A)$ es un álgebra Booleana.

1.2.18. Algebras de Heyting.

1.2.19. Anillos ternarios planares. Un *anillo ternario planar* es un cuádruplo $(\Gamma, T, 0, 1)$ en el que Γ es un conjunto, T una operación ternaria sobre Γ y 0, 1 elementos de Γ, tal que:

1. $0 \neq 1$.
2. $\forall m, c \in \Gamma,\ T(0, m, c) = c$.
3. $\forall x, c \in \Gamma,\ T(x, 0, c) = c$.
4. $\forall x \in \Gamma,\ T(x, 1, 0) = x$.
5. $\forall m \in \Gamma,\ T(1, m, 0) = m$.
6. $\forall x, m, v \in \Gamma,\ \exists! c \in \Gamma$ tal que $T(x, m, c) = v$.
7. $\forall m, n, c, d \in \Gamma$, si $m \neq n$, entonces $\exists! x \in \Gamma$ tal que $T(x, m, c) = T(x, n, d)$.
8. $\forall x, y, v, w \in \Gamma$, si $x \neq y$, entonces $\exists!(m, c) \in \Gamma^2$ tal que $T(x, m, c) = v$ y $T(y, m, c) = w$.

Los anteriores ejemplos de álgebras muestran que, con la excepción de los anillos ternarios, las operaciones de que están dotadas son a lo sumo binarias, como dice Cohn: This is no accident, for in a certain sense all finitary operators may be built up from binary ones. However, there may be no particularly natural way of doing this in any given instance, and besides, the gain in simplicity would not be very great.

Además, salvo en el caso de los anillos ternarios, las álgebras consideradas están sujetas a cumplir ecuaciones.

Por otra parte, el concepto de álgebra considerado está sujeto a las siguientes limitaciones:

- Las álgebras tienen un único conjunto subyacente, i.e., son entidades homogéneas.
- Las operaciones son finitarias.
- Las operaciones están totalmente definidas.

De modo que objetos matemáticos tales como e.g., los *autómatas*, los *monoides con cancelación*, los *anillos con división*, los *cuerpos*, los *espacios topológicos*, los $\mathcal{L}^*$*-espacios*, los *grupos topológicos*, los *espacios vectoriales topológicos* o las *variedades diferenciables*, no son objeto de estudio del álgebra universal, aunque sí del álgebra universal heterogénea o de la teoría de modelos (de primer orden u orden superior). Concretamente, los autómatas no son objeto de estudio del álgebra universal, pero sí del álgebra universal heterogénea, porque un autómata es una entidad heterogénea $(I, Q, O, \delta, \lambda, q_0)$ en la que I es el conjunto de las *entradas*, Q el de los *estados*, O el de las *salidas*, $\delta\colon I \times Q \longrightarrow Q$ la aplicación de *transición*, $\lambda\colon I \times Q \longrightarrow O$ la aplicación de *salida* y q_0 el estado inicial; los monoides con cancelación tampoco son objeto de estudio del álgebra universal, pero sí de la lógica implicacional, porque un monoide con cancelación es un monoide $(A, \cdot, 1)$ tal que, para cada $x, y, z \in A$, si $x \cdot y = x \cdot z$, entonces $y = z$ y si $y \cdot x = z \cdot x$, entonces $y = z$, que no son ecuaciones; los anillos con división tampoco son objeto de estudio del álgebra universal, pero sí de la teoría de modelos, porque un anillo con división es un anillo $(A, +, -, 0, \cdot, 1)$ tal que $0 \neq 1$ y, para cada $x \in A$, si $x \neq 0$, entonces existe un $y \in A$ tal que $x \cdot y = 1$ e $y \cdot x = 1$, que no son ecuaciones; los $\mathcal{L}^*$-espacios tampoco lo son, pero sí del álgebra universal infinitaria no determinista, porque un $\mathcal{L}^*$-espacio es un par (X, Λ) en el que X es un conjunto y $\Lambda\colon X^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathrm{Sub}(X)$ tal que:

1. Para cada $x \in X$, $x \in \Lambda(\kappa_x)$, siendo κ_x la aplicación de $\mathbb{N}$ en X cuya imagen es $\{x\}$.

2. Para cada $(x_n \mid n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbb{N}}$, si $\Lambda(x_n \mid n \in \mathbb{N}) \neq \varnothing$, entonces para cada subsucesión $(y_n \mid n \in \mathbb{N})$ de $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$, se cumple que

$$\Lambda(x_n \mid n \in \mathbb{N}) \subseteq \Lambda(y_n \mid n \in \mathbb{N}).$$

   Recordamos que una sucesión $(y_n \mid n \in \mathbb{N})$ en X es una subsucesión de otra sucesión $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ en el mismo conjunto, si existe una aplicación estrictamente creciente $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_{\varphi_n}$.
3. Para cada $x \in X$ y cada $(x_n \mid n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbb{N}}$, si $x \notin \Lambda(x_n \mid n \in \mathbb{N})$, entonces existe una subsucesión $(y_n \mid n \in \mathbb{N})$ de $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ tal que, para cada subsucesión $(z_n \mid n \in \mathbb{N})$ de $(y_n \mid n \in \mathbb{N})$ se cumple que $x \notin \Lambda(z_n \mid n \in \mathbb{N})$,

que es una operación infinitaria no determinista.

1.3. Homomorfismos. Una vez definido el concepto de $\mathbf{\Sigma}$-álgebra, un medio para estudiarlas es el de compararlas entre sí, para ello definimos los homomorfismos entre las mismas, la composición de los homomorfismos y establecemos las propiedades básicas de la composición.

Definition 1.3. Un $\mathbf{\Sigma}$-*homomorfismo* o, para abreviar, un *homomorfismo* de $\mathbf{A} = (A, F^{\mathbf{A}})$ en $\mathbf{B} = (B, F^{\mathbf{B}})$ es un triplo ordenado $(\mathbf{A}, f, \mathbf{B})$, abreviado como f y denotado por $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, en el que f es una aplicación de A en B, tal que, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A^n \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "F^{\mathbf{A}}_\sigma"'] & B^n \arrow[d, "F^{\mathbf{B}}_\sigma"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., para cada $x \in A^n$, $f(F^{\mathbf{A}}_\sigma(x)) = F^{\mathbf{B}}_\sigma(f^n(x))$. A los homomorfismos de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra en sí misma los denominamos *endomorfismos*.

Proposition 1.4. *Sean* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, $g\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ *y* $h\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ *tres homomorfismos de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras. Entonces:*

1. *Siendo* $\mathrm{id}_{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}, \mathrm{id}_A, \mathbf{A})$, *se cumple que* $\mathrm{id}_{\mathbf{A}}\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$, *el homomorfismo* identidad *de* $\mathbf{A}$, *es un endomorfismo de* $\mathbf{A}$.
2. *Siendo* $g \circ f = (\mathbf{A}, g \circ f, \mathbf{C})$, *se cumple que* $g \circ f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$, *el homomorfismo* composición *de* f *y* g, *es un homomorfismo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{C}$.
3. (Asociatividad). *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] \arrow[drr, bend left=60, "(h \circ g) \circ f"] \arrow[drr, bend right=60, "h \circ (g \circ f)"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h \circ g"] & \\
& \mathbf{C} \arrow[r, "h"'] & \mathbf{D}
\end{tikzcd}$$

   conmuta.

4. (Neutros). *Los diagramas:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbf{A}}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{A} \arrow[d, "f"] \\ & \mathbf{B} \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbf{B}}"] \\ & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

conmutan.

Demostración.
1. Puesto que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{id}_A^n = \mathrm{id}_{A^n}$, tenemos que $\mathrm{id}_{\mathbf{A}} \colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ es un homomorfismo, ya que entonces, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "\mathrm{id}_A^n"] \arrow[d, "F_\sigma^{\mathbf{A}}"'] & A^n \arrow[d, "F_\sigma^{\mathbf{A}}"] \\ A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"'] & A \end{tikzcd}$$

conmuta.
2. Puesto que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $g^n \circ f^n = (g \circ f)^n$, y, por hipótesis, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, los diagramas:

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "F_\sigma^{\mathbf{A}}"'] & B^n \arrow[d, "F_\sigma^{\mathbf{B}}"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} B^n \arrow[r, "g^n"] \arrow[d, "F_\sigma^{\mathbf{B}}"'] & C^n \arrow[d, "F_\sigma^{\mathbf{C}}"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

conmutan, entonces también conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "(g \circ f)^n"] \arrow[d, "F_\sigma^{\mathbf{A}}"'] & C^n \arrow[d, "F_\sigma^{\mathbf{C}}"] \\ A \arrow[r, "g \circ f"'] & C \end{tikzcd}$$

luego $g \circ f \colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ es un homomorfismo. □

En lo que sigue, salvo indicación expresa de lo contrario, supondremos elegido un universo de Grothendieck $\boldsymbol{\mathcal{U}}$, arbitrario pero fijo, y que todos los conjuntos que consideremos son elementos del mismo.

Corollary 1.5. *Las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras $\mathbf{A}$ tales que $A \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, junto con los homomorfismos entre ellas constituyen una categoría, a la que denotamos por $\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})$.*

Definition 1.6.

1. Decimos que $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es un *monomorfismo* si, para cada $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{X}$ y cualesquiera homomorfismos $g, h\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A}$, si el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{X} \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] \arrow[rr, bend left, "f \circ g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ h"'] & \mathbf{A} \arrow[r, "f"] & \mathbf{B}
\end{tikzcd}
$$

   conmuta, entonces $g = h$, i.e., si cuando $f \circ g = f \circ h$, entonces $g = h$; es por ello que a este tipo de homomorfismos también se los denomina *simplificables a la izquierda*. Denotamos al conjunto de los monomorfismos de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ por $\mathrm{Mono}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Convenimos entonces que $f\colon \mathbf{A} \rightarrowtail \mathbf{B}$ significa que el homomorfismo $f\colon \mathbf{A} \rightarrowtail \mathbf{B}$ es un monomorfismo.
2. Decimos que $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es un *epimorfismo* si, para cada $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{Y}$ y cualesquiera homomorfismos $g, h\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{Y}$, si el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] \arrow[rr, bend right, "h \circ f"'] & \mathbf{B} \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & \mathbf{Y}
\end{tikzcd}
$$

   conmuta, entonces $g = h$, i.e., si cuando $g \circ f = h \circ f$, entonces $g = h$; es por ello que a este tipo de homomorfismos también se los denomina *simplificables a la derecha*. Convenimos entonces que $f\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$ significa que el homomorfismo $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es un epimorfismo, y denotamos al conjunto de los epimorfismos de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ por $\mathrm{Epi}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.
3. Decimos que $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es un *isomorfismo* si existe un $g\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbf{A}}$ y $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbf{B}}$. A los isomorfismos de un álgebra en sí misma los denominamos *automorfismos*.

Demuéstrese que si un homomorfismo $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es inyectivo, resp., sobreyectivo, entonces es un monomorfismo, resp., epimorfismo.

Demuéstrese que un homomorfismo $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es un isomorfismo precisamente si es un homomorfismo biyectivo.

Más adelante, cuando dispongamos del concepto de núcleo de un homomorfismo, o del de álgebra libre sobre un conjunto, demostraremos que todo monomorfismo es un homomorfismo inyectivo y, cuando dispongamos del de suma amalgamada, que todo epimorfismo es un homomorfismo sobreyectivo.

1.4. Subálgebras.

> The concept of a subgroup is fundamental in the theory of groups. The entire content of group theory is more or less linked up with questions about the existence, in a group, of subgroups having one or another special property, about groups that can be embedded in a given group, about properties that characterise the mutual disposition of subgroups in a group, about methods of constructing a group from its subgroups, etc. The classification of various special types of groups also depends mainly on the concept of a subgroup.
>
> *Kurosh.*

Del mismo modo que para estudiar los conjuntos es imprescindible considerar los subconjuntos de los mismos, para el estudio de las álgebras hay que considerar las subálgebras de las mismas, y que son las partes que tienen la propiedad de estar cerradas bajo las operaciones estructurales de las que están dotadas las álgebras.

Definition 1.7. Sean $\mathbf{A} = (A, F^{\mathbf{A}})$ y $\mathbf{B} = (B, F^{\mathbf{B}})$ dos $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras y X un subconjunto de A.

1. Si $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, decimos que X está *cerrado bajo la operación* $F_\sigma \colon A^n \longrightarrow A$ si, para cada $a \in X^n$, $F_\sigma^{\mathbf{A}}(a) \in X$, i.e., si $F_\sigma^{\mathbf{A}}[X^n] \subseteq X$.
2. Decimos que X es un *cerrado* de $\mathbf{A}$ si, para cada $\sigma \in \Sigma$ con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, y cada $a \in X^n$, $F_\sigma^{\mathbf{A}}(a) \in X$, i.e., si X está cerrado bajo cada una de las operaciones estructurales de $\mathbf{A}$. Al conjunto de los cerrados de $\mathbf{A}$ lo denotamos por $\mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.
3. Decimos que $\mathbf{B}$ es una *subálgebra* de $\mathbf{A}$, y lo denotamos por $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$, si $B \subseteq A$ y si la inclusión canónica, $\mathrm{in}_{\mathbf{B}} = (\mathbf{B}, \mathrm{in}_B, \mathbf{A})$, de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$ es un homomorfismo de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$. Si además $B \neq A$, decimos que $\mathbf{B}$ es una *subálgebra estricta* de $\mathbf{A}$. Denotamos por $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ el conjunto de las subálgebras de $\mathbf{A}$.

Proposition 1.8. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra. Entonces existe una biyección, natural, entre el conjunto* $\mathrm{Cl}(\mathbf{A})$*, de los cerrados de* $\mathbf{A}$ *y el conjunto* $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$*, de las subálgebras de* $\mathbf{A}$*. Además, esa biyección se extiende hasta un isomorfismo, cuando los conjuntos* $\mathrm{Cl}(\mathbf{A})$ *y* $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ *se consideran ordenados por la inclusión.*

Demostración. En efecto, la aplicación de $\mathrm{Cl}(\mathbf{A})$ en $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ que a un cerrado X de $\mathbf{A} = (A, F^{\mathbf{A}})$ le asigna la subálgebra $\mathbf{X} = (X, (F_\sigma^{\mathbf{A}} {\restriction} X \mid \sigma \in \Sigma))$ de $\mathbf{A}$ es una biyección entre ambos conjuntos. □

No sólo es cierto que existe una biyección entre el conjunto de los cerrados de una $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ y el de las subálgebras de la misma, sino que además hay una biyección entre tales conjuntos y un cierto conjunto cociente del conjunto de las cotas inferiores monomórficas de $\mathbf{A}$.

Definition 1.9. Sea $\mathbf{A}$ una $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra. Una *cota inferior monomórfica* de $\mathbf{A}$ es un par $(\mathbf{B}, f)$ en el que $\mathbf{B}$ es una $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra y f un homomorfismo inyectivo de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$. Al conjunto de las cotas inferiores monomórficas de $\mathbf{A}$ lo denotamos por $\mathrm{Mono}(\mathbf{A})$.

Observemos que $\mathrm{Mono}(\mathbf{A})$, para cada $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$, es un subconjunto del universo $\boldsymbol{\mathcal{U}}$. Vamos a definir sobre el conjunto $\mathrm{Mono}(\mathbf{A})$ una relación de equivalencia de modo que el conjunto cociente resultante, que seguirá siendo una parte del universo, sea isomorfo a un elemento del universo $\boldsymbol{\mathcal{U}}$, por lo tanto tal conjunto cociente será, en definitiva, un elemento de $\boldsymbol{\mathcal{U}}$.

Definition 1.10. Sea $\mathbf{A}$ una $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra y $(\mathbf{B}, f)$, $(\mathbf{C}, g)$ dos cotas inferiores monomórficas de $\mathbf{A}$. Decimos que $(\mathbf{B}, f)$ *precede* a $(\mathbf{C}, g)$, y lo denotamos por $(\mathbf{B}, f) \leq (\mathbf{C}, g)$, si hay un morfismo $t \colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ tal que $f = g \circ t$. Por último, decimos que $(\mathbf{B}, f)$ y $(\mathbf{C}, g)$ son *equivalentes*, y lo denotamos por $(\mathbf{B}, f) \equiv (\mathbf{C}, g)$, si $(\mathbf{B}, f)$ precede a $(\mathbf{C}, g)$ y $(\mathbf{C}, g)$ precede a $(\mathbf{B}, f)$.

Sea $\mathbf{A}$ una $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra y $(\mathbf{B}, f)$, $(\mathbf{C}, g)$ dos cotas inferiores monomórficas de $\mathbf{A}$. Demuéstrese que $(\mathbf{B}, f) \leq (\mathbf{C}, g)$ si y sólo si hay un único homomorfismo inyectivo $t \colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ tal que $f = g \circ t$. Además, demuéstrese que $(\mathbf{B}, f) \equiv (\mathbf{C}, g)$ precisamente si hay un único isomorfismo $t \colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ tal que $f = g \circ t$.

Proposition 1.11. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra. Entonces la relación de precedencia sobre el conjunto de las cotas inferiores de* $\mathbf{A}$ *es un preorden y, por lo tanto, la de equivalencia sobre el mismo conjunto es una relación de equivalencia.*

Demostración. □

Proposition 1.12. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra. Entonces el conjunto* $\mathrm{Cl}(\mathbf{A})$ *es isomorfo al conjunto cociente* $\mathrm{Mono}(\mathbf{A})/\equiv$.

Demostración. □

Proposition 1.13. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo inyectivo y* $g\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{B}$. *Si* $\mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$, *entonces existe un único homomorfismo* $h\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{A}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{C} \arrow[dl, swap, "h"] \arrow[d, "g"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, swap, "f"] & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Por ser f un homomorfismo inyectivo, es evidente que hay a lo sumo un homomorfismo $h\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que $g = f \circ h$.

Por lo que respecta a la existencia, dado un $c \in C$, se cumple que $g(c) \in \mathrm{Im}(f)$, luego hay un $a \in A$ tal que $f(a) = g(c)$. Además tal elemento de A es único, porque f es un homomorfismo inyectivo. Por consiguiente hay un único $a \in A$ tal que $f(a) = g(c)$. Sea entonces $h\colon C \longrightarrow A$ la aplicación que a un $c \in C$ le asigna el único $a \in A$ tal que $f(a) = g(c)$.

Es evidente que al componer h con f obtenemos g. Veamos que h es un homomorfismo de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{A}$. Sea $\sigma \in \Sigma$ tal que su ariedad sea n y $(c_0, \ldots, c_{n-1}) \in C^n$. Entonces, siendo H_σ la operación estructural de $\mathbf{C}$ correspondiente a σ, tenemos que $h(H_\sigma(c_0, \ldots, c_{n-1}))$ es el único elemento a de A tal que $f(a) = g(H_\sigma(c_0, \ldots, c_{n-1}))$. Ahora bien, por una parte, por ser g homomorfismo, tenemos que

$$g(H_\sigma(c_0, \ldots, c_{n-1})) = G_\sigma(g(c_0), \ldots, g(c_{n-1}))$$

y, por otra, por ser $F_\sigma(h(c_0), \ldots, h(c_{n-1}))$ un elemento de A tal que

$$f(F_\sigma(h(c_0), \ldots, h(c_{n-1}))) = G_\sigma(f(h(c_0)), \ldots, f(h(c_{n-1}))),$$

podemos afirmar que $f(F_\sigma(h(c_0), \ldots, h(c_{n-1}))) = G_\sigma(g(c_0), \ldots, g(c_{n-1}))$, de donde

$$h(H_\sigma(c_0, \ldots, c_{n-1})) = F_\sigma(h(c_0), \ldots, h(c_{n-1})).$$

□

Proposition 1.14. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y* X *un cerrado de* $\mathbf{A}$. *Entonces hay una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{X}$, *la* subálgebra de $\mathbf{A}$ asociada a X, *y un homomorfismo inyectivo* $\mathrm{in}_{\mathbf{X}}\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A}$, *la* inclusión canónica *de* $\mathbf{X}$ *en* $\mathbf{A}$, *tal que:*

1. $\mathrm{Im}(\mathrm{in}_{\mathbf{X}}) = X$.
2. (Propiedad universal) *Para cada homomorfismo* $f\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$, *si* $\mathrm{Im}(f) \subseteq X$, *entonces existe un único homomorfismo* g *de* $\mathbf{B}$ *en* $\mathbf{X}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{B} \arrow[dl, swap, "g"] \arrow[d, "f"] \\ \mathbf{X} \arrow[r, swap, "\mathrm{in}_{\mathbf{X}}"] & \mathbf{A} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposition 1.15. *Si* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, *entonces* $\mathrm{Im}(f)$ *es un cerrado de* $\mathbf{B}$.

Demostración. □

A partir de las dos proposiciones anteriores obtenemos la factorización de un homomorfismo a traves de su imagen.

Proposition 1.16 (Noether)**.** *Sea $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo. Entonces hay un único homomorfismo sobreyectivo f^{s}, el* sobreyectivizado *de f, de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{Im}(f)$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, two heads, "f^{\mathrm{s}}"'] & \mathbf{B} \\
& \mathbf{Im}(f) \arrow[u, tail, "\mathrm{in}_{\mathbf{Im}(f)}"']
\end{tikzcd}$$

conmuta. Esta es la factorización a través de la imagen *de un homomorfismo. Además, si f es inyectivo, entonces f^{s} es inyectivo, luego biyectivo.*

Por otra parte, se cumple que para cada $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{C}$, cualquier homomorfismo $g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ y cualquier homomorfismo inyectivo $h\colon \mathbf{C} \rightarrowtail \mathbf{B}$, si el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbf{B} \\
& \mathbf{C} \arrow[u, tail, "h"']
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces existe un único monomorfismo $t\colon \mathbf{Im}(f) \rightarrowtail \mathbf{C}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"] \arrow[ddr, two heads, "f^{s}"'] & & \mathbf{B} \\
& \mathbf{C} \arrow[ur, tail, "h"'] & \\
& \mathbf{Im}(f) \arrow[u, tail, "t"'] \arrow[uur, tail, "\mathrm{in}_{\mathbf{Im}(f)}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta. De modo que $\mathbf{Im}(f)$ es, esencialmente, la mínima subálgebra de $\mathbf{B}$ a través del cual factoriza f.

Proposition 1.17. *Sea f un homomorfismo inyectivo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$, g un homomorfismo de $\mathbf{D}$ en $\mathbf{B}$ y h un homomorfismo inyectivo de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$. Entonces:*

1. *Una condición necesaria y suficiente para que exista un homomorfismo t de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{A}$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "t"] \arrow[d, tail, "h"'] & \mathbf{A} \arrow[d, tail, "f"] \\
\mathbf{D} \arrow[r, "g"'] & \mathbf{B}
\end{tikzcd}$$

   conmute, es que $\mathrm{Im}(g \circ h) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

2. *Si* $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ *y* $\mathbf{C} \leq \mathbf{D}$*, entonces una condición necesaria y suficiente para que exista un homomorfismo* t *de* $\mathbf{C}$ *en* $\mathbf{A}$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "t"] \arrow[d, tail, "\mathrm{in}_{\mathbf{C}}"'] & \mathbf{A} \arrow[d, tail, "\mathrm{in}_{\mathbf{A}}"] \\ \mathbf{D} \arrow[r, "g"'] & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

conmute, es que $g[C] \subseteq A$.

Además, tanto en el primero como en el segundo caso t *está unívocamente determinado y recibe el nombre de* birrestricción *de* g *a* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{A}$.

Demostración. □

Proposition 1.18. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra. Entonces el conjunto de los cerrados de* $\mathbf{A}$, $\mathrm{Cl}(\mathbf{A})$*, es un sistema de clausura algebraico sobre* A*, i.e., tiene las siguientes propiedades:*

1. $A \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.
2. *Si* $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$ *y* $\mathcal{C} \neq \varnothing$*, entonces* $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.
3. *Si* $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$*,* $\mathcal{C} \neq \varnothing$ *y si dados* $X, Y \in \mathcal{C}$*, hay un* $Z \in \mathcal{C}$ *tal que* $X \cup Y \subseteq Z$*, entonces* $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.

Demostración. Debido a que es evidente que A es un cerrado de $\mathbf{A}$, nos limitamos a demostrar las dos últimas propiedades.

2. Sea $\mathcal{C}$ un conjunto no vacío de cerrados de $\mathbf{A}$, $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$ y $a \in (\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C)^n$. Entonces, para cada $C \in \mathcal{C}$, se cumple que $F_\sigma^{\mathbf{A}}(a) \in C$, luego $F_\sigma^{\mathbf{A}}(a) \in \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$.

3. Sea $\mathcal{C}$ un conjunto no vacío de cerrados de $\mathbf{A}$ tal que dados $X, Y \in \mathcal{C}$, exista un $Z \in \mathcal{C}$ tal que $X \cup Y \subseteq Z$, $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$ y $a \in (\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C)^n$. Entonces, para cada $i \in n$, hay un $C_i \in \mathcal{C}$ tal que $a_i \in C_i$. Ahora bien, por estar la familia de cerrados $\mathcal{C}$ dirigida superiormente, hay un $C \in \mathcal{C}$ tal que, para cada $i \in n$, $C_i \subseteq C$, luego, para cada $i \in n$, $a_i \in C$, pero, por ser C un cerrado de $\mathbf{A}$, se cumple que $F_\sigma^{\mathbf{A}}(a) \in C$, por lo tanto que $F_\sigma^{\mathbf{A}}(a) \in \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$. □

Corollary 1.19. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra. Entonces la endoaplicación* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *del conjunto* $\mathrm{Sub}(A)$*, definida como:*

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(A) & \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \\ \quad X & \longmapsto \bigcap\{\, C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid X \subseteq C \,\} \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{Im}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}) \subseteq \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.
2. $\{\, X \in \mathrm{Sub}(A) \mid X = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \,\} = \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.
3. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es extensiva o inflacionaria, i.e., para cada* $X \in \mathrm{Sub}(A)$*,* $X \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.
4. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es isótona, i.e., para cada* $X, Y \in \mathrm{Sub}(A)$*, si* $X \subseteq Y$*, entonces se cumple que* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(Y)$.
5. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es idempotente, i.e., para cada* $X \in \mathrm{Sub}(A)$*,* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X))$.
6. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es algebraica, i.e., para cada* $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sub}(A)$*, si* $\mathcal{X} \neq \varnothing$ *y para cada* $X, Y \in \mathcal{X}$*, existe un* $Z \in \mathcal{X}$ *tal que* $X \cup Y \subseteq Z$*, entonces* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\bigcup \mathcal{X}) = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

Por consiguiente, para cada $X \subseteq A$*,* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ *es el mínimo cerrado de* $\mathbf{A}$ *que contiene a* X*, y lo denominamos el cerrado de* $\mathbf{A}$ generado *por* X*. Además, a la subálgebra de* $\mathbf{A}$ *canónicamente asociada a* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$*, la denotamos por* $\mathbf{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ *y la denominamos, también, la subálgebra de* $\mathbf{A}$ *generada por* X.

Demostración. Nos limitamos a demostrar las cuatro últimas propiedades, dejando las dos primeras como ejercicios.

3. Sea $X \in \mathrm{Sub}(A)$. Puesto que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, por definición, es $\bigcap\{\, C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid X \subseteq C \,\}$, es evidente que $X \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

4. Sean $X, Y \in \mathrm{Sub}(A)$ tales que $X \subseteq Y$. Entonces $\{\, C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid Y \subseteq C \,\}$ está incluido en $\{\, C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid X \subseteq C \,\}$, luego $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ lo está en $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(Y)$.

5. Sea $X \in \mathrm{Sub}(A)$. En virtud de la extensividad y de la isotonía, se cumple que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X))$. Recíprocamente, debido a que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X))$ es el mínimo cerrado de $\mathbf{A}$ que contiene a $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ y $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ es un cerrado de $\mathbf{A}$ que se contiene a sí mismo, se cumple que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

6. Sea $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sub}(A)$, tal que $\mathcal{X} \neq \varnothing$ y para cada $X, Y \in \mathcal{X}$, existe un $Z \in \mathcal{X}$ tal que $X \cup Y \subseteq Z$. Puesto que, para cada $X \in \mathcal{X}$, $X \subseteq \bigcup_{X \in \mathcal{X}} X$, podemos afirmar, en virtud de la isotonía, que, para cada $X \in \mathcal{X}$, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X)$, por lo tanto $\bigcup_{X \in \mathcal{X}} \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X)$. Recíprocamente, por ser la familia de conjuntos $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Sub}(A)$ no vacía y estar dirigida superiormente, la familia de subálgebras de $\mathbf{A}$, $(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \mid X \in \mathcal{X})$ no es vacía y está dirigida superiormente, por lo tanto $\bigcup_{X \in \mathcal{X}} \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ es una subálgebra de $\mathbf{A}$ que, además, contiene a $\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X$, luego también contiene a $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X)$.

□

Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Demuéstrese que, para cada subconjunto X de A, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \bigcup_{K \subseteq_{\mathrm{fin}} X} \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(K)$. En general no se cumple que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \bigcup_{x \in X} \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x\})$.

Proposition 1.20. *Si* $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$ *y* $X \subseteq B$*, entonces* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(X) = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$

Demostración. □

La proposición anterior nos autoriza, para una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ y un subconjunto X de A, a escribir simplemente $\mathrm{Sg}(X)$ en lugar de $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

A continuación, introducimos unas nociones que nos permitirán obtener una descripción más *constructiva* de la subálgebra generada por un conjunto.

Definition 1.21. Sea $\mathbf{A} = (A, F)$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Entonces:

1. Denotamos por $\mathrm{E}_{\mathbf{A}}$ el operador sobre $\mathrm{Sub}(A)$, definido como:
$$\mathrm{E}_{\mathbf{A}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(A) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \\ \quad X \quad \longmapsto X \cup \Big(\bigcup_{\sigma \in \Sigma} F_\sigma[X^{\mathrm{ar}(\sigma)}] \Big). \end{cases}$$
2. Si $X \subseteq A$, entonces denotamos por $(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X) \mid n \in \mathbb{N})$ la familia en $\mathrm{Sub}(A)$ definida por recursión como:
$$\begin{aligned} \mathrm{E}^0_{\mathbf{A}}(X) &= X, \\ \mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X) &= \mathrm{E}_{\mathbf{A}}(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)),\ n \geq 0. \end{aligned}$$
Además, convenimos que:
$$\mathrm{E}^\omega_{\mathbf{A}}(X) = \bigcup(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X) \mid n \in \mathbb{N})$$

Proposition 1.22. *Si* $\mathbf{A}$ *es una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y* $X \subseteq A$*, entonces* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{E}^\omega_{\mathbf{A}}(X)$.

Demostración. Demostramos en primer lugar que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{E}^\omega_{\mathbf{A}}(X)$. Para ello, debido a que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ es el mínimo cerrado de $\mathbf{A}$ que contiene a X, es suficiente que demostremos que $\mathrm{E}^\omega_{\mathbf{A}}(X)$ es un cerrado de $\mathbf{A}$ y que contiene a X. Ahora bien, $\mathrm{E}^0_{\mathbf{A}}(X) = X$, luego $X \subseteq \mathrm{E}^\omega_{\mathbf{A}}(X)$. Por otra parte, si $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = m$ y $a \in (\mathrm{E}^\omega_{\mathbf{A}}(X))^m$, entonces, para cada $\alpha \in m$, hay un $n_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $a_\alpha \in \mathrm{E}^{n_\alpha}_{\mathbf{A}}(X)$, pero la familia $(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X) \mid n \in \mathbb{N})$ es una cadena ascendente, luego hay un $\beta \in m$ tal que, para cada $\alpha \in m$, $\mathrm{E}^{n_\alpha}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{E}^{n_\beta}_{\mathbf{A}}(X)$, por lo tanto, para cada $\alpha \in m$, $a_\alpha \in \mathrm{E}^{n_\beta}_{\mathbf{A}}(X)$, de donde $F^{\mathbf{A}}_\sigma(a) \in \mathrm{E}^{n_\beta+1}_{\mathbf{A}}(X)$, por consiguiente $F^{\mathbf{A}}_\sigma(a) \in \mathrm{E}^\omega_{\mathbf{A}}(X)$.

Para demostrar que $\mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ procedemos por inducción finita. Puesto que $\mathrm{E}^{0}_{\mathbf{A}}(X) = X$ y $X \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, se cumple que $\mathrm{E}^{0}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$. Supongamos que, para $n \geq 0$, se cumpla que $\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$. Entonces, ya que $\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{E}_{\mathbf{A}}(\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X))$, para demostrar que $\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, es suficiente que demostremos que $\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ y que $\bigcup_{\sigma\in\Sigma} F_{\sigma}[(\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X))^{\mathrm{ar}(\sigma)}] \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$. Ahora bien, lo primero se cumple por la hipótesis de inducción. Sea pues $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = m$ y $a \in (\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X))^{m}$, entonces, para cada $\alpha \in m$, $a_{\alpha} \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, luego $F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a) \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, por lo tanto $F_{\sigma}[(\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X))^{m}] \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$. □

Proposition 1.23. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra,* X *un cerrado de* $\mathbf{A}$ *e* $Y \subseteq A$*. Entonces hay un cerrado* Z *de* $\mathbf{A}$ *tal que* $X \subseteq Z$ *y* $Z \cap Y = X \cap Y$ *y* Z *es maximal con dichas propiedades.*

Demostración. Sea $\mathcal{X}_{X,Y} = \{\, C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid X \subseteq C \text{ y } C \cap Y = X \cap Y \,\}$. El conjunto $\mathcal{X}_{X,Y}$ no es vacío, porque $X \in \mathcal{X}_{X,Y}$. Por otra parte, si $(C_i \mid i \in I)$ es una cadena no vacía en $(\mathcal{X}_{X,Y}, \subseteq)$, entonces $\bigcup_{i\in I} C_i$ es, obviamente, el supremo de $(C_i \mid i \in I)$ en $(\mathcal{X}_{X,Y}, \subseteq)$, luego, en virtud del lema de Zorn, en el conjunto ordenado $(\mathcal{X}_{X,Y}, \subseteq)$ hay un maximal Z. □

Definition 1.24. Sea $\mathbf{A}$ es una $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra y $X \subseteq A$. Decimos que X es un *conjunto de generadores* de $\mathbf{A}$, o que X *genera* $\mathbf{A}$, si $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = A$ y que es un *conjunto de generadores minimal* de $\mathbf{A}$ si es un conjunto de generadores y si ningún subconjunto estricto de X genera $\mathbf{A}$. Además, decimos que $\mathbf{A}$ está *finitamente generada*, o que es de *generación finita*, si hay un subconjunto X de A tal que $\mathrm{card}\, X < \aleph_0$ y X genera $\mathbf{A}$. En particular, decimos que $\mathbf{A}$ es *cíclica* si hay un $a \in A$ tal que $\{a\}$ genera $\mathbf{A}$.

En el estudio de las álgebras, como tendremos oportunidad de comprobar, e.g., al estudiar todo lo referente a las operaciones polinómicas sobre un álgebra, nos encontraremos ante situaciones en las que queremos demostrar que todos los elementos de la subálgebra generada por un subconjunto de un álgebra tiene una cierta propiedad. En tal caso, generalizando el principio de la demostración por inducción finita, procederemos mediante el principio de la demostración por *inducción algebraica*, que pasamos a establecer a continuación.

Proposition 1.25. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra,* $X \subseteq A$ *e* $Y \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$*. Una condición suficiente para que* $Y = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$*, es que* $X \subseteq Y$ *y que* Y *sea un cerrado de* $\mathbf{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ *(o, lo que es equivalente, un cerrado de* $\mathbf{A}$*). En particular, si* X *es un conjunto de generadores de* $\mathbf{A}$*, una condición suficiente para que* $Y = A$*, es que* $X \subseteq Y$ *y que* Y *sea un cerrado de* $\mathbf{A}$*.*

Demostración. Supongamos que $X \subseteq Y$ y que Y sea un cerrado de $\mathbf{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$. Entonces, en virtud de la isotonía, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(Y) = Y$, luego, ya que $Y \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, $Y = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$. □

Del mismo modo que en el caso del conjunto de los números naturales, considerado como un álgebra de Dedekind-Peano, en el estudio de las álgebras, también surge la necesidad de definir homomorfismos desde ciertas álgebras, concretamente las álgebras libres sobre los conjuntos, hasta otras álgebras, e.g., para determinar la conexión de Galois entre las álgebras y las ecuaciones, y, así como en el caso de los números naturales demostramos el principio de la definición por recursión finita, aquí, cuando estudiemos las álgebras libres, demostraremos el principio de la definición por recursión algebraica, que nos permitirá definir homomorfismos desde las álgebras libres, y que estará íntimamente ligado al principio de la demostración por inducción algebraica.

Proposition 1.26. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra finitamente generada y* X *un cerrado de* $\mathbf{A}$ *tal que* $X \neq A$*. Entonces hay un cerrado distinto de* A *que contiene a* X *y es maximal con dichas propiedades.*

Demostración. Sea $\mathcal{X}_X = \{\, C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid X \subseteq C \text{ y } C \neq A \,\}$. El conjunto $\mathcal{X}_X$ no es vacío, porque $X \in \mathcal{X}_X$. Por otra parte, si $(C_i \mid i \in I)$ es una cadena no vacía en $(\mathcal{X}_X, \subseteq)$, entonces $\bigcup_{i\in I} C_i$ es el supremo de $(C_i \mid i \in I)$ en $(\mathcal{X}_{X,Y}, \subseteq)$. En efecto, es evidente que el cerrado $\bigcup_{i\in I} C_i$ de $\mathbf{A}$ es tal que $X \subseteq \bigcup_{i\in I} C_i$ y que $\bigcup_{i\in I} C_i \neq A$, esto último debido a que si ocurriera que $\bigcup_{i\in I} C_i = A$, entonces, ya que $\mathbf{A}$ es una $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra finitamente generada, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(F) = A$, para una parte finita $F = \{\, a_\alpha \mid \alpha \in n \,\}$ de A, luego, para cada $\alpha \in n$, existiría un $i_\alpha \in I$ tal que $a_\alpha \in C_{i_\alpha}$, pero, por ser $(C_i \mid i \in I)$ una cadena, existiría un β tal que, para cada $\alpha \in n$, $a_\alpha \in C_{i_\beta}$, así que $F \subseteq C_{i_\beta}$, de donde $C_{i_\beta} = A$, que es una contradicción, luego $\bigcup_{i\in I} C_i \in \mathcal{X}_X$ y, evidentemente es el supremo de $(C_i \mid i \in I)$ en $(\mathcal{X}_{X,Y}, \subseteq)$. Por consiguiente, en virtud del lema de Zorn, en el conjunto ordenado $(\mathcal{X}_X, \subseteq)$ hay un maximal. □

Proposition 1.27. *Si* $\mathbf{A}$ *es una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra finitamente generada, entonces cualquier conjunto de generadores de* $\mathbf{A}$ *contiene un subconjunto finito que también genera* $\mathbf{A}$*. Además,* $\mathbf{A}$ *tiene un conjunto de generadores minimal.*

Demostración. Sea X un conjunto de generadores de $\mathbf{A}$ e $Y = \{\, y_\alpha \mid \alpha \in n \,\}$ un conjunto de generadores finito de $\mathbf{A}$. Entonces, ya que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \bigcup_{K \subseteq_{\mathrm{fin}} X} \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(K)$ y $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = A$, se cumple que, para cada $\alpha \in n$, hay un $K_\alpha \subseteq_{\mathrm{fin}} X$ tal que $y_\alpha \in K_\alpha$, luego $\bigcup_{\alpha\in n} K_\alpha \subseteq_{\mathrm{fin}} X$ y $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\bigcup_{\alpha\in n} K_\alpha) = A$.

Para demostrar que $\mathbf{A}$ tiene un conjunto de generadores minimal, es suficiente tomar en consideración que siendo el propio A un conjunto de generadores de $\mathbf{A}$, A contiene un subconjunto finito que también genera $\mathbf{A}$, luego el conjunto $\mathcal{G}_{\mathbf{A}} = \{\, K \subseteq_{\mathrm{fin}} A \mid \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(K) = A \,\} \neq \varnothing$, por lo tanto el conjunto $\{\, \mathrm{card}(K) \mid K \in \mathcal{G}_{\mathbf{A}} \,\}$, no siendo vacío, tiene un mínimo n, es suficiente entonces tomar un $K \in \mathcal{G}_{\mathbf{A}}$ tal que $\mathrm{card}(K) = n$ para obtener un conjunto de generadores minimal. □

Proposition 1.28. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra y* X *un conjunto de generadores minimal de* $\mathbf{A}$*. Si* X *es infinito, entonces cualquier conjunto de generadores de* $\mathbf{A}$ *es tal que su cardinal es al menos el cardinal de* X*. En particular,* $\mathbf{A}$ *no puede ser una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra finitamente generada y dos conjuntos de generadores minimales infinitos cualesquiera de* $\mathbf{A}$ *tienen el mismo cardinal.*

Demostración. Por ser X un conjunto de generadores de $\mathbf{A}$, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = A$ y, por ser $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ algebraico, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \bigcup_{F \subseteq_{\mathrm{fin}} X} \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(F)$, luego, para cada $y \in Y$, hay una parte finita F_y de X tal que $y \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(F_y)$. Por consiguiente $Y \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\bigcup_{y\in Y} F_y)$, pero $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(Y) = A$, luego $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\bigcup_{y\in Y} F_y)$, i.e., $\bigcup_{y\in Y} F_y$ es un conjunto de generadores de $\mathbf{A}$ y $\bigcup_{y\in Y} F_y \subseteq X$. Se cumple que $\bigcup_{y\in Y} F_y = X$, porque, en caso contrario, X no sería minimal. Además, Y es infinito, ya que, en caso contrario, X sería finito. Por otra parte, se cumple que

$$\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(\textstyle\bigcup_{y\in Y} F_y) \leq \sum_{y\in Y} F_y \leq \aleph_0 \cdot \mathrm{card}(Y) = \mathrm{card}(Y).$$

□

Demuéstrese que si $\mathbf{A}$ es una $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra que está generada por un conjunto infinito numerable, entonces cualquier conjunto de generadores de $\mathbf{A}$ contiene un subconjunto numerable que también genera $\mathbf{A}$.

Proposition 1.29. *Si* $\mathbf{A}$ *es una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra, entonces una condición necesaria y suficiente para que toda* ω*-cadena ascendente de subálgebras de* $\mathbf{A}$ *sea estacionaria es que toda subálgebra de* $\mathbf{A}$ *esté finitamente generada.*

Demostración. La condición es suficiente. Supongamos que toda subálgebra de $\mathbf{A}$ esté finitamente generada y sea $(X_n \mid n \in \mathbb{N})$ una ω-cadena ascendente de subálgebras de $\mathbf{A}$. Entonces la subálgebra $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ tiene una parte finita $K = \{\, a_\alpha \mid \alpha \in n \,\}$ tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(K)$, luego, para cada $\alpha \in n$, hay un $n_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $a_\alpha \in X_{n_\alpha}$, pero, por ser $(X_n \mid n \in \mathbb{N})$ una cadena ascendente, hay un $\beta \in n$ tal que, para cada $\alpha \in n$, $X_{n_\alpha} \subseteq X_{n_\beta}$, así que $K \subseteq X_{n_\beta}$, de donde $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = X_{n_\beta}$ y, por lo tanto la cadena ascendente $(X_n \mid n \in \mathbb{N})$ es estacionaria.

La condición es necesaria. Supongamos que $\mathbf{A}$ tenga una subálgebra X que no esté finitamente generada, i.e., que sea tal que, para cada subconjunto finito K de X, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(K) \neq X$. Entonces, para $\varnothing$ se cumple que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\varnothing) \neq X$, luego podemos elegir un $x_0 \in X - \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\varnothing)$. Puesto que $\{x_0\}$ es un subconjunto finito de X, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x_0\}) \neq X$ y además $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\varnothing) \subset \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x_0\})$. Por ser $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x_0\}) \neq X$, podemos elegir un $x_1 \in X - \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x_0\})$. Puesto que $\{x_0, x_1\}$ es un subconjunto finito de X, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x_0, x_1\}) \neq X$ y además $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x_0\}) \subset \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x_0, x_1\})$. Procediendo de este modo obtenemos una familia $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ en X que da lugar a una ω-cadena estrictamente creciente

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\varnothing) \subset \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x_0\}) \subset \ldots \subset \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\{\, x_0, \ldots, x_{n-1} \,\}) \subset \ldots,$$

de subálgebras de $\mathbf{A}$.

La última parte de esta demostración se puede presentar de una manera más rigurosa tomando en consideración el axioma de las elecciones dependientes, que es estrictamente más débil que el axioma de elección. Recordemos que el axioma de las elecciones dependientes afirma que para cada conjunto C que no sea vacío y cada relación binaria Φ sobre C, si para cada $x \in C$ existe un $y \in C$ tal que $(x, y) \in \Phi$, entonces hay una ω-sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en C tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(c_n, c_{n+1}) \in \Phi$.

Para el conjunto $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(X)$ y la relación binaria Φ sobre este último conjunto definida, para dos subconjuntos finitos F, G de X, como:

$$(F, G) \in \Phi \text{ si y sólo si } F \subseteq G \text{ y } \exists x \in G \text{ tal que } x \notin \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(F),$$

se cumple que $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(X) \neq \varnothing$ y que, dado un subconjunto finito F de X, hay un subconjunto finito G de X tal que $(F, G) \in \Phi$, es suficiente tomar como G el conjunto $F \cup \{x\}$, siendo x cualquier elemento de $X - \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(F)$. Por lo tanto, en virtud del axioma de las elecciones dependientes, hay una ω-sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(X)$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $(F_n, F_{n+1}) \in \Phi$, de donde obtenemos la ω-cadena estrictamente creciente

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(F_0) \subset \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(F_1) \subset \ldots \subset \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(F_n) \subset \ldots,$$

de subálgebras de $\mathbf{A}$. □

Sabemos que, para cada signatura algebraica $\mathbf{\Sigma}$ y cada $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$, el operador $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ sobre el conjunto A es un operador clausura algebraico. Demostramos a continuación un teorema de Birkhoff-Frink, que establece el recíproco, i.e., que cualquier operador clausura algebraico sobre un conjunto se puede obtener, de al menos una forma, a partir de una signatura algebraica y una estructura algebraica para tal signatura, sobre el conjunto en cuestión.

Theorem 1.30 (Birkhoff-Frink). *Si J es un operador clausura algebraico sobre un conjunto A, entonces hay una signatura algebraica $\mathbf{\Sigma}$ y una estructura de $\mathbf{\Sigma}$-álgebra F sobre A tal que J coincide con $\mathrm{Sg}_{(A,F)}$.*

Demostración. Dado un subconjunto finito $X = \{ x_0, \ldots, x_{n-1} \}$ de A, con n elementos, y un $a \in J(X)$, sea $F_{X,a}$ la operación n-aria sobre A definida como:

$$F_{X,a} \begin{cases} A^n \longrightarrow A \\ (a_0, \ldots, a_{n-1}) \longmapsto \begin{cases} a, & \text{si } \{ a_0, \ldots, a_{n-1} \} = X; \\ a_0, & \text{si } \{ a_0, \ldots, a_{n-1} \} \neq X. \end{cases} \end{cases}$$

Entonces, para la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A} = (A, (F_{X,a})_{X \subseteq_{\mathrm{fin}} A, a \in J(X)})$ se cumple que $J = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$. Ahora bien, puesto que ambos, J y $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$, son algebraicos, será suficiente que demostremos, para cada subconjunto finito X de A, que $J(X) = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

Sea $X \subseteq_{\mathrm{fin}} A$. Entonces $J(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, porque si $a \in J(X)$, ya que $X \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ es un cerrado de $\mathbf{A}$ y, si $X = \{ x_0, \ldots, x_{n-1} \}$, $F_{X,a}(x_0, \ldots, x_{n-1}) = a$, entonces $a \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

Veamos que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq J(X)$. Puesto que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ es el mínimo cerrado de $\mathbf{A}$ que contiene a X, será suficiente que demostremos que $J(X)$ es un cerrado de $\mathbf{A}$ y que contiene a X. Puesto que lo último es evidente, pasamos a demostrar que $J(X)$ es un cerrado de $\mathbf{A}$. Sea $Y = \{ y_0, \ldots, y_{m-1} \}$ un subconjunto finito de A, con m elementos, $b \in J(Y)$ y $(a_0, \ldots, a_{m-1}) \in J(X)^m$. Si $\{ a_0, \ldots, a_{m-1} \} = Y$, entonces $Y \subseteq J(X)$, luego $J(Y) \subseteq J(X)$, por lo tanto $b \in J(X)$. Si $\{ a_0, \ldots, a_{m-1} \} \neq Y$, entonces $F_{X,a}(a_0, \ldots, a_{m-1}) = a_0$, pero también $a_0 \in J(X)$. Así que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq J(X)$. □

Proposition 1.31. *Sean $f, g \colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ dos homomorfismos y X un subconjunto de A. Si f y g coinciden en X, entonces también coinciden en* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

Demostración. Supongamos que, para cada $x \in X$, $f(x) = g(x)$. Puesto que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X)$, para demostrar que f y g coinciden en $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, será suficiente que procedamos por inducción finita. Para $n = 0$, se cumple que f y g coinciden en $\mathrm{E}^0_{\mathbf{A}}(X) = X$, por hipótesis. Supongamos que para $n \geq 0$, f y g coincidan en $\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)$. Puesto que $\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{E}_{\mathbf{A}}(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X))$, para demostrar que f y g coinciden en $\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X)$, será suficiente que demostremos que, dado un $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = m$ y un $a \in (\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X))^m$, entonces $f(F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a)) = g(F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a))$. Sean pues $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = m$ y $a \in (\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X))^m$. Por ser f y g homomorfismos, se cumple que

$$f(F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a)) = F^{\mathbf{B}}_{\sigma}(f^m(a)) \quad \text{y} \quad g(F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a)) = F^{\mathbf{B}}_{\sigma}(g^m(a)),$$

pero $f^m(a) = g^m(a)$, porque $a \in (\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X))^m$ y f y g coinciden, por hipótesis, en $\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)$, luego $f(F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a)) = g(F^{\mathbf{A}}_{\sigma}(a))$, luego coinciden en $\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X)$. Por lo tanto f y g coinciden en $\mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X)$, i.e., en $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$. □

Proposition 1.32. *Sea f una aplicación de un subconjunto X de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ en el conjunto subyacente de otra $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{B}$. Entonces hay a lo sumo una extensión g de f que sea un homomorfismo de $\mathbf{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ en $\mathbf{B}$.*

Demostración. □

A continuación establecemos el llamado *principio de la prolongación de las identidades*, que es formalmente idéntico al principio del mismo nombre de la teoría de espacios métricos (dos aplicaciones contínuas entre dos espacios métricos que coincidan en una parte densa del dominio de las mismas, coinciden en todo el dominio).

Corollary 1.33. *Sean $f, g \colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ dos homomorfismos y X un subconjunto de A tal que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = A$. Si f y g coinciden en X, entonces $f = g$.*

Demostración. En virtud de la proposición 1.31, por coincidir f y g en X, coinciden en $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, pero $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = A$, luego coinciden en A. □

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos $\mathbf{\Sigma}$-álgebras. Demuéstrese que hay a lo sumo un homomorfismo de $\mathbf{Sg_A}(\varnothing)$ en $\mathbf{B}$. Además, si tal homomorfismo existe, demuéstrese que tiene como imagen la subálgebra de $\mathbf{B}$ generada por $\varnothing$.

Proposition 1.34. *Sea f una biyección de un conjunto de generadores X de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ en un conjunto de generadores Y de otra $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{B}$. Si g y h son extensiones homomorfas de f y de la inversa f^{-1} hasta $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, resp., entonces g es un isomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$, cuyo inverso es h.*

Demostración. □

Corollary 1.35. *Sea $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo y X un subconjunto de A tal que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = A$. Entonces f es inyectivo precisamente si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *f es inyectiva sobre X, i.e., $f{\restriction}X$ es inyectiva.*
2. *$\mathrm{in}_X \circ (f{\restriction}X)^{-1}$ tiene una extensión homomorfa hasta $\mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(\mathrm{Im}(f{\restriction}X))$, i.e., hay un homomorfismo $g\colon \mathbf{Sg_B}(\mathrm{Im}(f{\restriction}X)) \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Im}(f{\restriction}X) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\mathrm{Im}(f\,\restriction X)}"] \arrow[dr, "\mathrm{in}_X \circ (f{\restriction}X)^{-1}"'] & \mathbf{Sg_B}(\mathrm{Im}(f{\restriction}X)) \arrow[d, "g"] \\
 & \mathbf{A}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Puesto que X un conjunto de generadores de $\mathbf{A}$, el conjunto $f[X]$ es un conjunto de generadores de $\mathrm{Im}(f)$. Luego $f{\restriction}X$, por ser inyectiva, establece una biyección entre el conjunto de generadores X de $\mathbf{A}$ y el conjunto de generadores $f[X]$ de $\mathrm{Im}(f)$, por lo tanto podemos aplicar la proposición anterior a esta situación. □

Proposition 1.36. *Sea $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras, X un cerrado de $\mathbf{A}$ e Y uno de $\mathbf{B}$. Entonces $f[X] \in \mathrm{Cl}(\mathbf{B})$ y $f^{-1}[Y] \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$. En particular, $\mathrm{Im}(f) \in \mathrm{Cl}(\mathbf{B})$.*

Demostración. □

La proposición que establecemos a continuación afirma, por comparación con la situación en topología, que los homomorfismos entre álgebras son además *cerrados*, i.e., conmutan con el operador de formación de subálgebras.

Proposition 1.37. *Sea $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras y $X \subseteq A$. Entonces $f[\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)] = \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$, i.e., el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sub}(A) \arrow[r, "f[\cdot]"] \arrow[d, "\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}"'] & \mathrm{Sub}(B) \arrow[d, "\mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}"] \\
\mathrm{Sub}(A) \arrow[r, "f[\cdot]"'] & \mathrm{Sub}(B)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Puesto que $X \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$, $f[X] \subseteq f[\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)]$. Ahora bien, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$ es la mínima subálgebra de $\mathbf{B}$ que contiene a $f[X]$ y $f[\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)]$ es una subálgebra de $\mathbf{B}$ que contiene a $f[X]$, por lo tanto $\mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X]) \subseteq f[\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)]$.

Para demostrar la inversa, ya que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)$ y $f[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)]$, es suficiente que demostremos, por inducción finita, que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)] \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$.

Para $n = 0$, se cumple que $f[\mathrm{E}^0_{\mathbf{A}}(X)] \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$, porque $f[\mathrm{E}^0_{\mathbf{A}}(X)] = f[X]$. Supongamos que, para $n \geq 0$, se cumpla que $f[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)] \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$. Entonces, ya que $\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X) \cup \bigcup_{\sigma\in\Sigma} F^{\mathbf{A}}_\sigma[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)^{\mathrm{ar}(\sigma)}]$ y

$$f[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X) \cup \textstyle\bigcup_{\sigma\in\Sigma} F^{\mathbf{A}}_\sigma[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)^{\mathrm{ar}(\sigma)}]] = f[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)] \cup \textstyle\bigcup_{\sigma\in\Sigma} f[F^{\mathbf{A}}_\sigma[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)^{\mathrm{ar}(\sigma)}]]$$

para demostrar que $f[\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X)] \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$, es suficiente que demostremos que $f[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)] \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$ y que $\bigcup_{\sigma\in\Sigma} f[F^{\mathbf{A}}_\sigma[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)^{\mathrm{ar}(\sigma)}]] \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$. Ahora bien, lo primero se cumple por la hipótesis de inducción. Sea pues $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = m$ y $a \in (\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X))^m$, entonces, ya que $f(F^{\mathbf{A}}_\sigma(a)) = F^{\mathbf{B}}_\sigma(f^m(a))$, y $f^m(a) \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$, se cumple que $f(F^{\mathbf{A}}_\sigma(a)) \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$, por lo tanto $\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f[X])$. □

Proposition 1.38. *Sea $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras y X un subconjunto de A tal que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = A$. Entonces f es un homomorfismo sobreyectivo precisamente si $f[X]$ es un conjunto de generadores de $\mathbf{B}$.*

Demostración. □

Definition 1.39. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $a \in A$. Decimos que a es un *no-generador* de $\mathbf{A}$ precisamente si, para cada $X \subseteq A$, si $\mathrm{Sg}(X \cup \{a\}) = A$, entonces $\mathrm{Sg}(X) = A$. Denotamos por $\mathrm{Frat}(\mathbf{A})$ el conjunto de los no-generadores de $\mathbf{A}$.

Proposition 1.40. *Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Entonces* $\mathrm{Frat}(\mathbf{A})$ *es un cerrado de $\mathbf{A}$, al que llamamos el* cerrado de Frattini *de $\mathbf{A}$.*

Demostración. □

Proposition 1.41. *Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Entonces* $\mathrm{Frat}(\mathbf{A})$ *es la intersección de todos los cerrados maximales de $\mathbf{A}$, si tal conjunto de cerrados no es vacío, y es A en caso contrario.*

Demostración. Si a es un no-generador de $\mathbf{A}$, entonces para cada cerrado maximal X de $\mathbf{A}$, $\mathrm{Sg}(X \cup \{a\})$ está entre X y A, pero no puede ser igual a A porque $X = \mathrm{Sg}(X) \subset A$. Por lo tanto $\mathrm{Sg}(X \cup \{a\}) = X$, luego $a \in X$. Así que el conjunto de los no-generadores de $\mathbf{A}$ está contenido en cualquier cerrado maximal de $\mathbf{A}$.

Por otra parte, si $a \in A$ no es un no-generador, entonces hay un subconjunto X de A tal que $\mathrm{Sg}(X \cup \{a\}) = A$ pero $\mathrm{Sg}(X) = A$. Sea $\mathcal{Y}$ el conjunto de todos los cerrados Y de $\mathbf{A}$ tales que $X \subseteq Y$ y $a \notin Y$. Se cumple que $\mathcal{Y} \neq \varnothing$, porque $\mathrm{Sg}(X) \in \mathcal{Y}$. Además, la unión de una cadena no vacía en $(\mathcal{Y}, \subseteq)$ está en $\mathcal{Y}$. Por lo tanto $(\mathcal{Y}, \subseteq)$ tiene un maximal Y. Para cada cerrado Z de $\mathbf{A}$, si $Y \subset Z$, entonces $a \in Z$, y puesto que $X \subseteq Z$, $Z = A$. Luego Y es un cerrado maximal de $\mathbf{A}$. Esto demuestra que a no pertenece a la intersección de todos los maximales de $\mathbf{A}$.

□

Demostración. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y supongamos que tenga cerrados maximales. Vamos a demostrar que

$$\forall a \in A\, (a \in \mathrm{Frat}(\mathbf{A}) \rightarrow a \in \textstyle\bigcap_{\substack{C\in\mathrm{Cl}(\mathbf{A})\\ C \text{ maximal}}} C).$$

Sea $a \in A$ y supongamos que $a \notin \bigcap_{\substack{C\in\mathrm{Cl}(\mathbf{A})\\ C \text{ maximal}}} C$, i.e., que hay un cerrado maximal C de $\mathbf{A}$ tal que $a \notin C$. Queremos demostrar que entonces $a \notin \mathrm{Frat}(\mathbf{A})$, i.e., que hay un subconjunto X de A tal que $\mathrm{Sg}(X \cup \{a\}) = A$ pero $\mathrm{Sg}(X) \neq A$. Sea $X = C$, siendo C un cerrado maximal de $\mathbf{A}$ tal que $a \notin C$. Entonces $\mathrm{Sg}(C \cup \{a\}) = A$, porque, en caso contrario, C no sería un cerrado maximal.

Ahora demostramos que

$$\forall a \in A \, (a \in \bigcap_{\substack{C\in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \\ C \text{ maximal}}} C \to a \in \mathrm{Frat}(\mathbf{A})).$$

Sea $a \in A$ y supongamos que $a \notin \mathrm{Frat}(\mathbf{A})$, i.e., que hay un subconjunto X de A tal que $\mathrm{Sg}(X \cup \{a\}) = A$ pero $\mathrm{Sg}(X) \neq A$. Queremos demostrar que $a \notin \bigcap_{\substack{C\in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \\ C \text{ maximal}}} C$, i.e., que hay un cerrado maximal C de $\mathbf{A}$ tal que $a \notin C$. El cerrado $\mathrm{Sg}(X)$ tiene la propiedad de que $a \notin \mathrm{Sg}(X)$, ya que si $a \in \mathrm{Sg}(X)$, entonces $\mathrm{Sg}(X) = A$. Entonces el conjunto $\mathcal{X}_{X,a}$ formado por todos los cerrados C de $\mathbf{A}$ tales que $\mathrm{Sg}(X) \subseteq C$ y $a \notin C$, no es vacío y cualquier cadena no vacía en el tiene un supremo, por lo tanto, en virtud del lema de Zorn, tal conjunto, ordenado por la inclusión, tiene un maximal C. Veamos que entonces C es un cerrado maximal de $\mathbf{A}$. Sea D un cerrado de $\mathbf{A}$ tal que $C \subset D$. Entonces $a \in D$, porque, en caso contrario, C no sería maximal en $(\mathcal{X}_{X,a}, \subseteq)$. Por lo tanto $C \cup \{ a \} \subseteq D$, de donde $\mathrm{Sg}(C \cup \{ a \}) \subseteq D$, pero $\mathrm{Sg}(C \cup \{ a \}) = A$, luego $D = A$. Así que C es un cerrado maximal de $\mathbf{A}$. Además, $a \notin C$. De donde el resultado.

La demostración de que si $\mathbf{A}$ no tiene cerrados maximales, entonces todos los elementos de A son no-generadores se lleva a cabo demostrando que si $\mathbf{A}$ tiene un elemento que no pertenece a $\mathrm{Frat}(\mathbf{A})$, entonces $\mathbf{A}$ tiene cerrados maximales.

□

Demuéstrese que cualquier imagen homomorfa de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra finitamente generada tiene la misma propiedad.

Demuéstrese que hay $\mathbf{\Sigma}$-álgebras finitamente generadas que tienen alguna subálgebra que no es finitamente generada.

Cualquier $\mathbf{\Sigma}$-álgebra finitamente generada y con una signatura numerable, es numerable, pero hay $\mathbf{\Sigma}$-álgebras infinito numerables que no tienen ningún conjunto de generadores finito. Además, cualquier $\mathbf{\Sigma}$-álgebra finita es finitamente generada, y hay $\mathbf{\Sigma}$-álgebra finitamente generadas que no son finitas. Por lo tanto, las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras finitamente generadas constituyen una especie de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras intermedia entre la de las finitas y la de las infinito numerables.

1.5. Congruencias.

Definition 1.42. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y Φ una relación binaria en A. Decimos que Φ es una *congruencia* sobre $\mathbf{A}$ si Φ es una relación de equivalencia sobre A y si, para cada $n \in \mathbb{N} - 1$, cada $\sigma \in \Sigma_n$, y cada $(x_i \mid i \in n)$, $(y_i \mid i \in n) \in A^n$, si, para cada $i \in n$, $x_i \equiv y_i \pmod{\Phi}$, entonces $F_\sigma(x_i \mid i \in n) \equiv F_\sigma(y_i \mid i \in n) \pmod{\Phi}$.

Denotamos por $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$ el conjunto de las congruencias sobre la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$.

El ejemplo de congruencia que consideramos a continuación lo usaremos más adelante, cuando tengamos que demostrar que las álgebras libres sobre dos conjuntos son isomorfas exactamente si tales conjuntos lo son.

Example. Si $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra, entonces la relación de equivalencia sobre A determinada por la partición $\{ \{a\} \mid a \in A - \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \mathrm{Im}(F_\sigma) \} \cup \{ \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \mathrm{Im}(F_\sigma) \}$, es una congruencia sobre $\mathbf{A}$. Observemos que dos elementos $x, y \in A$ están relacionados, mediante la relación de equivalencia anterior, precisamente si $x = y$ o hay $m, n \in \mathbb{N}$, hay un $\sigma \in \Sigma_m$, un $\tau \in \Sigma_n$, un $a \in A^m$ y un $b \in A^n$ tales que $x = F_\sigma(a)$ e $y = F_\tau(b)$.

Proposition 1.43. *Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Entonces el conjunto de las congruencias sobre $\mathbf{A}$, $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$, es un sistema de clausura algebraico sobre $A \times A$, i.e., tiene las siguientes propiedades:*

1. $A \times A \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$.

2. *Si* $(\Phi_i \mid i \in I)$ *es una familia no vacía en* $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$*, entonces* $\bigcap_{i\in I} \Phi_i$ *es una congruencia sobre* $\mathbf{A}$.
3. *Si* $(\Phi_i \mid i \in I)$ *es una familia no vacía en* $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$ *y si dados* $i, j \in I$*, hay un* $k \in I$ *tal que* $\Phi_i \cup \Phi_j \subseteq \Phi_k$*, entonces* $\bigcup_{i\in I} \Phi_i$ *es una congruencia sobre* $\mathbf{A}$.

Demostración. □

Corollary 1.44. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra. Entonces la endoaplicación* $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}$ *del conjunto* $\mathrm{Sub}(A \times A)$*, definida como:*

$$\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(A \times A) & \longrightarrow \mathrm{Sub}(A \times A) \\ \quad\Phi & \longmapsto \bigcap\{\, \Psi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A}) \mid \Phi \subseteq \Psi \,\} \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{Im}(\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}) \subseteq \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$.
2. $\{\, \Phi \in \mathrm{Sub}(A \times A) \mid \Phi = \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi) \,\} = \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$.
3. $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}$ *es extensiva o inflacionaria, i.e., para cada* $\Phi \in \mathrm{Sub}(A \times A)$*,* $\Phi \subseteq \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$.
4. $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}$ *es isótona, i.e., para cada* $\Phi, \Psi \in \mathrm{Sub}(A \times A)$*, si* $\Phi \subseteq \Psi$*, entonces se cumple que* $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Psi) \subseteq \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Psi)$.
5. $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}$ *es idempotente, i.e., para cada* $\Phi \in \mathrm{Sub}(A\times A)$*,* $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi) = \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi))$.
6. $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}$ *es algebraica, i.e., para cada familia* $(\Phi_i \mid i \in I)$ *en* $\mathrm{Sub}(A \times A)$*, si* $I \neq \varnothing$ *y para cada* $i, j \in I$*, existe un* $k \in I$ *tal que* $\Phi_i \cup \Phi_j \subseteq \Phi_k$*, entonces se cumple que* $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\bigcup_{i\in I} \Phi_i) = \bigcup_{i\in I} \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi_i)$.

Por consiguiente, para cada $\Phi \subseteq A \times A$*,* $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$ *es la mínima congruencia sobre* $\mathbf{A}$ *que contiene a* Φ*, y la denominamos la congruencia sobre* $\mathbf{A}$ generada *por* Φ.

Demostración. Nos limitamos a demostrar las cuatro últimas propiedades, dejando las dos primeras como ejercicios.

3. Sea $\Phi \subseteq A \times A$. Puesto que $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$, por definición, es $\bigcap\{\, \Psi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A}) \mid \Phi \subseteq \Psi \,\}$, es evidente que $Phi \subseteq \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$.

4. Sean $\Phi, \Psi \subseteq A \times A$ tales que $\Phi \subseteq \Psi$. Entonces $\{\, \Theta \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A}) \mid \Psi \subseteq \Theta \,\}$ está incluido en $\{\, \Theta \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A}) \mid \Phi \subseteq \Theta \,\}$, luego $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$ lo está en $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Psi)$.

5. Sea $\Phi \subseteq A \times A$. En virtud de la extensividad y de la isotonía, se cumple que $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi) \subseteq \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi))$. Recíprocamente, debido a que $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi))$ es la mínima congruencia sobre $\mathbf{A}$ que contiene a $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$ y $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$ es una congruencia sobre $\mathbf{A}$ que se contiene a sí misma, se cumple que $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)) \subseteq \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$.

6. Sea $(\Phi_i \mid i \in I)$ una familia en $\mathrm{Sub}(A \times A)$, tal que $I \neq \varnothing$ y para cada $i, j \in I$, existe un $k \in I$ tal que $\Phi_i \cup \Phi_j \subseteq \Phi_k$. Puesto que, para cada $i \in I$, $\Phi_i \subseteq \bigcup_{i\in I} \Phi_i$, podemos afirmar, en virtud de la isotonía, que, para cada $i \in I$, $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi_i) \subseteq \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\bigcup_{i\in I} \Phi_i)$, por lo tanto $\bigcup_{i\in I} \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi_i) \subseteq \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\bigcup_{i\in I} \Phi_i)$. Recíprocamente, por ser la familia de relaciones $(\Phi_i \mid i \in I)$ no vacía y estar dirigida superiormente, la familia de congruencias de $\mathbf{A}$, $(\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi_i) \mid i \in I)$ no es vacía y está dirigida superiormente, por lo tanto $\bigcup_{i\in I} \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi_i)$ es una congruencia sobre $\mathbf{A}$ que, además, contiene a $\bigcup_{i\in I} \Phi_i$, luego también contiene a $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\bigcup_{i\in I} \Phi_i)$. □

Proposition 1.45. *El conjunto* $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$ *de las congruencias sobre un álgebra* $\mathbf{A}$ *es un subrretículo completo del retículo* $\mathbf{Eqv}(A)$ *de las equivalencias sobre* A.

Demostración. La proposición significa que si $(\Phi_i \mid i \in I)$ es una familia de congruencias sobre $\mathbf{A}$, entonces el ínfimo y el supremo de tal familia en $\mathbf{Eqv}(A)$, son de hecho congruencias sobre $\mathbf{A}$.

Nos limitamos a demostrar el caso del supremo, dejando el del ínfimo como ejercicio. Sea $n \in \mathbb{N} - 1$, $\sigma \in \Sigma_n$ y $(x_\alpha \mid \alpha \in n)$, $(y_\alpha \mid \alpha \in n) \in A^n$ tales que, para cada $\alpha \in n$, $x_\alpha \equiv y_\alpha \pmod{\sup_{i\in I} \Phi_i}$. Entonces, ya que en $\mathbf{Eqv}(A)$ se cumple que

$$\sup_{i\in I} \Phi_i = \left\{ (x,y) \in A^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists k \in \mathbb{N}-1\, \exists (a_\alpha \mid \alpha \in k+1) \in A^{k+1}\, \exists (i_\alpha \mid \alpha \in k) \in I^k \\ \text{tal que } x = a_0,\ y = a_k,\ \text{ y } \forall \alpha \in k\, (a_\alpha, a_{\alpha+1}) \in \Phi_{i_\alpha} \end{array} \right\},$$

podemos afirmar que hay sucesiones finitas de elementos de A y congruencias de la familia $(\Phi_i \mid i \in I)$ tales que

$$\begin{array}{ccc} x_0 = z_{0,0}\Phi_{i_{0,0}} z_{0,1} & \cdots & z_{0,k_0-1}\Phi_{i_{0,k_0-1}} z_{0,k_0} = y_0 \\ x_1 = z_{1,0}\Phi_{i_{1,0}} z_{1,1} & \cdots & z_{1,k_1-1}\Phi_{i_{1,k_1-1}} z_{1,k_1} = y_1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ x_{n-1} = z_{n-1,0}\Phi_{i_{n-1,0}} z_{n-1,1} & \cdots & z_{n-1,k_{n-1}-1}\Phi_{i_{n-1,k_{n-1}-1}} z_{n-1,k_{n-1}} = y_{n-1} \end{array}$$

Luego tenemos que

$$\begin{array}{c} F_\sigma(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \equiv F_\sigma(y_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \pmod{\sup_{\beta\in k_0} \Phi_{i_{0,\beta}}} \\ F_\sigma(y_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \equiv F_\sigma(y_0, y_1 \ldots, x_{n-1}) \pmod{\sup_{\beta\in k_1} \Phi_{i_{1,\beta}}} \\ \cdots\cdots \\ F_\sigma(y_0, y_1, \ldots, y_{n-2}, x_{n-1}) \equiv F_\sigma(y_0, y_1, \ldots, y_{n-2}, y_{n-1}) \pmod{\sup_{\beta\in k_{n-1}} \Phi_{i_{n-1,\beta}}}. \end{array}$$

Por lo tanto

$$F_\sigma(x_0, \ldots, x_{n-1}) \equiv F_\sigma(y_0, \ldots, y_{n-1}) \pmod{\sup_{\alpha\in n} \sup_{\beta\in k_\alpha} \Phi_{i_{\alpha,\beta}}}.$$

Así que podemos afirmar que

$$F_\sigma(x_0, \ldots, x_{n-1}) \equiv F_\sigma(y_0, \ldots, y_{n-1}) \pmod{\sup_{i\in I} \Phi_i},$$

lo cual demuestra que $\sup_{i\in I} \Phi_i$ es una congruencia sobre $\mathbf{A}$.

□

Antes de pasar a demostrar que el retículo de las congruencias sobre un álgebra $\mathbf{A}$ es algebraico, convenimos que, para una parte X de A, $\mathrm{Cg}(X)$ denota la congruencia sobre $\mathbf{A}$ generada por X^2. En particular, para $X = \{a, b\}$, usamos $\mathrm{Cg}(a, b)$, en lugar de $\mathrm{Cg}(\{a, b\})$.

Proposition 1.46. *El retículo* $\mathbf{Cgr}(\mathbf{A})$ *de las congruencias sobre un álgebra* $\mathbf{A}$*, es algebraico.*

Demostración. Demostramos en primer lugar que, para cada congruencia Φ sobre $\mathbf{A}$ se cumple que:

$$\Phi = \sup_{(a,b)\in\Phi} \mathrm{Cg}(a, b).$$

Es evidente que $\Phi \subseteq \sup_{(a,b)\in\Phi} \mathrm{Cg}(a, b)$. Recíprocamente, si $(x, y) \in \sup_{(a,b)\in\Phi} \mathrm{Cg}(a, b)$, entonces hay un $n \in \mathbb{N}-1$, una familia $(c_\alpha \mid \alpha \in n+1) \in A^{n+1}$ y una familia $((a_\alpha, b_\alpha) \mid \alpha \in n) \in \Phi^n$ tales que $x = c_0$, $y = c_n$ y, para cada $\alpha \in n$, $c_\alpha \equiv c_{\alpha+1} \pmod{\mathrm{Cg}(a_\alpha, b_\alpha)}$. Luego, para cada $\alpha \in n$, $\mathrm{Cg}(a_\alpha, b_\alpha) \subseteq \Phi$, porque $(a_\alpha, b_\alpha) \in \Phi$, por lo tanto, para cada $\alpha \in n$, $c_\alpha \equiv c_{\alpha+1} \pmod{\Phi}$. De donde $x \equiv y \pmod{\Phi}$ y por lo tanto $\sup_{(a,b)\in\Phi} \mathrm{Cg}(a, b) \subseteq \Phi$.

Demostramos ahora que, para cada $(a, b) \in A^2$, $\mathrm{Cg}(a, b)$ es compacta en $\mathbf{Cgr}(\mathbf{A})$. Sea $(\Phi_i \mid i \in I)$ una familia de congruencias sobre $\mathbf{A}$ tal que $\mathrm{Cg}(a, b) \subseteq \sup_{i\in I} \Phi_i$. Entonces $(a, b) \in \sup_{i\in I} \Phi_i$, luego hay un $n \in \mathbb{N}-1$, una familia $(c_\alpha \mid \alpha \in n+1) \in A^{n+1}$ y una familia $(i_\alpha \mid \alpha \in n) \in I^n$ tales que $a = c_0$, $b = c_n$ y, para cada $\alpha \in n$, $c_\alpha \equiv c_{\alpha+1} \pmod{\Phi_{i_\alpha}}$. Por lo tanto $a \equiv b \pmod{\sup_{\alpha\in n} \Phi_{i_\alpha}}$. luego $\mathrm{Cg}(a, b) \subseteq \sup_{\alpha\in n} \Phi_{i_\alpha}$. Por consiguiente $\mathrm{Cg}(a, b)$ es compacta.

□

Proposition 1.47. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* Φ *una relación binaria en* A *y* Ψ *una congruencia sobre* $\mathbf{A}$*. Entonces hay una congruencia* Θ *sobre* $\mathbf{A}$ *tal que* $\Psi \subseteq \Theta$ *y* $\Theta \cap \Phi = \Psi \cap \Phi$ *y* Θ *es maximal con dichas propiedades.*

Demostración. □

La proposición anterior se usa, sobre todo, cuando la relación binaria Φ consta de un único par (a,b) en el que $a \neq b$ y la congruencia Ψ sobre $\mathbf{A}$ es la diagonal. Entonces hay una congruencia Θ sobre $\mathbf{A}$ tal que $\Theta \cap \Phi = \varnothing$, i.e., $(a,b) \notin \Theta$, y Θ es maximal con dicha propiedad.

Theorem 1.48 (Grätzer-Schmidt)**.** *Si* $\mathbf{L}$ *es un retículo algebraico, entonces hay una signatura algebraica* $\mathbf{\Sigma}$ *y una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra álgebra* $\mathbf{A}$ *tal que* $\mathbf{L}$ *es isomorfo al retículo algebraico* $\mathbf{Cgr}(\mathbf{A})$.

Demostración. □

Proposition 1.49. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras. Entonces el* núcleo *de* f*, i.e.,* $\mathrm{Ker}(f) = \{\,(x,y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\,\}$*, es una congruencia sobre* $\mathbf{A}$.

Demostración. □

Proposition 1.50. *Si* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *es un monomorfismo, entonces es un homomorfismo inyectivo.*

Demostración. □

Proposition 1.51. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y* $\Phi \in \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}$*. Entonces hay una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{A}/\Phi$*, la* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* cociente de $\mathbf{A}$ entre Φ*, y un homomorfismo* $\mathrm{pr}_{\Phi}\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}/\Phi$*, la* proyección canónica *de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{A}/\Phi$*, tal que:*

1. $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_{\Phi}) = \Phi$.
2. (Propiedad universal) *Para cada homomorfismo* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$*, si* $\Phi \subseteq \mathrm{Ker}(f)$*, entonces hay un único homomorfismo* $g\colon \mathbf{A}/\Phi \longrightarrow \mathbf{B}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\Phi}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{A}/\Phi \arrow[d, "g"] \\ & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

La siguiente proposición establece que toda imagen homomorfa de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra es isomorfa a un álgebra cociente de la misma.

Proposition 1.52. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo sobreyectivo de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras. Entonces* $\mathbf{A}/\mathrm{Ker}(f)$ *es isomorfa a* $\mathbf{B}$.

Demostración. □

A continuación establecemos la factorización de un homomorfismo a traves de su núcleo.

Proposition 1.53 (Noether)**.** *Sea* f *un homomorfismo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{B}$*. Entonces hay un único homomorfismo inyectivo* f^{i}*, el* inyectivizado *de* f*, de* $\mathbf{A}/\mathrm{Ker}(f)$*, la* coimagen *de* f*, en* $\mathbf{B}$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, two heads, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}(f)}"'] & \mathbf{B} \\ & \mathbf{A}/\mathrm{Ker}(f) \arrow[u, tail, "f^{\mathrm{i}}"'] \end{tikzcd}$$

conmuta. Esta es la factorización canónica a través de la coimagen *de un homomorfismo. Además, si f es sobreyectivo, entonces f^{i} es sobreyectivo, luego biyectivo.*

Por otra parte, se cumple que para cada $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{C}$, cualquier homomorfismo sobreyectivo $g\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{C}$ y cualquier homomorfismo $h\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{B}$, si el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, two heads, "g"'] & \mathbf{B} \\
& \mathbf{C} \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces existe un único homomorfismo sobreyectivo $t\colon \mathbf{C} \twoheadrightarrow \mathbf{A}/\mathrm{Ker}(f)$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}(f)}"] \arrow[ddr, two heads, "g"'] & & \mathbf{B} \\
& \mathbf{A}/\mathrm{Ker}(f) \arrow[ur, tail, "f^{\mathrm{i}}"'] & \\
& \mathbf{C} \arrow[u, two heads, "t"'] \arrow[uur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposition 1.54. *Sea f un homomorfismo sobreyectivo de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$, h un homomorfismo sobreyectivo de $\mathbf{D}$ en $\mathbf{C}$ y g un homomorfismo de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{D}$. Entonces:*

1. *Una condición necesaria y suficiente para que exista un homomorfismo t de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{C}$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B} \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, "g"'] & \mathbf{A} \arrow[d, "t"] \\
\mathbf{D} \arrow[r, two heads, "h"'] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

   conmute, es que $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(h \circ g)$.

2. *Si Φ es una congruencia sobre $\mathbf{B}$ y Ψ una congruencia sobre $\mathbf{D}$, entonces una condición necesaria y suficiente para que exista un homomorfismo t de $\mathbf{B}/\Phi$ en $\mathbf{D}/\Psi$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B} \arrow[r, two heads, "\mathrm{pr}_{\Phi}"] \arrow[d, "g"'] & \mathbf{B}/\Phi \arrow[d, "t"] \\
\mathbf{D} \arrow[r, two heads, "\mathrm{pr}_{\Psi}"'] & \mathbf{D}/\Psi
\end{tikzcd}$$

   conmute, es que, para cada $x, y \in B$, si $(x, y) \in \Phi$, entonces $(g(x), g(y)) \in \Psi$

Además, tanto en el primero como en el segundo caso t está unívocamente determinada.

Demostración. □

Proposition 1.55. *Sean* $\Phi, \Psi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$ *y* $\Phi \subseteq \Psi$. *Entonces se cumple:*

1. Ψ/Φ *es una congruencia sobre* $\mathbf{A}/\Phi$.
2. *Existe un único homomorfismo* $\mathrm{p}_{\Phi,\Psi}$ *de* $\mathbf{A}/\Phi$ *en* $\mathbf{A}/\Psi$ *tal que* $\mathrm{p}_{\Phi,\Psi} \circ \mathrm{pr}_\Phi = \mathrm{pr}_\Psi$, *i.e., el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{A} \arrow[dl, "\mathrm{pr}_\Phi"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_\Psi"] & \\ \mathbf{A}/\Phi \arrow[rr, "\mathrm{p}_{\Phi,\Psi}"'] & & \mathbf{A}/\Psi \end{tikzcd}$$

   conmuta. Además, $\mathrm{p}_{\Phi,\Psi}$ *es sobreyectivo.*
3. $(\mathbf{A}/\Phi)/(\Psi/\Phi)$ *es isomorfa a* $\mathbf{A}/\Psi$.
4. $\Psi/\Phi = \mathrm{Ker}(\mathrm{p}_{\Phi,\Psi})$.

Demostración. □

En la proposición que sigue demostramos que un homomorfismo factoriza a traves de su núcleo y de su imagen.

Proposition 1.56. *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *dos* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras y* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo. Entonces el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}(f)}"'] & \mathbf{B} \\ \mathbf{A}/\mathrm{Ker}\,(f) \arrow[r, "f^b"'] & \mathbf{Im}(f) \arrow[u, "\mathrm{in}_{\mathbf{Im}(f)}"'] \end{tikzcd}$$

conmuta, siendo f^b *la* biyectivizada *de* f. *Además, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}(f)}"] \arrow[d, "f^{\mathrm{s}}"'] & \mathbf{A}/\mathrm{Ker}(f) \arrow[dl, "f^{\mathrm{b}}"'] \arrow[d, "f^{\mathrm{i}}"] \\ \mathbf{Im}(f) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\mathbf{Im}(f)}"'] & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

Proposition 1.57. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras. Si* $\Phi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{B})$ *entonces la imagen inversa de* Φ *mediante* f^2 *es una congruencia sobre* $\mathbf{A}$, *i.e.,* $(f^2)^{-1}[\Phi] \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$.

Proposition 1.58. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* $X \in \mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ *y* $\Phi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$. *Entonces se cumple que:*

1. $\mathrm{Sat}_\Phi(X) \in \mathrm{Sub}(\mathbf{A})$.
2. $\Phi \upharpoonright \mathrm{Sat}_\Phi(X)$ *es una congruencia sobre* $\mathbf{Sat}_\Phi(X)$.
3. $\mathbf{X}/(\Phi \upharpoonright \mathbf{X})$ *y* $\mathbf{Sat}_\Phi(X)/(\Phi \upharpoonright \mathbf{Sat}_\Phi(X))$ *son isomorfas.*

□

Demostración. □

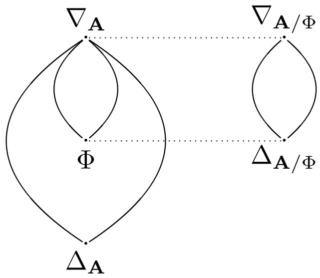
Proposition 1.59. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y* $\Phi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$. *Entonces se cumple que los retículos* $(\Uparrow \Phi, \subseteq)$ *y* $\mathbf{Cgr}(\mathbf{A}/\Phi)$ *son isomorfos.*

Demostración. El isomorfismo viene dado por la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \Uparrow \Phi & \longrightarrow & \mathrm{Cgr}(\mathbf{A}/\Phi) \\ \Psi & \longmapsto & \Psi/\Phi \end{array}$$

$\square$

La proposición anterior se puede ilustrar con la siguiente figura:



Proposition 1.60. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo sobreyectivo de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras. Si* $\Phi \subseteq A^2$*, entonces*

$$f^2[\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)] = \mathrm{Cg}_{\mathbf{B}}(f^2[\Phi]).$$

Demostración. $(f^2)^{-1}[\mathrm{Cg}_{\mathbf{B}}(f^2[\Phi])]$ es una congruencia sobre $\mathbf{A}$ que contiene a $\Phi \cup \mathrm{Ker}(f)$, luego contiene a $\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$, asi que, por ser f sobreyectiva, $\mathrm{Cg}_{\mathbf{B}}(f^2[\Phi])$ contiene a $f^2[\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)]$.

Por otra parte, al ser f un homomorfismo sobreyectivo, hay un isomorfismo entre los conjuntos ordenados $(\Uparrow \mathrm{Ker}(f), \subseteq)$ y $\mathbf{Cgr}(\mathbf{B})$. Pero $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$ así que corresponde a una congruencia $f^2[\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)]$ que contiene a $f^2[\Phi]$, luego $f^2[\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)]$ contiene a $\mathrm{Cg}_{\mathbf{B}}(f^2[\Phi])$. $\square$

Proposition 1.61. *Si* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ *es un automorfismo y* Φ *una congruencia sobre* $\mathbf{A}$*, entonces* $f \cdot \Phi = f^2[\Phi]$ *es una congruencia sobre* $\mathbf{A}$*.*

Demostración. Antes de proceder a la demostración debemos observar que, para cada $(x, y) \in A^2$, $(x, y) \in f \cdot \Phi$ precisamente si $(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \in \Phi$. $\square$

Proposition 1.62. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* Φ *una congruencia sobre* $\mathbf{A}$ *y* $f, g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ *dos automorfismos de* $\mathbf{A}$*. Entonces:*

1. $\mathrm{id}_{\mathbf{A}} \cdot \Phi = \Phi$.
2. $(f \circ g) \cdot \Phi = f \cdot (g \cdot \Phi)$.

Así pues el grupo $\mathbf{Aut}(\mathbf{A})$ *de los automorfismos de* $\mathbf{A}$ *actúa sobre el conjunto* $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$ *de las congruencias sobre* $\mathbf{A}$*.*

Demostración. $\square$

Proposition 1.63. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ *un automorfismo de* $\mathbf{A}$*. Entonces:*

1. *Si* $\Phi, \Psi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$ *son tales que* $\Phi \subseteq \Psi$*, entonces* $f \cdot \Phi \subseteq f \cdot \Psi$*.*
2. $f \cdot \nabla_{\mathbf{A}} = \nabla_{\mathbf{A}}$*.*
3. *Si* $I \neq \varnothing$ *y* $(\Phi_i \mid i \in I) \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})^I$*, entonces* $f \cdot \mathrm{ínf}_{i \in I} \Phi_i = \mathrm{ínf}_{i \in I} f \cdot \Phi_i$*.*
4. $f \cdot \Delta_{\mathbf{A}} = \Delta_{\mathbf{A}}$*.*
5. $f \cdot (\Phi \circ \Psi) = (f \cdot \Phi) \circ (f \cdot \Psi)$*.*
6. *Si* $I \neq \varnothing$ *y* $(\Phi_i \mid i \in I) \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})^I$*, entonces* $f \cdot \sup_{i \in I} \Phi_i = \sup_{i \in I} f \cdot \Phi_i$*.*

Demostración. Sea $I \neq \varnothing$ y $(\Phi_i \mid i \in I) \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})^I$. Puesto que, para cada $i \in I$, $\Phi_i \subseteq \sup_{i \in I} \Phi_i$, también. para cada $i \in I$, $f \cdot \Phi_i \subseteq f \cdot \sup_{i \in I} \Phi_i$, luego $\sup_{i \in I} f \cdot \Phi_i \subseteq f \cdot \sup_{i \in I} \Phi_i$. Recíprocamente, para cada $i \in I$, se cumple que $f \cdot \Phi_i \subseteq \sup_{i \in I} f \cdot \Phi_i$, luego, para cada $i \in I$, $\Phi_i = f^{-1} \cdot (f \cdot \Phi_i) \subseteq f^{-1} \cdot (\sup_{i\in I} f \cdot \Phi_i)$, por lo tanto $\sup_{i\in I} \Phi_i \subseteq f^{-1} \cdot (\sup_{i\in I} f \cdot \Phi_i)$, así que $f \cdot \sup_{i\in I} \Phi_i \subseteq \sup_{i\in I} f \cdot \Phi_i$. □

Sea $\mathbf{A}$ una $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra, $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ un automorfismo de $\mathbf{A}$ y $\Phi, \Psi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$. Demuéstrese que si $f \cdot \Phi \subseteq f \cdot \Psi$, entonces $\Phi \subseteq \Psi$.

Proposition 1.64. *Sea* $4\mathbf{A}$ *una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra y* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ *un automorfismo de* $\mathbf{A}$*. Entonces*

$$\lambda_f \begin{cases} (\mathrm{Cgr}(\mathbf{A}), \subseteq) & \longrightarrow & (\mathrm{Cgr}(\mathbf{A}), \subseteq) \\ \Phi & \longmapsto & f \cdot \Phi \end{cases}$$

es un automorfismo de $(\mathrm{Cgr}(\mathbf{A}), \subseteq)$*. Además, se cumple que*

$$\lambda \begin{cases} \mathbf{Aut}(\mathbf{A}) & \longrightarrow & \mathbf{Aut}(\mathrm{Cgr}(\mathbf{A}), \subseteq) \\ f & \longmapsto & \lambda_f \end{cases}$$

es un homomorfismo de grupos. A los elementos del subgrupo normal $\mathbf{Inn}(\mathbf{A}) = \mathbf{Ker}(\lambda)$ *de* $\mathbf{Aut}(\mathbf{A})$*, i.e., a los automorfismos* f *de* $\mathbf{A}$ *tales que, para cada congruencia* Φ *sobre* $\mathbf{A}$*,* $f \cdot \Phi = \Phi$ *los denominamos, siguiendo la exposición de Sioson en* [**?**]*, automorfismos* interiores *de* $\mathbf{A}$*.*

Demostración. □

Definition 1.65. Sea $\mathbf{A}$ una $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra y Φ una congruencia sobre $\mathbf{A}$. Decimos que Φ es una congruencia *característica* si, para cada automorfismo $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$, $f \cdot \Phi \subseteq \Phi$. Por último, decimos que Φ es una congruencia *totalmente invariante* si, para cada endomorfismo $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$, $f \cdot \Phi \subseteq \Phi$.

Sea $\mathbf{A}$ una $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra y Φ una congruencia sobre $\mathbf{A}$. Demuéstrese que Φ es una congruencia característica precisamente si $\mathbf{Stab}_{\mathbf{Aut}(\mathbf{A})}(\Phi)$, el estabilizador de Φ en $\mathbf{A}$, es $\mathbf{Aut}(\mathbf{A})$

Proposition 1.66. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra,* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ *un automorfismo de* $\mathbf{A}$ *y* X *un cerrado de* $\mathbf{A}$*. Entonces* $f \cdot \mathrm{Cg}(X^2) = \mathrm{Cg}(f \cdot X^2)$

Proposition 1.67. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra,* X *un cerrado de* $\mathbf{A}$*,* Θ *una congruencia sobre* $\mathbf{A}$ *y* Φ *una congruencia sobre* $\mathbf{X}$*. Si* $\Theta{\restriction}X \subseteq \Phi$*, entonces la relación binaria* $\Theta(\Phi)$ *sobre* $[X]_\Theta$*, la* Θ*-saturación de* X*, definida como:*

$$\Theta(\Phi) = \left\{ (a,b) \in [X]_\Theta^2 \;\middle|\; \exists c,d \in X \begin{pmatrix} a \equiv c(\Theta), b \equiv d(\Theta) \\ \& \;\; c \equiv d(\Phi) \end{pmatrix} \right\},$$

es una congruencia sobre $[\mathbf{X}]_\Theta$ *y* $[\mathbf{X}]_\Theta/\Theta(\Phi) \cong \mathbf{X}/\Phi$*.*

Demostración. □

Lemma 1.68 (Zassenhaus)**.** *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra,* D*,* E *dos cerrados de* $\mathbf{A}$*,* Θ *una congruencia sobre* $\mathbf{D}$ *y* Φ *una congruencia sobre* $\mathbf{E}$*. Entonces, denotando por* Ψ *la congruencia* $\Theta{\restriction}\mathbf{D}\cap\mathbf{E} \vee \Phi{\restriction}\mathbf{D}\cap\mathbf{E}$ *sobre* $\mathbf{D}\cap\mathbf{E}$*, se cumple que* $[\mathbf{D}\cap\mathbf{E}]_\Theta/\Theta(\Psi) \cong [\mathbf{D}\cap\mathbf{E}]_\Phi/\Phi(\Psi)$*.*

Resumimos la situación descrita mediante el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{D} \arrow[d, dash] & & \mathbf{E} \arrow[d, dash] & \\
 & {[\mathbf{D}\cap\mathbf{E}]_{\Theta}} \arrow[dr, dash] \arrow[dd, dash] & & {[\mathbf{D}\cap\mathbf{E}]_{\Phi}} \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash] & \\
 & & \mathbf{D}\cap\mathbf{E} \arrow[dd, dash] & & \\
 & \Theta(\Psi) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \Phi(\Psi) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\Theta \arrow[dr, dash] & & \Psi \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \Phi \arrow[dl, dash] \\
 & \Theta{\restriction}\mathbf{D}\cap\mathbf{E} & & \Phi{\restriction}\mathbf{D}\cap\mathbf{E} &
\end{tikzcd}$$

Demostración. En virtud de la proposición 1.67 tenemos que

$$[\mathbf{D}\cap\mathbf{E}]_{\Theta}/\Theta(\Psi) \cong \mathbf{D}\cap\mathbf{E}/\Psi \quad \text{y} \quad [\mathbf{D}\cap\mathbf{E}]_{\Phi}/\Phi(\Psi) \cong \mathbf{D}\cap\mathbf{E}/\Psi,$$

luego $[\mathbf{D}\cap\mathbf{E}]_{\Theta}/\Theta(\Psi) \cong [\mathbf{D}\cap\mathbf{E}]_{\Phi}/\Phi(\Psi)$. □

Definition 1.69. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Una *serie normal* de $\mathbf{A}$ de longitud p es un par $((\mathbf{A}_i \mid i \in p+1), (\Phi_i \mid i \in p))$ tal que:

1. $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$.
2. Para cada $i \in p$, $\mathbf{A}_{i+1}$ es una subálgebra de $\mathbf{A}_i$.
3. Para cada $i \in p$, $\Phi_i \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A}_i)$.
4. Para cada $i \in p$, $\mathbf{A}_{i+1} = [\mathbf{A}_p]_{\Phi_i}$.

Si $((\mathbf{A}_i \mid i \in p+1), (\Phi_i \mid i \in p))$ y $((\mathbf{A}'_i \mid i \in q+1), (\Phi'_i \mid i \in q))$ son dos series normales de $\mathbf{A}$ tales que $\mathbf{A}_p = \mathbf{A}'_q$, decimos que la segunda es un *refinamiento* de la primera si $p \leq q$ y, para cada $i \in p$, existe un $j \in q$ tal que $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}'_j$.

Dos series normales $((\mathbf{A}_i \mid i \in p+1), (\Phi_i \mid i \in p))$ y $((\mathbf{A}'_i \mid i \in q+1), (\Phi'_i \mid i \in q))$ de $\mathbf{A}$ son *isomorfas* si $p = q$ y existe una permutación σ de p tal que, para cada $i \in p$, $\mathbf{A}_i/\Phi_i \cong \mathbf{A}'_{\sigma(i)}/\Phi'_{\sigma(i)}$.

Theorem 1.70 (Schreier)**.** *Dos series normales* $((\mathbf{A}_i \mid i \in p+1), (\Phi_i \mid i \in p))$ *y* $((\mathbf{A}'_i \mid i \in q+1), (\Phi'_i \mid i \in q))$ *de la misma* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{A}$ *tienen refinamientos isomorfos si* $\mathbf{A}_p = \mathbf{X} = \mathbf{A}'_q$ *y, para cada* $i \in p$ *y cada* $j \in q$*, si denotamos por* $A_{i,j} = A_i \cap A'_j$ *y por* $\Psi_{i,j} = (\Phi_i{\restriction}A_{i,j}) \vee (\Phi'_j{\restriction}A_{i,j})$*, entonces*

$$[X]_{\Psi_{i,j}} = [[X]_{\Phi_i \restriction A_{i,j}}]_{\Phi'_i \restriction A_{i,j}} = [[X]_{\Phi'_i \restriction A_{i,j}}]_{\Phi_i \restriction A_{i,j}}.$$

Definition 1.71. Una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ es *simple* precisamente si $\mathbf{A}$ tiene exactamente dos congruencias: $\Delta_{\mathbf{A}}$ y $\nabla_{\mathbf{A}}$.

Proposition 1.72. *Una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{A}$ *es simple si y sólo si cualquier homomorfismo desde* $\mathbf{A}$ *que no sea constante es inyectivo.*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{A}$ sea simple y sea $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo que no sea constante, i.e., que no factorice a través de la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra final. Si $\mathrm{Ker}(f) \neq$

$\Delta_{\mathbf{A}}$, entonces, necesariamente, $\mathrm{Ker}(f) = \nabla_{\mathbf{A}}$, luego, para cada $x, y \in A$, $f(x) = f(y)$, por lo tanto f sería constante, contradicción. De modo que f es inyectiva.

Recíprocamente, si $\mathbf{A}$ no fuera simple, existiría una congruencia Φ sobre $\mathbf{A}$ tal que $\Delta_{\mathbf{A}} \subset \Phi \subset \nabla_{\mathbf{A}}$, luego la proyección canónica pr_Φ no sería ni constante ni inyectiva. □

1.6. Endomorfismos y productos semidirectos. Nos proponemos demostrar en lo que sigue, entre otras cosas, que hay una biyección entre el conjunto de los endomorfismos idempotentes de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ y el conjunto formado por los pares (X, Φ), en los que X es un cerrado de $\mathbf{A}$ y Φ una congruencia sobre $\mathbf{A}$ que determinan una representación de $\mathbf{A}$ como un producto semidirecto de X y Φ.

Si $\mathbf{A}$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y f un endomorfismo de $\mathbf{A}$, entonces, considerando las iteraciones finitas de f, obtenemos una sucesión decreciente de subálgebras de $\mathbf{A}$:

$$\mathrm{Im}(f) \supseteq \mathrm{Im}(f^2) \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{Im}(f^n) \supseteq \mathrm{Im}(f^{n+1}) \supseteq \cdots,$$

y una sucesión creciente de congruencias sobre $\mathbf{A}$:

$$\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f^2) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Ker}(f^n) \subseteq \mathrm{Ker}(f^{n+1}) \subseteq \cdots.$$

Definition 1.73. Decimos que el retículo $\mathbf{Cl}(\mathbf{A})$ de los cerrados de $\mathbf{A}$ verifica la *condición de la cadena descendente* si toda sucesión decreciente de cerrados de $\mathbf{A}$:

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq \cdots \supseteq X_n \supseteq X_{n+1} \supseteq \cdots,$$

es estacionaria.

Proposition 1.74. *Si una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ verifica la condición de la cadena descendente, entonces, para cada endomorfismo f de $\mathbf{A}$, la familia $(\mathrm{Im}(f^n))_{n\in\mathbb{N}}$ de las imágenes de las iteraciones de f, es estacionaria.*

Definition 1.75. Decimos que el retículo $\mathbf{Cgr}(\mathbf{A})$ de las congruencias de $\mathbf{A}$ verifica la *condición de la cadena ascendente* si toda sucesión creciente de congruencias sobre $\mathbf{A}$:

$$\Phi_1 \subseteq \Phi_2 \subseteq \cdots \subseteq \Phi_n \subseteq \Phi_{n+1} \subseteq \cdots,$$

es estacionaria.

Proposition 1.76. *Si una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ verifica la condición de la cadena ascendente, entonces, para cada endomorfismo f de $\mathbf{A}$, la familia $(\mathrm{Ker}(f^n))_{n\in\mathbb{N}}$ de los núcleos de las iteraciones de f, es estacionaria.*

Proposition 1.77. *Si f es un endomorfismo idempotente de $\mathbf{A}$, i.e., $f^2 = f$, entonces se cumple que la saturación de $\mathrm{Im}(f)$ mediante la congruencia $\mathrm{Ker}(f)$ coincide con A y que $\mathrm{Im}(f)$ corta a cada clase de equivalencia relativa a $\mathrm{Ker}(f)$ en a lo sumo un elemento, i.e., que:*

1. $[\mathrm{Im}(f)]_{\mathrm{Ker}(f)} = A$, *y*
2. $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)^2 = \Delta_{\mathrm{Im}(f)}$.

Por consiguiente $\mathrm{Im}(f)$ es un transversal de $\mathbf{A}/\mathrm{Ker}(f)$ en $\mathbf{A}$

Demostración. □

Demuéstrese que un endomorfismo f de $\mathbf{A}$ es *saturativo*, i.e., es tal que

$$[\mathrm{Im}(f)]_{\mathrm{Ker}(f)} = A,$$

precisamente si $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$. Por lo tanto, todo endomorfismo idempotente, es saturativo.

Demuéstrese que un endomorfismo f de $\mathbf{A}$ es *separativo*, i.e., es tal que

$$\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)^2 = \Delta_{\mathrm{Im}(f)},$$

precisamente si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$. Por lo tanto, todo endomorfismo idempotente, es separativo.

Sea f un endomorfismo de $\mathbf{A}$. Demuéstrese que si $f{\restriction}\mathbf{Im}(f) = \mathrm{in}_{\mathbf{Im}(f)}$, entonces f es idempotente.

Todo esto nos permite afirmar que cualquier endomorfismo idempotente f de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$, determina un cerrado X de $\mathbf{A}$, la imagen de f, y una congruencia Φ sobre $\mathbf{A}$, el núcleo de f, tales que $[X]_\Phi = A$ y $\Phi \cap X^2 = \Delta_X$. Ahora vamos a considerar la situación recíproca y a estudiar la relación entre los dos procesos.

Definition 1.78. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra, X un cerrado de $\mathbf{A}$ y Φ una congruencia sobre $\mathbf{A}$. Decimos que $\mathbf{A}$ es el producto *semidirecto* de Φ y X, y lo denotamos por $\mathbf{A} = \Phi \rtimes X$, si $[X]_\Phi = A$ y $\Phi \cap X^2 = \Delta_X$.

Proposition 1.79. *Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra, X un cerrado de $\mathbf{A}$ y Φ una congruencia sobre $\mathbf{A}$. Si $\mathbf{A} = \Phi \rtimes X$, entonces existe un endomorfismo $f_{X,\Phi}$ de $\mathbf{A}$ tal que $f_{X,\Phi}{\restriction}\mathbf{X} = \mathrm{in}_\mathbf{X}$, $\mathrm{Im}(f_{X,\Phi}) = X$ y $\mathrm{Ker}(f_{X,\Phi}) = \Phi$.*

Demostración. Sea $f_{X,\Phi}$ la endoaplicación de A que a un $a \in A$ le asigna el único elemento x de X tal que $(a, x) \in \Phi$. Entonces $f_{X,\Phi}$ es un endomorfismo de $\mathbf{A}$ que cumple las condiciones de la proposición. □

Sea f un endomorfismo idempotente de $\mathbf{A}$. Demuéstrese que $f_{\mathrm{Im}(f),\mathrm{Ker}(f)} = f$.

Con esto queda demostrado que existe una correspondencia biunívoca entre los endomorfismos idempotentes de $\mathbf{A}$ y los pares (X, Φ) formados por un cerrado X de $\mathbf{A}$ y una congruencia Φ sobre $\mathbf{A}$, para los que se cumple que $\mathbf{A}$ es un producto semidirecto de X y Φ.

Demostramos ahora, siguiendo la exposición de Dubreil en [**?**], que a cada endomorfismo idempotente f de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$, se le puede asociar un grupo $\mathbf{\Gamma}_f$ de endomorfismos de $\mathbf{A}$ que tiene a f como neutro y que la unión de todos los conjuntos subyacentes de estos grupos, que son dos a dos disjuntos, es el conjunto de los endomorfismos de $\mathbf{A}$ que son saturativos y separativos.

1.7. Subálgebras esenciales y el pedestal. A continuación, generalizando los conceptos de submódulo esencial de un módulo y de pedestal de un módulo, definimos los de cerrado esencial y pedestal de un álgebra.

Si $\mathbf{A}$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra, es evidente que $\mathbf{A}$, la máxima subálgebra de $\mathbf{A}$, tiene la propiedad de que, para cada congruencia Φ sobre $\mathbf{A}$, si $\Phi \neq \Delta_\mathbf{A}$, entonces $\Phi_\mathbf{A} \neq \Delta_\mathbf{A}$.

Definition 1.80. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Decimos que una subálgebra $\mathbf{X}$ de $\mathbf{A}$ es *esencial*, y lo denotamos por $\mathbf{X} \trianglelefteq \mathbf{A}$, si para cada congruencia Φ sobre $\mathbf{A}$, si $\Phi \neq \Delta_\mathbf{A}$, entonces $\Phi_\mathbf{X} \neq \Delta_\mathbf{X}$. Además, decimos que un monomorfismo $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es *esencial* si $\mathrm{Im}(f)$ es una subálgebra esencial de $\mathbf{B}$.

Presentamos a continuación diversas caracterizaciones del concepto de subálgebra esencial.

Proposition 1.81. *Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $\mathbf{X}$ una subálgebra de $\mathbf{A}$. Entonces son equivalentes:*

1. *La subálgebra $\mathbf{X}$ es esencial.*
2. *La inclusión canónica $\mathrm{in}_\mathbf{X}\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A}$ es un monomorfismo esencial.*
3. *Para cada homomorfismo $h\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, si $\mathrm{Ker}(h)_\mathbf{X} = \Delta_\mathbf{X}$, entonces $\mathrm{Ker}(h) = \Delta_\mathbf{A}$.*

Demostración. □

Corollary 1.82. *Un monomorfismo $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es esencial si y sólo si, para cada homomorfismo $g\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$, si $g \circ f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ es un monomorfismo, entonces g es un monomorfismo.*

Demostración. □

Definition 1.83. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. El *pedestal* de $\mathbf{A}$, al que denotamos por $\mathrm{Soc}(\mathbf{A})$, es $\bigwedge_{\mathbf{X} \trianglelefteq \mathbf{A}} \mathbf{X}$, i.e., la máxima subálgebra de $\mathbf{A}$ que está contenida en todas las subálgebras esenciales de $\mathbf{A}$.

El pedestal de $\mathbf{A}$ no es necesariamente una subálgebra esencial de $\mathbf{A}$.

1.8. Congruencias supérfluas y el radical de Jacobson. A continuación, generalizando los conceptos de submódulo supérfluo de un módulo y de radical de un módulo, definimos los de congruencia supérflua y radical de un álgebra.

Si $\mathbf{A}$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra, es evidente que $\Delta_{\mathbf{A}}$, la congruencia mínima sobre $\mathbf{A}$, tiene la propiedad de que, para cada cerrado X de $\mathbf{A}$, si $[X]_{\Delta_{\mathbf{A}}} = A$, entonces $X = A$.

Definition 1.84. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Decimos que una congruencia Ψ sobre $\mathbf{A}$ es *supérflua* o *coesencial*, y lo denotamos por $\Psi \ll \mathbf{A}$, si para cada cerrado X de $\mathbf{A}$, si $[X]_\Psi = A$, entonces $X = A$. Además, decimos que un epimorfismo $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es *supérfluo* o *coesencial* si $\mathrm{Ker}(f)$ es una congruencia supérflua sobre $\mathbf{A}$.

Presentamos a continuación diversas caracterizaciones del concepto de congruencia supérflua.

Proposition 1.85. *Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y Ψ una congruencia sobre $\mathbf{A}$. Entonces son equivalentes:*

1. *La congruencia Ψ es supérflua.*
2. *La proyección canónica $\mathrm{pr}_\Psi\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}/\Psi$ es un epimorfismo supérfluo.*
3. *Para cada homomorfismo $h\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$, si $[\mathrm{Im}(h)]_\Psi = A$, entonces $\mathrm{Im}(h) = A$.*

Demostración. □

Corollary 1.86. *Un epimorfismo $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es supérfluo si y sólo si, para cada homomorfismo $g\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{A}$, si $f \circ g\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{B}$ es un epimorfismo, entonces g es un epimorfismo.*

Demostración. □

Definition 1.87. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. El *radical de Jacobson* de $\mathbf{A}$, al que denotamos por $\mathrm{Rad}(\mathbf{A})$, es $\bigvee_{\Psi \ll \mathbf{A}} \Psi$, i.e., la mínima congruencia sobre $\mathbf{A}$ que contiene a todas las congruencias supérfluas sobre $\mathbf{A}$.

El radical de Jacobson de $\mathbf{A}$ no es necesariamente una congruencia supérflua sobre $\mathbf{A}$.

2. Algebras libres

2.1. Extensión de una signatura por un conjunto. Para un conjunto X y una signatura algebraica $\mathbf{\Sigma} = (\Sigma, \mathrm{ar})$, denotamos por $\Sigma \coprod X$, el coproducto de Σ y X, i.e., el conjunto $(\Sigma \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$, por in_Σ la inclusión canónica de Σ en $\Sigma \coprod X$, i.e., la aplicación de Σ en $\Sigma \coprod X$ que a un $\sigma \in \Sigma$ le asigna $(\sigma, 0)$, y por in_X la inclusión canónica de X en $\Sigma \coprod X$, i.e., la aplicación de X en $\Sigma \coprod X$ que a un $x \in X$ le asigna $(x, 1)$. Además, convenimos, para abreviar, en denotar por (σ) el valor de la aplicación $\eta_{\Sigma \coprod X} \circ \mathrm{in}_\Sigma$ de Σ en $\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$, en $\sigma \in \Sigma$, y por (x) el valor de la aplicación $\eta_{\Sigma \coprod X} \circ \mathrm{in}_X$ de X en $\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$, en $x \in X$. Obsérvese que si no hiciéramos tales convenios notacionales, deberíamos escribir $((\sigma, 0))$ en lugar de (σ), y $((x, 1))$ en lugar de (x).

Proposition 2.1. *Sea* $\boldsymbol{\Sigma} = (\Sigma, \mathrm{ar})$ *una signatura algebraica,* X *un conjunto y* κ_0 *la aplicación de* X *en* $\mathbb{N}$ *que a cada* $x \in X$ *le asigna como valor* 0*. Entonces hay una única aplicación* $\mathrm{ar}[X]$ *de* $\Sigma \coprod X$ *en* $\mathbb{N}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[r, "\mathrm{in}_\Sigma"] \arrow[dr, "\mathrm{ar}"'] & \Sigma \coprod X \arrow[d, "\mathrm{ar}[X]"] & X \arrow[l, "\mathrm{in}_X"'] \arrow[dl, "\kappa_0"] \\ & \mathbb{N} & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Es suficiente tomar como aplicación $\mathrm{ar}[X]$ de $\Sigma \coprod X$ en $\mathbb{N}$, la que asigna a $(\sigma, 0)$, con $\sigma \in \Sigma$, como valor $\mathrm{ar}(\sigma)$, y a $(x, 1)$, con $x \in X$, como valor 0. □

La proposición anterior afirma simplemente que una signatura algebraica $\boldsymbol{\Sigma} = (\Sigma, \mathrm{ar})$ y un conjunto de variables X, determinan, unívocamente, otra signatura algebraica $\boldsymbol{\Sigma}[X] = (\Sigma \coprod X, \mathrm{ar}[X])$, la *extensión de* $\boldsymbol{\Sigma}$ *por* X, cuyo conjunto de símbolos de operación, se obtiene agregando, de manera disjunta, al conjunto de símbolos de operación dado Σ, el conjunto de las variables X, pero consideradas, ahora, como símbolos de operación 0-arios.

Proposition 2.2. *Sea* $\boldsymbol{\Sigma}$ *una signatura algebraica,* X *un conjunto y* $\mathrm{ar}[X]$ *la única aplicación de* $\Sigma \coprod X$ *en* $\mathbb{N}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[r, "\mathrm{in}_\Sigma"] \arrow[dr, "\mathrm{ar}"'] & \Sigma \coprod X \arrow[d, "\mathrm{ar}[X]"] & X \arrow[l, "\mathrm{in}_X"'] \arrow[dl, "\kappa_0"] \\ & \mathbb{N} & \end{tikzcd}$$

conmuta. Entonces hay un único morfismo $\mathrm{ar}[X]^\sharp \colon \mathbf{Ml}(\Sigma \coprod X) \longrightarrow (\mathbb{N}, +, 0)$ *que extiende a la aplicación* $\mathrm{ar}[X]$*, i.e.,* $\mathrm{ar}[X]^\sharp$ *es el único homomorfismo del monoide* $\mathbf{Ml}(\Sigma \coprod X)$ *en el monoide* $(\mathbb{N}, +, 0)$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \Sigma \coprod X \arrow[r, "\eta_{\Sigma \coprod X}"] \arrow[dr, "\mathrm{ar}[X]"'] & \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X) \arrow[d, "\mathrm{ar}[X]^\sharp"] \\ & \mathbb{N} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposition 2.3. *Sea* $\boldsymbol{\Sigma}$ *una signatura algebraica,* X *un conjunto y* κ_1 *la aplicación de* $\Sigma \coprod X$ *en* $\mathbb{N}$ *que a cada miembro de* $\Sigma \coprod X$ *le asigna como valor* 1*. Entonces hay un único morfismo* $|\cdot| \colon \mathbf{Ml}(\Sigma \coprod X) \longrightarrow (\mathbb{N}, +, 0)$ *que extiende a la aplicación* κ_1 *de* $\Sigma \coprod X$ *en* $\mathbb{N}$*, i.e.,* $|\cdot|$ *es el único morfismo del monoide* $\mathbf{Ml}(\Sigma \coprod X)$ *en el monoide* $(\mathbb{N}, +, 0)$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \Sigma \coprod X \arrow[r, "\eta_{\Sigma \coprod X}"] \arrow[dr, "\kappa_1"'] & \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X) \arrow[d, "|\cdot|"] \\ & \mathbb{N} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

2.2. Existencia del álgebra libre sobre un conjunto. Nos proponemos demostrar, en lo que sigue, que dada una signatura algebraica $\mathbf{\Sigma}$ y un conjunto X, existe una $\mathbf{\Sigma}$-algebra $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, la $\mathbf{\Sigma}$-algebra *absolutamente libre* sobre X, y una aplicación η_X de X en $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, la *inclusión de los generadores*, tal que para cada $\mathbf{\Sigma}$-algebra $\mathbf{A}$ y cada aplicación $f\colon X \longrightarrow A$, hay un único $\mathbf{\Sigma}$-homomorfismo $f^\sharp$ de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ en $\mathbf{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[d, "f^\sharp"] \\ & A \end{tikzcd}$$

conmuta.

Para obtener la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra absolutamente libre sobre un conjunto X, definimos en primer lugar, explícitamente, una $\mathbf{\Sigma}$-algebra $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, la $\mathbf{\Sigma}$-algebra de las *palabras sobre* X, cuyo conjunto subyacente estará formado por todas las palabras sobre el alfabeto $\Sigma \coprod X$.

Definition 2.4. Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y X un conjunto. Denotamos por $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ la $\mathbf{\Sigma}$-algebra cuyo conjunto subyacente, $\mathrm{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, es el conjunto $\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$, formado por todas las palabras sobre el alfabeto $\Sigma \coprod X$, y cuyas operaciones estructurales, F_σ, para cada $\sigma \in \Sigma$, son las definidas como:

$$\mathrm{F}_\sigma \begin{cases} (\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X))^{\mathrm{ar}(\sigma)} & \longrightarrow \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X) \\ (P_j \mid j \in \mathrm{ar}(\sigma)) & \longmapsto (\sigma) \curlywedge \curlywedge (P_j \mid j \in \mathrm{ar}(\sigma)) \end{cases},$$

i.e., como la concatenación de la palabra (σ) y de las palabras P_j, con $j \in \mathrm{ar}(\sigma)$.

A la $\mathbf{\Sigma}$-algebra $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ la denominamos la $\mathbf{\Sigma}$-algebra de las *palabras sobre* X. Además, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, y con el fin de abreviar, denotaremos la acción de F_σ sobre la familia finita de palabras $(P_j \mid j \in n)$ como $(\sigma)P_0 \cdots P_{n-1}$.

En lo anterior, las operaciones estructurales, F_σ, se han podido definir, de cierta manera canónica, esencialmente, porque $\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$ además de ser un conjunto, está dotado de una estructura de monoide, gracias, en particular, a la operación de concatenación de palabras. Es por ello, entre otras razones, por lo que el concepto de monoide es tan importante.

Ahora que disponemos de la $\mathbf{\Sigma}$-algebra $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, así como del concepto de subálgebra de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra, definimos la $\mathbf{\Sigma}$-algebra absolutamente libre sobre un conjunto.

Definition 2.5. Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y X un conjunto. Entonces la $\mathbf{\Sigma}$-algebra *absolutamente libre* sobre X, denotada por $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, es la subálgebra de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ canónicamente asociada a $\mathrm{Sg}_{\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)}(\{\,(x) \mid x \in X\,\})$, i.e., al cerrado de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ generado por $\{\,(x) \mid x \in X\,\}$. A los miembros del conjunto $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, subyacente de la $\mathbf{\Sigma}$-algebra $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, los denominamos *símbolos de operación polinómica* o *términos con variables en* X.

En virtud de la definición, sabemos que $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ es la subálgebra de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ canónicamente asociada al cerrado de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ generado por $\{\,(x) \mid x \in X\,\}$, pero desconocemos, en principio, si los términos o símbolos de operación polinómica con variables en X, admiten alguna representación canónica. Vamos a demostrar, siguiendo a Bourbaki, que, de hecho, los términos sí tienen una representación canónica. Pero antes de ello, introducimos el concepto de *sucesión de formación* de una palabra, relativa a una signatura algebraica y a un conjunto de variables, mediante el cual daremos otra caracterización del conjunto $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, que no será, esencialmente, mas que otra versión del hecho de que

$$\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) = \mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)}(\{\,(x) \mid x \in X\,\}).$$

Definition 2.6. Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica, X un conjunto y $P \in \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$. Una *sucesión de formación* para P, relativa a $\mathbf{\Sigma}$ y X, es una familia finita no vacía $(P_i \mid i \in n)$ en $\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$, i.e., un miembro de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}-1} \mathrm{Fnc}(n, \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X))$ que tiene las siguientes propiedades:

1. $P = P_{n-1}$.
2. $\forall i \in n$, $\exists x \in X$ tal que $P_i = (x)$, o $\exists \sigma \in \Sigma_0$ tal que $P_i = (\sigma)$, o $\exists p \in \mathbb{N}-1$, $\exists \sigma \in \Sigma_p$ y $\exists (i_\alpha \mid \alpha \in p) \in i^p$ tal que $P_i = (\sigma) P_{i_0} \cdots P_{i_{p-1}}$.

Denotamos por $\mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ el conjunto de todas las palabras $P \in \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$ para las que existe alguna sucesión de formación, i.e., $\mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ es el subconjunto de $\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$ que consta precisamente de las palabras $P \in \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$ para las que $\exists n \in \mathbb{N}-1$, $\exists (P_i \mid i \in n) \in \mathrm{Fnc}(n, \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X))$ tal que $P = P_{n-1}$ y $\forall i \in n$, $\exists x \in X$ tal que $P_i = (x)$, o $\exists \sigma \in \Sigma_0$ tal que $P_i = (\sigma)$, o $\exists p \in \mathbb{N}-1$, $\exists \sigma \in \Sigma_p$ y $\exists (i_\alpha \mid \alpha \in p) \in i^p$ tal que $P_i = (\sigma) P_{i_0} \cdots P_{i_{p-1}}$.

Proposition 2.7. *Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y X un conjunto. Entonces se cumple que* $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) = \mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$.

Demostración. Puesto que $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ es el mínimo cerrado de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ que contiene a $\{\,(x) \mid x \in X\,\}$, para demostrar que $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \subseteq \mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, será suficiente que demostremos que $\mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ es un cerrado de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ y que contiene a $\{\,(x) \mid x \in X\,\}$.

Se cumple que $\{\,(x) \mid x \in X\,\} \subseteq \mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, porque, dado un $x \in X$, la familia $(P_i \mid i \in 1)$ con $P_0 = (x)$, es una sucesión de formación para (x). Además, dado un $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = p$, y una familia $(Q_j \mid j \in p)$ en $\mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, en virtud de la definición de $\mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, tenemos que, para cada $j \in p$, $\exists n_j \in \mathbb{N}-1$, $\exists (P_{j,i} \mid i \in n_j) \in \mathrm{Fnc}(n_j, \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X))$ tal que $Q_j = P_{j,n_j-1}$ y $\forall i \in n_j$, $\exists x \in X$ tal que $P_{j,i} = (x)$, o $\exists \sigma \in \Sigma_0$ tal que $P_{j,i} = (\sigma)$, o $\exists q \in \mathbb{N}-1$, $\exists \tau \in \Sigma_q$ y $\exists (k_\alpha \mid \alpha \in q) \in i^q$ tal que $P_{j,i} = (\tau) P_{j,k_0} \cdots P_{j,k_{q-1}}$. Situación que resumimos, parcialmente, mediante la matriz:

$$\begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & \dots & P_{0,n_0-1} = Q_0 \\ P_{1,0} & P_{1,1} & \dots & P_{1,n_1-1} = Q_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{p-1,0} & P_{p-1,1} & \dots & P_{p-1,n_{p-1}-1} = Q_{p-1} \end{pmatrix}$$

Luego para $n = \left(\sum_{j \in p} n_j\right) + 1$ y tomando como $(P_i \mid i \in n)$ la familia cuyo último término es $(\sigma) Q_0 \cdots Q_{p-1}$ y siendo los otros términos los formado por los de la matriz, recorridos de izquierda a derecha y de arriba abajo, se cumple que $(P_i \mid i \in n)$ es una sucesión de formación para $(\sigma) Q_0 \cdots Q_{p-1}$, luego $(\sigma) Q_0 \cdots Q_{p-1} \in \mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Por consiguiente $\mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ es un cerrado de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. De todo ello concluimos que $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \subseteq \mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$.

Demostramos ahora que $\mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \subseteq \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Sea $P \in \mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Entonces, por definición, $P \in \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$ para el que $\exists n \in \mathbb{N}-1$, $\exists (P_i \mid i \in n) \in \mathrm{Fnc}(n, \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X))$ tal que $P = P_{n-1}$ y $\forall i \in n$, $\exists x \in X$ tal que $P_i = (x)$, o $\exists \sigma \in \Sigma_0$ tal que $P_i = (\sigma)$, o $\exists p \in \mathbb{N}-1$, $\exists \sigma \in \Sigma_p$ y $\exists (i_\alpha \mid \alpha \in p) \in i^p$ tal que $P_i = (\sigma) P_{i_0} \cdots P_{i_{p-1}}$. Demostramos que $P = P_{n-1} \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, por inducción sobre $i \in n$. Para $i = 0$, $P_0 \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, porque, en este caso, P_0 o bien es de la forma (x), para algún $x \in X$, y entonces $P_0 \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, porque $\{\,(x) \mid x \in X\,\} \subseteq \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, o bien es de la forma (σ), para algún $\sigma \in \Sigma_0$, y entonces $P_0 \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, porque $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ es un cerrado de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Sea $k \in n$ y supongamos que $\forall i \in k$, $P_i \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Entonces, por definición, $\exists x \in X$ tal que $P_k = (x)$, o $\exists \sigma \in \Sigma_0$ tal que $P_k = (\sigma)$, o $\exists p \in \mathbb{N} - 1$, $\exists \sigma \in \Sigma_p$ y $\exists (i_\alpha \mid \alpha \in p) \in i^p$ tal que $P_k = (\sigma) P_{i_0} \cdots P_{i_{p-1}}$. Es evidente que en los dos primeros casos $P_k \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. En el último caso también $P_k \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, porque al ser, por hipótesis, $P_0, \ldots, P_{k-1} \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, también $P_{i_0}, \ldots, P_{i_{p-1}} \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, luego, ya que $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ es un cerrado de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, $P_k = (\sigma) P_{i_0} \cdots P_{i_{p-1}} \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Así que, para cada $k \in n$, $P_k \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, luego, para $k = n - 1$, $P = P_{n-1} \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Por lo tanto $\mathrm{L}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \subseteq \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. □

Antes de demostrar que los símbolos de operación polinómica tienen una representación canónica, introducimos unas nociones auxiliares de la teoría de monoides, y unas propiedades especiales del monoide libre sobre un conjunto, que nos serán de utilidad para alcanzar el objetivo mencionado.

Definition 2.8. Sea A un conjunto y $P, Q \in \mathrm{Ml}(A)$.

1. Decimos de Q que un *segmento* de P si hay dos palabras $X, Y \in \mathrm{Ml}(A)$ tales que $P = X \curlywedge Q \curlywedge Y$. Además, si $|X| = k$, entonces decimos que la palabra Q empieza en el $k+1$-ésimo lugar.
2. Decimos de Q que un *segmento inicial* de P, y lo denotamos por $Q \leq_{\mathrm{pre}} P$, si hay una palabra $Y \in \mathrm{Ml}(A)$ tal que $P = Q \curlywedge Y$, y que es un *segmento inicial estricto* de P, y lo denotamos por $Q <_{\mathrm{pre}} P$, si es un segmento inicial de P y si $Q \neq P$.

Proposition 2.9. *Sea A un conjunto. Entonces* $\mathbf{Ml}(A)$ *es* regular *o* cancelativo*, i.e., el monoide libre sobre A tiene las siguientes propiedades:*

1. $\forall X, P, Q \in \mathrm{Ml}(A)\, ((X \curlywedge P = X \curlywedge Q) \to P = Q)$.
2. $\forall X, P, Q \in \mathrm{Ml}(A)\, ((P \curlywedge X = Q \curlywedge X) \to P = Q)$.

Demostración. □

Proposition 2.10. *Sea A un conjunto, $P \in \mathrm{Ml}(A)$ y X e Y dos segmentos iniciales de P. Entonces X es un segmento inicial de Y, o Y es un segmento inicial de X.*

Demostración. □

Definition 2.11. Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica, X un conjunto y $P \in \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$. Decimos de P que es una *palabra equilibrada*, relativa a $\mathbf{\Sigma}$ y X, si cumple las siguientes condiciones:

1. $|P| = \mathrm{ar}[X]^\sharp(P) + 1$.
2. Para cada segmento inicial estricto Q de P, $|Q| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(Q)$

Denotamos por $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ el conjunto de todas las palabras equilibradas, relativas a $\mathbf{\Sigma}$ y X.

Proposition 2.12. *Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y X un conjunto. Entonces se cumple que* $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \subseteq \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$.

Demostración. Puesto que $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ es el mínimo cerrado de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ que contiene a $\{\, (x) \mid x \in X \,\}$, para demostrar que $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \subseteq \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, será suficiente que demostremos que $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ es un cerrado de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ y que contiene a $\{\, (x) \mid x \in X \,\}$.

Se cumple que $\{\, (x) \mid x \in X \,\} \subseteq \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, porque, para cada $x \in X$, la palabra (x) es equilibrada, ya que, por una parte, al ser $|(x)| = 1$ y $\mathrm{ar}[X]^\sharp((x)) = 0$, tenemos que $|(x)| = \mathrm{ar}[X]^\sharp((x)) + 1$, y, por otra, si Q es un segmento inicial propio de (x), entonces, necesariamente, $Q = \lambda$, y para la palabra vacía tenemos que $|\lambda| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(\lambda)$, ya que $0 \leq 0$.

Demostramos a continuación que, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = p$, y cada familia $(P_j \mid j \in p)$ en $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, la palabra $(\sigma) P_0 \cdots P_{p-1}$ es equilibrada.

Si $p = 0$, entonces la palabra (σ) es equilibrada ya que, por una parte, al ser $|(\sigma)| = 1$ y $\mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) = 0$, tenemos que $|(\sigma)| = \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) + 1$, y, por otra, si Q es un segmento inicial propio de (σ), entonces, necesariamente, $Q = \lambda$, y para la palabra vacía tenemos que $|\lambda| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(\lambda)$, ya que $0 \leq 0$.

Si $p \neq 0$, entonces:

$$
\begin{aligned}
|(\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}| &= |(\sigma)| + \textstyle\sum_{j\in p}|P_j| && \text{(porque } |\cdot| \text{ es morfismo)}\\
&= 1 + \textstyle\sum_{j\in p}|P_j| \\
&= 1 + \textstyle\sum_{j\in p}(\mathrm{ar}[X]^\sharp(P_j) + 1) && \text{(porque } P_j \in \mathrm{Bal}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X))\\
&= 1 + p + \textstyle\sum_{j\in p} \mathrm{ar}[X]^\sharp(P_j) \\
&= 1 + \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) + \textstyle\sum_{j\in p} \mathrm{ar}[X]^\sharp(P_j) && \text{(porque } \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) = p)\\
&= 1 + \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}) && \text{(porque } \mathrm{ar}[X]^\sharp \text{ es morfismo).}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto se cumple, para la palabra $(\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$, la primera condición definitoria del concepto de palabra equilibrada.

Sea Q un segmento inicial estricto de $(\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$. Entonces, o bien hay un $i \in p-1$ para el cual la palabra P_i es un segmento de Q, o bien no es ése el caso.

Si no hay ningún $i \in p-1$ para el cual P_i sea un segmento de Q, entonces, o bien $Q = \lambda$, o bien $Q = (\sigma)$, o bien $Q = (\sigma)R$, siendo R un segmento inicial estricto de P_0. Si $Q = \lambda$, entonces $|\lambda| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(\lambda)$; si $Q = (\sigma)$, entonces $|(\sigma)| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma))$, ya que $|(\sigma)| = 1$, $\mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) = p$ y, por hipótesis $1 \leq p$; si $Q = (\sigma)R$, siendo R un segmento inicial estricto de P_0, entonces

$$
\begin{aligned}
|Q| &= |(\sigma)| + |R| && \text{(porque } |\cdot| \text{ es morfismo)}\\
&\leq 1 + \mathrm{ar}[X]^\sharp(R) && \text{(porque } P_0 \in \mathrm{Bal}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X) \text{ y } R <_{\mathrm{pre}} P_0)\\
&\leq p + \mathrm{ar}[X]^\sharp(R) \\
&= \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) + \mathrm{ar}[X]^\sharp(R) \\
&= \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)R) \\
&= \mathrm{ar}[X]^\sharp(Q).
\end{aligned}
$$

De modo que si Q un segmento inicial estricto de $(\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$ y no hay ningún $i \in p-1$ para el cual P_i sea un segmento de Q, entonces $|Q| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(Q)$.

Bajo la misma hipótesis de que Q sea un segmento inicial estricto de $(\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$, supongamos que exista un $i \in p-1$ para el cual P_i sea un segmento de Q. Sea entonces q el máximo de entre los $i \in p-1$ para los cuales se cumple que la palabra P_i sea un segmento de Q. Entonces $Q = (\sigma)P_0 \cdots P_q R$, siendo R un segmento inicial estricto de P_{q+1} (ya que si R no fuera un segmento inicial estricto de P_{q+1}, q no sería el máximo con la propiedad indicada), y tenemos que:

$$
\begin{aligned}
|Q| &= |(\sigma)| + \left(\textstyle\sum_{j\in q+1}|P_j|\right) + |R| && \text{(porque } |\cdot| \text{ es morfismo)}\\
&= 1 + \left(\textstyle\sum_{j\in q+1}(\mathrm{ar}[X]^\sharp(P_j) + 1)\right) + |R| \\
&= 1 + (q+1) + \left(\textstyle\sum_{j\in q+1} \mathrm{ar}[X]^\sharp(P_j)\right) + |R| \\
&\leq p + \left(\textstyle\sum_{j\in q+1} \mathrm{ar}[X]^\sharp(P_j)\right) + \mathrm{ar}[X]^\sharp(R) && \text{(porque } q \leq p-2 \text{ y } R <_{\mathrm{pre}} P_{q+1})\\
&= \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)P_0 \cdots P_q R) && \text{(porque } \mathrm{ar}[X]^\sharp \text{ es morfismo)}\\
&= \mathrm{ar}[X]^\sharp(Q).
\end{aligned}
$$

De modo que si Q un segmento inicial estricto de $(\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$ y hay un $i \in p-1$ para el cual P_i sea un segmento de Q, entonces $|Q| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(Q)$.

Por consiguiente, para cada segmento inicial estricto Q de $(\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$, se cumple que $|Q| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(Q)$. Luego $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ es un cerrado de $\mathbf{W}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, y por lo tanto $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ está incluido en $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. □

Antes de demostrar, por inducción sobre la longitud, que $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ está incluido en $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, demostramos que para cada palabra equilibrada P, o bien hay un único $x \in X$ tal que $P = (x)$, o bien hay un único $\sigma \in \Sigma_0$ tal que $P = (\sigma)$, o bien hay un único $p \in \mathbb{N} - 1$, un único $\sigma \in \Sigma_p$ y una única familia $(P_j \mid j \in p)$ en $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ tal que $P = (\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$. Para ello demostramos los lemas que siguen.

Lemma 2.13. *Si $P \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, entonces ningún segmento inicial estricto de P es una palabra equilibrada.*

Demostración. Sea $P \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ y Q un segmento inicial estricto de P. Entonces $|Q| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(Q)$. Ahora bien, $\mathrm{ar}[X]^\sharp(Q) < \mathrm{ar}[X]^\sharp(Q)+1$, luego $|Q| < \mathrm{ar}[X]^\sharp(Q)+1$, por lo tanto no puede ser $|Q| = \mathrm{ar}[X]^\sharp(Q) + 1$. □

Lemma 2.14. *Si $P \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ y $k \in |P|$, entonces existe un único segmento equilibrado Q de P que empieza en el $k+1$-ésimo lugar, i.e., hay un triplo ordenado (U, Q, V) en $\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X) \times \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \times \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$ tal que $P = U \curlywedge Q \curlywedge V$, $|U| = k$ y, para cada $(Q', V') \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \times \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$, si $P = U \curlywedge Q' \curlywedge V'$, entonces $Q' = Q$.*

Demostración. Unicidad. Supongamos que para un triplo (U, Q, V) en $\mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X) \times \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \times \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$ se cumpla que $P = U \curlywedge Q \curlywedge V$ y que $|U| = k$, y sea $(Q', V') \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \times \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$ tal que $P = U \curlywedge Q' \curlywedge V'$. Entonces de la ecuación $U \curlywedge Q \curlywedge V = U \curlywedge Q' \curlywedge V'$ obtenemos que $Q \curlywedge V = Q' \curlywedge V'$, porque los monoides libres son cancelativos, luego, por la prop. 2.10, o bien Q es un segmento inicial estricto de Q', o bien Q' es un segmento inicial estricto de Q, o bien $Q = Q'$. Pero, en virtud del lema 2.13, no puede ocurrir ni que Q sea un segmento inicial estricto de Q' ni que Q' lo sea de Q, así que $Q = Q'$

Existencia. Sea $P \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, $k \in |P|$ y $P = B \curlywedge C$, siendo $B \in \mathrm{Ml}(\Sigma \coprod X)$ tal que $|B| = k$ (así que B es un segmento inicial estricto de P). Para cada $i \in |C|+1$, sea C_i el segmento inicial de C cuya longitud es precisamente i (en particular, C_0 es la palabra vacía, y $C_{|C|}$ es la propia palabra C).

Para el segmento inicial $C_{|C|}$ de la palabra C, que es la propia C, se cumple que:

$$\begin{aligned} |C_{|C|}| &= |P| - |B| && \text{(porque } P = B \curlywedge C) \\ &= (\mathrm{ar}[X]^\sharp(P) + 1) - |B| \\ &\geq (\mathrm{ar}[X]^\sharp(P) + 1) - \mathrm{ar}[X]^\sharp(R) && \text{(porque } B <_{\mathrm{pre}} P). \end{aligned}$$

Pero debido a que $\mathrm{ar}[X]^\sharp(P) = \mathrm{ar}[X]^\sharp(B) + \mathrm{ar}[X]^\sharp(C)$, también $(\mathrm{ar}[X]^\sharp(P) + 1) - \mathrm{ar}[X]^\sharp(B) = \mathrm{ar}[X]^\sharp(C) + 1$, luego $|C_{|C|}| \geq \mathrm{ar}[X]^\sharp(C_{|C|}) + 1$. Así que la palabra C tiene al menos un segmento inicial T, e.g., ella misma, para el que $|T| \geq \mathrm{ar}[X]^\sharp(T) + 1$.

Por otra parte, hay al menos un $j \in |C|$ para el que se cumple que, para cada $h \leq j$, $|C_h| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(C_h)$, e.g., para $j = 0$, se cumple que, para cada $h \leq 0$, $|C_h| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(C_h)$. Sea i el máximo del conjunto

$$\{\, j \in |C| \mid \forall h \leq j\, (|C_h| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(C_h)) \,\}.$$

Entonces $|C_i| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(C_i)$ y $|C_{i+1}| \geq \mathrm{ar}[X]^\sharp(C_{i+1}) + 1$. La palabra C_{i+1} es una palabra equilibrada. En efecto, tenemos que $|C_{i+1}| \geq \mathrm{ar}[X]^\sharp(C_{i+1}) + 1$, pero también:

$$\begin{aligned} |C_{i+1}| &= |C_i| + 1 \\ &\leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(C_i) + 1 \\ &\leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(C_{i+1}) + 1, \end{aligned}$$

así que $|C_{i+1}| = \mathrm{ar}[X]^\sharp(C_{i+1}) + 1$. Además, si D es un segmento inicial estricto de C_{i+1}, entonces $D = C_j$, para algún $j \in i + 1$, luego $|D| \leq \mathrm{ar}[X]^\sharp(D)$.

De modo que C_{i+1} es una palabra equilibrada que empieza en el $k + 1$-ésimo lugar. □

Lemma 2.15. *Si $P \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, entonces $P = (x)$, para un $x \in X$, o $P = (\sigma)$, para un $\sigma \in \Sigma_0$, o $P = (\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$, para un $p \in \mathbb{N} - 1$, un $\sigma \in \Sigma_p$ y una familia $(P_j \mid j \in p)$ en $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$.*

Demostración. Por ser $P \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, se cumple que $|P| = \mathrm{ar}[X]^\sharp(P) + 1$, luego $|P| \geq 1$, i.e., P no es la palabra vacía.

Si $|P| = 1$, entonces $\mathrm{ar}[X]^\sharp(P) = 0$, luego $P = (x)$, para un $x \in X$, o $P = (\sigma)$, para un $\sigma \in \Sigma_0$.

Supongamos que $|P| \geq 2$ y sea σ la primera letra de la palabra P. Para $k = 1$, en virtud del lema anterior, hay un único segmento equilibrado P_0 de P que empieza en el $k + 1$-ésimo lugar, i.e., en este caso, en el segundo lugar. Por lo tanto, o bien $|(\sigma)| + |P_0| = |P|$, o bien $|(\sigma)| + |P_0| < |P|$. Si lo primero, entonces $P = (\sigma) \curlywedge P_0$, y tenemos que:

$$\begin{aligned} 1 + |P_0| &= |P| \\ &= \mathrm{ar}[X]^\sharp(P) + 1 \\ &= \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) + \mathrm{ar}[X]^\sharp(P_0) + 1 \\ &= \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) + (|P_0| - 1) + 1 \\ &= \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) + |P_0|, \end{aligned}$$

luego $\mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) = 1$, así que $\sigma \in \Sigma_1$. Si lo segundo, entonces, para $k = 1 + |P_0|$, en virtud del lema anterior, hay un único segmento equilibrado P_1 de P que empieza en el $k + 1$-ésimo lugar, i.e., en este caso, en el $(1 + |P_0|) + 1$-ésimo lugar. Por lo tanto, o bien $|(\sigma)| + |P_0| + |P_1| = |P|$, o bien $|(\sigma)| + |P_0| + |P_1| < |P|$. Si lo primero, entonces $P = (\sigma) \curlywedge P_0 \curlywedge P_1$, y tenemos que $\mathrm{ar}[X]^\sharp((\xi)) = 2$, así que $\sigma \in \Sigma_2$. Si lo segundo, entonces se prosigue del mismo modo, hasta que para un $p \in \mathbb{N} - 1$ y una familia $(P_j \mid j \in p)$ en $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, $P = (\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} 1 + \textstyle\sum_{j\in p}|P_j| &= |P| \\ &= \mathrm{ar}[X]^\sharp(P) + 1 \\ &= \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) + \left(\textstyle\sum_{j\in p} \mathrm{ar}[X]^\sharp(P_j)\right) + 1 \\ &= \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) + \left(\textstyle\sum_{j\in p}(|P_j| - 1)\right) + 1 \\ &= \mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) + \left(\textstyle\sum_{j\in p}|P_j|\right) + (1 - p), \end{aligned}$$

luego $\mathrm{ar}[X]^\sharp((\sigma)) = p$, así que $\sigma \in \Sigma_p$. □

Corollary 2.16. *Si $P \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, entonces $P = (x)$, para un único $x \in X$, o $P = (\sigma)$, para un único $\sigma \in \Sigma_0$, o $P = (\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$, para un único $p \in \mathbb{N} - 1$, un único $\sigma \in \Sigma_p$ y una única familia $(P_j \mid j \in p)$ en $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$.*

Proposition 2.17. *Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y X un conjunto. Entonces se cumple que $Bal_{\mathbf{\Sigma}}(X) \subseteq \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre la longitud de las palabras. Sea $P \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ tal que $|P| = 1$. Entonces $\mathrm{ar}[X]^{\sharp}(P) = 0$, luego $P = (x)$, para un único $x \in X$, o $P = (\sigma)$, para un único $\sigma \in \Sigma_0$; en cualquiera de los dos casos $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$.

Supongamos que todas las palabras equilibradas cuya longitud sea a lo sumo n, con $n \geq 1$, pertenezcan a $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Sea $P \in \mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ tal que $|P| = n+1$. Entonces $P = (\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$, para un único $p \in \mathbb{N} - 1$, un único $\sigma \in \Sigma_p$ y una única familia $(P_j \mid j \in p)$ en $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Ahora bien, $|P| = |(\sigma)| + \sum_{j\in p}|P_j| = 1 + \sum_{j\in p}|P_j|$, por lo tanto, para cada $j \in p$, $|P_j| < |P| = n+1$, luego, por la hipótesis de inducción, para cada $j \in p$, $P_j \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, así que $P = (\sigma)P_0 \cdots P_{p-1} \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Queda demostrado que todas las palabras equilibradas cuya longitud sea $n+1$, son miembros de $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Por consiguiente $\mathrm{Bal}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \subseteq \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. □

Corollary 2.18 (Menger-Hall-Schröter)**.** *Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y X un conjunto. Entonces se cumple que $Bal_{\mathbf{\Sigma}}(X) = \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$.*

Proposition 2.19. *Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y X un conjunto. Entonces el par ordenado $(\eta_X, \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X))$ en el que η_X es la única aplicación de X en $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\eta_X"'] \arrow[d, "\mathrm{in}_X"] \\
 & \Sigma \coprod X \arrow[d, "\eta_{\Sigma \coprod X}"] \\
\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)}"'] & Ml(\Sigma \coprod X)
\end{tikzcd}$$

conmuta, tiene la propiedad de que, para cada $\mathbf{\Sigma}$-algebra $\mathbf{A}$ y cada aplicación $f\colon X \longrightarrow A$, existe un único homomorfismo $f^{\sharp}$ de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ en $\mathbf{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[d, "f^{\sharp}"] \\
 & A
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Procedemos por inducción sobre la longitud de las palabras equilibradas. Sea $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ tal que $|P| = 1$. Entonces $P = (x)$, para un único $x \in X$, o $P = (\sigma)$, para un único $\sigma \in \Sigma_0$. Si $P = (x)$, entonces definimos la acción de $f^{\sharp}$ sobre (x) como:

$$f^{\sharp}((x)) = f(x).$$

Si $P = (\sigma)$, entonces definimos la acción de $f^{\sharp}$ sobre (σ) como:

$$f^{\sharp}((\sigma)) = \sigma^{\mathbf{A}}.$$

Supongamos $f^{\sharp}$ definida para todas las palabras equilibradas cuya longitud sea a lo sumo n, con $n \geq 1$, y sea $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ tal que $|P| = n+1$. Entonces $P = (\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$, para un único $p \in \mathbb{N} - 1$, un único $\sigma \in \Sigma_p$ y una única familia $(P_j \mid j \in p)$ en $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Ahora bien, para cada $j \in p$, $|P_j| < |P| = n+1$, luego, por la hipótesis de inducción, para cada $j \in p$, $f^\sharp$ está definida sobre P_j. Entonces definimos la acción de $f^\sharp$ sobre $P = (\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}$ como:

$$f^\sharp((\sigma)P_0 \cdots P_{p-1}) = F_\sigma^{\mathbf{A}}(f^\sharp(P_0), \ldots, f^\sharp(P_{p-1})).$$

Así definido, $f^\sharp$, cumple todas las condiciones de la proposición. □

Corollary 2.20. *Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y X un conjunto. Entonces el par ordenado $(\eta_X, \mathbf{T_\Sigma}(X))$ es único salvo un único isomorfismo.*

Demostración. □

Corollary 2.21. *Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y $f\colon X \longrightarrow Y$. Entonces hay un único homomorfismo $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(f)\colon \mathbf{T_\Sigma}(X) \longrightarrow \mathbf{T_\Sigma}(Y)$ tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[d, "\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(f)"] \\
Y \arrow[r, "\eta_Y"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(Y)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposition 2.22. *Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y X e Y dos conjunhtos. Una condición necesaria y suficiente para que X e Y sean isomorfos es que $\mathbf{T_\Sigma}(X)$ y $\mathbf{T_\Sigma}(Y)$ lo sean.*

Demostración. □

Como una aplicación del concepto de álgebra libre, mostramos a continuación cómo obtener, de forma canónica, el conjunto de las diferentes variables que ocurren en un término.

Definition 2.23. Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y X un conjunto. Entonces denotamos por Var el único homomorfismo de $\mathbf{T_\Sigma}(X)$ en $\mathbf{Fin}(X)$ tal que, para cada $x \in X$, $\mathrm{Var}((x)) = \{x\}$, siendo $\mathbf{Fin}(X)$ la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra cuyo conjunto subyacente es $\mathrm{Sub_f}(X)$ y en la que, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, F_σ, la operación estructural de $\mathbf{Fin}(X)$ asociada a σ, asigna a una familia $(X_i \mid i \in n)$ en $\mathrm{Sub_f}(X)$, $\bigcup_{i\in n} X_i$.

Recordemos que para los conjuntos definimos el concepto de conjunto proyectivo y que, de hecho, todos los conjuntos tienen la propiedad de ser proyectivos. Tal concepto también puede definirse para las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras, pero, a diferencia de lo que ocurre con los conjuntos, no toda $\mathbf{\Sigma}$-álgebra es proyectiva, pero se cumple que toda $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre es proyectiva.

Definition 2.24. Una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{P}$ es *proyectiva* si dado un homomorfismo sobreyectivo $f\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$ y un homomorfismo$g\colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{B}$, hay un homomorfismo $t\colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{P} \arrow[dl, "t"'] \arrow[d, "g"] \\
\mathbf{A} \arrow[r, two heads, "f"'] & \mathbf{B}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proposition 2.25. *Toda $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre es proyectiva.*

Demostración. Sea $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre sobre el conjunto X, $f\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo sobreyectivo y $g\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo. Entonces, por ser X un conjunto proyectivo, hay una aplicación $t\colon X \longrightarrow A$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "t"'] \arrow[d, "g \circ \eta_X"] \\ A \arrow[r, two heads, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta. Luego, por ser $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ libre sobre el conjunto X, existe un único homomorfismo $t^\sharp$ de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ en $\mathbf{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "t"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[d, "t^\sharp"] \\ & A \end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto, ya que $f \circ t^\sharp \circ \eta_X = g \circ \eta_X$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[dl, "t^\sharp"'] \arrow[d, "g"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, two heads, "f"'] & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

conmuta. □

Proposition 2.26. *Si X es un conjunto no vacío, entonces $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ es un separador, i.e., dadas dos $\mathbf{\Sigma}$-álgebras $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y dos homomorfismos distintos f y g de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$, existe un homomorfismo h de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ en $\mathbf{A}$ tal que $f \circ h \neq g \circ h$.*

Demostración. □

Corollary 2.27. *La categoría $\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})$ tiene separadores proyectivos.*

Proposition 2.28. *Cada $\mathbf{\Sigma}$-álgebra es isomorfa a un cociente de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre sobre un conjunto.*

Demostración. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Puesto que $\mathbf{A}$ tiene un conjunto de generadores, sea X uno de ellos. Entonces, para la inclusión canónica in_X de X en A, en virtud de la propiedad universal del álgebra libre sobre X, existe un único homomorfismo $\mathrm{in}_X^\sharp$ de $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ en $\mathbf{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "\mathrm{in}_X"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[d, "\mathrm{in}_X^\sharp"] \\ & A \end{tikzcd}$$

conmuta. Ahora bien, por ser X un conjunto de generadores de $\mathbf{A}$ y estar X contenido en la imagen de $\mathrm{in}_X^\sharp$, el homomorfismo $\mathrm{in}_X^\sharp$ es sobreyectivo. Por lo tanto $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Ker}(\mathrm{in}_X^\sharp) \cong \mathbf{A}$. □

Proposition 2.29. *Si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}\times_{\mathbf{C}}\mathbf{B} \arrow[r, "p_{\mathbf{B}}"] \arrow[d, "p_{\mathbf{A}}"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "g"] \\
\mathbf{A} \arrow[r, "f"'] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado y f es un epimorfismo, entonces $p_{\mathbf{B}}$ es un epimorfismo.

Demostración. Sean $u, v\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{Z}$ dos homomorfismos tales que $u \neq v$. Entonces, siendo $\mathbf{P}$ un separador proyectivo, arbitrario, pero fijo, hay un homomorfismo $w\colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{B}$ tal que $u \circ w \neq v \circ w$; luego hay un homomorfismo $t\colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{P} \arrow[dl, "t"'] \arrow[d, "g \circ w"] \\
\mathbf{A} \arrow[r, two heads, "f"'] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto hay un único homomorfismo $h\colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{A}\times_{\mathbf{C}}\mathbf{B}$ tal que los dos triángulos del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P} \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, bend left, "w"] \arrow[ddr, bend right, "t"'] & & & \\
 & \mathbf{A}\times_{\mathbf{C}}\mathbf{B} \arrow[r, "p_{\mathbf{B}}"] \arrow[d, "p_{\mathbf{A}}"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "g"] \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & \mathbf{Z} \\
 & \mathbf{A} \arrow[r, two heads, "f"'] & \mathbf{C} &
\end{tikzcd}$$

conmutan. Luego $u \circ p_{\mathbf{B}} \neq v \circ p_{\mathbf{B}}$, ya que si $u \circ p_{\mathbf{B}} = v \circ p_{\mathbf{B}}$, entonces $u \circ p_{\mathbf{B}} \circ h = v \circ p_{\mathbf{B}} \circ h$, i.e., $u \circ w = v \circ w$, lo cual es absurdo. □

Definimos ahora la relación de precedencia algebraica sobre las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras. En general, tal relación no tiene propiedades especialmente interesantes en las álgebras arbitrarias, pero, como demostraremos, en las álgebras absolutamente libres tales relaciones están bien fundamentadas.

Definition 2.30. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Entonces denotamos por $\mathrm{P}_{\mathbf{A}}$ la relación de *precedencia algebraica* sobre A definida como:

$$\mathrm{P}_{\mathbf{A}} = \left\{ (a,b) \in A^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists n \geq 1\, \exists \sigma \in \Sigma_n\, \exists (x_j \mid j \in n) \in A^n \\ \text{tal que } b = F_\sigma(x_j \mid i \in n) \text{ y } \exists k \in n\, (x_k = a) \end{array} \right\}$$

Si $a\mathrm{P}_{\mathbf{A}}b$, entonces decimos que a es un *predecesor algebraico* de b, o que b es un *sucesor algebraico* de a.

Para una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra arbitraria $\mathbf{A}$, si $\mathrm{P}^{\mathrm{t}}_{\mathbf{A}}$, el cierre transitivo de $\mathrm{P}_{\mathbf{A}}$, es irreflexivo, decimos que $\mathrm{P}_{\mathbf{A}}$ es el *orden natural* de $\mathbf{A}$ y lo denotamos por $<_{\mathbf{A}}$; mientras que si $\mathrm{P}_{\mathbf{A}}$ está bien fundamentada, entonces $\mathrm{P}^{\mathrm{t}}_{\mathbf{A}}$ es un orden (parcial irreflexivo) bien fundamentado, y decimos que $\mathbf{A}$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra *bien fundamentada.*

Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra, $\mathbf{A}_0 = A - \bigcup_{\sigma\in\Sigma}\mathrm{Im}(F_\sigma)$, $\mathbf{A}_{\mathrm{c}} = \{\, \sigma^{\mathbf{A}} \mid \sigma \in \Sigma \,\}$ y $\mathrm{Min}(A, \mathrm{P}_{\mathbf{A}})$ el conjunto de los minimales de $(A, \mathrm{P}_{\mathbf{A}})$. Demuéstrese que:

1. $\mathbf{A}_0 \subseteq \mathrm{Min}(A, \mathrm{P}_{\mathbf{A}}) \subseteq \mathbf{A}_0 \cup \mathbf{A}_{\mathrm{c}}$.
2. $\mathrm{Min}(A, \mathrm{P}_{\mathbf{A}}) = \mathbf{A}_0 \cup \mathbf{A}_{\mathrm{c}}$ si y sólo si $\mathbf{A}_{\mathrm{c}} \cap \bigcup_{\sigma \in \Sigma - \Sigma_0} \mathrm{Im}(F_\sigma) = \varnothing$.

Proposition 2.31. *Si $\mathbf{A}$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra bien fundamentada, entonces también está bien fundamentada cualquier subálgebra de $\mathbf{A}$.*

Demostración. □

Proposition 2.32. *Cualquier homomorfismo $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ preserva la relación de precedencia algebraica y por lo tanto el orden natural.*

Demostración. □

Proposition 2.33. *Sea $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo. Si $\mathrm{P}_{\mathbf{B}} \restriction f[A]$ está bien fundamentada, entonces también lo está $\mathrm{P}_{\mathbf{A}}$*

Demostración. □

Corollary 2.34. *Sea $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia no vacía de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras. Si al menos una de las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras de la familia está bien fundamentada, también lo está el producto cartesiano de las mismas.*

Demostración. □

2.3. Algebras de Dedekind-Peano.

Definition 2.35. Una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A} = (A, (F_\sigma \mid \sigma \in \Sigma))$ es un álgebra de *Dedekind-Peano*, si cumple las siguientes condiciones:

DP1. Para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, $F_\sigma\colon A^n \longrightarrow A$ es inyectiva.
DP2. Para cada $\sigma, \tau \in \Sigma$, si $\sigma \neq \tau$, entonces $\mathrm{Im}(F_\sigma) \cap \mathrm{Im}(F_\tau) = \varnothing$.
DP3. El conjunto $\mathbf{A}_0 = A - \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \mathrm{Im}(F_\sigma)$ es un conjunto de generadores de $\mathbf{A}$.

Proposition 2.36. *Una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ es un álgebra de Dedekind-Peano precisamente si es libre.*

A continuación, siguiendo la exposición de Diener en [**?**], demostramos que el conjunto de las álgebras de Dedekind-Peano, formado por aquellas cuyos conjuntos subyacentes sean miembros del universo de Grothendieck, está cerrado bajo subálgebras y productos no triviales. Las demostracines se fundamentarán en que, para las álgebras de Dedekind-Peano, el orden natural sobre las mismas está bien fundamentado.

Proposition 2.37. *Cualquier subálgebra de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra que cumpla la condición DP1 o DP2, cumple también DP1, resp., DP2.*

Demostración. □

Proposition 2.38. *Sea $f\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo sobreyectivo. Si $\mathbf{B}$ cumple la condición DP2, entonces también $\mathbf{A}$ la cumple.*

Demostración. □

Corollary 2.39. *Sea $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familiua no vacía de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras. Si al menos una de las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras de la familia cumple la condición DP2, también la cumple el producto cartesiano de las mismas.*

Demostración. □

La condición DP1 es hereditaria, pero no es preservada ni bajo homomorfismos ni bajo imágenes homomorfas inversas.

Theorem 2.40. *Sea* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *una familiua no vacía de* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebras. Entonces* $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ *cumple la condición DP1 precisamente si todas las* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebras* $\mathbf{A}_i$ *la cumplen o* $\prod_{i\in I} A_i = \varnothing$.

Demostración. □

Sea $\mathbf{A}$ una $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra. Demuéstrese que si $\mathbf{A}$ cumple la condición DP3, entonces

$$\mathbf{A}_0 = \bigcap\{\, X \subseteq A \mid \mathrm{Sg}(X) = A \,\}.$$

Proposition 2.41.

1. *Si* $f\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$*, entonces* $\mathbf{B}_0 \subseteq f[\mathbf{A}_0]$.
2. *Si* $\mathbf{B}$ *es una subálgebra de* $\mathbf{A}$*, entonces, para cada* $b \in B$*,* $b \in \mathbf{B}_0$ *precisamente si, para cada* $\sigma \in \Sigma$*, con* $\mathrm{ar}(\sigma) = n$*, y cada* $x \in A^n$*, si* $b = F_\sigma(x)$*, entonces hay un* $i \in n$ *tal que* $x_i \notin B$.
3. *Si*

Demostración. □

Demuéstrese que el producto cartesiano

Proposition 2.42. *Si* $\mathbf{A}$ *está bien fundamentada, entonces cumple la condición DP3.*

Demostración. Demostramos por $\mathrm{P}_{\mathbf{A}}$-inducción sobre x, que si $x \in A$, entonces $x \in \mathrm{Sg}(\mathbf{A}_0)$. Si $x \in \mathbf{A}_0$, entonces es evidente que $x \in \mathrm{Sg}(\mathbf{A}_0)$. Si $x \in A - \mathbf{A}_0$, entonces $x = F_\sigma(a)$, para algún $n \in \mathbb{N}$, algún $\sigma \in \Sigma_n$ y algún $a \in A^n$. Por la hipótesis de inducción, $\mathrm{Im}(a) \subseteq \downarrow_{\mathrm{P}_{\mathbf{A}}} x \subseteq \mathrm{Sg}(\mathbf{A}_0)$. Pero entonces $x = F_\sigma(a) \in \mathrm{Sg}(\mathbf{A}_0)$. □

Corollary 2.43. *Cualquier subálgebra de un álgebra bien fundamentada cumple la condición DP3.*

Corollary 2.44. *Sea* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *una familiua no vacía de* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebras. Si al menos una de las* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebras está bien fundamentada, entonces* $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ *cumple la condición DP3.*

Theorem 2.45. *Cualquier álgebra de Dedekind-Peano está bien fundamentada.*

Demostración. En virtud de la proposición **??** es suficiente que demostremos que la relación de precedencia algebraica $\mathrm{P}_{\mathbf{A}}$ está bien fundamentada sobre cualquier $\mathrm{P}_{\mathbf{A}}$-sección inicial principal $\mathrm{C}_{\mathrm{P}_{\mathbf{A}}}(x)$, y para ello, procedemos por inducción algebraica sobre x. Si $x \in \mathbf{A}_0$, el resultado es obvio, ya que $\mathrm{C}_{\mathrm{P}_{\mathbf{A}}}(x) = \{x\}$ y $\downarrow_{\mathrm{P}_{\mathbf{A}}} x = \varnothing$. Sea $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \Sigma_n$ y $(a_i \mid i \in n) \in A^n$ y supongamos que $\mathrm{P}_{\mathbf{A}}$ esté bien fundamentada sobre cualquier $\mathrm{C}_{\mathrm{P}_{\mathbf{A}}}(a_i)$. Entonces, para $x = F_\sigma(a_i \mid i \in n)$, tenemos que

$$\mathrm{C}_{\mathrm{P}_{\mathbf{A}}}(x) = \{x\} \cup \textstyle\bigcup_{i\in n} \mathrm{C}_{\mathrm{P}_{\mathbf{A}}}(a_i).$$

Sea Y un subconjunto no vacío de $\mathrm{C}_{\mathrm{P}_{\mathbf{A}}}(x)$. Si $Y \cap \bigcup_{i\in n} \mathrm{C}_{\mathrm{P}_{\mathbf{A}}}(a_i) \neq \varnothing$, entonces hay un $j \in n$ tal que $Z = Y \cap \mathrm{C}_{\mathrm{P}_{\mathbf{A}}}(a_j) \neq \varnothing$. Por la hipótesis de inducción, Z tiene un $\mathrm{P}_{\mathbf{A}}$-minimal z_0, que es también un $\mathrm{P}_{\mathbf{A}}$-minimal de Y, porque si $(y, z_0) \in \mathrm{P}_{\mathbf{A}}$, con $y \in Y$, entonces $y \in Y \cap \mathrm{C}_{\mathrm{P}_{\mathbf{A}}}(a_j)$, que es una contradicción. □

Corollary 2.46. *Una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{A}$ *es de Dedekind-Peano precisamente si cumple las condiciones DP1, DP2 y está bien fundamentada.*

Proposition 2.47. *Cualquier subálgebra de una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra de Dedekind-Peano, es una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra de Dedekind-Peano.*

Demostración. □

Corollary 2.48. *Sea* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *una familia no vacía de* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebras de Dedekind-Peano. Entonces el producto cartesiano de las mismas es una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra de Dedekind-Peano.*

Demostración. □

2.4. Operaciones polinómicas y algebraicas. Ahora nos ocupamos del estudio de las operaciones polinómicas y algebraicas sobre las álgebras y de algunas de sus propiedades. Además, establecemos las relaciones entre las álgebras libres y las álgebras de operaciones polinómicas sobre las álgebras, así como otra manera de obtener la subálgebra generada por una parte de un álgebra, a través de las operaciones polinómicas sobre el álgebra en cuestión. Pero antes demostramos que en la categoría $\mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma})$ existen las potencias de las álgebras para cualesquiera conjuntos.

Proposition 2.49. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra y* X *un conjunto. Entonces hay una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{A}^X$*, la* potencia *de* $\mathbf{A}$ *para* X*, y una familia de homomorfismos* $(\mathrm{pr}_x)_{x\in X}$*, con* $\mathrm{pr}_x\colon \mathbf{A}^X \longrightarrow \mathbf{A}$*, para cada* $x \in X$*, tal que, para cada* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{B}$ *y cada familia de homomorfismos* $(f_x)_{x\in X}$*, con* $f_x\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$*, para cada* $x \in X$*, existe un único homomorfismo* $\langle f_x \mid x \in X\rangle : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}^X$ *tal que, para cada* $x \in X$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B} \arrow[d, "\langle f_x \mid x\in X\rangle"'] \arrow[dr, "f_x"] & \\ \mathbf{A}^X \arrow[r, "\mathrm{pr}_x"'] & \mathbf{A} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Sea $\mathbf{A}^X$ la $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra cuyo conjunto subyacente es el producto cartesiano de la familia de conjuntos $(A \mid x \in X)$, i.e., el conjunto, A^X, de las funciones de X en A, y en la que, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, la operación estructural F_σ, correspondiente a σ, es la aplicación de $(A^X)^n$ en A^X definida como:

$$F_\sigma \begin{cases} (A^X)^n & \longrightarrow A^X \\ (a_\alpha \mid \alpha \in n) & \longmapsto (F_\sigma(a_\alpha(x) \mid \alpha\in n) \mid x \in X), \end{cases}$$

siendo F_σ la operación estructural de $\mathbf{A}_i$ correspondiente a σ; y, para cada $x \in X$, sea pr_x el triplo ordenado $(\mathbf{A}^X, \mathrm{pr}_x, \mathbf{A})$, denotado por $\mathrm{pr}_x\colon \mathbf{A}^X \longrightarrow \mathbf{A}$, en el que pr_x es la aplicación de A^X en A definida como:

$$\mathrm{pr}_x \begin{cases} A^X & \longrightarrow A \\ a & \longmapsto a_x. \end{cases}$$

Entonces se cumple que, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} (A^X)^n \arrow[r, "\mathrm{pr}_x^n"] \arrow[d, "F_\sigma"'] & A^n \arrow[d, "F_\sigma"] \\ A^X \arrow[r, "\mathrm{pr}_x"'] & A \end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., que pr_x es un homomorfismo de $\mathbf{A}^X$ en $\mathbf{A}$.

Por otra parte, dado un par ordenado $(\mathbf{B}, (f_x \mid x \in X))$, en el que $\mathbf{B}$ es una $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra y, para cada $x \in X$, $f_x\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ un homomorfismo, sea $\langle f_x \mid x \in X\rangle$ la aplicación de B en A^X definida como:

$$\langle f_x \mid x \in X\rangle \begin{cases} B & \longrightarrow A^X \\ b & \longmapsto (f_x(b) \mid x \in X). \end{cases}$$

Es evidente que, para cada $x \in X$, $\mathrm{pr}_x \circ \langle f_x \mid x \in X\rangle = f_x$ y que $\langle f_x \mid x \in X\rangle$ es un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}^X$. Con ello queda demostrada la existencia de al menos un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}^X$ con la propiedad indicada. Dejamos, como ejercicio, la demostración de la unicidad. $\square$

Definition 2.50 (McKinsey-Tarski)**.** Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})$ es la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra determinada por el cerrado de $\mathbf{A}^{A^n}$ generado por las n proyecciones canónicas de A^n en A, i.e., por $\{\, \mathrm{pr}_{n,i} \mid i \in n \,\}$ y la denominamos la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra de las *operaciones polinómicas* n*-arias* sobre $\mathbf{A}$. Además, $\mathbf{Pol}_\omega(\mathbf{A})$ es la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra determinada por el cerrado de $\mathbf{A}^{A^{\mathbb{N}}}$ generado por las proyecciones canónicas de $A^{\mathbb{N}}$ en A, i.e., por $\{\, \mathrm{pr}_{\mathbb{N},i} \mid i \in \mathbb{N} \,\}$ y la denominamos la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra de las *operaciones polinómicas finitarias* sobre $\mathbf{A}$.

Demostramos a continuación que cada operación polinómica n-aria sobre una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra se puede obtener a partir de, al menos, un símbolo de operación polinómica con n variables.

Proposition 2.51. *Sea $V = \{\, v_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ un conjunto infinito numerable, $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Entonces hay un único homomorfismo $\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}$ de $\mathbf{T_\Sigma}(\downarrow v_n)$ en $\mathbf{A}^{A^n}$ tal que, para cada $i \in n$, $\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}((v_i)) = \mathrm{pr}_{n,i}$, i.e., tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \downarrow v_n \arrow[r, "\eta_{\downarrow v_n}"] \arrow[dr, "(\mathrm{pr}_{n,i} \mid i \in n)"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n) \arrow[d, "\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}"] \\ & A^{A^n} \end{tikzcd}$$

conmuta, y $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A}) = \mathbf{Im}(\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}})$, i.e., cada operación polinómica n-aria sobre la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ se puede obtener a partir de, al menos, un símbolo de operación polinómica con n variables. Por consiguiente, la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})$ es isomorfa a $\mathbf{T_\Sigma}(\downarrow v_n)/\mathrm{Ker}(\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}})$. Además, hay un único homomorfismo $\mathrm{Pd}_{\omega,\mathbf{A}}$ de $\mathbf{T_\Sigma}(V)$ en $\mathbf{A}^{A^{\mathbb{N}}}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Pd}_{\omega,\mathbf{A}}((v_n)) = \mathrm{pr}_{\mathbb{N},n}$, i.e., tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[dr, "(\mathrm{pr}_{\mathbb{N},n} \mid n \in \mathbb{N})"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \arrow[d, "\mathrm{Pd}_{\omega,\mathbf{A}}"] \\ & A^{A^{\mathbb{N}}} \end{tikzcd}$$

conmuta, y $\mathbf{Pol}_\omega(\mathbf{A}) = \mathbf{Im}(\mathrm{Pd}_{\omega,\mathbf{A}})$, i.e., cada operación polinómica ω-aria sobre la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ se puede obtener a partir de, al menos, un símbolo de operación polinómica finitaria. Por consiguiente, la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{Pol}_\omega(\mathbf{A})$ es isomorfa a $\mathbf{T_\Sigma}(V)/\mathrm{Ker}(\mathrm{Pd}_{\omega,\mathbf{A}})$.

Si $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n)$, denotamos por $P^{\mathbf{A}}$ la imagen bajo $\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}$ de P, y lo mismo si $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$, y lo denominamos el polinomio determinado por *(el símbolo de operación polinómica) P* en $\mathbf{A}$*.*

Demostración. Se cumple que $\mathrm{Pol}_n(\mathbf{A}) \subseteq \mathrm{Im}(\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}})$, porque $\mathrm{Im}(\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}})$ es un cerrado de $\mathbf{A}^{A^n}$ que contiene al conjunto $\{\, \mathrm{pr}_{n,i} \mid i \in n \,\}$ y $\mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$ es el mínimo cerrado de $\mathbf{A}^{A^n}$ con dicha propiedad.

Para demostrar que $\mathrm{Im}(\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}) \subseteq \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$, i.e., que si $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n)$, entonces $P^{\mathbf{A}} \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$, procedemos por inducción algebraica. Para cada $i \in n$, $(v_i)^{\mathbf{A}} = \mathrm{pr}_{n,i}$, luego $(v_i)^{\mathbf{A}} \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$. Para cada símbolo de operación 0-ario σ, $(\sigma)^{\mathbf{A}} = \sigma^{\mathbf{A}^{A^n}}$, luego $(\sigma)^{\mathbf{A}} \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$. Por último, para cada $m \in \mathbb{N} - \{0\}$, cada $\sigma \in \Sigma_m$ y cada familia $(P_i)_{i \in m}$ en $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n)$, si, para cada $i \in m$, $P_i^{\mathbf{A}} \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$, entonces, ya que $((\sigma)P_0 \cdots P_{m-1})^{\mathbf{A}} = F_\sigma \circ \langle P_i \mid i \in m \rangle$, y $\mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$ es un cerrado de $\mathbf{A}^{A^n}$, $((\sigma)P_0 \cdots P_{m-1})^{\mathbf{A}} \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$. Por consiguiente, $\mathrm{Im}(\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}) \subseteq \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$. $\square$

Convenimos en denotar por el mismo símbolo la correstricción de $\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}$ a $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})$, y lo mismo para $\mathrm{Pd}_{\omega,\mathbf{A}}$.

A continuación demostramos que la conducta de los homomorfismos respecto de las operaciones polinómicas de las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras es la misma que tienen respecto de las operaciones estructurales.

Proposition 2.52. *Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos $\mathbf{\Sigma}$-álgebras, $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, $n \in \mathbb{N}$ y $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n)$. Entonces el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A^n \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "P^{\mathbf{A}}"'] & B^n \arrow[d, "P^{\mathbf{B}}"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, si $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$, entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A^{\mathbb{N}} \arrow[r, "f^{\mathbb{N}}"] \arrow[d, "P^{\mathbf{A}}"'] & B^{\mathbb{N}} \arrow[d, "P^{\mathbf{B}}"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposition 2.53. *Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Entonces se cumple que:*

1. *Si $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in A^n$, $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n)$, $\mathrm{Var}(P) = \{\, v_{i_\alpha} \mid \alpha \in p \,\}$ y, para cada $\alpha \in p$, $x(i_\alpha) = y(i_\alpha)$, entonces $P^{\mathbf{A}}(x) = P^{\mathbf{A}}(y)$.*
2. *Si $x, y \in A^{\mathbb{N}}$, $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$ $\mathrm{Var}(P) = \{\, v_{n_\alpha} \mid \alpha \in p \,\}$ y, para cada $\alpha \in p$, $x(n_\alpha) = y(n_\alpha)$, entonces $P^{\mathbf{A}}(x) = P^{\mathbf{A}}(y)$.*

Demostración. □

Proposition 2.54. *Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Entonces, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, se cumple que $F_\sigma \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$.*

Demostración. □

Proposition 2.55. *Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra, $m, n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathrm{Pol}_m(\mathbf{A})$ y $(Q_j \mid j \in m) \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})^m$. Entonces $P \circ \langle Q_j \mid j \in m \rangle \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ el subconjunto de A^{A^m} definido como:

$$\mathcal{F} = \{\, P \in A^{A^m} \mid \forall (Q_j \mid j \in m) \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})^m \,(\, P \circ \langle Q_j \mid j \in m \rangle \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A}) \,)\,\}.$$

Vamos a demostrar que $\mathrm{Pol}_m(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{F}$. Para lo cual será suficiente, en virtud de la definición de $\mathbf{Pol}_m(\mathbf{A})$, que demostremos que:

1. Para cada $j \in m$, $\mathrm{pr}_{m,j} \in \mathcal{F}$.
2. Para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = q$ y cada $(P_k \mid k \in q) \in \mathcal{F}^q$, $F_\sigma(P_k \mid k \in q) \in \mathcal{F}$.

Dado un $i \in m$ y una familia $(Q_j \mid j \in m) \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})^m$, ya que $\mathrm{pr}_{m,j} \circ \langle Q_j \mid j \in m \rangle = Q_j \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$), se cumple que $\mathrm{pr}_{m,j} \in \mathcal{F}$.

Por otra parte, dado un $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = q$ y una familia $(P_k \mid k \in q) \in \mathcal{F}^q$, tenemos, para cada $k \in q$ y cada familia $(Q_j \mid j \in m) \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})^m$, que

$P_k \circ \langle Q_j \mid j \in m\rangle \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$, luego, dada una familia $(Q_j \mid j \in m) \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})^m$, ya que

$$\begin{aligned} F_\sigma(P_k \mid k \in q) \circ \langle Q_j \mid j \in m\rangle &= (F_\sigma^{\mathbf{A}} \circ \langle P_k \mid k \in q\rangle) \circ \langle Q_j \mid j \in m\rangle \\ &= F_\sigma^{\mathbf{A}} \circ (\langle P_k \mid k \in q\rangle \circ \langle Q_j \mid j \in m\rangle) \\ &= F_\sigma^{\mathbf{A}} \circ \langle P_k \circ \langle Q_j \mid j \in m\rangle \mid k \in q\rangle \\ &= F_\sigma^{\mathbf{A}}(P_k \circ \langle Q_j \mid j \in m\rangle \mid k \in q), \end{aligned}$$

se cumple que $F_\sigma(P_k \mid k \in q) \in \mathcal{F}$. □

Proposition 2.56. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* $m, n \in \mathbb{N}$ *y* $\xi\colon m \longrightarrow n$*. Entonces hay un único homomorfismo* $\mathrm{Pol}_\xi(\mathbf{A})$ *de* $\mathbf{Pol}_m(\mathbf{A})$ *en* $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_m) \arrow[r, "\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\xi)"] \arrow[d, "\mathrm{Pd}_{m,\mathbf{A}}"'] & \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n) \arrow[d, "\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}"] \\ \mathbf{Pol}_m(\mathbf{A}) \arrow[r, "\mathrm{Pol}_\xi(\mathbf{A})"'] & \mathbf{Pol}_n(\mathbf{A}) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. En efecto, $\mathrm{Pol}_\xi(\mathbf{A})$ definido como

$$\mathrm{Pol}_\xi(\mathbf{A}) \begin{cases} \mathbf{Pol}_m(\mathbf{A}) & \longrightarrow \mathbf{Pol}_n(\mathbf{A}) \\ \quad P & \longmapsto (P(x \circ \xi) \mid x \in A^n) \end{cases}$$

es un homomorfismo de □

Proposition 2.57. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra. Entonces:*

1. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$*,* $\mathrm{Pol}_{\mathrm{id}_n}(\mathbf{A}) = \mathrm{id}_{\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})}$.
2. *Para cada* $\varphi\colon m \longrightarrow n$ *y* $\psi\colon n \longrightarrow p$*,* $\mathrm{Pol}_{\psi\circ\varphi}(\mathbf{A}) = \mathrm{Pol}_\psi(\mathbf{A}) \circ \mathrm{Pol}_\varphi(\mathbf{A})$.

Demostración. □

Proposition 2.58. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* $0 < m < n \in \mathbb{N}$*,* $P\colon A^m \longrightarrow A$ *y* $Q\colon A^n \longrightarrow A$*. Si, para cada* $x \in A^n$*,* $Q(x) = P(x{\restriction}m)$*, entonces* $P \in \mathrm{Pol}_m(\mathbf{A})$ *precisamente si* $Q \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$.

Demostración. □

Como aplicación de los conceptos que acabamos de introducir, damos una caracterización de la subálgebra generada por una parte de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra.

Proposition 2.59. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra. Entonces:*

1. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y cada* $x \in A^n$*, se cumple que*
$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x)) = \{\, P(x) \mid P \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A}) \,\}.$$
2. *Para cada* $X \subseteq A$*, se cumple que*
$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \{\, P(x) \mid n \in \mathbb{N}, P \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A}) \text{ y } x \in X^n \,\}.$$

Demostración. Se cumple que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x)) \subseteq \{\, P(x) \mid P \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A}) \,\}$, porque el conjunto $\{\, P(x) \mid P \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A}) \,\}$ es un cerrado de $\mathbf{A}$ que contiene al conjunto $\mathrm{Im}(x)$ y $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x))$ es el mínimo cerrado de $\mathbf{A}$ con dicha propiedad.

Para demostrar que $\{\, P(x) \mid P \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A}) \,\} \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x))$, i.e., que si $P \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$, entonces $P(x) \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x))$, procedemos por inducción algebraica. Para cada $i \in n$, $\mathrm{pr}_{n,i}(x) = x_i$, luego $\mathrm{pr}_{n,i}(x) \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x))$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, cada $\sigma \in \Sigma_m$ y cada familia $(P_i)_{i\in m}$ en $\mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$, si, para cada $i \in m$, $P_i(x) \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x))$, entonces, ya que $(F_\sigma \circ \langle P_i \mid i \in m\rangle)(x) = F_\sigma(P_0(x), \dots, P_{m-1}(x))$, y $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x))$ es un cerrado de $\mathbf{A}$, $(F_\sigma \circ \langle P_i \mid i \in m\rangle)(x) \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x))$. Por consiguiente, $\{\, P(x) \mid P \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A}) \,\} \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Im}(x))$.

La demostración de que, para cada $X \subseteq A$, se cumple que

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \{\, P(x) \mid n \in \mathbb{N}, P \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A}) \text{ y } x \in X^n \,\},$$

se deduce de la primera parte y del hecho de que el operador $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ es algebraico. □

Proposition 2.60. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* X *un cerrado de* $\mathbf{A}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *y* $P \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$*. Entonces, para cada* $x \in X^n$*,* $P(x) \in X$*.*

Demostración. □

Proposition 2.61. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* Φ *una congruencia sobre* $\mathbf{A}$*,* $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ *y* $P \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$*. Entonces, para cada* $x, y \in A^n$*, si, para cada* $i \in n$*,* $x_i \equiv y_i \pmod{\Phi}$*, entonces* $P(x) \equiv P(y) \pmod{\Phi}$*.*

Demostración. Procedemos por inducción algebraica. Para cada $i \in n$, $\mathrm{pr}_{n,i}(x) = x_i$ y $\mathrm{pr}_{n,i}(y) = y_i$, luego $\mathrm{pr}_{n,i}(x) \equiv \mathrm{pr}_{n,i}(y) \pmod{\Phi}$. Sea $m \in \mathbb{N} - \{0\}$, $\sigma \in \Sigma_m$ y $(P_i)_{i \in m}$ una familia de operaciones polinómicas n-arias sobre $\mathbf{A}$ tal que, para cada $i \in m$, se cumpla que $P_i(x) \equiv P_i(y) \pmod{\Phi}$. Entonces, ya que

$$(F_\sigma \circ \langle P_i \mid i \in m\rangle)(x) = F_\sigma(P_0(x), \dots, P_{m-1}(x)) \text{ y}$$
$$(F_\sigma \circ \langle P_i \mid i \in m\rangle)(y) = F_\sigma(P_0(y), \dots, P_{m-1}(y))$$

y Φ es una congruencia sobre $\mathbf{A}$,

$$(F_\sigma \circ \langle P_i \mid i \in m\rangle)(x) \equiv (F_\sigma \circ \langle P_i \mid i \in m\rangle)(y) \pmod{\Phi}.$$

Por consiguiente, para cada $P \in \mathrm{Pol}_n(\mathbf{A})$, $P(x) \equiv P(y) \pmod{\Phi}$.

□

Definition 2.62 (McKinsey-Tarski)**.** Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathbf{Alg}_n(\mathbf{A})$ es la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra determinada por el cerrado de $\mathbf{A}^{A^n}$ generado por

$$\{\, \mathrm{pr}_{n,i} \mid i \in n \,\} \cup \{\, \kappa_{n,a} \mid a \in A \,\},$$

siendo $\kappa_{n,a}$ la aplicación constante de A^n en A cuya imagen es $\{a\}$, y la denominamos la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra de las *operaciones algebraicas n-arias* sobre $\mathbf{A}$. Además, $\mathbf{Alg}_\omega(\mathbf{A})$ es la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra determinada por el cerrado de $\mathbf{A}^{A^{\mathbb{N}}}$ generado por

$$\{\, \mathrm{pr}_{\mathbb{N},i} \mid i \in \mathbb{N} \,\} \cup \{\, \kappa_{\mathbb{N},a} \mid a \in A \,\},$$

siendo $\kappa_{\mathbb{N},a}$ la aplicación constante de $A^{\mathbb{N}}$ en A cuya imagen es $\{a\}$, y la denominamos la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra de las *operaciones algebraicas finitarias* sobre $\mathbf{A}$.

Proposition 2.63. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* $m, n \in \mathbb{N}$*,* $P \in \mathrm{Alg}_m(\mathbf{A})$ *y* $(Q_j \mid j \in m) \in \mathrm{Alg}_n(\mathbf{A})^m$*. Entonces* $P \circ \langle Q_j \mid j \in m\rangle \in \mathrm{Alg}_n(\mathbf{A})$*.*

Demostración. Dada la situación descrita por el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A^n \arrow[d, "\langle Q_j \mid j \in m\rangle"'] \arrow[dr, "Q_j"] & \\
A^m \arrow[r, "\mathrm{pr}_{m,j}"'] \arrow[d, "P"'] & A \\
A &
\end{tikzcd}$$

□

Proposition 2.64. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* $m, n \in \mathbb{N}$ *y* $\xi\colon m \longrightarrow n$*. Entonces*

$$\mathrm{Alg}_\xi(\mathbf{A}) \begin{cases} \mathbf{Alg}_m(\mathbf{A}) & \longrightarrow & \mathbf{Alg}_n(\mathbf{A}) \\ P & \longmapsto & (P(x \circ \xi) \mid x \in A^n) \end{cases}$$

es un homomorfismo de $\mathbf{Alg}_m(\mathbf{A})$ *en* $\mathbf{Alg}_n(\mathbf{A})$.

Demostración. □

Proposition 2.65. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra. Entonces:*

1. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Alg}_{\mathrm{id}_n}(\mathbf{A}) = \mathrm{id}_{\mathbf{Alg}_n(\mathbf{A})}$.
2. *Para cada* $\varphi\colon m \longrightarrow n$ *y* $\psi\colon n \longrightarrow p$, $\mathrm{Alg}_{\psi\circ\varphi}(\mathbf{A}) = \mathrm{Alg}_\psi(\mathbf{A}) \circ \mathrm{Alg}_\varphi(\mathbf{A})$.

Demostración. □

Proposition 2.66. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* $0 < m < n \in \mathbb{N}$*,* $P\colon A^m \longrightarrow A$ *y* $Q\colon A^n \longrightarrow A$*. Si, para cada* $x \in A^n$*,* $Q(x) = P(x{\restriction}m)$*, entonces* $P \in \mathrm{Alg}_m(\mathbf{A})$ *precisamente si* $Q \in \mathrm{Alg}_n(\mathbf{A})$.

Demostración. □

Proposition 2.67. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* $n \in \mathbb{N}$ *y* $P\colon A^n \longrightarrow A$*. Entonces una condición necesaria y suficiente para que* $P \in \mathrm{Alg}_n(\mathbf{A})$ *es que exista un* $m \in \mathbb{N}$*, un* $Q \in \mathrm{Pol}_{n+m}(\mathbf{A})$ *y un* $a \in A^m$ *tal que, para cada* $x \in A^n$*,* $P(x) = Q(x \curlywedge a)$*.*

Demostración. □

Como una aplicación del concepto de operación algebraica, caracterizamos a continuación las congruencias sobre las álgebras a través de las operaciones algebraicas unarias.

Proposition 2.68. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y* $\Phi \subseteq A^2$*. Si* Φ *tiene la propiedad de substitución respecto de las operaciones estructurales de* $\mathbf{A}$*, i.e., si* Φ *es tal que, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, cada* $\sigma \in \Sigma_n$*, y cada* $(x_i \mid i \in n)$*,* $(y_i \mid i \in n) \in A^n$*, si, para cada* $i \in n$*,* $x_i \equiv y_i \pmod{\Phi}$*, entonces* $F_\sigma(x_i \mid i \in n) \equiv F_\sigma(y_i \mid i \in n) \pmod{\Phi}$*, entonces* Φ *tiene la propiedad de substitución respecto de todas las operaciones polinómicas de* $\mathbf{A}$*. Si además* $\Delta_A \subseteq \Phi$*, entonces* Φ *tiene la propiedad de substitución respecto de todas las operaciones algebraicas de* $\mathbf{A}$*.*

Demostración. □

Corollary 2.69. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra. Entonces cualquier congruencia sobre* $\mathbf{A}$ *tiene la propiedad de substitución respecto de todas las operaciones algebraicas de* $\mathbf{A}$*. Recíprocamente, cualquier relación de equivalencia sobre* A *que tenga la propiedad de substitución respecto de todas las operaciones algebraicas de* $\mathrm{Alg}_1(\mathbf{A})$ *es una congruencia sobre* $\mathbf{A}$*.*

Proposition 2.70. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y* $\varnothing \neq \Phi \subseteq A^2$*. Entonces* $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)$ *coincide con*

$$\left\{ (x,y) \in A^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists n \in \mathbb{N}\, \exists (P_i \mid i \in n+1) \in \mathrm{Alg}_1(\mathbf{A})^{n+1} \\ y\ \exists ((x_i, y_i) \mid i \in n+1) \in (\Phi \cup \Phi^{-1})^{n+1} \text{ tal que} \\ x = P_0(x_0), y = P_n(y_n)\ y\ , \forall i \in n, P_i(y_i) = P_{i+1}(x_{i+1}) \end{array} \right\}$$

Demostración. □

Las nociones de operación polinómica y de operación algebraica se generalizan a conjuntos y aplicaciones entre conjuntos.

Definition 2.71. Una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ es *funcionalmente completa* si es finita, no es final y, además, para cada $n \in \mathbb{N}$, toda operación n-aria sobre A es una operación algebraica n-aria sobre $\mathbf{A}$.

Proposition 2.72. *Sea* $f\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$. *Entonces hay un único homomorfismo sobreyectivo* $\mathrm{Pol}_n(f)$ *de* $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})$ *en* $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{B})$ *tal que el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\downarrow v_n) \arrow[dl, "\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}"'] \arrow[dr, "\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{B}}"] & \\
\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A}) \arrow[rr, "\mathrm{Pol}_n(f)"'] & & \mathbf{Pol}_n(\mathbf{B})
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Demostración. $\square$

La proposición que sigue afirma simplemente que tenemos un functor

$$\mathrm{Pd}\colon \mathbf{Ens}_{\mathbb{N}} \times \mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma})_{\mathrm{epi}} \longrightarrow \mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma})^{\to}.$$

Proposition 2.73. *Sea* $\xi\colon m \longrightarrow n$ *y* $f\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$. *Entonces, siendo* $\mathrm{Pol}_\xi(f)$ *la diagonal del diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Pol}_m(\mathbf{A}) \arrow[r, "\mathrm{Pol}_m(f)"] \arrow[d, "\mathrm{Pol}_\xi(\mathbf{A})"'] \arrow[dr, "\mathrm{Pol}_\xi(f)"] & \mathbf{Pol}_m(\mathbf{B}) \arrow[d, "\mathrm{Pol}_\xi(\mathbf{B})"] \\
\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A}) \arrow[r, "\mathrm{Pol}_n(f)"'] & \mathbf{Pol}_n(\mathbf{B})
\end{tikzcd}
$$

se cumple que el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\downarrow v_m) \arrow[r, "\mathrm{Pd}_{m,\mathbf{A}}"] \arrow[d, "\mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\xi)"'] & \mathbf{Pol}_m(\mathbf{A}) \arrow[d, "\mathrm{Pol}_\xi(f)"] \\
\mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\downarrow v_n) \arrow[r, "\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{B}}"'] & \mathbf{Pol}_n(\mathbf{B})
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Además, para los homomorfismos del tipo $\mathrm{Pol}_\xi(f)$ *tenemos que:*

1. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y cada* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{A}$,

$$\mathrm{Pol}_{\mathrm{id}_n}(\mathrm{id}_{\mathbf{A}}) = \mathrm{id}_{\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})}.$$

2. *Para cada* $\varphi\colon m \longrightarrow n$, $\psi\colon n \longrightarrow p$, $f\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$ *y* $g\colon \mathbf{B} \twoheadrightarrow \mathbf{C}$,

$$\mathrm{Pol}_{\psi\circ\varphi}(g \circ f) = \mathrm{Pol}_\psi(g) \circ \mathrm{Pol}_\varphi(f).$$

Demostración. La definición de $\mathrm{Pol}_\xi(f)$ como la diagonal del primer diagrama de la proposición es correcta, ya que el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Pol}_m(\mathbf{A}) \arrow[rr, "\mathrm{Pol}_m(f)"] \arrow[ddd, "\mathrm{Pol}_\xi(\mathbf{A})"'] & & \mathbf{Pol}_m(\mathbf{B}) \arrow[ddd, "\mathrm{Pol}_\xi(\mathbf{B})"] \\
& \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_m) \arrow[ul, "\mathrm{Pd}_{m,\mathbf{A}}"] \arrow[ur, "\mathrm{Pd}_{m,\mathbf{B}}"'] \arrow[d, "\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\xi)"] & \\
& \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n) \arrow[dl, "\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}"'] \arrow[dr, "\mathrm{Pd}_{m,\mathbf{B}}"] & \\
\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A}) \arrow[rr, "\mathrm{Pol}_n(f)"'] & & \mathbf{Pol}_n(\mathbf{B})
\end{tikzcd}
$$

conmuta □

Proposition 2.74. *Sea* $f\colon \mathbf{B} \mathrel{+\!\!\!\longrightarrow} \mathbf{A}$. *Entonces hay un único homomorfismo sobreyectivo* $\mathrm{Pol}_n(f)$ *de* $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})$ *en* $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{B})$ *tal que el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
& \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n) \arrow[dl, "\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{A}}"'] \arrow[dr, "\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{B}}"] & \\
\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A}) \arrow[rr, "\mathrm{Pol}_n(f)"'] & & \mathbf{Pol}_n(\mathbf{B})
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Demostración. □

La proposición que sigue afirma simplemente que tenemos un functor

$$\mathrm{Pd}\colon \mathbf{Ens}_{\mathbb{N}} \times (\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})_{\mathrm{mon}})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})^{\rightarrow}.$$

Proposition 2.75. *Sea* $\xi\colon m \longrightarrow n$ *y* $f\colon \mathbf{B} \mathrel{+\!\!\!\longrightarrow} \mathbf{A}$. *Entonces el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_m) \arrow[r, "\mathrm{Pd}_{m,\mathbf{A}}"] \arrow[d, "\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\xi)"'] & \mathbf{Pol}_m(\mathbf{A}) \arrow[d, "\mathrm{Pol}_\xi(f)"] \\
\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n) \arrow[r, "\mathrm{Pd}_{n,\mathbf{B}}"'] & \mathbf{Pol}_n(\mathbf{B})
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Además, para los homomorfismos del tipo $\mathrm{Pol}_\xi(f)$ *tenemos que:*

1. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y cada* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{A}$,

$$\mathrm{Pol}_{\mathrm{id}_n}(\mathrm{id}_{\mathbf{A}}) = \mathrm{id}_{\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A})}.$$

2. *Para cada* $\varphi\colon m \longrightarrow n$, $\psi\colon n \longrightarrow p$, $f\colon \mathbf{B} \mathrel{+\!\!\!\longrightarrow} \mathbf{A}$ *y* $g\colon \mathbf{C} \mathrel{+\!\!\!\longrightarrow} \mathbf{B}$,

$$\mathrm{Pol}_{\psi\circ\varphi}(f \circ g) = \mathrm{Pol}_\psi(g) \circ \mathrm{Pol}_\varphi(f).$$

Demostración. □

2.5. Presentaciones de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras. Sabemos que cualquier $\mathbf{\Sigma}$-álgebra es una imagen homomorfa de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre. Por consiguiente, cualquier $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ es isomorfa a un cociente $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\Phi$, siendo X un conjunto y Φ una congruencia sobre $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Ahora bien, ya que el conjunto de las congruencias sobre una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra es un sistema de clausura algebraico, la congruencia Φ estará generada por al menos una relación R en $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, i.e., $\Phi = \mathrm{Cg}_{\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)}(R)$, o, para abreviar, $\Phi = \mathrm{Cg}(R)$, luego $\mathbf{A} \cong \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Cg}(R)$. Este hecho es el que nos lleva a introducir el concepto de *presentación* de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra.

Definition 2.76. Una *presentación* de una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra es un par (X, R) en el que X es un conjunto y R una relación binaria en $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. En el caso de que X y R sean finitos decimos que la presentación es *finita*.

Una vez definidos los objetos de interés, en este caso las presentaciones de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras, consideramos las transformaciones entre ellos.

Definition 2.77. Sean (X, R) y (Y, S) dos presentaciones de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras. Un *morfismo de presentaciones* de (X, R) en (Y, S) es un triplo ordenado $((X, R), f, (Y, S))$, abreviado como f y denotado por $f\colon (X, R) \longrightarrow (Y, S)$, en el que f es un homomorfismo de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ en $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(Y)$ tal que $f^2[R] \subseteq \mathrm{Cg}(S)$.

Proposition 2.78. *Sean $f\colon (X, R) \longrightarrow (Y, S)$ y $g\colon (Y, S) \longrightarrow (Z, T)$ dos morfismos de presentaciones. Entonces $g \circ f\colon (X, R) \longrightarrow (Z, T)$ es un morfismo de presentaciones. Además,* $\mathrm{id}_{(X,R)} = \mathrm{id}_{\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)}$ *es un endomorfismo de la presentación (X, R).*

Demostración. □

Proposition 2.79. *Dados tres morfismos de presentaciones $f\colon (X, R) \longrightarrow (Y, S)$, $g\colon (Y, S) \longrightarrow (Z, T)$ y $h\colon (Z, T) \longrightarrow (W, U)$ se cumple que:*

1. (Asociatividad). *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
(X,R) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] \arrow[drr, bend left=60, "(h\circ g)\circ f"] \arrow[drr, bend right=60, "h\circ(g\circ f)"'] & (Y,S) \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\
& (Z,T) \arrow[r, "h"'] & (W,U)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

2. (Neutros). *Los diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
(X,R) \arrow[r, "id_{(X,R)}"] \arrow[dr, "f"'] & (X,R) \arrow[d, "f"] \\
& (Y,S)
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
(X,R) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & (Y,S) \arrow[d, "id_{(Y,S)}"] \\
& (Y,S)
\end{tikzcd}$$

conmutan.

Demostración. □

Proposition 2.80. *Cualquier presentación* (X,R) *determina unívocamente una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra, precisamente* $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Cg}(R)$. *Por otra parte, cada morfismo de presentaciones* $f\colon (X,R) \longrightarrow (Y,S)$ *también determina unívocamente un homomorfismo* $\widehat{f}\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Cg}(R) \longrightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(Y)/\mathrm{Cg}(S)$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Cg}(R)}"'] & \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(Y) \arrow[d, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Cg}(S)}"] \\ \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Cg}(R) \arrow[r, "\widehat{f}"'] & \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(Y)/\mathrm{Cg}(S). \end{tikzcd}$$

Además, se cumple que:

1. *Para cada presentación* (X,R), $\widehat{\mathrm{id}}_{(X,R)} = \mathrm{id}_{\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Cg}(R)}$.
2. *Si* $f\colon (X,R) \longrightarrow (Y,S)$ *y* $g\colon (Y,S) \longrightarrow (Z,T)$ *son dos morfismos de presentaciones, entonces* $\widehat{g \circ f} = \widehat{g} \circ \widehat{f}$.

Demostración. □

Del mismo modo que las ecuaciones de una curva o de una superficie son diferentes en distintos sistemas de coordenadas, una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra tiene, en general, muchas presentaciones distintas, debido a que tiene diferentes conjuntos de generadores y, para un mismo conjunto de generadores, varios conjuntos de relaciones. El problema de establecer cuando dos presentaciones determinan o no dos $\mathbf{\Sigma}$-álgebras isomorfas es el *problema del isomorfismo*. Tal problema no es en general soluble, pero, en casos especiales, se pueden encontrar soluciones parciales, que son de gran importancia. Relacionado con esto, definimos a continuación la relación de *homotopía* entre morfismos de presentaciones.

Definition 2.81. Sean $f,g\colon (X,R) \longrightarrow (Y,S)$ dos morfismos de presentaciones. Decimos que f y g son *homótopos*, y lo denotamos por $f \simeq g$, si se cumple que

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{Cg}(S)} \circ f = \mathrm{pr}_{\mathrm{Cg}(S)} \circ g.$$

Proposition 2.82. *Una condición necesaria y suficiente para que dos morfismos de presentaciones* $f\colon (X,R) \longrightarrow (Y,S)$ *y* $g\colon (Y,S) \longrightarrow (Z,T)$ *sean homótopos es que* $\widehat{f} = \widehat{g}$. *Por consiguiente la relación de homotopía es una relación de equivalencia sobre cada uno de los conjuntos de morfismos de presentaciones entre dos presentaciones. Además, si* $f,g\colon (X,R) \longrightarrow (Y,S)$ *y* $u,v\colon (Y,S) \longrightarrow (Z,T)$ *son tales que* $f \simeq g$ *y* $u \simeq v$, *entonces* $u \circ f \simeq v \circ g$.

Demostración. □

Proposition 2.83. *Sean* (X,R) *y* (Y,S) *dos presentaciones y* h *un homomorfismo de* $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Cg}(R)$ *en* $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(Y)/\mathrm{Cg}(S)$, *entonces hay un morfismo de presentaciones* $f\colon (X,R) \longrightarrow (Y,S)$ *tal que* $\widehat{f} = h$. *Además, si* $g\colon (X,R) \longrightarrow (Y,S)$ *fuera tal que* $\widehat{g} = h$, *entonces* $f \simeq g$, *i.e., dos morfismos tales son homótopos.*

Demostración. □

Corollary 2.84. *Sean* (X,R) *y* (Y,S) *dos presentaciones. Entonces se cumple que:*

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Cg}(R), \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(Y)/\mathrm{Cg}(S)) \cong \mathrm{Hom}((X,R),(Y,S))/\simeq .$$

Definition 2.85. Sean (X,R) y (Y,S) dos presentaciones. Decimos que (X,R) y (Y,S) son del *mismo tipo*, y lo denotamos por $(X,R) \simeq (Y,S)$, si existen dos morfismos $f\colon (X,R) \longrightarrow (Y,S)$ y $g\colon (Y,S) \longrightarrow (X,R)$ tales que $g \circ f \simeq \mathrm{id}_{(X,R)}$ y $f \circ g \simeq \mathrm{id}_{(Y,S)}$

Proposition 2.86. *Una condición necesaria y suficiente para que dos presentaciones (X, R) y (Y, S) sean del mismo tipo es que las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras por ellas determinadas sean isomorfas.*

Demostración. □

Proposition 2.87. *Sea (X, R) una presentación y $(P, Q) \in \mathrm{Cg}(R)$. Entonces $(X, R) \simeq (X, R \cup \{(P, Q)\})$.*

Demostración. En efecto, siendo T_I el triplo $((X, R), \mathrm{id}_{\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)}, (X, R \cup \{(P, Q)\}))$ y $\mathrm{T}_{I'}$ el triplo $((X, R \cup \{(P, Q)\}), \mathrm{id}_{\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)}, (X, R))$, se cumple que $\mathrm{T}_{I'} \circ \mathrm{T}_I = \mathrm{id}_{(X,R)}$ y que $\mathrm{T}_I \circ \mathrm{T}_{I'} = \mathrm{id}_{(X, \cup\{(P,Q)\})}$. Al morfismo T_I lo denominamos el *morfismo de Tietze directo de primera especie* y al morfismo $\mathrm{T}_{I'}$ el *morfismo de Tietze inverso de primera especie.* □

Proposition 2.88. *Sea (X, R) una presentación, y un conjunto tal que $y \notin X$, e.g., $y = X$ y $P \in \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Entonces $(X, R) \simeq (X \cup \{y\}, R \cup \{(y, P)\})$.*

Demostración. En efecto, siendo T_{II} el triplo $((X, R), \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\mathrm{in}_X), (X \cup \{y\}, R \cup \{(y, P)\}))$ en el que $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\mathrm{in}_X)$ es el único homomorfismo de $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ en $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X \cup \{y\})$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "\mathrm{in}_X"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[d, "\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\mathrm{in}_X)"] \\ X \cup \{y\} \arrow[r, "\eta_{X \cup \{y\}}"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X \cup \{y\}), \end{tikzcd}$$

conmuta, y $\mathrm{T}_{II'}$ el triplo $((X \cup \{y\}, R \cup \{(y, P)\}), \langle \eta_X, \kappa_P \rangle^\sharp, (X, R))$ en el que κ_P es la aplicación de $\{y\}$ en $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ que a y le asigna P y $\langle \eta_X, \kappa_P \rangle^\sharp$ el único homomorfismo de $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X \cup \{y\})$ en $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \cup \{y\} \arrow[r, "\eta_{X \cup \{y\}}"] \arrow[dr, "\langle \eta_X, \kappa_P \rangle"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X \cup \{y\}) \arrow[d, "\langle \eta_X, \kappa_P \rangle^\sharp"] \\ & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \end{tikzcd}$$

conmuta, se cumple que $\mathrm{T}_{II'} \circ \mathrm{T}_{II} = \mathrm{id}_{(X,R)}$ y que $\mathrm{T}_{II} \circ \mathrm{T}_{II'} \simeq \mathrm{id}_{(X \cup \{y\}, R \cup \{(y,P)\})}$. Al morfismo T_{II} lo denominamos el *morfismo de Tietze directo de segunda especie* y al morfismo $\mathrm{T}_{II'}$ el *morfismo de Tietze inverso de segunda especie.* □

Proposition 2.89. *Sean X e Y dos conjuntos disjuntos, g un homomorfismo de $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X \cup Y)$ en $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[d, "\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\mathrm{in}_X)"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)}"] & \\ \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X \cup Y) \arrow[r, "g"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \end{tikzcd}$$

conmuta, (X, R) una presentación, $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $f \colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \twoheadrightarrow \mathbf{A}$ tal que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Cg}(R)$. Entonces $\mathrm{Ker}(f \circ g) = \mathrm{Cg}(R \cup \{\, (y, g(y)) \mid y \in Y \,\})$.

Demostración. Demostramos en primer lugar que $\mathrm{Cg}(R \cup \{\, (y, g(y)) \mid y \in Y \,\}) \subseteq \mathrm{Ker}(f \circ g)$. Si $(P, Q) \in R$, entonces, ya que $R \subseteq \mathrm{Cg}(R) = \mathrm{Ker}(f)$, $(P, Q) \in \mathrm{Ker}(f)$, i.e., $f(P) = f(Q)$, pero $g(P) = P$ y $g(Q) = Q$, luego $f(g(P)) = f(g(Q))$, i.e.,

$(P,Q) \in \mathrm{Ker}(f \circ g)$. Por otra parte, ya que $g \circ \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathrm{in}_X) \circ g = g$, se cumple que, para cada $y \in Y$, $f(g(y)) = f(g(g(y)))$, i.e., que $(y, g(y)) \in \mathrm{Ker}(f \circ g)$.

Para demostrar que $\mathrm{Ker}(f \circ g) \subseteq \mathrm{Cg}(R \cup \{\, (y, g(y)) \mid y \in Y \,\})$ establecemos en primer lugar que el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X \cup Y) \arrow[rr, "g"] \arrow[drr, "\mathrm{pr}"'] & & \mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X) \arrow[d, "\mathrm{pr}'"] \\
& & \mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X \cup Y)/\mathrm{Cg}(R \cup \{\, (y, g(y)) \mid y \in Y \,\})
\end{tikzcd}
$$

en el que pr es la proyección canónica y pr' la restricción de dicha proyección a $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$, conmuta. Pero, a su vez, para demostrar que el anterior diagrama conmuta es suficiente que comprovemos que $\mathrm{pr}' \circ g \circ \eta_{X \cup Y} \circ \mathrm{in}_X = \mathrm{pr} \circ \eta_{X \cup Y} \circ \mathrm{in}_X$ y que $\mathrm{pr}' \circ g \circ \eta_{X \cup Y} \circ \mathrm{in}_Y = \mathrm{pr} \circ \eta_{X \cup Y} \circ \mathrm{in}_Y$, lo cual es trivial. Puesto que, para cada $P \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X \cup Y)$, $(P, g(P)) \in \mathrm{Ker}(\mathrm{pr})$ y $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}) = \mathrm{Cg}(R \cup \{\, (y, g(y)) \mid y \in Y \,\})$, tenemos que, para cada $P \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X \cup Y)$, $(P, g(P)) \in \mathrm{Cg}(R \cup \{\, (y, g(y)) \mid y \in Y \,\})$. Por lo tanto, si $(P,Q) \in \mathrm{Ker}(f \circ g)$, i.e., si $(g(P), g(Q)) \in \mathrm{Ker}(f)$, entonces, ya que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Cg}(R)$, $(g(P), g(Q)) \in \mathrm{Cg}(R)$, luego $(g(P), g(Q)) \in \mathrm{Cg}(R \cup \{\, (y, g(y)) \mid y \in Y \,\})$, pero, ya que $(P, g(P))$ y $(Q, g(Q)) \in \mathrm{Cg}(R \cup \{\, (y, g(y)) \mid y \in Y \,\})$, podemos afirmar que $(P,Q) \in \mathrm{Cg}(R \cup \{\, (y, g(y)) \mid y \in Y \,\})$. □

Proposition 2.90. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra y* $((X,R)$ *una presentación finita de* $\mathbf{A}$*. Entonces cualquier otra presentación finita de* $\mathbf{A}$ *se obtiene de la dada mediante los morfismos de Tietze directos e inversos de primera y segunda especie.*

Demostración. □

3. Límites proyectivos de las álgebras

Nos ocupamos, en primer lugar, de demostrar tanto la existencia de productos de familias de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras, como la de productos de familias de homomorfismos entre familias de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras, así como, en segundo lugar, de estudiar la conducta del operador de formación de productos, respecto de las identidades y de la composición de familias de homomorfismos entre familias de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras.

3.1. Productos de álgebras.

Proposition 3.1. *Sea* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *una familia de* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebras. Entonces hay un par ordenado* $\big(\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I), (\mathrm{pr}_i \mid i \in I)\big)$*, también denotado por* $\big(\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i, (\mathrm{pr}_i \mid i \in I)\big)$*, en el que* $\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$*, el* producto *de* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$*, es una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra y, para cada* $i \in I$*,* pr_i*, la* proyección canónica i-ésima *del producto, un homomorfismo de* $\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *en* $\mathbf{A}_i$*, que tiene la siguiente* propiedad universal*:*

Para cada par ordenado $(\mathbf{A}, (f_i \mid i \in I))$*, en el que* $\mathbf{A}$ *es una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra y, para cada* $i \in I$*,* $f_i \colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}_i$ *un homomorfismo de* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebras, hay un único homomorfismo* $\langle f_i \mid i \in I \rangle : \mathbf{A} \longrightarrow \prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *tal que, para cada* $i \in I$*, el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[d, "\langle f_i \mid i \in I \rangle"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\
\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"'] & \mathbf{A}_i
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Demostración. Sea $\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra cuyo conjunto subyacente es el producto cartesiano de la familia de conjuntos $(A_i \mid i \in I)$, i.e., el conjunto definido como:

$$\prod\big(A_i \mid i \in I\big) = \big\{\, x \in \mathrm{Fnc}\big(I, \bigcup (A_i \mid i \in I)\big) \;\big|\; \forall i \in I (x_i \in A_i) \,\big\},$$

y en la que, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, la operación estructural F_σ, correspondiente a σ, es la aplicación de $\big(\prod_{i \in I} A_i\big)^n$ en $\prod_{i \in I} A_i$ definida como:

$$F_\sigma \begin{cases} \big(\prod_{i\in I} A_i\big)^n & \longrightarrow \prod_{i\in I} A_i \\ (x_\alpha \mid \alpha \in n) & \longmapsto (F^i_\sigma(x_\alpha(i) \mid \alpha \in n) \mid i \in I), \end{cases}$$

siendo F^i_σ la operación estructural de $\mathbf{A}_i$ correspondiente a σ; y, para cada $i \in I$, sea pr_i el triplo ordenado $(\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I), \mathrm{pr}_i, \mathbf{A}_i)$, denotado por $\mathrm{pr}_i \colon \prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \longrightarrow \mathbf{A}_i$, en el que pr_i es la aplicación de $\prod(A_i \mid i \in I)$ en A_i definida como:

$$\mathrm{pr}_i \begin{cases} \prod(A_i \mid i \in I) & \longrightarrow A_i \\ \quad x & \longmapsto x_i \end{cases} .$$

Entonces se cumple que, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \big(\prod_{i\in I} A_i\big)^n \arrow[r, "\mathrm{pr}_i^n"] \arrow[d, "F_\sigma"'] & A_i^n \arrow[d, "F^i_\sigma"] \\ \prod_{i\in I} A_i \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"'] & A_i \end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., que pr_i es un homomorfismo de $\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ en $\mathbf{A}_i$.

Por otra parte, dado un par ordenado $(\mathbf{A}, (f_i \mid i \in I))$, en el que $\mathbf{A}$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y, para cada $i \in I$, $f_i \colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}_i$ un homomorfismo, sea $\langle f_i \mid i \in I\rangle$ la aplicación de A en $\prod(A_i \mid i \in I)$ definida como:

$$\langle f_i \mid i \in I\rangle \begin{cases} A & \longrightarrow \prod(A_i \mid i \in I) \\ a & \longmapsto (f_i(a) \mid i \in I) \end{cases} .$$

Es evidente que, para cada $i \in I$, $\mathrm{pr}_i \circ \langle f_i \mid i \in I\rangle = f_i$ y que $\langle f_i \mid i \in I\rangle$ es un homomorfismode $\mathbf{A}$ en $\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$. Con ello queda demostrada la existencia de al menos un homomorfismode $\mathbf{A}$ en $\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ con la propiedad indicada. Dejamos, como ejercicio, la demostración de la unicidad. □

En la proposición anterior se ha demostrado, para una familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras, la existencia de al menos un par ordenado, formado por una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y una familia de homomorfismos desde la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra hasta cada uno de las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras de la familia dada, sujeto a cumplir una cierta propiedad universal; pero, ni hemos afirmado que tal par sea absolutamente único, ni que el producto de la familia sea no vacío, ni que las proyecciones canónicas sean necesariamente sobreyectivas.

Demostraremos en lo que sigue, entre otras cosas, que:

- El par ordenado de la proposición anterior, es único salvo (un único) isomorfismo.
- Una condición necesaria y suficiente para que una proyección canónica sea sobreyectiva, es que desde el codominio de tal proyección hasta cualquier otra $\mathbf{\Sigma}$-álgebra de la familia exista al menos un homomorfismo.

Proposition 3.2. *Sea $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras. Entonces:*

1. *Para cada* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{A}$ *y cualesquiera homomorfismos* $f, g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$*, si, para cada* $i \in I$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[rr, bend left=40, "\mathrm{pr}_i \circ f"] \arrow[rr, bend right=40, "\mathrm{pr}_i \circ g"'] & \prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"] & \mathbf{A}_i
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $f = g$*, i.e., la familia de homomorfismos* $(\mathrm{pr}_i \mid i \in I)$ *es* colectivamente monomórfica.

2. *Para cada par ordenado* $(\mathbf{A}, (f_i \mid i \in I))$*, en el que* $\mathbf{A}$ *sea una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y, para cada* $i \in I$*,* $f_i\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}_i$ *un homomorfismo, y para cada homomorfismosobreyectivo* $t\colon \prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \twoheadrightarrow \mathbf{A}$*, si, para cada* $i \in I$*, el digrama:*

$$\begin{tikzcd}
\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \arrow[rr, "\mathrm{pr}_i"] \arrow[dr, two heads, "t"'] & & \mathbf{A}_i \\
& \mathbf{A} \arrow[ur, "f_i"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces t *es un isomorfismo, i.e., la familia* $(\mathrm{pr}_i \mid i \in I)$ *es* extremal.

Demostración. □

Corollary 3.3. *Sea* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *una familia de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras. Si un par ordenado* $(\mathbf{P}, (p_i \mid i \in I))$*, en el que* $\mathbf{P}$ *es una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y, para cada* $i \in I$*,* $p_i\colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{A}_i$*, tiene la propiedad de que para cada par ordenado* $(\mathbf{A}, (f_i \mid i \in I))$*, en el que* $\mathbf{A}$ *es una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y, para cada* $i \in I$*,* $f_i\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}_i$ *un homomorfismo, hay un único homomorfismoh*$\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{P}$ *tal que, para cada* $i \in I$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\
\mathbf{P} \arrow[r, "p_i"'] & \mathbf{A}_i
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay un único isomorfismo t *de* $\mathbf{P}$ *en* $\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *tal que, para cada* $i \in I$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P} \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, "p_i"] & \\
\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"'] & \mathbf{A}_i
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposition 3.4. *Sea* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *una familia de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras y* $j \in I$*. Entonces una condición necesaria y suficiente para que* pr_j *sea un homomorfismosobreyectivo, es* *que desde $\mathbf{A}_j$ hasta cualquier otra $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}_i$ de la familia exista al menos un homomorfismo.*

Demostración. □

Demuéstrese que no existe el producto de todas las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras no vacías.

Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y Φ una relación de equivalencia sobre A. Demuéstrese que Φ es una congruencia sobre $\mathbf{A}$ precisamente si Φ es un cerrado de la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$.

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos $\mathbf{\Sigma}$-álgebras y f una aplicación de A en B. Demuéstrese que f es un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ precisamente si f es un cerrado de la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$.

Proposition 3.5. *Sea $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras. Entonces:*

1. *Si $I = \varnothing$, entonces $\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra final.*
2. *Si $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ es tal que, para cada $i, j \in I$, $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_j$, y $\mathbf{A}$ es el valor común, entonces denotamos por $\mathbf{A}^I$ el producto $\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ de la familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$, y al único homomorfismode $\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}^I$, determinado por la familia de homomorfismos $(\mathrm{id}_{\mathbf{A}} \mid i \in I)$, lo denominamos el homomorfismo* diagonal *de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}^I$ y lo denotamos por $\mathrm{dg}_{I,\mathbf{A}}$; además, $\mathrm{dg}_{I,\mathbf{A}}$ es un monomorfismo. Así pués, para cada $i \in I$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[d, tail, "\mathrm{dg}_{I,\mathbf{A}}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathbf{A}}"] & \\ \mathbf{A}^I \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"'] & \mathbf{A}_i \end{tikzcd}$$

   conmuta.
3. *Si I es un conjunto final y su único miembro es i, entonces*
$$\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) = \mathbf{A}_i^{\{i\}}.$$
   Por consiguiente, en este caso, $\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ es isomorfo a $\mathbf{A}_i$.
4. *Si I tiene exactamente dos miembros y éstos son i y j, entonces*
$$\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \cong \mathbf{A}_i \times \mathbf{A}_j \quad y \quad \prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \cong \mathbf{A}_j \times \mathbf{A}_i$$
5. *Si para cada $i \in I$, $\mathbf{A}_i$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra final, entonces $\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra final.*

Demostración. □

Proposition 3.6 (Conmutatividad)**.** *Sea $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras y φ un automorfismo de I, entonces*
$$\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \cong \prod(\mathbf{A}_{\varphi(i)} \mid i \in I).$$

Demostración. □

Para establecer la proposición que sigue, convenimos en denotar por $(\mathbf{A}_j \mid j \in J)$ la restricción de $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ a J, si $J \subseteq I$, que no es más que la composición de in_J y de $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$. Además, usaremos pr_j para denotar la proyección canónica j-ésima, del producto de cualquier familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras para la cual se cumpla que j sea miembro del conjunto de índices de la misma.

Proposition 3.7. *Sea $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras y $J, K, L \subseteq I$ tales que $K \subseteq J$ y $L \subseteq K$. Entonces:*

1. $\mathrm{pr}_{J,J} = \mathrm{id}_{\prod(\mathbf{A}_j \mid j\in J)}$, *siendo* $\mathrm{pr}_{J,J}$ *el único endomorfismo* $\langle \mathrm{pr}_j \mid j \in J\rangle$ *de la* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\prod(\mathbf{A}_j \mid j \in J)$ *tal que, para cada* $j \in J$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \prod(\mathbf{A}_j \mid j \in J) \arrow[d, "\mathrm{pr}_{J,J}"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_j"] & \\ \prod(\mathbf{A}_j \mid j \in J) \arrow[r, "\mathrm{pr}_j"'] & \mathbf{A}_j \end{tikzcd}$$

conmuta.

2. $\mathrm{pr}_{J,L} = \mathrm{pr}_{K,L} \circ \mathrm{pr}_{J,K}$*, i.e., el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \prod(\mathbf{A}_j \mid j \in J) \arrow[d, "\mathrm{pr}_{J,K}"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{J,L}"] & \\ \prod(\mathbf{A}_k \mid k \in K) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{K,L}"'] & \prod(\mathbf{A}_l \mid l \in L) \end{tikzcd}$$

conmuta; siendo, para $J, K \subseteq I$*, con* $K \subseteq J$*,* $\mathrm{pr}_{J,K}$ *el único homomorfismode la* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\prod(\mathbf{A}_j \mid j \in J)$ *en la* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\prod(\mathbf{A}_k \mid k \in K)$ *tal que, para cada* $k \in K$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \prod(\mathbf{A}_j \mid j \in J) \arrow[d, "\mathrm{pr}_{J,K}"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_k"] & \\ \prod(\mathbf{A}_k \mid k \in K) \arrow[r, "\mathrm{pr}_k"'] & \mathbf{A}_k \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposition 3.8. *Sean* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *y* $(\mathbf{B}_i \mid i \in I)$ *dos familias de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras. Entonces:*

1. *Si, para cada* $i \in I$*,* $\mathbf{A}_i \leq \mathbf{B}_i$*, entonces* $\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \leq \prod(\mathbf{B}_i \mid i \in I)$*.*
2. *Si, para cada* $i \in I$*,* $\mathbf{A}_i \neq \varnothing$ *y* $\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \leq \prod(\mathbf{B}_i \mid i \in I)$*, entonces, para cada* $i \in I$*,* $\mathbf{A}_i \leq \mathbf{B}_i$*.*

Demostración. □

Proposition 3.9. *Sean* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *y* $(\mathbf{B}_i \mid i \in I)$ *dos familias de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras y* $(f_i \mid i \in I)$ *una familia de homomorfismos en la que, para cada* $i \in I$*,* $f_i \colon \mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{B}_i$*. Entonces hay un único homomorfismo, denotado por* $\prod(f_i \mid i \in I)$ *y denominado el* producto *de* $(f_i \mid i \in I)$*, de la* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *en la* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\prod(\mathbf{B}_i \mid i \in I)$ *tal que, para cada* $i \in I$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"] \arrow[d, "\prod(f_i \mid i \in I)"'] & \mathbf{A}_i \arrow[d, "f_i"] \\ \prod(\mathbf{B}_i \mid i \in I) \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"'] & \mathbf{B}_i \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposition 3.10. *Sean* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$, $(\mathbf{B}_i \mid i \in I)$ *y* $(\mathbf{C}_i \mid i \in I)$ *tres familias de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras y* $(f_i \mid i \in I)$ *y* $(g_i \mid i \in I)$ *dos familias de homomorfismos tales que, para cada* $i \in I$, $f_i\colon \mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{B}_i$ *y* $g_i\colon \mathbf{B}_i \longrightarrow \mathbf{C}_i$. *Entonces:*

1. $\prod(\mathrm{id}_{\mathbf{A}_i} \mid i \in I) = \mathrm{id}_{\prod(\mathbf{A}_i \mid i\in I)}$.
2. $\prod(g_i \mid i \in I) \circ \prod(f_i \mid i \in I) = \prod(g_i \circ f_i \mid i \in I)$.

Demostración. □

Proposition 3.11. *Sean* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$, $(\mathbf{B}_j \mid j \in J)$ *y* $(\mathbf{C}_k \mid k \in K)$ *tres familias de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras y* $(f_j \mid j \in J)$ *y* $(g_k \mid k \in K)$ *dos familias de homomorfismos tales que, para cada* $j \in J$, $f_j\colon \prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \longrightarrow \mathbf{B}_j$ *y, para cada* $k \in K$, $g_k\colon \prod(\mathbf{B}_j \mid j \in J) \longrightarrow \mathbf{C}_k$. *Entonces se cumple que el único homomorfismo* $\langle g_k \circ \langle f_j \mid j \in J\rangle \mid k \in K\rangle$ *de la* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *en la* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\prod(\mathbf{C}_k \mid k \in K)$ *tal que, para cada* $k \in K$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \arrow[d, "\langle g_k \circ \langle f_j \mid j \in J\rangle \mid k \in K\rangle"'] \arrow[dr, "g_k \circ \langle f_j \mid j \in J\rangle"] & \\
\prod(\mathbf{C}_k \mid k \in K) \arrow[r, "\mathrm{pr}_k"'] & \mathbf{C}_k
\end{tikzcd}$$

conmuta, coincide con la composición del único homomorfismo $\langle f_j \mid j \in J\rangle$ *de la* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *en la* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\prod(\mathbf{B}_j \mid j \in J)$ *y del único homomorfismo* $\langle g_k \mid k \in K\rangle$ *de la* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\prod(\mathbf{B}_j \mid j \in J)$ *en la* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\prod(\mathbf{C}_k \mid k \in K)$ *tales que, resp., para cada* $j \in J$ *y cada* $k \in K$, *los dos triángulos del diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \arrow[d, "\langle f_j \mid j \in J\rangle"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\
\prod(\mathbf{B}_j \mid j \in J) \arrow[r, "\mathrm{pr}_j"] \arrow[d, "\langle g_k \mid k \in K\rangle"'] \arrow[dr, "g_k"] & \mathbf{B}_j \\
\prod(\mathbf{C}_k \mid k \in K) \arrow[r, "\mathrm{pr}_k"'] & \mathbf{C}_k
\end{tikzcd}$$

conmutan. Así pués, se cumple que:

$$\langle g_k \mid k \in K\rangle \circ \langle f_j \mid j \in J\rangle = \langle g_k \circ \langle f_j \mid j \in J\rangle \mid k \in K\rangle$$

Demostración. □

Proposition 3.12. *Sean* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *y* $(\mathbf{B}_i \mid i \in I)$ *dos familias de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras y* $(f_i \mid i \in I)$ *una familia de homomorfismos en la que, para cada* $i \in I$, $f_i\colon \mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{B}_i$. *Entonces:*

1. *Si para cada* $i \in I$, f_i *es una retracción, entonces* $\prod(f_i \mid i \in I)$ *es una retracción.*
2. *Si para cada* $i \in I$, f_i *es una sección, entonces* $\prod(f_i \mid i \in I)$ *es una sección.*
3. *Si para cada* $i \in I$, f_i *es un isomorfismo, entonces* $\prod(f_i \mid i \in I)$ *es un isomorfismo.*
4. *Si para cada* $i \in I$, f_i *es un monomorfismo, entonces* $\prod(f_i \mid i \in I)$ *es un monomorfismo.*
5. *Si para cada* $i \in I$, f_i *es constante, entonces* $\prod(f_i \mid i \in I)$ *es constante.*

Demostración. □

Corollary 3.13. *Sea I un conjunto y $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo. Si f es una retracción (resp. una sección, isomorfismo, monomorfismo, constante), entonces f^I, i.e., el producto de la familia $(f \mid i \in I)$, es una retracción (resp. una sección, isomorfismo, monomorfismo, constante) de $\mathbf{A}^I$ en $\mathbf{B}^I$.*

Demostración. □

Proposition 3.14 (Asociatividad del producto)**.** *Sea $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras y $(J_l \mid l \in L)$ una familia de subconjuntos de I tal que $\bigcup(J_l \mid l \in L) = I$ y, para cada $l, m \in L$, si $l \neq m$, entonces $J_l \cap J_m = \varnothing$. Entonces*

$$\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \cong \prod\left(\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in J_l) \mid l \in L\right).$$

Demostración. □

Proposition 3.15. *Sea $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia no vacía de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras, $\mathbf{B}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $(f_i \mid i \in I)$ una familia no vacía de homomorfismos en la que, para cada $i \in I$, $f_i\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}_i$. Entonces $\mathrm{Ker}(\langle f_i \mid i \in I\rangle) = \bigcap(\mathrm{Ker}(f_i) \mid i \in I)$.*

Demostración. □

Proposition 3.16. *Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos $\mathbf{\Sigma}$-álgebras y f una aplicación de A en B. Entonces son equivalentes:*

1. *f es un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$.*
2. *La función subyacente de f es una subálgebra de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.*

Demostración. □

Proposition 3.17. *Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y Φ una relación de equivalencia sobre $\mathbf{A}$. Entonces son equivalentes:*

1. *Φ es una congruencia sobre $\mathbf{A}$.*
2. *Φ es una subálgebra de $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$.*

3.2. Congruencias factoriales.

Proposition 3.18. *Sean Φ y Ψ dos congruencias sobre una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$. Entonces (Φ, Ψ) es un* par de congruencias factoriales complementarias *sobre $\mathbf{A}$ si se cumple que:*

$$\Phi \wedge \Psi = \Delta$$
$$\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Psi$$
$$\Phi \vee \Psi = \nabla.$$

Una congruencia Φ sobre $\mathbf{A}$ es factorial *si existe una congruencia Ψ sobre $\mathbf{A}$ tal que (Φ, Ψ) es un par de congruencias factoriales complementarias sobre $\mathbf{A}$.*

Proposition 3.19. *Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos $\mathbf{\Sigma}$-álgebras. Entonces $(\ker(\mathrm{pr}_0, \ker(\mathrm{pr}_1)$ es un par de congruencias factoriales complementarias sobre $\mathbf{A}$.*

Demostración. □

Proposition 3.20. *Si (Φ, Ψ) es un par de congruencias factoriales complementarias sobre $\mathbf{A}$ entonces $\mathbf{A} \cong \mathbf{A}/\Phi \times \mathbf{A}/\Psi$.*

Demostración. □

3.3. Algebras directamente indescomponibles.

Definition 3.21. Una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ es *directamente descomponible* si no es subfinal y es isomorfa a un producto de dos $\mathbf{\Sigma}$-álgebras no subfinales. Una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ es *directamente indescomponible* si es subfinal o no es isomorfa a un producto de dos $\mathbf{\Sigma}$-álgebras no subfinales.

Demuéstrese que cada $\mathbf{\Sigma}$-álgebra finita $\mathbf{A}$ cuyo cardinal sea un número primo es directamente indescomponible.

Demuéstrese que cada $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ simple es directamente indescomponible.

Proposition 3.22. *Una condición necesaria y suficiente para que una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ sea directamente indescomponible es que las únicas congruencias factoriales sobre ella sean Δ_A y ∇_A.*

Demostración. □

Proposition 3.23. *Cada $\mathbf{\Sigma}$-álgebra finita es isomorfa al producto de una familia finita de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras directamente indescomponibles.*

Demostración. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra finita. La demostración es por inducción finita sobre el cardinal de $\mathbf{A}$. Si $\mathrm{card}(\mathbf{A}) \leq 1$ entonces $\mathbf{A}$ es indescomponible. Supongamos que para $1 \leq n$ se cumpla que cada $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{B}$ con $\mathrm{card}(B) \leq n$, sea isomorfa al producto de una familia finita de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras directamente indescomponibles y sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra cuyo cardinal sea $n+1$. Si $\mathbf{A}$ es directamente indescomponible la proposición queda demostrada. En caso contrario, $\mathbf{A} \cong \mathbf{A}_0 \times \mathbf{A}_1$, no siendo ni $\mathbf{A}_0$ ni $\mathbf{A}_1$ subfinales. De donde $\mathrm{card}(A_0)$ y $\mathrm{card}(A_1) < \mathrm{card}(A)$, luego, por la hipotesis de inducción, tenemos que $\mathbf{A}_0 = \prod_{j\in r}\mathbf{B}_j$ y $\mathbf{A}_1 = \prod_{k\in s}\mathbf{C}_k$, siendo $\mathbf{B}_j$ y $\mathbf{C}_k$ directamente indecomponibles. Por consiguiente $\mathbf{A} = \prod_{j\in r}\mathbf{B}_j \times \prod_{k\in s}\mathbf{C}_k$ □

3.4. Algebras subdirectamente irreducibles.

Definition 3.24. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras. Decimos que $\mathbf{A}$ es un *producto subdirecto* de la familia $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ y lo denotamos por $\mathbf{A} \leq_{\mathrm{s}} \prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$, si se cumple que:

1. $\mathbf{A}$ es una subálgebra de $\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$.
2. Para cada $i \in I$, $\mathrm{pr}_i \circ \mathrm{in}_{\mathbf{A}}$ es sobreyectiva, i.e., $\mathrm{pr}_i \circ \mathrm{in}_{\mathbf{A}}[A] = A_i$.

Un *encajamiento* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ es *subdirecto* si $f[A]$ es un producto subdirecto de $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$.

Si $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ es un encajamiento subdirecto e $I \neq \varnothing$ entonces, para cada $i \in I$, pr_i es sobreyectiva. Por consiguiente, si $\mathbf{A}$ es subterminal, entonces se cumple que $\mathbf{A} \cong \prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \cong \mathbf{A}_i$, para cada $i \in I$. Si el conjunto de índices I es vacío, entonces $\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ es la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra terminal $\mathbf{1}$, y $\mathbf{A}$ es un subterminal cuyo encajamiento en $\mathbf{1}$ es vacuamente subdirecto.

Proposition 3.25. *Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $(\Phi_i \mid i \in I)$ una familia de congruencias sobre $\mathbf{A}$. Entonces $\mathbf{A}/\bigcap(\Phi_i \mid i \in I)$ puede ser subdirectamente encajado en $\prod(\mathbf{A}/\Phi_i \mid i \in I)$*

Demostración. Sea, para cada $i \in I$, $\mathrm{pr}_{\bigcap_{i\in I}\Phi_i,\Phi_i}$ la única aplicación de $\mathbf{A}/\bigcap_{i\in I}\Phi_i$ en $\mathbf{A}/\Phi_i$ tal que $\mathrm{pr}_{\bigcap_{i\in I}\Phi_i,\Phi_i} \circ \mathrm{pr}_{\bigcap_{i\in I}\Phi_i} = \mathrm{pr}_{\Phi_i}$. Entonces

$$\langle \mathrm{pr}_{\bigcap_{i\in I}\Phi_i,\Phi_i}\rangle_{i\in I}\colon \mathbf{A}/\textstyle\bigcap_{i\in I}\Phi_i \longrightarrow \prod_{i\in I}\mathbf{A}/\Phi_i,$$

la única aplicación determinada por la propiedad universal del producto, es un encajamiento subdirecto. □

Corollary 3.26. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y* $(\Phi_i \mid i \in I)$ *una familia de congruencias sobre* $\mathbf{A}$ *tal que* $\bigcap_{i\in I} \Phi_i = \Delta_A$*. Entonces* $\langle \mathrm{pr}_i \rangle_{i\in I} \colon \mathbf{A} \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathbf{A}/\Phi_i$ *es un encajamiento subdirecto.*

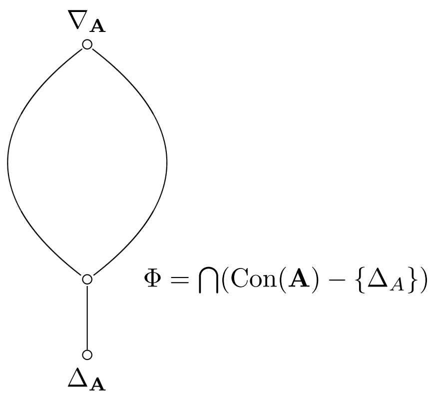
Definition 3.27. Una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ es *subdirectamente indescomponible* si para cada encajamiento subdirecto $f \colon \mathbf{A} \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$, con $I \neq \varnothing$, existe un $i \in I$ tal que $\mathrm{pr}_i \circ f \colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}_i$ es inyectiva (y por tanto un isomorfismo).

Proposition 3.28. *Una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{A}$ *es subdirectamente indescomponible exactamente si* $\mathbf{A}$ *es subterminal o existe un congruencia mínima en* $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) - \Delta_A$*.*

Demostración. Si $\mathbf{A}$ no es subterminal y $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) - \{\Delta_\mathbf{A}\}$ no contiene una congruencia mínima entonces $\bigcap(\mathrm{Con}(\mathbf{A}) - \{\Delta_\mathbf{A}\}) = \Delta_\mathbf{A}$. Sea $I = \mathrm{Con}(\mathbf{A}) - \{\Delta_\mathbf{A}\}$. La aplicación canónica $\langle \mathrm{pr}_\Phi \mid \Phi \in I \rangle \colon \mathbf{A} \longrightarrow \prod_{\Phi\in I} \mathbf{A}/\Phi$ es un encajamiento subdirecto por el corolario anterior y puesto que las proyecciones canónicas $\mathrm{pr}_\Phi \colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}/\Phi$ no son inyectivas para ninguna congruencia $\Phi \in I$, se cumple que $\mathbf{A}$ no es subdirectamente indescomponible. Si $\mathbf{A}$ es subterminal y $f \colon \mathbf{A} \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ es un encajamiento subdirecto, con $I \neq \varnothing$ entonces se cumple, para cada $i \in I$, que $\mathrm{pr}_i \circ f$ es un isomorfismo y $\mathbf{A}$ es subdirectamente indescomponible. Si $\mathbf{A}$ no es subterminal, sea $\Phi = \bigcap(\mathrm{Con}(\mathbf{A}) - \{\Delta_\mathbf{A}\}) \neq \Delta_\mathbf{A}$. Sea $(a, b) \in \Phi$ tal que $a \neq b$. Si $f \colon \mathbf{A} \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ es un encajamiento subdirecto, entonces existe un $i \in I$ tal que $f_i(a) \neq f_i(b)$ con $f_i = \mathrm{pr}_i \circ f$, ya que en caso contrario $(a, b) \in \ker(f) = \Delta_\mathbf{A}$ y $a = b$. Por consiguiente, $(a, b) \notin \mathrm{Ker}(f_i)$ y $\Phi \nsubseteq \mathrm{Ker}(f_i)$, luego $\mathrm{Ker}(f_i) = \Delta_\mathbf{A}$ y $f_i \colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}_i$ es un isomorfismo. Por lo tanto, $\mathbf{A}$ es subdirectamente indescomponible. □

La propiedad de que $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) - \{\Delta_\mathbf{A}\}$ tenga un mínimo es equivalente a la propiedad de que $\Delta_\mathbf{A}$ sea *completamente inf-irreducible*. Un elemento l de un retículo $\mathbf{L}$ es *completamente inf-irreducible* si para cada conjunto I, y cada $(l^i \mid i \in I) \in L^I$, si $l = \inf(l^i \mid i \in I)$ entonces existe un $i \in I$ tal que $l = l^i$.

Si en una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ el retículo $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) - \{\Delta_\mathbf{A}\}$ tiene un mínimo, el retículo de las congruencias sobre $\mathbf{A}$ tiene la forma



A Φ se le llama el *monolito* de $\mathbf{A}$, y se le denota mediante $\mathrm{M}_\mathbf{A}$. El monolito de $\mathbf{A}$ tiene una propiedad notable y es la de estar generado por cualquiera de sus deltas de Kronecker, i.e., $\mathrm{M}_\mathbf{A} = \mathrm{Cg}_\mathbf{A}(\delta^{s,(a,b)})$ para cada $s \in S$ y cada $(a, b) \in \mathrm{M}_\mathbf{A}$ con $a \neq b$.

Proposition 3.29. *Cada* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{A}$ *simple es subdirectamente indescomponible y estas a su vez son directamente indescomponibles.*

Demostración. Las únicas congruencias factoriales de $\mathbf{A}$ son Δ_A y ∇_A, por lo que $\mathbf{A}$ es directamente indescomponible. □

Theorem 3.30 (Birkhoff)**.** *Toda $\mathbf{\Sigma}$-álgebra es isomorfa a un producto subdirecto de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras subdirectamente indescomponibles (que son imágenes homomorfas de $\mathbf{A}$).*

Demostración. Puesto que las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras subterminales son subdirectamente indescomponible, es suficiente considerar las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras no subterminales. Si $\mathbf{A}$ no es subterminal, existe un $s \in S$ tal que $\mathrm{card}(A_s) \geq 2$. Sea

$$I = \{(t, a, b) \mid t \in S, \mathrm{card}(A_t) \geq 2, (a, b) \in A_t - \Delta_{A_t}\}$$

Puesto que $\Delta_A \cap \delta^{t,(a,b)} = (\emptyset \mid s \in S)$, existe una congruencia $\Phi^{t,a,b}$ sobre $\mathbf{A}$ tal que $\Phi^{t,a,b} \cap \delta^{t,(a,b)} = (\emptyset \mid s \in S)$ y maximal con esa propiedad. En el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}^{\Phi^{t,a,b}}"] & \\
\prod_{(t,(a,b)) \in I} \mathbf{A}/\Phi^{t,a,b} \arrow[r, "\mathrm{pr}^{t,a,b}"'] & \mathbf{A}/\Phi^{t,a,b}
\end{tikzcd}$$

sea f la única S-aplicación que existe en virtud de la propiedad universal del producto de las $\mathbf{A}/\Phi^{t,a,b}$. Veamos que f es inyectiva, i.e., que $\mathrm{Ker}(f) = \Delta_A$. Para ello es Terminar la demostración □

Corollary 3.31. *Cada $\mathbf{\Sigma}$-álgebra finita es isomorfa a un producto subdirecto de un número finito de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras finitas subdirectamente indescomponibles.*

Demostración. □

3.5. Igualadores de los homomorfismos.

Proposition 3.32. *Sean $f, g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ dos homomorfismos. Entonces existe un par ordenado* $(\mathbf{Eq}(f,g), \mathrm{eq}(f,g))$, *el* igualador *de f y g, en el que $\mathbf{Eq}(f,g)$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y* $\mathrm{eq}(f,g)$ *un homomorfismode* $\mathbf{Eq}(f,g)$ *en* $\mathbf{A}$*, que tiene las siguientes propiedades:*

1. *$f \circ \mathrm{eq}(f,g) = g \circ \mathrm{eq}(f,g)$.*
2. (Propiedad universal del igualador) *Para cualquier $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{X}$ y cualquier homomorfismo $h\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A}$, si $f \circ h = g \circ h$, entonces hay un único homomorfismo $t\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Eq}(f,g)$ tal que* $\mathrm{eq}(f,g) \circ t = h$.

La situación descrita por las condiciones anteriores la expresamos diagramáticamente como:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X} \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
\mathbf{Eq}(f,g) \arrow[r, "eq(f,g)"'] & \mathbf{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathbf{B}
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $\mathrm{Eq}(f,g)$ el subconjunto de A definido como:

$$\mathrm{Eq}(f,g) = \{\, a \in A \mid f(a) = g(a) \,\}.$$

Se cumple que $\mathrm{Eq}(f,g)$ es un cerrado de $\mathbf{A}$ y que $\mathrm{eq}(f,g)$, la inclusión canónica de $\mathrm{Eq}(f,g)$ en A, es un homomorfismo de $\mathbf{Eq}(f,g)$ en $\mathbf{A}$.

Es evidente que $f \circ \mathrm{eq}(f,g) = g \circ \mathrm{eq}(f,g)$. Además, si $\mathbf{X}$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $h\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A}$ un homomorfismo tal que $f \circ h = g \circ h$, entonces $\mathrm{Im}(h) \subseteq \mathrm{Eq}(f,g)$, luego, por la propiedad universal de la subálgebra, hay un único homomorfismo $t\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Eq}(f,g)$ tal que $\mathrm{eq}(f,g) \circ t = h$.

□

En la proposición anterior hemos demostrado, para un par de homomorfismos, ambos con el mismo dominio y codominio, la existencia de al menos un par ordenado, formado por una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y un homomorfismodesde la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra hasta el dominio de los homomorfismos dados, sujeto a cumplir un par de condiciones; pero no hemos afirmado que tal par sea absolutamente único. Demostramos a continuación que el par ordenado de la proposición anterior, es único, sólo, salvo (un único) isomorfismo.

Proposition 3.33. *Sean $f, g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ dos homomorfismos. Si un par ordenado $(\mathbf{E}, e)$, en el que $\mathbf{E}$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $e\colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{A}$ un homomorfismo, tiene las propiedades:*

1. $f \circ e = g \circ e$.
2. *Para cualquier $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{X}$ y cada homomorfismo$h\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A}$, si $f \circ h = g \circ h$, entonces hay un único homomorfismo$u\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{E}$ tal que $e \circ u = h$.*

Entonces hay un único isomorfismo $t\colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{Eq}(f, g)$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{E} \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, "e"] & \\
\mathbf{Eq}(f,g) \arrow[r, "\mathrm{eq}(f,g)"'] & \mathbf{A}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Corollary 3.34. *Sean $f, g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ dos homomorfismos. Una condición necesaria y suficiente para que f y g coincidan es que coincidan en un conjunto de generadores de $\mathbf{A}$.*

Demostración. □

Corollary 3.35. *Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos $\mathbf{\Sigma}$-álgebras, X un conjunto de generadores de $\mathbf{A}$ y $f\colon X \longrightarrow B$ una aplicación. Entonces hay a lo sumo un homomorfismo$g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ tal que $g{\restriction}X = f$. En particular, cualquier homomorfismoestá unívocamente determinado por su restricción a un conjunto de generadores de su dominio.*

Demostración. □

Corollary 3.36. *Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y f un endomorfismo de $\mathbf{A}$. Entonces el conjunto de los puntos fijos de f es una subálgebra de $\mathbf{A}$.*

Demostración. □

Proposition 3.37. *Si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "u"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "v"] \\
\mathbf{A}' \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, shift right, "g'"'] & \mathbf{B}'
\end{tikzcd}$$

conmuta serialmente, i.e., si $v \circ f = f' \circ u$ y $v \circ g = g' \circ u$, entonces hay un único homomorfismo$\mathrm{Eq}(u,v)\colon \mathbf{Eq}(f,g) \longrightarrow \mathbf{Eq}(f',g')$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Eq}(f,g) \arrow[r, "\mathrm{eq}(f,g)"] \arrow[d, "\mathrm{Eq}(u,v)"'] & \mathbf{A} \arrow[d, "u"] \\
\mathbf{Eq}(f',g') \arrow[r, "\mathrm{eq}(f',g')"'] & \mathbf{A}'
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Demuéstrese que:

1. Para el diagrama, serialmente, conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbf{A}}"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbf{B}}"] \\
\mathbf{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathbf{B}
\end{tikzcd}$$

se cumple que

$$\mathrm{Eq}(\mathrm{id}_{\mathbf{A}}, \mathrm{id}_{\mathbf{B}}) = \mathrm{id}_{\mathbf{Eq}(f,g)}.$$

2. Si los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "u"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "v"] \\
\mathbf{A}' \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, shift right, "g'"'] & \mathbf{B}'
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{A}' \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, shift right, "g'"'] \arrow[d, "u'"'] & \mathbf{B}' \arrow[d, "v'"] \\
\mathbf{A}'' \arrow[r, shift left, "f''"] \arrow[r, shift right, "g''"'] & \mathbf{B}''
\end{tikzcd}$$

son, serialmente, conmutativos, entonces se cumple que

$$\mathrm{Eq}(u',v') \circ \mathrm{Eq}(u,v) = \mathrm{Eq}(u' \circ u, v' \circ v).$$

Definition 3.38. Un homomorfismo$f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es un *monomorfismo regular* si existen dos homomorfismos $u, v\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ tales que el par ordenado $(\mathbf{A}, f)$ es un igualador de u y v.

Proposition 3.39. *Un homomorfismo $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es un monomorfismo regular precisamente si es inyectivo.*

Ahora que disponemos de los conceptos de producto y de igualador, demostramos, apoyándonos en ellos, la existencia de un nuevo tipo de límite proyectivo, el de *producto fibrado* de dos homomorfismos con el mismo codominio.

3.6. Productos fibrados de homomorfismos.

Proposition 3.40. *Sean $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ y $g\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ dos homomorfismos con el mismo codominio. Entonces existe un par ordenado $(\mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B}, (p_{\mathbf{A}}, p_{\mathbf{B}}))$, el* producto fibrado de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ sobre $\mathbf{C}$ relativo a f y g, *en el que $\mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra, $p_{\mathbf{A}}$ un homomorfismode $\mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$ y $p_{\mathbf{B}}$ un homomorfismode $\mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$ en $\mathbf{B}$, que tiene las siguientes propiedades:*

1. *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B} \arrow[r, "p_{\mathbf{B}}"] \arrow[d, "p_{\mathbf{A}}"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "g"] \\
\mathbf{A} \arrow[r, "f"'] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

   conmuta.

2. (Propiedad universal del producto fibrado) *Para cada* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{X}$ *y cualesquiera homomorfismos* $u\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A}$ *y* $v\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{B}$ *si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X} \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "g"] \\
\mathbf{A} \arrow[r, "f"'] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

   conmuta, entonces hay un único homomorfismo$t\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$ *tal que los dos triángulos del diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X} \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, bend left, "v"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\
& \mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B} \arrow[r, "p_{\mathbf{B}}"] \arrow[d, "p_{\mathbf{A}}"'] & \mathbf{B} \\
& \mathbf{A} &
\end{tikzcd}$$

   conmutan.

La situación descrita por las condiciones anteriores la expresamos diagramáticamente como:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X} \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, bend left, "v"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\
& \mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B} \arrow[r, "p_{\mathbf{B}}"] \arrow[d, "p_{\mathbf{A}}"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "g"] \\
& \mathbf{A} \arrow[r, "f"'] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $A \times_C B$ el subconjunto de $A \times B$ definido como:

$$A \times_C B = \{\, (a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b) \,\}.$$

Se cumple que $A \times_C B$ es un cerrado de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ y que $p_{\mathbf{A}} = \mathrm{pr}_{\mathbf{A}} \restriction \mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$ y $p_{\mathbf{B}} = \mathrm{pr}_{\mathbf{B}} \restriction \mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$ son homomorfismos de $\mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$ y en $\mathbf{B}$, respectivamente.

Es evidente que entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}\times_{\mathbf{C}}\mathbf{B} \arrow[r, "p_{\mathbf{B}}"] \arrow[d, "p_{\mathbf{A}}"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "g"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, "f"'] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Además, si $\mathbf{X}$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $u\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A}$, $v\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{B}$ dos homomorfismoss tales que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "g"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, "f"'] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces, por la propiedad universal del producto, hay un único homomorfismo $\langle u, v\rangle : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A} \prod \mathbf{B}$ tal que $\mathrm{pr}_{\mathbf{A}} \circ \langle u, v\rangle = u$ y $\mathrm{pr}_{\mathbf{B}} \circ \langle u, v\rangle = v$ y, por cumplirse que $f \circ u = g \circ v$, tenemos que $\mathrm{Im}(\langle u, v\rangle) \subseteq A \times_C B$, luego, por la propiedad universal de la subálgebra, hay un único homomorfismo t de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$ tal que $\mathrm{in}_{\mathbf{A}\times_{\mathbf{C}}\mathbf{B}} \circ t = \langle u, v\rangle$. Para el homomorfismo t se cumple que los dos triángulos del diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, bend left, "v"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\ & \mathbf{A}\times_{\mathbf{C}}\mathbf{B} \arrow[r, "p_{\mathbf{B}}"] \arrow[d, "p_{\mathbf{A}}"'] & \mathbf{B} \\ & \mathbf{A} & \end{tikzcd}$$

conmutan. Dejamos, como ejercicio, la demostración de que t es el único homomorfismo de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$ con las propiedades indicadas. $\square$

Cuando digamos de un diagrama de la forma:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "g"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, "f"'] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

que es un *cuadrado cartesiano*, ello significará que la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{X}$ es un producto fibrado de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ sobre $\mathbf{C}$ relativo a f y g, y que u y v son los homomorfismos estructurales.

En la proposición anterior hemos demostrado, para un par de homomorfismos, ambos con el mismo codominio, la existencia de al menos un par ordenado, formado por una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y dos homomorfismos desde la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra hasta los dominios de los homomorfismos dados, sujeto a cumplir un par de condiciones; pero no hemos afirmado que tal par sea absolutamente único. Demostramos a continuación que el par ordenado de la proposición anterior, es único, sólo, salvo (un único) isomorfismo.

Proposition 3.41. *Sean* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ *y* $g\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ *dos homomorfismos con el mismo codominio. Si un par ordenado* $(\mathbf{E},(p,q))$, *en el que* $\mathbf{E}$ *es una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* $p\colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{A}$ *y* $q\colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{B}$ *tiene las propiedades:*

1. *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "g"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, "f"'] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

   conmuta.

2. *Para cada* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{X}$ *y cualesquiera homomorfismos* $u\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A}$ *y* $v\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{B}$ *si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "g"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, "f"'] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

   conmuta, entonces hay un único homomorfismot$\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{E}$ *tal que los dos triángulos del diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, bend left, "v"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\ & \mathbf{E} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & \mathbf{B} \\ & \mathbf{A} & \end{tikzcd}$$

   conmutan.

Entonces hay un único isomorfismo $t\colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$ *tal que los dos triángulos del diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E} \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, bend left, "q"] \arrow[ddr, bend right, "p"'] & & \\ & \mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B} \arrow[r, "p_{\mathbf{B}}"] \arrow[d, "p_{\mathbf{A}}"] & \mathbf{B} \\ & \mathbf{A} & \end{tikzcd}$$

conmutan.

Demostración. □

Proposition 3.42. *Si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{B} \arrow[dl, "g"'] \arrow[dd, "v"] \\
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dd, "u"'] & \mathbf{C} \arrow[dd, "w"'] & \\
 & & \mathbf{B}' \arrow[dl, "g'"] \\
\mathbf{A}' \arrow[r, "f'"'] & \mathbf{C}' &
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay un único homomorfismo $u \times_w v \colon \mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}' \times_{\mathbf{C}'} \mathbf{B}'$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B} \arrow[rr, "p_{\mathbf{B}}"] \arrow[dl, "p_{\mathbf{A}}"'] \arrow[dd, "u \times_w v"] & & \mathbf{B} \arrow[dl, "g"] \arrow[dd, "v"] \\
\mathbf{A} \arrow[rr, "f"'] \arrow[dd, "u"'] & & \mathbf{C} \arrow[dd, "w"] & \\
 & \mathbf{A}' \times_{\mathbf{C}'} \mathbf{B}' \arrow[rr, "p_{\mathbf{B}'}"] \arrow[dl, "p_{\mathbf{A}'}"'] & & \mathbf{B}' \arrow[dl, "g'"] \\
\mathbf{A}' \arrow[rr, "f'"'] & & \mathbf{C}' &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demuéstrese que:

1. Para el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{B} \arrow[dl, "g"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}_{\mathbf{B}}"] \\
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_{\mathbf{A}}"'] & \mathbf{C} \arrow[dd, "\mathrm{id}_{\mathbf{C}}"'] & \\
 & & \mathbf{B} \arrow[dl, "g"] \\
\mathbf{A} \arrow[r, "f"'] & \mathbf{C} &
\end{tikzcd}$$

se cumple que

$$\mathrm{id}_{\mathbf{A}} \times_{\mathrm{id}_{\mathbf{C}}} \mathrm{id}_{\mathbf{B}} = \mathrm{id}_{\mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B}}.$$

2. Si los diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{B} \arrow[dl, "g"'] \arrow[dd, "v"] \\
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dd, "u"'] & \mathbf{C} \arrow[dd, "w"'] & \\
 & & \mathbf{B}' \arrow[dl, "g'"] \\
\mathbf{A}' \arrow[r, "f'"'] & \mathbf{C}' &
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{B}' \arrow[dl, "g'"'] \arrow[dd, "v'"] \\
\mathbf{A}' \arrow[r, "f'"] \arrow[dd, "u'"'] & \mathbf{C}' \arrow[dd, "w'"'] & \\
 & & \mathbf{B}'' \arrow[dl, "g''"] \\
\mathbf{A}'' \arrow[r, "f''"'] & \mathbf{C}'' &
\end{tikzcd}
$$

conmutan, entonces se cumple que

$$(u' \times_{w'} v') \circ (u \times_w v) = (u' \circ u) \times_{w' \circ w} (v' \circ v).$$

Sean Φ y Ψ dos congruencias sobre una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$. Demuéstrese que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A}/\Phi \cap \Psi \arrow[r, "\mathrm{p}_{\Phi\cap\Psi,\Psi}"] \arrow[d, "\mathrm{p}_{\Phi\cap\Psi,\Phi}"'] & \mathbf{A}/\Psi \arrow[d, "\mathrm{p}_{\Psi,\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi\cup\Psi)}"] \\
\mathbf{A}/\Phi \arrow[r, "\mathrm{p}_{\Phi,\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi\cup\Psi)}"'] & \mathbf{A}/\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi \cup \Psi)
\end{tikzcd}
$$

conmuta, pero que no es necesariamente un cuadrado cartesiano.

Proposition 3.43. *Sea $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo. Entonces el producto fibrado de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}$ sobre $\mathbf{B}$ relativo a f y f es, esencialmente, i.e., salvo isomorfismo, $(\mathrm{Ker}(f), (p_{\mathbf{A}}, p_{\mathbf{B}}))$, siendo $p_{\mathbf{A}}$, la restricción de $\mathrm{pr}_{\mathbf{A}}$ a $\mathrm{Ker}(f)$ y $p_{\mathbf{B}}$, la restricción de $\mathrm{pr}_{\mathbf{B}}$ a $\mathrm{Ker}(f)$.*

Demostración. □

Proposition 3.44. *Sean A y B dos cerrados de $\mathbf{X}$. Entonces el producto fibrado de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ sobre $\mathbf{X}$ relativo a $\mathrm{in}_{\mathbf{A}}$ e $\mathrm{in}_{\mathbf{B}}$ es, esencialmente, i.e., salvo isomorfismo, $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}, (\mathrm{in}_{\mathbf{A}\cap\mathbf{B},\mathbf{A}}, \mathrm{in}_{\mathbf{A}\cap\mathbf{B},\mathbf{B}}))$.*

Demostración. □

Proposition 3.45. *Sea $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo e Y un cerrado de B. Entonces el producto fibrado de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{Y}$ sobre $\mathbf{B}$ relativo a f y $\mathrm{in}_{\mathbf{Y}}$ es, esencialmente, i.e., salvo isomorfismo, $(f^{-1}(\mathbf{Y}), (\mathrm{in}_{f^{-1}(\mathbf{Y})}, f\big|^{\mathbf{Y}}_{f^{-1}(\mathbf{Y})}))$.*

3.7. Sistemas proyectivos de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras. A continuación consideramos los conceptos de sistema proyectivo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras y morfismo proyectivo entre sistemas proyectivos de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras, nociones debidas, en casos particulares, a Čech y Herbrand y, con toda generalidad, a Steenrod, y que son de gran importancia para la topología algebraica y el álgabra homológica.

Definition 3.46. Un *sistema proyectivo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras* es un par ordenado $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ en el que $\mathbf{S}$ es un conjunto preordenado y $\boldsymbol{\mathcal{A}} = ((\mathbf{A}_s \mid s \in S), (a_{s',s} \mid (s, s') \in \preceq))$ tal que:

1. Para cada $s \in S$, $\mathbf{A}_s$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra.
2. Para cada $(s, s') \in \preceq$, $a_{s',s}\colon \mathbf{A}_{s'} \longrightarrow \mathbf{A}_s$ es un homomorfismo.
3. Para cada $s \in S$, $a_{s,s} = \mathrm{id}_{\mathbf{A}_s}$.

4. Para cada $s, s', s'' \in S$, si $(s, s') \in\preceq$ y $(s', s'') \in\preceq$, entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_{s''} \arrow[r, "a_{s'',s'}"] \arrow[dr, "a_{s'',s}"'] & \mathbf{A}_{s'} \arrow[d, "a_{s',s}"] \\
& \mathbf{A}_{s}.
\end{tikzcd}$$

A los homomorfismos $a_{s',s} \colon \mathbf{A}_{s'} \longrightarrow \mathbf{A}_s$ los denominamos los *homomorfismos de transición* del sistema proyectivo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$.

Example. Sean S un conjunto y $(\mathbf{A}_s \mid s \in S)$ una familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras indexada por S. Entonces

$$(\mathbf{Sub}_f(S), ((\prod(\mathbf{A}_s \mid s \in F) \mid F \in \mathrm{Sub}_f(S)), (\mathrm{pr}_{G,F} \mid F \subseteq G)))$$

es un sistema proyectivo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras.

Example. Sean S un conjunto no vacío, $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $(X_s \mid s \in S)$ una familia de subálgebras de A tal que, para cualesquiera $s, s' \in S$ exista un $s'' \in S$ de modo que $X_{s''} \subseteq X_s \cap X_{s'}$. Entonces, considerando sobre S el preorden $\preceq$ definido como:

$$s \preceq s' \leftrightarrow X_{s'} \subseteq X_s,$$

tenemos que

$$(\mathbf{S}, ((\mathbf{X}_s \mid s \in S), (\mathrm{in}_{\mathbf{X}_{s'},\mathbf{X}_s} \mid s \preceq s')))$$

es un sistema proyectivo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras.

3.8. Límites proyectivos de los sistemas proyectivos.

Proposition 3.47. *Sea* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *un sistema proyectivo de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras. Entonces hay un par ordenado* $(\varprojlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}), (a_s \mid s \in S))$*, el* límite proyectivo *del sistema proyectivo* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$*, en el que* $\varprojlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *es una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y, para cada* $s \in S$*,* a_s*, la* proyección canónica *s-ésima, es un homomorfismode* $\varprojlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *en* $\mathbf{A}_s$*, tal que:*

1. *Para cada* $(s, s') \in\preceq$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& \varprojlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[dl, "a_{s'}"'] \arrow[dr, "a_s"] & \\
\mathbf{A}_{s'} \arrow[rr, "a_{s',s}"'] & & \mathbf{A}_s
\end{tikzcd}$$

   conmuta.

2. (Propiedad universal.) *Para cada par ordenado* $(\mathbf{L}, (l_s \mid s \in S))$ *en el que, para cada* $s \in S$*,* $l_s \colon \mathbf{L} \longrightarrow \mathbf{A}_s$*, si, para cada* $(s, s') \in\preceq$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{L} \arrow[dl, "l_{s'}"'] \arrow[dr, "l_s"] & \\
\mathbf{A}_{s'} \arrow[rr, "a_{s',s}"'] & & \mathbf{A}_s
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay un único homomorfismou: $\mathbf{L} \longrightarrow \varprojlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *tal que, para cada* $s \in S$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{L} \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "l_s"] & \\
\varprojlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[r, "a_s"'] & \mathbf{A}_s
\end{tikzcd}$$

conmuta.

La situación descrita por las condiciones anteriores la expresamos diagramáticamente como:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{L} \arrow[d, "u"] \arrow[ddl, bend right, "l_{s'}"'] \arrow[ddr, bend left, "l_s"] & \\
 & \varprojlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[dl, "a_{s'}"'] \arrow[dr, "a_s"] & \\
\mathbf{A}_{s'} \arrow[rr, "a_{s',s}"'] & & \mathbf{A}_s
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $\varprojlim(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ el subconjunto de $\prod(A_s \mid s \in S)$ definido como:

$$\varprojlim(\mathbf{S}, \mathcal{A}) = \{\, x \in \prod(A_s \mid s \in S) \mid \forall (s, s') \in \preceq (a_{s',s}(\mathrm{pr}_{s'}(x)) = \mathrm{pr}_s(x)) \,\}.$$

De manera que los miembros de $\varprojlim(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ son precisamente aquellas funciones de elección x, para $(A_s \mid s \in S)$, tales que, para cada $(s, s') \in \preceq$, la coordenada s-ésima de x es la transformada mediante $a_{s',s}$ de la coordenada s'-ésima de x. Entonces se cumple que $\varprojlim(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ es un cerrado de la $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra $\prod(\mathbf{A}_s \mid s \in S)$.

En efecto, dado un $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, y una familia $(x_\alpha \mid \alpha \in n)$ en $\varprojlim(\mathbf{S}, \mathcal{A})$, la función de elección $(F^s_\sigma(x_\alpha(s) \mid \alpha \in n) \mid s \in S)$ está en $\varprojlim(\mathbf{S}, \mathcal{A})$, porque si $(s, s') \in \preceq$, entonces

$$\begin{aligned}
a_{s',s}(F^{s'}_\sigma(x_\alpha(s') \mid \alpha \in n)) &= F^s_\sigma(a_{s',s}(x_\alpha(s')) \mid \alpha \in n) && (\text{porque } a_{s',s}\colon \mathbf{A}_{s'} \longrightarrow \mathbf{A}_s) \\
&= F^s_\sigma(x_\alpha(s) \mid \alpha \in n) && (\text{porque } x_\alpha \in \varprojlim(\mathbf{S}, \mathcal{A}))
\end{aligned}$$

Además, para cada $s \in S$, sea a_s la restricción de pr_s a la subálgebra $\varprojlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ de $\prod(\mathbf{A}_s \mid s \in S)$. Entonces el par ordenado $(\varprojlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}), (a_s \mid s \in S))$ cumple las condiciones de la proposición. En efecto, por una parte, es evidente, en virtud de las definiciones, que, para cada $(s, s') \in \preceq$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \varprojlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[dl, "a_{s'}"'] \arrow[dr, "a_s"] & \\
\mathbf{A}_{s'} \arrow[rr, "a_{s',s}"'] & & \mathbf{A}_s
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por otra parte, si un par ordenado $(\mathbf{L}, (l_s \mid s \in S))$, arbitrario, pero fijo, en el que, para cada $s \in S$, $l_s \colon \mathbf{L} \longrightarrow \mathbf{A}_s$, es tal que, para cada $(s, s') \in \preceq$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{L} \arrow[dl, "l_{s'}"'] \arrow[dr, "l_s"] & \\
\mathbf{A}_{s'} \arrow[rr, "a_{s',s}"'] & & \mathbf{A}_s
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces, en virtud de la conmutatividad del diagrama anterior, se cumple que $\mathrm{Im}(\langle l_s \mid s \in S\rangle)$ es una subálgebra de $\underleftarrow{\lim}(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$, luego, por la propiedad universal de la subálgebra, hay un único homomorfismo$u \colon \mathbf{L} \longrightarrow \underleftarrow{\lim}(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{L} \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "\langle l_s \mid s \in S\rangle"] & \\
\underleftarrow{\lim}(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\underleftarrow{\lim}(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})}"'] & \prod(\mathbf{A}_s \mid s \in S)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Ahora bien, puesto que, para cada $s \in S$, en el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{L} \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "\langle l_s \mid s \in S\rangle"] \arrow[drr, bend left, "l_s"] & & \\
\underleftarrow{\lim}(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\underleftarrow{\lim}(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})}"'] \arrow[rr, bend right, "a_s"'] & \prod(\mathbf{A}_s \mid s \in S) \arrow[r, "\mathrm{pr}_s"'] & \mathbf{A}_s
\end{tikzcd}$$

el triángulo de la izquierda, el de la derecha y el inferior, conmutan, también, para cada $s \in S$, conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{L} \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "l_s"] & \\
\underleftarrow{\lim}(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[r, "a_s"'] & \mathbf{A}_s.
\end{tikzcd}$$

Por consiguiente hay al menos un homomorfismo$u$ de $\mathbf{L}$ en $\underleftarrow{\lim}(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ tal que, para cada $s \in S$, $a_s \circ u = l_s$. Dejamos, como ejercicio, la demostración de que hay a lo sumo un homomorfismo$u$ de $\mathbf{L}$ en $\underleftarrow{\lim}(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ tal que, para cada $s \in S$, $a_s \circ u = l_s$.

□

En la proposición anterior se ha demostrado, para un sistema proyectivo de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras, la existencia de al menos un par ordenado, formado por ua $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra y una familia de homomorfismos desde la $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra hasta cada uno de las $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras de la familia de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras subyacente a la segunda coordenada del sistema proyectivo, sujeto a cumplir, por una parte, una condición de compatibilidad respecto de los homomorfismos subyacentes a la segunda coordenada del sistema proyectivo, y, por otra, una cierta propiedad universal; pero, ni hemos afirmado que tal par sea absolutamente único, ni que el límite proyectivo de un sistema proyectivo de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras sea no vacío, ni que las proyecciones canónicas sean necesariamente inyectivas o biyectivas.

Demostraremos en lo que sigue, entre otras cosas, que:

- El par ordenado de la proposición anterior, es único salvo isomorfismo.
- Una condición suficiente para que una proyección canónica sea inyectiva, resp., biyectiva, es que el conjunto preordenado, subyacente al sistema proyectivo, esté dirigido superiormente y que los homomorfismos de transición sean inyectivos, resp., biyectivos.

Proposition 3.48. *Sea* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *un sistema proyectivo de conjuntos. Entonces:*

1. *Para cada* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{X}$ *y cualesquiera homomorfismos* $f, g\colon \mathbf{X} \longrightarrow \varprojlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$, *si, para cada* $s \in S$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[rr, bend left=40, "a_s \circ f"] \arrow[rr, bend right=40, "a_s \circ g"'] & \varprojlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[r, "a_s"] & \mathbf{A}_s \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $f = g$, *i.e., la familia de homomorfismos* $(a_s \mid s \in S)$ *es* colectivamente monomórfica.

2. *Para cada par ordenado* $(\mathbf{L}, (l_s \mid s \in S))$, *en el que* $\mathbf{L}$ *sea una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra y, para cada* $s \in S$, $l_s\colon \mathbf{L} \longrightarrow \mathbf{A}_s$, *si para cada* $(s, s') \in \preceq$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{L} \arrow[dl, "l_{s'}"'] \arrow[dr, "l_s"] & \\ \mathbf{A}_{s'} \arrow[rr, "a_{s',s}"'] & & \mathbf{A}_s \end{tikzcd}$$

conmuta, y para cada epimorfismo $t\colon \varprojlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \twoheadrightarrow \mathbf{L}$, *si, para cada* $s \in S$, *el digrama:*

$$\begin{tikzcd} \varprojlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[rr, "a_s"] \arrow[dr, two heads, "t"'] & & \mathbf{A}_s \\ & \mathbf{L} \arrow[ur, "l_s"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces t *es un isomorfismo, i.e., la familia* $(a_s \mid s \in S)$ *es* extremal.

Demostración. □

Corollary 3.49. *Sea* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *un sistema proyectivo de* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebras. Si un par ordenado* $(\mathbf{P}, (p_s \mid s \in S))$, *en el que* $\mathbf{P}$ *es una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra y, para cada* $s \in S$, $p_s\colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{A}_s$ *cumple que:*

1. *Para cada* $(s, s') \in \preceq$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{P} \arrow[dl, "p_{s'}"'] \arrow[dr, "p_s"] & \\ \mathbf{A}_{s'} \arrow[rr, "a_{s',s}"'] & & \mathbf{A}_s \end{tikzcd}$$

conmuta.

2. *Para cada par ordenado* $(\mathbf{L}, (l_s \mid s \in S))$, *en el que* $\mathbf{L}$ *es una* $\mathbf{\Sigma}$-*álgebra y, para cada* $s \in S$, $l_s \colon L \longrightarrow A_s$, *si, para cada* $(s, s') \in \preceq$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{L} \arrow[dl, "l_{s'}"'] \arrow[dr, "l_s"] & \\ \mathbf{A}_{s'} \arrow[rr, "a_{s',s}"'] & & \mathbf{A}_s \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay un único homomorfismo $u \colon \mathbf{L} \longrightarrow \mathbf{P}$ *tal que, para cada* $s \in S$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{L} \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "l_s"] & \\ \mathbf{P} \arrow[r, "p_s"'] & \mathbf{A}_s \end{tikzcd}$$

conmuta.

Entonces hay un único isomorfismo t *de* $\mathbf{P}$ *en* $\varprojlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *tal que, para cada* $s \in S$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{P} \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, "p_s"] & \\ \varprojlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[r, "a_s"'] & \mathbf{A}_s \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Demuéstrese que el límite proyectivo del sistema proyectivo del ejemplo 3.7 es isomorfo a $\prod(\mathbf{A}_s \mid s \in S)$.

Demuéstrese que el límite proyectivo del sistema proyectivo del ejemplo 3.7 es isomorfo a $\bigcap(\mathbf{X}_s \mid s \in S)$.

Proposition 3.50. *Sea* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *un sistema proyectivo de* $\mathbf{\Sigma}$-*álgebras y* $(\mathbf{L}, (l_s \mid s \in S))$ *tal que, para cada* $s \in S$, $l_s \colon \mathbf{L} \longrightarrow \mathbf{A}_s$ *y para cada* $(s, s') \in \preceq$, *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{L} \arrow[dl, "l_{s'}"'] \arrow[dr, "l_s"] & \\ \mathbf{A}_{s'} \arrow[rr, "a_{s',s}"'] & & \mathbf{A}_s \end{tikzcd}$$

conmuta. Entonces, el único homomorfismou: $\mathbf{L} \longrightarrow \varprojlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *es inyectivo precisamente si la familia de homomorfismos* $(l_s \mid s \in S)$ separa puntos *de* L, *i.e., si es tal que, para cada* $x, y \in L$, *si* $x \neq y$, *entonces hay un* $s \in S$ *tal que* $l_s(x) \neq l_s(y)$.

Demostración. La condición es necesaria. En efecto, si $u \colon \mathbf{L} \longrightarrow \varprojlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ es inyectivo y $x, y \in L$ son tales que $x \neq y$, entonces $u(x) \neq u(y)$, pero $u(x), u(y) \in \varprojlim(\mathbf{S}, \mathcal{A})$ y, por ser este conjunto subconjunto de $\prod(A_s \mid s \in S)$, $u(x), u(y)$ son funciones de elección distintas, luego hay un $s \in S$ tal que $u(x)_s \neq u(y)_s$. Sea $s \in S$ uno de ellos, arbitrario, pero fijo. Ahora bien, por la definición de u, $u(x) = (l_s(x) \mid s \in S)$ y $u(y) = (l_s(y) \mid s \in S)$, luego $l_s(x) \neq l_s(y)$.

La condición es suficiente. En efecto, si la familia de homomorfismos $(l_s \mid s \in S)$ separa puntos de L y $x, y \in L$ son tales que $x \neq y$, entonces hay un $s \in S$ tal que $l_s(x) \neq l_s(y)$. Ahora bien, $u(x) = (l_s(x) \mid s \in S)$ y $u(y) = (l_s(y) \mid s \in S)$, luego $u(x) \neq u(y)$.

□

Proposition 3.51. *Sea* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *un sistema proyectivo de* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebras. Si* $\mathbf{S}$ *está dirigido superiormente y, para cada* $(s, s') \in \preceq$*,* $a_{s',s} \colon \mathbf{A}_{s'} \longrightarrow \mathbf{A}_s$*, es inyectivo, resp., bitectivo, entonces, para cada* $s \in S$*,* $a_s \colon \varprojlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow \mathbf{A}_s$*, es inyectivo, resp., bitectivo.*

Demostración. □

3.9. Morfismos proyectivos entre sistemas proyectivos.

Definition 3.52. Si $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ y $(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ son dos sistemas proyectivos de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras, un *morfismo proyectivo* de $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ en $(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ es un triplo ordenado $((\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}), \Phi, (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}}))$, abreviado como Φ y denotado por

$$\Phi \colon (\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}}),$$

en el que $\Phi = (\varphi, f)$, con $\varphi \colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{S}$ y $f = (f_t \mid t \in T)$, siendo, para cada $t \in T$, $f_t \colon \mathbf{A}_{\varphi(t)} \longrightarrow \mathbf{B}_t$, i.e.,

$$(f_t \mid t \in T) \in \prod(\mathrm{Hom}(\mathbf{A}_{\varphi(t)}, \mathbf{B}_t) \mid t \in T),$$

tal que, para cada $(t, t') \in \preceq$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_{\varphi(t')} \arrow[r, "f_{t'}"] \arrow[d, "a_{\varphi(t'),\varphi(t)}"'] & \mathbf{B}_{t'} \arrow[d, "b_{t',t}"] \\
\mathbf{A}_{\varphi(t)} \arrow[r, "f_t"'] & \mathbf{B}_t
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, $(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{A}}_\varphi)$ es el sistema proyectivo de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras para el que la coordenada t-ésima de la primera componente de $\boldsymbol{\mathcal{A}}_\varphi$ es $\mathbf{A}_{\varphi(t)}$, para cada $t \in T$, y la coordenada (t, t')-ésima de la segunda componente de $\boldsymbol{\mathcal{A}}_\varphi$ es $a_{\varphi(t'),\varphi(t)}$, para cada $(t, t') \in \preceq$.

Proposition 3.53.

1. *Si* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *es un sistema proyectivo de* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebras, entonces*

$$\mathrm{id}_{(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})} = (\mathrm{id}_{\mathbf{S}}, \mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}),$$

es un endomorfismo proyectivo de $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$*, el morfismo proyectivo* identidad *de* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$*.*

2. *Si* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$*,* $(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ *y* $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\mathcal{C}})$ *son tres sistemas proyectivos de* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebras,* $\Phi = (\varphi, f)$ *un morfismo proyectivo del primero en el segundo y* $\Psi = (\psi, g)$ *uno del segundo en el tercero, entonces*

$$\Psi \circ \Phi = (\varphi \circ \psi, g \circ f_\psi),$$

siendo f_ψ *la familia indexada por* U*, cuya coordenada u-ésima es:*

$$f_{\psi(u)} \colon \mathbf{A}_{\varphi(\psi(u))} \longrightarrow \mathbf{B}_{\psi(u)},$$

y, por lo tanto, siendo $g \circ f_\psi$ *la familia de homomorfismos, indexada por* U*, cuya coordenada u-ésima es:*

$$\mathbf{A}_{\varphi(\psi(u))} \xrightarrow{f_{\psi(u)}} \mathbf{B}_{\psi(u)} \xrightarrow{g_u} \mathbf{C}_u$$

es un morfismo proyectivo de $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *en* $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\mathcal{C}})$, *el morfismo proyectivo* composición *de ambos.*

Demostración. Puesto que la primera parte es obvia, nos limitamos a demostrar la segunda.

Por ser $\Phi = (\varphi, f)$ y $\Psi = (\psi, g)$ morfismos proyectivos, los diagramas:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_{\varphi(t')} \arrow[r, "f_{t'}"] \arrow[d, "a_{\varphi(t'),\varphi(t)}"'] & \mathbf{B}_{t'} \arrow[d, "b_{t',t}"] \\ \mathbf{A}_{\varphi(t)} \arrow[r, "f_t"'] & \mathbf{B}_t \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} \mathbf{B}_{\psi(u')} \arrow[r, "g_{u'}"] \arrow[d, "b_{\psi(u'),\psi(u)}"'] & \mathbf{C}_{u'} \arrow[d, "c_{u',u}"] \\ \mathbf{B}_{\psi(u)} \arrow[r, "g_u"'] & \mathbf{C}_u \end{tikzcd}$$

conmutan. Por consiguiente el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_{\varphi(\psi(u'))} \arrow[r, "g_{u'} \circ f_{\psi(u')}"] \arrow[d, "a_{\varphi(\psi(u')),\varphi(\psi(u))}"'] & \mathbf{C}_{u'} \arrow[d, "c_{u',u}"] \\ \mathbf{A}_{\varphi(\psi(u))} \arrow[r, "g_u \circ f_{\psi(u)}"'] & \mathbf{C}_u \end{tikzcd}$$

también conmuta. □

Proposition 3.54. *Sea* Φ *un morfismo proyectivo de* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *en* $(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$, Ψ *uno de* $(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ *en* $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\mathcal{C}})$ *y* Ξ *uno de* $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\mathcal{C}})$ *en* $(\mathbf{V}, \boldsymbol{\mathcal{D}})$. *Entonces:*

1. (Asociatividad). *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Psi \circ \Phi"'] \arrow[drr, bend left=60, "(\Xi \circ \Psi) \circ \Phi"] \arrow[drr, bend right=60, "\Xi \circ (\Psi \circ \Phi)"'] & (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}}) \arrow[d, "\Psi"'] \arrow[dr, "\Xi \circ \Psi"] & \\ & (\mathbf{U}, \boldsymbol{\mathcal{C}}) \arrow[r, "\Xi"'] & (\mathbf{V}, \boldsymbol{\mathcal{D}}) \end{tikzcd}$$

conmuta.

2. (Neutros). *Los diagramas:*

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[r, "id_{(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})}"] \arrow[dr, "\Phi"'] & (\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[d, "\Phi"] \\ & (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}}) \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} (\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Phi"'] & (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}}) \arrow[d, "id_{(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}})}"] \\ & (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}}) \end{tikzcd}$$

conmutan.

Demostración. □

3.10. Límites proyectivos de los morfismos proyectivos.

Proposition 3.55. *Si* $\Phi\colon (\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}})$ *es un morfismo proyectivo, entonces hay un único homomorfismo*

$$\varprojlim \Phi\colon \varprojlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow \varprojlim(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}}),$$

denominada el límite proyectivo *de* Φ *tal que, para cada* $t \in T$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[r, "a_{\varphi(t)}"] \arrow[d, "\varprojlim \Phi"'] & \mathbf{A}_{\varphi(t)} \arrow[d, "f_t"] \\
\varprojlim(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}}) \arrow[r, "b_t"'] & \mathbf{B}_t
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[d, "p_\varphi"'] \arrow[dr, "a_{\varphi(t)}"] \arrow[dd, bend right=60, "\varprojlim \Phi"'] & \\
\varprojlim(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{A}}_\varphi) \arrow[r, "a_{\varphi(t)}"'] \arrow[d, "\prod f"'] & \mathbf{A}_{\varphi(t)} \arrow[d, "f_t"] \\
\varprojlim(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}}) \arrow[r, "b_t"'] & \mathbf{B}_t
\end{tikzcd}$$

conmuta, siendo p_φ *el único homomorfismode* $\varprojlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})$ *en* $\varprojlim(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{A}}_\varphi)$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\varprojlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})}"] \arrow[d, "p_\varphi"'] & \prod(\mathbf{A}_s \mid s \in S) \arrow[d, "\mathrm{pr}_\varphi"] \\
\varprojlim(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{A}}_\varphi) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\varprojlim(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{A}}_\varphi)}"'] & \prod(\mathbf{A}_{\varphi(t)} \mid t \in T)
\end{tikzcd}$$

conmuta, y, denotándolo por el mismo símbolo, $\prod f$ *el único homomorfismode* $\varprojlim(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{A}}_\varphi)$ *en* $\varprojlim(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}})$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{A}}_\varphi) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\varprojlim(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{A}}_\varphi)}"] \arrow[d, "\prod f"'] & \prod(\mathbf{A}_{\varphi(t)} \mid t \in T) \arrow[d, "\prod f"] \\
\varprojlim(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}}) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\varprojlim(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}})}"'] & \prod(\mathbf{B}_t \mid t \in T)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Así que

$$\varprojlim \Phi = \prod f \circ p_\varphi.$$

Demostración. □

Proposition 3.56. *Sean* $\Phi\colon (\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}})$ *y* $\Psi\colon (\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}}) \longrightarrow (\mathbf{U},\boldsymbol{\mathcal{C}})$ *dos morfismos proyectivos. Entonces:*

1. $\varprojlim \mathrm{id}_{(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})} = \mathrm{id}_{\varprojlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})}$.
2. $\varprojlim(\Psi \circ \Phi) = \varprojlim \Psi \circ \varprojlim \Phi$.

Además, si $\Phi = (\varphi, f)$ *y* $\Psi = (\psi, g)$, *entonces el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\varprojlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[rr, "\varprojlim \Phi"] \arrow[rrrr, bend left, "\varprojlim \Psi \circ \Phi"] \arrow[dr, "p_{\varphi}"'] \arrow[ddrr, bend right, "p_{\varphi\circ\psi}"'] & & \varprojlim(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}}) \arrow[rr, "\varprojlim \Psi"] \arrow[dr, "p_{\psi}"] & & \varprojlim(\mathbf{U},\boldsymbol{\mathcal{C}}) \\
& \varprojlim(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\varphi}) \arrow[ur, "\prod f"'] \arrow[rr, "\varprojlim(\psi, f_{\psi})"] \arrow[dr, "p_{\psi}"'] & & \varprojlim(\mathbf{U},\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\psi}) \arrow[ur, "\prod g"'] & \\
& & \varprojlim(\mathbf{U},\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\varphi\circ\psi}) \arrow[ur, "\prod f_{\psi}"'] \arrow[uurr, bend right, "\prod(g \circ f_{\psi})"'] & &
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Demostración. □

Proposition 3.57. *Sea* $\Phi\colon (\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}})$ *un morfismo proyectivo. Si* $\mathbf{S}$ *y* $\mathbf{T}$ *están dirigidos superiormente y hay un subconjunto* T' *de* T *que es cofinal en* $\mathbf{T}$, $\varphi_*(T')$ *es cofinal en* $\mathbf{S}$ *y, para cada* $t' \in T'$, $f_{t'}\colon \mathbf{A}_{\varphi(t')} \longrightarrow \mathbf{B}_{t'}$ *es biyectiva, entonces* $\varprojlim \Phi$ *es biyectiva.*

Demostración. □

Antes de enunciar un corolario de la proposición anterior, convenimos que si $(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})$ es un sistema proyectivo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras y S' un subconjunto de S, y siendo $\mathbf{S}'$ el par ordenado $(S', \preceq \cap (S' \times S'))$, que es, a su vez, un conjunto preordenado, entonces $(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}){\restriction}S'$, la *restricción de* $(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})$ *a* $\mathbf{S}'$, denota el sistema proyectivo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras cuya primera coordenada es $(S', \preceq \cap (S' \times S'))$ y cuya segunda coordenada tiene como primera componente la restricción de $(\mathbf{A}_s \mid s \in S)$ a S' y como segunda componente la restricción de $(a_{s',s} \mid (s,s') \in \preceq)$ a $\preceq \cap (S' \times S')$.

Corollary 3.58. *Si* $(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})$ *es un sistema proyectivo de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras tal que* $\mathbf{S}$ *está dirigido superiormente y* S' *es un subconjunto cofinal de* $\mathbf{S}$, *entonces para el morfismo proyectivo canónico* $\Phi = (\mathrm{in}_{\mathbf{S}'}, (\mathrm{id}_{\mathbf{A}_{s'}} \mid s' \in S'))$ *de* $(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})$ *en* $(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}){\restriction}S'$ *se cumple que* $\varprojlim \Phi$ *es un isomorfismo.*

Demostración. □

Corollary 3.59. *Si* $(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})$ *es un sistema proyectivo de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras tal que* $\mathbf{S}$ *está dirigido superiormente y* S' *es un subconjunto cofinal de* $\mathbf{S}$, *entonces una condición necesaria y suficiente para que dos miembros de* $\varprojlim(\mathbf{S},\mathcal{A})$ *coincidan es que coincidan sus restricciones a* S'.

Demostración. □

3.11. Algunos límites y colímites de familias de sistemas proyectivos. Del mismo modo que para el universo de conjuntos y aplicaciones, demostramos la existencia de productos y coproductos de familias de conjuntos así como la de coigualadores de pares de aplicaciones con el mismo dominio y codominio, ahora, para el universo de discurso formado por los sistemas proyectivos de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras y los morfismos entre ellos, demostramos la existencia de productos y coproductos de familias de sistemas proyectivos de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras, así como la de coigualadores de pares de morfismos con el mismo dominio y codominio.

Proposition 3.60. *Sea* $((\mathbf{S}^i, \boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$ *una familia de sistemas proyectivos de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras. Entonces hay un par ordenado* $\big(\prod((\mathbf{S}^i, \boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I), (\mathrm{pr}^i \mid i \in I)\big)$*, también denotado por* $\big(\prod_{i\in I}(\mathbf{S}^i, \boldsymbol{\mathcal{A}}^i), (\mathrm{pr}^i \mid i \in I)\big)$*, en el que* $\prod((\mathbf{S}^i, \boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$*, el* producto *de* $((\mathbf{S}^i, \boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$*, es un sistema proyectivo de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras y, para cada* $i \in I$*,* pr^i*, la* proyección canónica i-ésima *del producto, es un morfismo proyectivo de* $\prod((\mathbf{S}^i, \boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$ *en* $(\mathbf{S}^i, \boldsymbol{\mathcal{A}}^i)$*, que tiene la siguiente* propiedad universal*:*

Para cada par ordenado $((\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}}), (\Psi^i \mid i \in I))$*, en el que* $(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ *es un sistema proyectivo de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras y, para cada* $i \in I$*,* $\Psi^i \colon (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}}) \longrightarrow (\mathbf{S}^i, \mathcal{A}^i)$*, hay un único morfismo proyectivo* $\big\langle \Psi^i \mid i \in I \big\rangle : (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}}) \longrightarrow \prod((\mathbf{S}^i, \boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$ *tal que, para cada* $i \in I$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}}) \arrow[d, "\langle \Psi^i \mid i \in I \rangle"'] \arrow[dr, "\Psi^i"] & \\
\prod((\mathbf{S}^i, \boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I) \arrow[r, "\mathrm{pr}^i"'] & (\mathbf{S}^i, \boldsymbol{\mathcal{A}}^i)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Es suficiente tomar como primera coordenada de $\prod((\mathbf{S}^i, \boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$ el coproducto de la familia de conjuntos preordenados $(\mathbf{S}^i \mid i \in I)$, que es $(\coprod(S^i \mid i \in I), \preceq)$, siendo $\preceq$ el preorden sobre $\coprod(S^i \mid i \in I)$ definido como:

$$(s, i) \preceq (s', j) \text{ si y sólo si } i = j \text{ y } s \preceq^i s',$$

y, como segunda coordenada, el par ordenado cuya primera componente es

$$(\mathbf{A}^i_s \mid (s, i) \in \textstyle\coprod(S^i \mid i \in I))$$

y cuya segunda componente es

$$(a^i_{s',s} \mid ((s, i), (s', i)) \in \preceq);$$

y, por otra parte, para cada $i \in I$, como primera coordenada de pr^i, in_i, la inclusión canónica de $\mathbf{S}^i$ en $\coprod(\mathbf{S}^i \mid i \in I)$, y, como segunda coordenada $(\mathrm{id}_{\mathbf{A}^i_s} \mid (s, i) \in \coprod(S^i \mid i \in I))$

□

Proposition 3.61. *Sea* $((\mathbf{S}^i, \boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$ *una familia de sistemas proyectivos de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras. Entonces hay un par ordenado* $\big(\coprod((\mathbf{S}^i, \boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I), (\mathrm{in}^i \mid i \in I)\big)$*, también denotado por* $\big(\coprod_{i\in I}(\mathbf{S}^i, \boldsymbol{\mathcal{A}}^i), (\mathrm{in}^i \mid i \in I)\big)$*, en el que* $\coprod((\mathbf{S}^i, \boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$*, el* coproducto *de* $((\mathbf{S}^i, \boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$*, es un sistema proyectivo de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras y, para cada* $i \in I$*,* in^i*, la* inclusión canónica i-ésima *del coproducto, es un morfismo proyectivo de* $(\mathbf{S}^i, \boldsymbol{\mathcal{A}}^i)$ *en* $\coprod((\mathbf{S}^i, \boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$*, que tiene la siguiente* propiedad universal*:*

Para cada par ordenado $((\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}}), (\Psi^i \mid i \in I))$*, en el que* $(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ *es un sistema proyectivo de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras y, para cada* $i \in I$*,* $\Psi_i \colon (\mathbf{S}^i, \boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \longrightarrow (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$*, hay un único morfismo proyectivo* $\big[\Psi^i \mid i \in I\big] : \coprod((\mathbf{S}^i, \boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I) \longrightarrow (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ *tal que, para cada* $i \in I$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{S}^i, \boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \arrow[r, "\mathrm{in}^i"] \arrow[dr, "\Psi^i"'] & \coprod((\mathbf{S}^i, \boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I) \arrow[d, "{[f_i \mid i \in I]}"] \\
& (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Es suficiente tomar como primera coordenada de $\coprod((\mathbf{S}^i, \boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$ el producto de la familia de conjuntos preordenados $(\mathbf{S}^i \mid i \in I)$, que es $(\prod(S^i \mid i \in I), \preceq)$, siendo $\preceq$ el preorden sobre $\prod(S^i \mid i \in I)$ definido como:

$$(s_i \mid i \in I) \preceq (s'_i \mid i \in I) \text{ si y sólo si } \forall i \in I\,(s_i \preceq^i s'_i),$$

y, como segunda coordenada, el par ordenado cuya primera componente es

$$\left(\coprod(\mathbf{A}^i_{s_i} \mid i \in I) \mid (s_i \mid i \in I) \in \prod(S^i \mid i \in I)\right)$$

y cuya segunda componente es

$$\left(\coprod(a^i_{s'_i, s_i} \mid i \in I) \mid ((s_i \mid i \in I), (s'_i \mid i \in I)) \in \preceq\right);$$

y, por otra parte, para cada $i \in I$, como primera coordenada de in^i, pr_i, la proyección canónica de $\prod(\mathbf{S}^i \mid i \in I)$ en $\mathbf{S}^i$, y, como segunda coordenada, $(\mathrm{in}_{\mathbf{A}^i_{s_i}} \mid (s_i \mid i \in I) \in \prod(S^i \mid i \in I))$

□

Proposition 3.62. *Sean* $\Phi, \Psi \colon (\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ *dos morfismos proyectivos, con* $\Phi = (\varphi, f)$ *y* $\Psi = (\psi, g)$*. Entonces existe un par ordenado* $(\mathbf{Ceq}(\Phi, \Psi), \mathit{ceq}(\Phi, \Psi))$*, el* coigualador *de* Φ *y* Ψ*, en el que* $\mathbf{Ceq}(\Phi, \Psi)$ *es un sistema proyectivo de* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebras y* $\mathit{ceq}(\Phi, \Psi)$ *un morfismo proyectivo de* $(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ *en* $\mathbf{Ceq}(\Phi, \Psi)$*, que tiene las siguientes propiedades:*

1. $\mathit{ceq}(\Phi, \Psi) \circ \Phi = \mathit{ceq}(\Phi, \Psi) \circ \Psi$.
2. (Propiedad universal del coigualador) *Para cualquier sistema proyectivo de* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebras* $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\mathcal{C}})$ *y cada morfismo proyectivo* $\Xi \colon (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}}) \longrightarrow (\mathbf{U}, \boldsymbol{\mathcal{C}})$*, si se cumple que* $\Xi \circ \Phi = \Xi \circ \Psi$*, entonces hay un único morfismo proyectivo* $\Gamma \colon \mathbf{Ceq}(\Phi, \Psi) \longrightarrow (\mathbf{U}, \boldsymbol{\mathcal{C}})$ *tal que* $\Gamma \circ \mathit{ceq}(\Phi, \Psi) = \Xi$.

Demostración. Es suficiente tomar como primera coordenada de $\mathbf{Ceq}(\Phi, \Psi)$, el conjunto preordenado $\mathbf{Eq}(\varphi, \psi)$, formado por el igualador de $\varphi, \psi \colon T \longrightarrow S$ y la restricción del preorden de $\mathbf{T}$ a ésa parte, y como segunda coordenada, $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, el par cuya primera componente, $\mathbf{E}_t$, para cada $t \in \mathrm{Eq}(\varphi, \psi)$, es $\mathbf{Ceq}(f_t, g_t)$, y cuya segunda componente, $e_{t',t}$, para cada $t, t' \in \mathrm{Eq}(\varphi, \psi)$, tal que $t \preceq t'$, es el único homomorfismode $\mathbf{Ceq}(f_{t'}, g_{t'})$ en $\mathbf{Ceq}(f_t, g_t)$ tal que $\mathrm{ceq}(f_t, g_t) \circ b_{t',t} = e_{t',t} \circ \mathrm{ceq}(f_t, g_t)$; y, por otra parte, como primera coordenada de $\mathrm{ceq}(\Phi, \Psi)$, $\mathrm{eq}(\varphi, \psi)$, la aplicación isótona canónica de $\mathbf{Eq}(\varphi, \psi)$ en $\mathbf{T}$, y, como segunda coordenada, $(\mathrm{ceq}(f_t, g_t) \mid t \in \mathrm{eq}(\varphi, \psi))$.

□

3.12. Álgebras filtradas. Hay objetos algebraicos, e.g., los anillos conmutativos locales o los semilocales, que pueden ser dotados de topologías naturales inducidas, en los ejemplos mencionados, por los ideales y que contribuyen de manera decisiva al estudio de tales objetos. La generalización de lo anterior, en álgebra, consiste en considerar anillos y módulos filtrados, i.e., anillos, resp., módulos, dotados de ω-cadenas descendentes de ideales del anillo, resp., de submódulos del módulo. Para generalizar la teoría clásica de los anillos y módulos filtrados hasta las álgebras, de una signatura dada, hemos de considerar ω-cadenas descendentes de congruencias de las mismas, para obtener uniformidades sobre los conjuntos subyacentes de las álgebras en cuestión y, entonces, topologías sobre los mismos que contribuyan al estudio de tales álgebras.

Comenzamos pues definiendo el concepto de uniformidad sobre un conjunto.

Definition 3.63. Sea A un conjunto. Una *uniformidad* sobre A es un subconjunto $\mathcal{U}$ de $\mathrm{Sub}(A^2)$, i.e., un conjunto de relaciones binarias sobre A, a cuyos elementos los llamamos *vecindades* de $\mathcal{U}$, que cumple las siguientes condiciones:

1. $\mathcal{U} \neq \varnothing$.
2. Para cada $\Phi, \Psi \in \mathcal{U}$, $\Phi \cap \Psi \in \mathcal{U}$.
3. Para cada $\Phi \in \mathcal{U}$ y cada $\Psi \subseteq A^2$, si $\Phi \subseteq \Psi$, entonces $\Psi \in \mathcal{U}$.
4. Para cada $\Phi \in \mathcal{U}$, $\Delta_A \subseteq \Phi$, i.e., todas las vecindades son relaciones reflexivas.
5. Para cada $\Phi \subseteq A^2$, si $\Phi \in \mathcal{U}$, entonces $\Phi^{-1} \in \mathcal{U}$.
6. Para cada $\Phi \subseteq A^2$, si $\Phi \in \mathcal{U}$, entonces existe un $\Psi \in \mathcal{U}$ tal que $\Psi \circ \Psi \subseteq \Phi$.

Un *espacio uniforme* es un par $(A,\mathcal{U})$ en el que A es un conjunto y $\mathcal{U}$ una uniformidad sobre A.

Observemos que si $A = \varnothing$, entonces la única uniformidad sobre $\varnothing$ es $\{\varnothing\}$. Además, sobre cualquier conjunto A el conjunto $\{\, \Phi \subseteq A^2 \mid \Delta_A \subseteq \Phi, \}$ es una uniformidad sobre A, a la que denominamos la uniformidad máxima sobre A, así como también lo es $\{A^2\}$, a la que llamamos la uniformidad mínima sobre A. Está justificado que denominemos a las anteriores uniformidades sobre A, máxima y mínima, porque el conjunto de todas las uniformidades sobre un conjunto A está ordenado por la relación de inclusión, heredada de la canónica sobre el conjunto $\mathrm{Sub}(\mathrm{Sub}(A^2))$.

Demuéstrese que si A no es vacío, cualquier uniformidad sobre A es un filtro sobre A^2.

Lo mismo que una topología sobre un conjunto conviene, a veces, definirla haciendo uso de abiertos especiales, también una uniformidad sobre un conjunto conviene definirla, en alguna ocasión, mediante unas vecindades especiales, que constituyen una base para la uniformidad, por ello definimos ahora el concepto de base de una uniformidad.

Definition 3.64. Sea A un conjunto. Una *base para una uniformidad* sobre A es un subconjunto $\mathcal{B}$ de $\mathrm{Sub}(A^2)$, a cuyos elementos los llamamos *vecindades básicas* de $\mathcal{B}$, que cumple las siguientes condiciones:

1. $\mathcal{B} \neq \varnothing$.
2. Para cada $\Phi, \Psi \in \mathcal{B}$, existe un $\Theta \in \mathcal{B}$ tal que $\Theta \subseteq \Phi \cap \Psi$.
3. Para cada $\Phi \in \mathcal{B}$, $\Delta_A \subseteq \Phi$.
4. Para cada $\Phi \in \mathcal{B}$, existe un $\Psi \in \mathcal{B}$, tal que $\Phi^{-1} \subseteq \Phi$.
5. Para cada $\Phi \in \mathcal{B}$, existe un $\Psi \in \mathcal{B}$ tal que $\Psi \circ \Psi \subseteq \Psi$.

Si $\mathcal{U}$ es una uniformidad sobre A, una *base* de $\mathcal{U}$ es un subconjunto $\mathcal{B}$ de $\mathcal{U}$ tal que, para cada vecindad Φ de $\mathcal{U}$, existe una vecindad $\Psi \in \mathcal{B}$ tal que $\Psi \subseteq \Phi$.

Proposition 3.65. *Toda uniformidad $\mathcal{U}$ sobre un conjunto A es una base de $\mathcal{U}$. Además, si $\mathcal{B}$ es una base para una uniformidad sobre A, entonces existe una única uniformidad sobre A, la* uniformidad generada *por $\mathcal{B}$, a la que denotamos por $\mathrm{Ug}_A(\mathcal{B})$, de la cual $\mathcal{B}$ es base.*

Demostración. □

Definimos ahora las aplicaciones uniformemente contínuas de un espacio uniforme en otro, que darán lugar, como no podía ser menos, a la categoría de los espacios uniformes.

Definition 3.66. Sean $(A,\mathcal{U})$ e $(A',\mathcal{U}')$ dos espacios uniformes. Una *aplicación uniformemente continua* de $(A,\mathcal{U})$ en $(A',\mathcal{U}')$ es un triplo ordenado $((A,\mathcal{U}), f, (A',\mathcal{U}'))$, abreviado como f y denotado por $f\colon (A,\mathcal{U}) \longrightarrow (A',\mathcal{U}')$, en el que f es una aplicación de A en A', tal que, para cada vecindad $\Phi' \in \mathcal{U}'$, $(f^2)^{-1}[\Phi'] \in \mathcal{U}$.

Proposition 3.67. *Sea f una aplicación uniformemente continua de $(A,\mathcal{U})$ en $(A',\mathcal{U}')$, g una de $(A',\mathcal{U}')$ en $(A'',\mathcal{U}'')$ y h una de $(U'',\mathcal{U}'')$ en $(A''',\mathcal{U}''')$. Entonces:*

1. *Siendo* $\mathrm{id}_{(A,\mathcal{U})} = ((A,\mathcal{U}), \mathrm{id}_A, (A,\mathcal{U}))$*, se cumple que* $\mathrm{id}_{(A,\mathcal{U})}\colon (A,\mathcal{U}) \longrightarrow (A,\mathcal{U})$*, la aplicación uniformemente continua* identidad *de* $(A,\mathcal{U})$*, es una aplicación uniformemente continua de* $(A,\mathcal{U})$*.*
2. *Siendo* $g\circ f = ((A,\mathcal{U}), g\circ f, (A'',\mathcal{U}''))$*, se cumple que* $g\circ f\colon (A,\mathcal{U}) \longrightarrow (A'',\mathcal{U}'')$*, la aplicación continua* composición *de* f *y* g*, es una aplicación uniformemente continua de* $(A,\mathcal{U})$ *en* $(A'',\mathcal{U}'')$*.*
3. (Asociatividad). *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
(A,\mathcal{U}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] \arrow[drr, bend left=50, "(h\circ g)\circ f"] \arrow[drr, bend right=60, "h\circ(g\circ f)"'] & (A',\mathcal{U}') \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\
& (A'',\mathcal{U}'') \arrow[r, "h"'] & (A''',\mathcal{U}''')
\end{tikzcd}$$

conmuta.

4. (Neutros). *Los diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
(A,\mathcal{U}) \arrow[r, "\mathrm{id}_{(A,\mathcal{U})}"] \arrow[dr, "f"'] & (A,\mathcal{U}) \arrow[d, "f"] \\
& (A',\mathcal{U}')
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
(A,\mathcal{U}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & (A',\mathcal{U}') \arrow[d, "\mathrm{id}_{(A',\mathcal{U}')}"] \\
& (A',\mathcal{U}')
\end{tikzcd}$$

conmutan.

Corollary 3.68. *Los espacios uniformes* $(A,\mathcal{U})$ *tales que* $A \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$*, junto con las aplicaciones uniformemente continuas entre ellos constituyen una categoría, a la que denotamos por* **Unif**.

Observemos que dado un conjunto A, una familia de espacios uniformes $(B_i, \mathcal{D}_i)_{i\in I}$ y una familia de aplicaciones $f = (f_i)_{i\in I}$, en la que, para cada $i \in I$, $f_i\colon A \longrightarrow B_i$, siempre existe una uniformidad $\mathcal{U}$ sobre A, e.g., $\{\, \Phi \subseteq A^2 \mid \Delta_A \subseteq \Phi, \}$, para la cual se cumple que, dado cualquier $i \in I$, la aplicación f_i es una aplicación uniformemente contínua de $(A,\mathcal{U})$ en $(B_i, \mathcal{D}_i)$. Pero tal uniformidad no es, en general, el optimal, en el sentido de ser la mínima uniformidad sobre A con la propiedad mencionada. Demostramos a continuación que siempre existe tal uniformidad optimal.

Lemma 3.69. *Sea* A *un conjunto,* $(B_i, \mathcal{D}_i)_{i\in I}$ *una familia de espacios uniformes y* $f = (f_i)_{i\in I}$ *una familia de aplicaciones, en la que, para cada* $i \in I$*,* $f_i\colon A \longrightarrow B_i$*; situación que indicaremos por:*

$$f\colon A \longrightarrow (B_i, \mathcal{D}_i)_{i\in I}.$$

Entonces hay una única uniformidad sobre A, a la que denotamos por $L^f((B_i, \mathcal{D}_i)_{i\in I})$*, y denominamos el* levantamiento optimal de $(B_i, \mathcal{D}_i)_{i\in I}$ a través de f*, tal que:*

1. *Para cada* $i \in I$*,* $f_i\colon (A, L^f((B_i, \mathcal{D}_i)_{i\in I})) \longrightarrow (B_i, \mathcal{D}_i)$*.*
2. *Para cada espacio uniforme* $(C, \mathcal{E})$ *y cada aplicación* $g\colon C \longrightarrow A$*, si, para cada* $i \in I$*,* $f_i \circ g\colon (C, \mathcal{E}) \longrightarrow (B_i, \mathcal{D}_i)$*, entonces*

$$g\colon (C, \mathcal{E}) \longrightarrow (A, L^f((B_i, \mathcal{D}_i)_{i\in I})).$$

Además, se cumple que:

1. *Para cada uniformidad $\mathcal{U}$ sobre A:*
$$L^{\mathrm{id}_A}(A,\mathcal{U}) = \mathcal{U}.$$
2. *Si, para cada $i \in I$, $(C_{i,j}, \mathcal{E}_{i,j})_{j\in J_i}$ es una familia de espacios uniformes, $g_i = (g_{i,j})_{j\in J_i}$ una familia de aplicaciones, en la que, para cada $j \in J_i$, $g_{i,j}\colon B_i \longrightarrow (C_{i,j}, \mathcal{E}_{i,j})$ y $\mathcal{D}_i = L^{g_i}((C_{i,j}, \mathcal{E}_{i,j})_{j\in J_i})$, entonces*
$$L^{(g_i\circ f)_{i\in I}}((C_{i,j}, \mathcal{E}_{i,j})_{(i,j)\in\coprod_{i\in I} J_i}) = L^f((B_i, L^{g_i}((C_{i,j}, \mathcal{E}_{i,j})_{j\in J_i}))_{i\in I}).$$

Demostración. Es suficiente que tomemos la uniformidad sobre A generada por:
$$\{A^2\} \cup \{\, \textstyle\bigcap_{\alpha\in n} (f^2_{i_\alpha})^{-1}[\Phi_{i_\alpha}] \mid n \in \mathbb{N} - 1, (i_\alpha)_{\alpha\in n} \in I^n, (\Phi_{i_\alpha})_{\alpha\in n} \in \textstyle\prod_{\alpha\in n} \mathcal{D}_{i_\alpha} \,\}.$$
□

Como caso particular del lema tenemos el siguiente corolario.

Corollary 3.70. *Sea A un conjunto, $(A',\mathcal{U}')$ un espacio uniforme y $f\colon A \longrightarrow A'$ una aplicación; situación que indicamos por:*
$$f\colon A \longrightarrow (A',\mathcal{U}').$$
Entonces hay un levantamiento optimal de $\mathcal{U}'$ a través de f, *i.e., hay una uniformidad sobre A, denotada por $L^f(\mathcal{U}')$, el* levantamiento optimal de $\mathcal{U}'$ a través de f, *tal que $((A, L^f(\mathcal{U}')), f, (A',\mathcal{U}'))$ es una aplicación uniformemente continua del espacio uniforme $(A, L^f(\mathcal{U}'))$ en el espacio uniforme $(A',\mathcal{U}')$ y para cada espacio uniforme $(A'',\mathcal{U}'')$ y cada aplicación $g\colon A'' \longrightarrow A$, si $((A'',\mathcal{U}''), f\circ g, (A',\mathcal{U}'))$ es una aplicación uniformemente contínua de $(A'',\mathcal{U}'')$ en $(A',\mathcal{U}')$, entonces se cumple que $((A'',\mathcal{U}''), g, (A, L^f(\mathcal{U}')))$ lo es de $(A'',\mathcal{U}'')$ en $(A, L^f(\mathcal{U}'))$. Además, tenemos que:*

1. *Para cada uniformidad $\mathcal{U}$ sobre A:*
$$L^{\mathrm{id}_A}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}.$$
2. *Si $f\colon A \longrightarrow A'$, $g\colon A' \longrightarrow A''$ son aplicaciones y $\mathcal{U}''$ una uniformidad sobre A'', entonces:*
$$L^{g\circ f}(\mathcal{U}'') = L^f(L^g(\mathcal{U}'')).$$

Demostración. Es suficiente tomar como $\mathrm{L}^f(\mathcal{U}')$ la uniformidad sobre A definida como:
$$\mathrm{L}^f(\mathcal{U}') = \{\, \Phi \subseteq A^2 \mid \exists\, \Phi' \in \mathcal{U}' \,(\, (f^2)^{-1}[\Phi'] \subseteq \Phi \,) \,\}.$$
□

Demuéstrese que dado un conjunto A, el levantamiento optimal de $(B_i, \mathcal{D}_i)_{i\in\varnothing}$ a través de $f = (f_i)_{i\in\varnothing}$ es $\{A^2\}$.

Definition 3.71. Sea $f\colon (A,\mathcal{U}) \longrightarrow (B,\mathcal{V})$ una aplicación uniformemente contínua. Decimos que f es un morfismo *optimal* si, para cada espacio uniforme $(C,\mathcal{W})$ y cada aplicación $g\colon C \longrightarrow A$, si $f\circ g\colon (C,\mathcal{W}) \longrightarrow (B,\mathcal{V})$, entonces $g\colon (C,\mathcal{W}) \longrightarrow (A,\mathcal{U})$. Además, el morfismo optimal f es un *encajamiento* si su aplicación subyacente es inyectiva. En el caso de que $A \subseteq B$ y que la inclusión canónica de A en B determine un encajamiento de $(A,\mathcal{U})$ en $(B,\mathcal{V})$, decimos que $(A,\mathcal{U})$ es un *subespacio* uniforme de $(B,\mathcal{V})$.

Proposition 3.72. *Sea $f\colon (A,\mathcal{U}) \longrightarrow (B,\mathcal{V})$ una aplicación uniformemente contínua. Una condición necesaria y suficiente para que f sea un morfismo optimal es que $\mathcal{U} = L^f(B,\mathcal{V})$.*

Demostración. □

Proposition 3.73. *Si $f\colon (A,\mathcal{U}) \longrightarrow (B,\mathcal{V})$ y $g\colon (B,\mathcal{V}) \longrightarrow (C,\mathcal{W})$ son morfismos optimales, entonces $g \circ f\colon (A,\mathcal{U}) \longrightarrow (C,\mathcal{W})$ es un morfismo optimal. Además, si $g \circ f\colon (A,\mathcal{U}) \longrightarrow (C,\mathcal{W})$ es un morfismo optimal, entonces $f\colon (A,\mathcal{U}) \longrightarrow (B,\mathcal{V})$ es optimal.*

Demostración. □

Establecemos a continuación la propiedad universal de los subespacios uniformes de un espacio uniforme.

Proposition 3.74. *Sean $(A,\mathcal{U})$, $(B,\mathcal{V})$ y $(C,\mathcal{W})$ tres espacios uniformes, f un encajamiento de $(A,\mathcal{U})$ en $(B,\mathcal{V})$ y g un morfismo de $(C,\mathcal{W})$ en $(B,\mathcal{V})$. Entonces:*

1. *Una condición necesaria y suficiente para que exista un morfismo h de $(C,\mathcal{W})$ en $(A,\mathcal{U})$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & (C,\mathcal{W}) \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g"] \\
(A,\mathcal{U}) \arrow[r, hook, "f"'] & (B,\mathcal{V})
\end{tikzcd}$$

   conmute, es que $\mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.
2. (Propidad universal del subespacio uniforme). *Si $(A,\mathcal{U})$ es un subespacio uniforme de $(B,\mathcal{V})$, entonces una condición necesaria y suficiente para que exista un morfismo h de $(C,\mathcal{W})$ en $(A,\mathcal{U})$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & (C,\mathcal{W}) \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g"] \\
(A,\mathcal{U}) \arrow[r, hook, "f"'] & (B,\mathcal{V})
\end{tikzcd}$$

   conmute, es que $\mathrm{Im}(g) \subseteq A$.

Además, tanto en el primero como en el segundo caso h está unívocamente determinada y recibe el nombre de correstricción *de g a $(A,\mathcal{U})$.*

Demostración. □

Ahora que disponemos de la propiedad universal del subespacio, obtenemos como corolario la *factorización canónica a través de la imagen* de un morfismo, siendo la imagen, esencialmente, el mínimo subespacio del codominio del morfismo, a través del cual factoriza el morfismo.

Corollary 3.75 (Noether)**.** *Sea f una aplicación uniformemente contínua del espacio uniforme $(A,\mathcal{U})$ en el espacio uniforme $(B,\mathcal{V})$. Entonces hay una única aplicación uniformemente contínua sobreyectiva f^{s}, la* sobreyectivizada *de f, de $(A,\mathcal{U})$ en $(\mathrm{Im}(f), L^{f}(B,\mathcal{V}))$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
(A,\mathcal{U}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, two heads, "f^{\mathrm{s}}"'] & (B,\mathcal{V}) \\
 & (\mathrm{Im}(f), L^{f}(B,\mathcal{V})) \arrow[u, hook, "\mathrm{in}_{(\mathrm{Im}(f), L^{f}(B,\mathcal{V}))}"']
\end{tikzcd}$$

conmuta. Esta es la factorización canónica a través de la imagen *de una aplicación uniformemente contínua. Además, si f es inyectivo, entonces f^{s} es inyectivo, luego biyectivo.*

Por otra parte, se cumple que para cada espacio uniforme $(C,\mathcal{W})$, cualquier aplicación uniformemente contínua $g\colon (A,\mathcal{U}) \longrightarrow (C,\mathcal{W})$ y cualquier encajamiento $h\colon (C,\mathcal{W}) \rightarrowtail (B,\mathcal{V})$, si el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(A,\mathcal{U}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & (B,\mathcal{V}) \\
& (C,\mathcal{W}) \arrow[u, tail, "h"']
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces existe un único encajamiento $t\colon (\mathrm{Im}(f), L^f(B,\mathcal{V})) \rightarrowtail (C,\mathcal{W})$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(A,\mathcal{U}) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"] \arrow[ddr, two heads, "f^{\mathrm{s}}"'] & & (B,\mathcal{V}) \\
& (C,\mathcal{W}) \arrow[ur, tail, "h"'] & \\
& (\mathrm{Im}(f), L^f(B,\mathcal{V})) \arrow[u, tail, "t"'] \arrow[uur, tail, "\mathrm{in}_{(\mathrm{Im}(f), L^f(B,\mathcal{V}))}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta. De modo que $(\mathrm{Im}(f), L^f(B,\mathcal{V}))$ es, esencialmente, el mínimo subespacio de $(B,\mathcal{V})$ a través del cual factoriza f.

Del mismo modo que antes, dado un conjunto A, una familia de espacios uniformes $(B_i,\mathcal{D}_i)_{i\in I}$ y una familia de aplicaciones $f = (f_i)_{i\in I}$, en la que, para cada $i \in I$, $f_i\colon B_i \longrightarrow A$, siempre existe una uniformidad $\mathcal{U}$ sobre A, para la cual se cumple que, para cada $i \in I$, la aplicación f_i es un morfismo de $(B_i,\mathcal{D}_i)$ en $(A,\mathcal{U})$, e.g., la mínima uniformidad $\{A^2\}$ sobre A. Pero tal uniformidad no es, en general, la cooptimal, en el sentido de ser la máxima uniformidad sobre A con la propiedad mencionada. Demostramos a continuación que siempre existe tal uniformidad cooptimal.

Lemma 3.76. *Sea A un conjunto, $(B_i,\mathcal{D}_i)_{i\in I}$ una familia de espacios uniformes y $f = (f_i)_{i\in I}$ una familia de aplicaciones, en la que, para cada $i \in I$, $f_i\colon B_i \longrightarrow A$; situación que indicaremos por:*

$$f\colon (B_i,\mathcal{D}_i)_{i\in I} \longrightarrow A.$$

Entonces hay una única uniformidad sobre A, a la que denotamos por $L_f((B_i,\mathcal{D}_i)_{i\in I})$, y denominamos el levantamiento cooptimal de $(B_i,\mathcal{D}_i)_{i\in I}$ a través de f, *tal que:*

1. *Para cada $i \in I$, $f_i\colon (B_i,\mathcal{D}_i) \longrightarrow (A, L_f((B_i,\mathcal{D}_i)_{i\in I}))$.*
2. *Para cada espacio uniforme $(C,\mathcal{E})$ y cada aplicación $g\colon A \longrightarrow C$, si, para cada $i \in I$, $g\circ f_i\colon (B_i,\mathcal{D}_i) \longrightarrow (C,\mathcal{E})$, entonces $g\colon (A, L_f((B_i,\mathcal{D}_i)_{i\in I})) \longrightarrow (C,\mathcal{E})$.*

Además, se cumple que:

1. *Para cada uniformidad $\mathcal{U}$ sobre A:*

$$L_{\mathrm{id}_A}(A,\mathcal{U}) = \mathcal{U}.$$

2. *Si, para cada* $i \in I$, $(C_{i,j}, \mathcal{E}_{i,j})_{j \in J_i}$ *es una familia de espacios uniformes,* $g_i = (g_{i,j})_{j \in J_i}$ *una familia de aplicaciones, en la que, para cada* $j \in J_i$, $g_{i,j} \colon (C_{i,j}, \mathcal{E}_{i,j}) \longrightarrow B_i$ *y* $\mathcal{D}_i = L_{g_i}((C_{i,j}, \mathcal{E}_{i,j})_{j \in J_i})$, *entonces*
$$L_{(f \circ g_i)_{i \in I}}((C_{i,j}, \mathcal{E}_{i,j})_{(i,j) \in \coprod_{i \in I} J_i}) = L_f((B_i, L_{g_i}((C_{i,j}, \mathcal{E}_{i,j})_{j \in J_i}))_{i \in I}).$$

Demostración. Hay al menos una uniformidad $\mathcal{U}$ sobre A, e.g., la mínima uniformidad $\{A^2\}$ sobre A, para la cual se cumple que, dado cualquier $i \in I$, la aplicación f_i es uniformemente contínua de $(B_i, \mathcal{D}_i)$ en $(A, \mathcal{U})$. Entonces, en virtud del lema 3.69, para la familia de espacios uniformes $(A, \mathcal{U})_{\mathcal{U} \in \Lambda_{f,A}}$, siendo $\Lambda_{f,A}$ el conjunto de todas las uniformidades $\mathcal{U}$ sobre A tales que, para cada $i \in I$, la aplicación f_i es uniformemente contínua de $(B_i, \mathcal{D}_i)$ en $(A, \mathcal{U})$, y la familia de aplicaciones $(\mathrm{id}_A)_{\mathcal{U} \in \Lambda_{f,A}}$, hay una única uniformidad sobre A, $\mathrm{L}^{(\mathrm{id}_A)_{\mathcal{U} \in \Lambda_{f,A}}}((A, \mathcal{U})_{\mathcal{U} \in \Lambda_{f,A}})$, el levantamiento optimal de $(A, \mathcal{U})_{\mathcal{U} \in \Lambda_{f,A}}$ a través de $(\mathrm{id}_A)_{\mathcal{U} \in \Lambda_{f,A}}$ tal que, para cada $\mathcal{U} \in \Lambda_{f,A}$, la aplicación id_A es uniformemente contínua de $(A, \mathrm{L}^{(\mathrm{id}_A)_{\mathcal{U} \in \Lambda_{f,A}}}((A, \mathcal{U})_{\mathcal{U} \in \Lambda_{f,A}}))$ en $(A, \mathcal{U})$. Es evidente que el espacio uniforme $(A, \mathrm{L}^{(\mathrm{id}_A)_{\mathcal{U} \in \Lambda_{f,A}}}((A, \mathcal{U})_{\mathcal{U} \in \Lambda_{f,A}}))$ cumple las condiciones del lema.

Conviene tener presente el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(B_i, \mathcal{D}_i) \arrow[r, "f_i"] \arrow[ddr, "g \circ f_i"'] & (A, \mathrm{L}^{(\mathrm{id}_A)_{\mathcal{U} \in \Lambda_{f,A}}}((A, \mathcal{U})_{\mathcal{U} \in \Lambda_{f,A}})) \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"] \arrow[dd, "g"] & (A, \mathcal{U}) \\
 & & (A, \mathrm{L}^g(C, \mathcal{E})) \arrow[dl, "g"] \\
 & (C, \mathcal{E}) &
\end{tikzcd}$$

para demostrar la parte final del lema. □

Como caso particular del lema tenemos el siguiente corolario.

Corollary 3.77. *Sea* A *un conjunto,* $(B, \mathcal{D})$ *un espacio uniforme y* $f \colon B \longrightarrow A$ *una aplicación; situación que indicaremos por:*
$$f \colon (B, \mathcal{D}) \longrightarrow A.$$
Entonces hay un levantamiento cooptimal de $\mathcal{D}$ *a través de* f, *i.e., hay una uniformidad sobre A, denotada por* $L_f(\mathcal{D})$, *el levantamiento cooptimal de* $\mathcal{D}$ *a través de* f, *tal que* $((B, \mathcal{D}), f, (A, L_f(\mathcal{D})))$ *es una aplicación uniformemente contínua de* $(B, \mathcal{D})$ *en* $(A, L_f(\mathcal{D}))$ *y para cada espacio uniforme* $(C, \mathcal{E})$ *y cada aplicación* $g \colon A \longrightarrow C$, *si* $((B, \mathcal{D}), g \circ f, (C, \mathcal{E}))$ *es una aplicación uniformemente contínua de* $(B, \mathcal{D})$ *en* $(C, \mathcal{E})$, *entonces* $((A, L^f(\mathcal{D})), g, (C, \mathcal{E}))$ *lo es de* $(A, L^f(\mathcal{D}))$ *en* $(C, \mathcal{E})$. *Además, se cumple que:*

1. *Para cada uniformidad* $\mathcal{U}$ *sobre* A:
$$L_{\mathrm{id}_A}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}.$$
2. *Si* $f \colon B \longrightarrow A$, $g \colon C \longrightarrow B$ *son aplicaciones y* $\mathcal{E}$ *es una uniformidad sobre* C, *entonces:*
$$L_{f \circ g}(\mathcal{E}) = L_f(L_g(\mathcal{E})).$$

Demostración. □

Demuéstrese que dado un conjunto A, el levantamiento cooptimal de $(B_i, \mathcal{D}_i)_{i \in \varnothing}$ a través de $f = (f_i)_{i \in \varnothing}$ es la uniformidad máxima sobre A.

Definition 3.78. Sea $f\colon (B,\mathcal{V})\longrightarrow(A,\mathcal{U})$ una aplicación uniformemente contínua. Decimos que f es un morfismo *cooptimal* si, para cada espacio uniforme $(C,\mathcal{W})$ y cada aplicación $g\colon A\longrightarrow C$, si $g\circ f\colon (B,\mathcal{V})\longrightarrow(C,\mathcal{W})$, entonces $g\colon (A,\mathcal{U})\longrightarrow(C,\mathcal{W})$. Además, el morfismo cooptimal f es un *morfismo cociente* si su aplicación subyacente es sobreyectiva. En el caso de que $A = B/\Phi$, para una equivalencia Φ sobre B y que la proyección canónica de B sobre B/Φ determine un morfismo cociente de $(B,\mathcal{V})$ en $(B/\Phi,\mathcal{U})$, decimos que $(B/\Phi,\mathcal{U})$ es un *cociente* de $(B,\mathcal{D})$.

Proposition 3.79. *Sea $f\colon (B,\mathcal{V})\longrightarrow(A,\mathcal{U})$ una aplicación uniformemente contínua. Una condición necesaria y suficiente para que f sea un morfismo cooptimal es que $\mathcal{U} = L_f(B,\mathcal{V})$.*

Demostración. □

Proposition 3.80. *Si $f\colon (A,\mathcal{U})\longrightarrow(B,\mathcal{V})$ y $g\colon (B,\mathcal{V})\longrightarrow(C,\mathcal{W})$ son morfismos cooptimales, entonces $g\circ f\colon (A,\mathcal{U})\longrightarrow(C,\mathcal{W})$ es un morfismo cooptimal. Además, si $g\circ f\colon (A,\mathcal{U})\longrightarrow(C,\mathcal{W})$ es un morfismo cooptimal, entonces $g\colon (B,\mathcal{V})\longrightarrow(C,\mathcal{W})$ es cooptimal.*

Demostración. □

Demostramos a continuación la existencia de la factorización de una aplicación uniformemente contínua a través de un cociente del dominio del mismo. Pero antes demostramos la propiedad universal que tienen los cocientes, y que usaremos para descomponer las aplicaciones uniformemente contínuas, a través de su coimagen, en la composición de una sobreyectiva y una inyectiva.

Proposition 3.81. *Sean $(A,\mathcal{U})$, $(B,\mathcal{V})$ y $(C,\mathcal{W})$ tres espacios uniformes, f un morfismo cociente de $(A,\mathcal{U})$ en $(B,\mathcal{V})$ y g una aplicación uniformemente contínua de $(A,\mathcal{U})$ en $(C,\mathcal{W})$. Entonces:*

1. *Una condición necesaria y suficiente para que exista una aplicación uniformemente contínua h de $(B,\mathcal{V})$ en $(C,\mathcal{W})$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} (A,\mathcal{U}) \arrow[r, "f", two heads] \arrow[dr, "g"'] & (B,\mathcal{V}) \arrow[d, "h"] \\ & (C,\mathcal{W}) \end{tikzcd}$$

   conmute, es que, para cada $x,y\in A$, si $f(x)=f(y)$, entonces $g(x)=g(y)$.

2. (Propidad universal del cociente). *Si $\Phi \in Eqv(A)$, entonces una condición necesaria y suficiente para que exista una aplicación uniformemente contínua h de $(A/\Phi, L_{\mathrm{pr}_\Phi}(A,\mathcal{U}))$ en $(C,\mathcal{W})$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} (A,\mathcal{U}) \arrow[r, "\mathrm{pr}_\Phi", two heads] \arrow[dr, "g"'] & (A/\Phi, L_{\mathrm{pr}_\Phi}(A,\mathcal{U})) \arrow[d, "h"] \\ & (C,\mathcal{W}) \end{tikzcd}$$

   conmute, es que, para cada $x,y\in A$, si $(x,y)\in\Phi$, entonces $g(x)=g(y)$.

Además, tanto en el primero como en el segundo caso h está unívocamente determinada.

Demostración. □

Ahora que disponemos de la propiedad universal del cociente, obtenemos como corolario la *factorización canónica* de una aplicación uniformemente contínua a través de la *coimagen*, siendo la coimagen, esencialmente, el máximo cociente del dominio de la aplicación uniformemente contínua, a través de la cual factoriza la misma.

Corollary 3.82 (Noether). *Sea f una aplicación uniformemente contínua de $(A,\mathcal{U})$ en $(B,\mathcal{V})$. Entonces hay una única aplicación uniformemente contínua inyectiva f^{i}, la* inyectivizada *de f, de $(A/Ker(f), L_{\mathrm{pr}_{Ker(f)}}(A,\mathcal{U}))$, la* coimagen *de f, en $(B,\mathcal{V})$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
(A,\mathcal{U}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{Ker(f)}"'] & (B,\mathcal{V}) \\
& (A/Ker(f), L_{\mathrm{pr}_{Ker(f)}}(A,\mathcal{U})) \arrow[u, "f^{\mathrm{i}}"']
\end{tikzcd}$$

conmuta. Esta es la factorización canónica a través de la coimagen *de una aplicación uniformemente contínua. Además, si f es sobreyectiva, entonces f^{i} es sobreyectiva, luego biyectiva.*

Por otra parte, se cumple que para cada espacio uniforme $(C,\mathcal{W})$, cualquier morfismo cociente $g\colon (A,\mathcal{U}) \longrightarrow (C,\mathcal{W})$ y cualquier aplicación uniformemente contínua $h\colon (C,\mathcal{W}) \longrightarrow (B,\mathcal{V})$, si el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(A,\mathcal{U}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & (B,\mathcal{V}) \\
& (C,\mathcal{W}) \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay un único $t\colon (C,\mathcal{W}) \longrightarrow (A/Ker(f), L_{\mathrm{pr}_{Ker(f)}}(A,\mathcal{U}))$, que es un morfismo cociente, tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(A,\mathcal{U}) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{Ker(f)}"] \arrow[ddr, "g"'] & & (B,\mathcal{V}) \\
& (A/Ker(f), L_{\mathrm{pr}_{Ker(f)}}(A,\mathcal{U})) \arrow[ur, "f^{\mathrm{i}}"] & \\
& (C,\mathcal{W}) \arrow[u, "t"] \arrow[uur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Corollary 3.83 (Noether). *Sea f una aplicación uniformemente contínua de $(A,\mathcal{U})$ en $(B,\mathcal{V})$. Entonces hay una única aplicación uniformemente contínua biyectiva f^{b}, la* biyectivizada *de f, de $(A/Ker(f), L_{\mathrm{pr}_{Ker(f)}}(A,\mathcal{U}))$ en $(\mathrm{Im}(f), L^{f}(B,\mathcal{V}))$ tal que* *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
(A,\mathcal{U}) \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{Ker(f)}"'] & & (B,\mathcal{V}) \\
(A/Ker(f), L_{\mathrm{pr}_{Ker(f)}}(A,\mathcal{U})) \arrow[r, "f^{\mathrm{b}}"'] & (\mathrm{Im}(f), L^f(B,\mathcal{V})) \arrow[ur, hook, "\mathrm{in}_{(\mathrm{Im}(f),L^f(B,\mathcal{V}))}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Esta es la factorización canónica *de una aplicación uniformemente contínua, a través de la* coimagen *y de la* imagen.

Obsérvese que la aplicación uniformemente contínua f^{b} del corolario anterior no es necesariamente un isomorfismo.

Definition 3.84. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Una *filtración* sobre $\mathbf{A}$ es una ω-cadena descendente $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de congruencias sobre $\mathbf{A}$. Una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra filtrada es un par $(\mathbf{A},(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}})$ en el que $\mathbf{A}$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una filtración sobre $\mathbf{A}$.

Example. El anillo $\mathbf{Z}$ de los números enteros tiene, por cada número primo p, recordando que en cualquier anillo existe una correspondencia biunívoca entre ideales y congruencias, una filtración dada por la ω-cadena estrictamente descendente de ideales:

$$(p) \supset (p^2) \supset \ldots \supset (p^n) \supset (p^{n+1}) \supset \ldots.$$

Proposition 3.85. *Sea $(\mathbf{A},(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}})$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra filtrada. Entonces el conjunto $\mathcal{B}_{(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}} = \{\, \Phi_n \mid n\in\mathbb{N}\,\}$ es una base para una uniformidad sobre A. Por lo tanto el conjunto $\{\, [a]_{\Phi_n} \mid a\in A \text{ y } n\in\mathbb{N}\,\}$ es una base para una topología regular sobre A, a la que denotamos por $\mathcal{T}_{(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ y, para cada $a\in A$, $\{\, [a]_{\Phi_n} \mid n\in\mathbb{N}\,\}$ es un sistema fundamental de entornos abiertos del punto a de A.*

Demostración. □

Proposition 3.86. *El espacio topológico regular $(A,\mathcal{T}_{(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}})$ es de Hausdorff si y sólo si $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\Phi_n = \Delta_A$.*

Demostración. □

Proposition 3.87. *Sea $(\mathbf{A},(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}})$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra filtrada y X una subálgebra de $\mathbf{A}$. Entonces, para cada $n\in\mathbb{N}$, se cumple que $[X]_{\Phi_n}$ es una subálgebra abierta y topológicamente cerrada de $\mathbf{A}$ y que la clausura topológica de la subálgebra X coincide con la intersección de la familia $([X]_{\Phi_n})_{n\in\mathbb{N}}$, i.e.,:*

$$\overline{X} = \textstyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[X]_{\Phi_n},$$

por lo tanto $\overline{X}$ es la mínima subálgebra topológicamente cerrada que contiene a X.

Demostración. □

En la proposición que sigue asociamos a cada $\mathbf{\Sigma}$-álgebra filtrada una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra topológica.

Proposition 3.88. *Sea $(\mathbf{A},(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}})$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra filtrada. Entonces, para cada $n\in\mathbb{N}$ y cada operación formal n-aria σ, se cumple que $F_\sigma\colon A^n \longrightarrow A$ es una aplicación contínua del espacio topológico producto $(A^n,\mathcal{T}^n_{(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}})$ en el espacio topológico $(A,\mathcal{T}_{(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}})$. Por lo tanto $(\mathbf{A},\mathcal{T}_{(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}})$ es un álgebra topológica.*

Demostración. □

Ahora definimos una clase de morfismos entre $\mathbf{\Sigma}$-álgebras filtradas que nos permitirán, por una parte, obtener una categoría, la de las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras filtradas y morfismos entre ellas, y, por otra, completar la anterior asociación hasta un functor desde la categoría de las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras filtradas hasta la de las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras topológicas y homomorfismos contínuos entre ellas.

Definition 3.89. Sean $(\mathbf{A}, (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}})$ y $(\mathbf{B}, (\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}})$ dos $\mathbf{\Sigma}$-álgebras filtradas. Un *morfismo de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras filtradas* o, más brevemente, un *morfismo* de $(\mathbf{A}, (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}})$ en $(\mathbf{B}, (\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}})$ es un triplo ordenado $((\mathbf{A}, (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}), f, (\mathbf{B}, (\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}))$, denotado por $f\colon (\mathbf{A}, (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}) \longrightarrow (\mathbf{B}, (\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}})$, en el que f es un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^2[\Phi_n] \subseteq \Psi_n$.

Proposition 3.90. *Sean* $(\mathbf{A}, (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}})$, $(\mathbf{B}, (\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}})$, $(\mathbf{C}, (\Xi_n)_{n\in\mathbb{N}})$ *y* $(\mathbf{D}, (\Upsilon_n)_{n\in\mathbb{N}})$ *cuatro* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras filtradas,* f *un morfismo de* $(\mathbf{A}, (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}})$ *en* $(\mathbf{B}, (\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}})$*,* g *uno de* $(\mathbf{B}, (\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}))$ *en* $(\mathbf{C}, (\Xi_n)_{n\in\mathbb{N}}))$ *y* h *uno de* $(\mathbf{C}, (\Xi_n)_{n\in\mathbb{N}}))$ *en* $(\mathbf{D}, (\Upsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}))$*. Entonces:*

1. $\mathrm{id}_{(\mathbf{A},(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}})}\colon (\mathbf{A}, (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}) \longrightarrow (\mathbf{A}, (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}})$ *es un endomorfismo de* $(\mathbf{A}, (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}})$.
2. $g \circ f\colon (\mathbf{A}, (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}) \longrightarrow (\mathbf{C}, (\Xi_n)_{n\in\mathbb{N}})$ *es un morfismo de* $(\mathbf{A}, (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}})$ *en* $(\mathbf{C}, (\Xi_n)_{n\in\mathbb{N}})$.
3. (Asociatividad). *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{A}, (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] \arrow[drr, bend left=50, "(h\circ g)\circ f"] \arrow[drr, bend right=50, "h\circ(g\circ f)"'] & (\mathbf{B}, (\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}) \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\
& (\mathbf{C}, (\Xi_n)_{n\in\mathbb{N}}) \arrow[r, "h"'] & (\mathbf{D}, (\Upsilon_n)_{n\in\mathbb{N}})
\end{tikzcd}$$

conmuta.

4. (Neutros). *Los diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{A}, (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}) \arrow[r, "\mathrm{id}_{(\mathbf{A},(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}})}"] \arrow[dr, "f"'] & (\mathbf{A}, (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}) \arrow[d, "f"] \\
& (\mathbf{B}, (\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}})
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
(\mathbf{A}, (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & (\mathbf{B}, (\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}) \arrow[d, "\mathrm{id}_{(\mathbf{B},(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}})}"] \\
& (\mathbf{B}, (\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}})
\end{tikzcd}$$

conmutan.

Demostración. □

Esta última proposición nos permite afirmar la existencia de la categoría $\mathbf{FAlg}(\mathbf{\Sigma})$, formada por las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras filtradas y los morfismos entre ellos.

Definition 3.91. La categoría $\mathbf{FAlg}(\mathbf{\Sigma})$ tiene como objetos las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras filtradas, i.e., los pares $(\mathbf{A}, (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}})$, en los que $\mathbf{A}$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una filtración sobre $\mathbf{A}$, y como morfismos de $(\mathbf{A}, (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}})$ en $(\mathbf{B}, (\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}})$, los triplos $((\mathbf{A}, (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}), f, (\mathbf{B}, (\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}))$, denotados como $f\colon (\mathbf{A}, (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}) \longrightarrow (\mathbf{B}, (\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}})$, en los que f es un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^2[\Phi_n] \in \Psi_n$.

Proposition 3.92. *Si* $f\colon (\mathbf{A}, (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}) \longrightarrow (\mathbf{B}, (\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}})$ *es un morfismo de* $\mathbf{\Sigma}$-*álgebras filtradas, entonces* $f\colon (\mathbf{A}, (\mathcal{T}_{\Phi_n})_{n\in\mathbb{N}}) \longrightarrow (\mathbf{B}, (\mathcal{T}_{\Psi_n})_{n\in\mathbb{N}})$ *es un homomorfismo contínuo. Además, el proceso descrito preserva identidades y composiciones, por lo tanto es un functor de la categoría* $\mathbf{FAlg}(\mathbf{\Sigma})$ *en* $\mathbf{TAlg}(\mathbf{\Sigma})$*, la de* $\mathbf{\Sigma}$-*álgebras topológicas y homomorfismos contínuos.*

Demostración. □

A continuación hacemos corresponder a cada $\mathbf{\Sigma}$-álgebra filtrada un sistema proyectivo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras.

Proposition 3.93. *Sea* $(\mathbf{A}, (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}})$ *una* $\mathbf{\Sigma}$-*álgebra filtrada. Entonces el par ordenado* $(\mathbb{N}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *en el que* $\mathbb{N}$ *es el conjunto bien ordenado de los números naturales y* $\boldsymbol{\mathcal{A}} = ((\mathbf{A}/\Phi_n \mid n \in \mathbb{N}), (\mathrm{pr}_{n+1,n} \mid (n, n+1) \in \leq))$*, es tal que:*

1. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$*,* $\mathbf{A}/\Phi_n$ *es una* $\mathbf{\Sigma}$-*álgebra.*
2. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$*,* $\mathrm{pr}_{n+1,n}\colon \mathbf{A}/\Phi_{n+1} \longrightarrow \mathbf{A}/\Phi_n$ *es un homomorfismo.*
3. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$*,* $\mathrm{pr}_{n,n} = \mathrm{id}_{\mathbf{A}/\Phi_n}$.
4. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}/\Phi_{n+2} \arrow[r, "\mathrm{pr}_{n+2,n+1}"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{n+2,n}"'] & \mathbf{A}/\Phi_{n+1} \arrow[d, "\mathrm{pr}_{n+1,n}"] \\
& \mathbf{A}/\Phi_n.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto es un sistema proyectivo de $\mathbf{\Sigma}$-*álgebras.*

Demostración. □

Definition 3.94. Sea $(\mathbf{A}, (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}})$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra filtrada. Entonces a la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\varprojlim(\mathbb{N}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$, límite proyectivo del sistema proyectivo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras $(\mathbb{N}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$, la denominamos la *completación* de la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra filtrada $(\mathbf{A}, (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Example. La completación del anillo filtrado $(\mathrm{Z}, (p^{n+1})_{n\in\mathbb{N}})$ es el anillo Z_p de los enteros p-ádicos que Hensel introdujo en su estudio de los números algebraicos.

Proposition 3.95. *Si* $f\colon (\mathbf{A}, (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}) \longrightarrow (\mathbf{B}, (\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}})$ *es un morfismo de* $\mathbf{\Sigma}$-*álgebras filtradas, entonces* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es un morfismo del sistema proyectivo* $(\mathbb{N}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *en el sistema proyectivo* $(\mathbb{N}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$*, en el que, para cada* $n \in \mathbb{N}$*,* f_n *es el único homomorfismo de* $\mathbf{A}/\Phi_n$ *en* $\mathbf{B}/\Psi_n$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}/\Phi_{n+1} \arrow[r, "\mathrm{pr}_{n+1,n}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & \mathbf{A}/\Phi_n \arrow[d, "f_n"] \\
\mathbf{B}/\Phi_{n+1} \arrow[r, "\mathrm{pr}_{n+1,n}"'] & \mathbf{B}/\Psi_n
\end{tikzcd}$$

conmuta.

4. Límites inductivos de las álgebras

Nos ocupamos, en primer lugar, de demostrar tanto la existencia de coproductos de familias de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras, como la de coproductos de familias de homomorfismos entre familias de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras, así como, en segundo lugar, de estudiar la conducta del operador de formación de coproductos, respecto de las identidades y de la composición de familias de homomorfismos entre familias de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras.

4.1. Coproductos de álgebras.

Proposition 4.1. *Sea* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *una familia de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras. Entonces hay un par ordenado* $(\coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I), (\mathrm{in}_i \mid i \in I))$*, también denotado por* $\big(\coprod_{i\in I} \mathbf{A}_i, (\mathrm{in}_i \mid i \in I)\big)$*, en el que* $\coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$*, el* coproducto *de* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$*, es una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y, para cada* $i \in I$*,* in_i*, la* inclusión canónica i-ésima *del coproducto, es un homomorfismo de* $\mathbf{A}_i$ *en* $\coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$*, que tiene la siguiente* propiedad universal*:*

Para cada par ordenado $(\mathbf{A}, (f_i \mid i \in I))$*, en el que* $\mathbf{A}$ *es una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y, para cada* $i \in I$*,* $f_i\colon \mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{A}$*, hay un único homomorfismo*$[f_i \mid i \in I]^\flat : \coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \longrightarrow \mathbf{A}$ *tal que, para cada* $i \in I$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_i \arrow[r, "\mathrm{in}_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & \coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \arrow[d, "{[f_i \mid i \in I]^\flat}"] \\
& \mathbf{A}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Sea $\coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra definida como:

$$\coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) = \mathbf{T_\Sigma}\big(\textstyle\coprod_{i\in I} A_i\big)/\mathrm{C}_{(\mathbf{A}_i \mid i\in I)},$$

en la que $\mathrm{C}_{(\mathbf{A}_i \mid i\in I)}$ es la congruencia sobre $\mathbf{T_\Sigma}\big(\coprod_{i\in I} A_i\big)$ generada por la relación binaria $\mathrm{R}_{(\mathbf{A}_i \mid i\in I)}$ en $\mathrm{T}_\mathbf{\Sigma}\big(\coprod_{i\in I} A_i\big)$ que consta de los pares ordenados

$$((F_\sigma(a_0, \ldots, a_{n-1}), i), \sigma((a_0, i), \ldots, (a_{n-1}, i))),$$

con $i \in I$, $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \Sigma_n$ y $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in A_i^n$ y, para cada $i \in I$, in_i el homomorfismode $\mathbf{A}_i$ en $\coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ obtenido componiendo la inclusión canónica de A_i en $\coprod_{i\in I} A_i$, la inclusión canónica de $\coprod_{i\in I} A_i$ en $\mathrm{T}_\mathbf{\Sigma}\big(\coprod_{i\in I} A_i\big)$ y la proyección canónica de $\mathrm{T}_\mathbf{\Sigma}\big(\coprod_{i\in I} A_i\big)$ en $\mathrm{T}_\mathbf{\Sigma}\big(\coprod_{i\in I} A_i\big)/\mathrm{C}_{(\mathbf{A}_i \mid i\in I)}$. Entonces, dado un par ordenado $(\mathbf{A}, (f_i \mid i \in I))$, en el que $\mathbf{A}$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y, para cada $i \in I$, $f_i\colon \mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{A}$ un homomorfismo, sea $[f_i \mid i \in I]^\sharp$ el único homomorfismode $\mathbf{T_\Sigma}\big(\coprod_{i\in I} A_i\big)$ en $\mathbf{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} A_i \arrow[r, "\eta_{\coprod_{i\in I} A_i}"] \arrow[dr, "{[f_i \mid i \in I]}"'] & \mathrm{T}_\mathbf{\Sigma}\big(\coprod_{i\in I} A_i\big) \arrow[d, "{[f_i \mid i \in I]^\sharp}"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

conmuta. Puesto que $\mathrm{Ker}([f_i \mid i \in I]^\sharp)$ contiene a todos los pares ordenados que generan a la congruencia $\mathrm{C}_{(\mathbf{A}_i \mid i\in I)}$, entonces existe un único homomorfismo$[f_i \mid i \in I]^\flat$ de $\coprod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ en $\mathbf{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{T_\Sigma}\big(\coprod_{i\in I} A_i\big) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{C}_{(\mathbf{A}_i \mid i\in I)}}"] \arrow[dr, "{[f_i \mid i \in I]^\sharp}"'] & \coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \arrow[d, "{[f_i \mid i \in I]^\flat}"] \\
& \mathbf{A}
\end{tikzcd}$$

conmuta. Luego hay un homomorfismo $[f_i \mid i \in I]^\flat \colon \coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que, para cada $i \in I$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_i \arrow[r, "\mathrm{in}_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & \coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \arrow[d, "{[f_i \mid i \in I]^\flat}"] \\
 & \mathbf{A}
\end{tikzcd}$$

conmuta. Dejamos, como ejercicio, la demostración de la unicidad del citado homomorfismo. □

En la Proposición 4.1 hemos demostrado, para una familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras, la existencia de al menos un par ordenado, formado por una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y una familia de homomorfismos desde cada uno de las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras de la familia dada hasta la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra, sujeto a cumplir una cierta propiedad universal; pero, no hemos afirmado que tal par sea absolutamente único.

Demostraremos en lo que sigue, entre otras cosas, que el par ordenado de la proposición anterior, es único salvo (un único) isomorfismo.

Proposition 4.2. *Sea $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras. Entonces:*

1. *Para cada $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ y cualesquiera homomorfismos $f, g \colon \coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \longrightarrow \mathbf{A}$, si, para cada $i \in I$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_i \arrow[r, "\mathrm{in}_i"] \arrow[rr, bend left, "f \circ \mathrm{in}_i"] \arrow[rr, bend right, "g \circ \mathrm{in}_i"'] & \coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathbf{A}
\end{tikzcd}$$

   conmuta, entonces $f = g$, i.e., la familia $(\mathrm{in}_i \mid i \in I)$ es colectivamente epimórfica.

2. *Para cada par ordenado $(\mathbf{A}, (f_i \mid i \in I))$, en el que $\mathbf{A}$ sea una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y, para cada $i \in I$, $f_i \colon \mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{A}$, y para cada monomorfismo $t \colon \mathbf{A} \rightarrowtail \coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$, si, para cada $i \in I$, el digrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_i \arrow[rr, "\mathrm{in}_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & & \coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \\
 & \mathbf{A} \arrow[ur, tail, "t"'] &
\end{tikzcd}$$

   conmuta, entonces t es un isomorfismo, i.e., la familia $(\mathrm{in}_i \mid i \in I)$ es extremal.

Demostración. □

Corollary 4.3. *Sea $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras. Si un par ordenado $(\mathbf{C}, (q_i \mid i \in I))$, en el que $\mathbf{C}$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y, para cada $i \in I$, $q_i \colon \mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{C}$, tiene la propiedad de que para cada par ordenado $(\mathbf{A}, (f_i \mid i \in I))$, en el que $\mathbf{A}$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y, para cada $i \in I$, $f_i \colon \mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{A}$ un homomorfismo, hay un único* *homomorfismo* $h\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{A}$ *tal que, para cada* $i \in I$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_i \arrow[r, "q_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & \mathbf{C} \arrow[d, "h"] \\ & \mathbf{A} \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay un único isomorfismo t *de* $\coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *en* $\mathbf{C}$ *tal que, para cada* $i \in I$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_i \arrow[r, "\mathrm{in}_i"] \arrow[dr, "q_i"'] & \coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \arrow[d, "t"] \\ & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Demuéstrese que cada $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ es la imagen homomorfa de una copotencia de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(1)$

Sea $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras. Demuéstrese que si $I = \varnothing$, entonces $\coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) = \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\varnothing)$, i.e., el coproducto de la familia vacía de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras es la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra inicial.

Sea $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras. Demuéstrese que si I es un conjunto final y su único miembro es i, entonces

$$\coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \cong \mathbf{A}_i.$$

Proposition 4.4 (Conmutatividad)**.** *Sea* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *una familia de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras y* φ *un automorfismo de* I*, entonces*

$$\coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \cong \coprod(\mathbf{A}_{\varphi(i)} \mid i \in I).$$

Demostración. □

Para establecer la proposición que sigue, convenimos en denotar por $(\mathbf{A}_j \mid j \in J)$ la restricción de $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ a J, si $J \subseteq I$, que no es más que la composición de in_J y de $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$. Además, usaremos in_j para denotar la inyección canónica j-ésima, del coproducto de cualquier familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras para la cual se cumpla que j sea miembro del conjunto de índices de la misma.

Proposition 4.5. *Sea* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *una familia de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras y* $J, K, L \subseteq I$ *tales que* $K \subseteq J$ *y* $L \subseteq K$*. Entonces:*

1. $\mathrm{in}_{J,J} = \mathrm{id}_{\coprod(\mathbf{A}_j \mid j \in J)}$*, siendo* $\mathrm{in}_{J,J}$ *el único endomorfismo* $[\mathrm{in}_j \mid j \in J]^{\flat}$ *de la* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\coprod(\mathbf{A}_j \mid j \in J)$ *tal que, para cada* $j \in J$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_j \arrow[r, "\mathrm{in}_j"] \arrow[dr, "\mathrm{in}_j"'] & \coprod(\mathbf{A}_j \mid j \in J) \arrow[d, "\mathrm{in}_{J,J}"] \\ & \coprod(\mathbf{A}_j \mid j \in J) \end{tikzcd}$$

conmuta.

2. $\mathrm{in}_{L,J} = \mathrm{in}_{K,J} \circ \mathrm{in}_{L,K}$, *i.e., el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \coprod(\mathbf{A}_l \mid l \in L) \arrow[r, "\mathrm{in}_{L,K}"] \arrow[dr, "\mathrm{in}_{L,J}"'] & \coprod(\mathbf{A}_k \mid k \in K) \arrow[d, "\mathrm{in}_{K,J}"] \\ & \coprod(\mathbf{A}_j \mid j \in J) \end{tikzcd}$$

conmuta; siendo, para $J, K \subseteq I$, con $K \subseteq J$, $\mathrm{in}_{K,J}$ el único homomorfismode la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\coprod(\mathbf{A}_k \mid k \in K)$ en la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\coprod(\mathbf{A}_j \mid j \in J)$ tal que, para cada $k \in K$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_k \arrow[r, "\mathrm{in}_k"] \arrow[dr, "\mathrm{in}_k"'] & \coprod(\mathbf{A}_k \mid k \in K) \arrow[d, "\mathrm{in}_{K,J}"] \\ & \coprod(\mathbf{A}_j \mid j \in J) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposition 4.6. *Sean $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ y $(\mathbf{B}_i \mid i \in I)$ dos familias de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras y $(f_i \mid i \in I)$ una familia de homomorfismos en la que, para cada $i \in I$, $f_i \colon \mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{B}_i$. Entonces hay un único homomorfismo, denotado por $\coprod(f_i \mid i \in I)$ y denominado el* coproducto *de $(f_i \mid i \in I)$, de la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ en la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\coprod(\mathbf{B}_i \mid i \in I)$ tal que, para cada $i \in I$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_i \arrow[r, "\mathrm{in}_i"] \arrow[d, "f_i"'] & \coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \arrow[d, "\coprod(f_i \mid i \in I)"] \\ \mathbf{B}_i \arrow[r, "\mathrm{in}_i"'] & \coprod(\mathbf{B}_i \mid i \in I) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposition 4.7. *Sean $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$, $(\mathbf{B}_i \mid i \in I)$ y $(\mathbf{C}_i \mid i \in I)$ tres familias de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras y $(f_i \mid i \in I)$ y $(g_i \mid i \in I)$ dos familias de homomorfismos tales que, para cada $i \in I$, $f_i \colon \mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{B}_i$ y $g_i \colon \mathbf{B}_i \longrightarrow \mathbf{C}_i$. Entonces:*

1. $\coprod(\mathrm{id}_{\mathbf{A}_i} \mid i \in I) = \mathrm{id}_{\coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)}$.
2. $\coprod(g_i \mid i \in I) \circ \coprod(f_i \mid i \in I) = \coprod(g_i \circ f_i \mid i \in I)$.

Demostración. □

Proposition 4.8. *Sean $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$, $(\mathbf{B}_j \mid j \in J)$ y $(\mathbf{C}_k \mid k \in K)$ tres familias de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras y $(f_j \mid j \in J)$ y $(g_k \mid k \in K)$ dos familias de homomorfismos tales que, para cada $j \in J$, $f_j \colon \mathbf{B}_j \longrightarrow \coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ y, para cada $k \in K$, $g_k \colon \mathbf{C}_k \longrightarrow \coprod(\mathbf{B}_j \mid j \in J)$. Entonces el único homomorfismo $\left[[f_j \mid j \in J]^\flat \circ g_k \mid k \in K\right]^\flat$ de la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\coprod(\mathbf{C}_k \mid k \in K)$ en la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ tal que, para cada $k \in K$, el* *diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C}_k \arrow[r, "\mathrm{in}_k"] \arrow[dr, "{[f_j \mid j \in J]^\flat \circ g_k}"'] & \coprod(\mathbf{C}_k \mid k \in K) \arrow[d, "{\left[[f_j \mid j \in J]^\flat \circ g_k \mid k \in K\right]^\flat}"] \\
 & \coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)
\end{tikzcd}
$$

conmuta, coincide con la composición del único homomorfismo $[g_k \mid k \in K]^\flat$ *de la* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\coprod(\mathbf{C}_k \mid k \in K)$ *en la* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\coprod(\mathbf{B}_j \mid j \in J)$ *y del único homomorfismo* $[f_j \mid j \in J]^\flat$ *de la* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\coprod(\mathbf{B}_j \mid j \in J)$ *en la* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *tales que, resp., para cada* $k \in K$ *y cada* $j \in J$*, los dos triángulos del diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C}_k \arrow[r, "\mathrm{in}_k"] \arrow[dr, "g_k"'] & \coprod(\mathbf{C}_k \mid k \in K) \arrow[d, "{[g_k \mid k \in K]^\flat}"] \\
\mathbf{B}_j \arrow[r, "\mathrm{in}_j"] \arrow[dr, "f_j"'] & \coprod(\mathbf{B}_j \mid j \in J) \arrow[d, "{[f_j \mid j \in J]^\flat}"] \\
 & \coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)
\end{tikzcd}
$$

conmutan. Así pués, se cumple que:

$$[f_j \mid j \in J]^\flat \circ [g_k \mid k \in K]^\flat = \left[[f_j \mid j \in J]^\flat \circ g_k \mid k \in K\right]^\flat$$

Demostración. □

Proposition 4.9. *Sean* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *y* $(\mathbf{B}_i \mid i \in I)$ *dos familias de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras y* $(f_i \mid i \in I)$ *una familia de homomorfismos en la que, para cada* $i \in I$*,* $f_i\colon \mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{B}_i$*. Entonces:*

1. *Si para cada* $i \in I$*,* f_i *es una retracción, entonces* $\coprod(f_i \mid i \in I)$ *es una retracción.*
2. *Si para cada* $i \in I$*,* f_i *es una sección, entonces* $\coprod(f_i \mid i \in I)$ *es una sección.*
3. *Si para cada* $i \in I$*,* f_i *es un isomorfismo, entonces* $\coprod(f_i \mid i \in I)$ *es un isomorfismo.*
4. *Si para cada* $i \in I$*,* f_i *es un monomorfismo, entonces* $\coprod(f_i \mid i \in I)$ *es un monomorfismo.*
5. *Si para cada* $i \in I$*,* f_i *es coconstante, entonces* $\coprod(f_i \mid i \in I)$ *es coconstante.*

Demostración. □

Proposition 4.10 (Asociatividad del coproducto)**.** *Sea* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *una familia de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras y* $(J_l \mid l \in L)$ *una familia de subconjuntos de* I *tal que* $\bigcup(J_l \mid l \in L) = I$ *y, para cada* $l, m \in L$*, si* $l \neq m$*, entonces* $J_l \cap J_m = \varnothing$*. Entonces*

$$\coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \cong \coprod\left(\coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in J_l) \mid l \in L\right).$$

Demostración. □

Proposition 4.11. *Sea* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *una familia de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras y* B *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra. Entonces*

$$
\begin{aligned}
(\textstyle\coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)) \times \mathbf{B} &\cong \textstyle\coprod(\mathbf{A}_i \times \mathbf{B} \mid i \in I) \quad y \\
\mathbf{B} \times (\textstyle\coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)) &\cong \textstyle\coprod(\mathbf{B} \times \mathbf{A}_i \mid i \in I)
\end{aligned}
$$

Demostración. □

4.2. Coigualadores.

Proposition 4.12. *Sean $f, g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ dos homomorfismos. Entonces existe un par ordenado $(\mathbf{Ceq}(f,g), ceq(f,g))$, el* coigualador *de f y g, en el que $\mathbf{Ceq}(f,g)$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $ceq(f,g)$ un homomorfismo de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{Ceq}(f,g)$, que tiene las siguientes propiedades:*

1. *$ceq(f,g) \circ f = ceq(f,g) \circ g$.*
2. (Propiedad universal del coigualador) *Para cada $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{Y}$ y cada homomorfismo $h\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{Y}$, si $h \circ f = h \circ g$, entonces hay un único homomorfismo $t\colon \mathbf{Ceq}(f,g) \longrightarrow \mathbf{Y}$ tal que $t \circ ceq(f,g) = h$.*

La situación descrita por las condiciones anteriores la expresamos diagramáticamente como:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathbf{B} \arrow[r, "ceq(f,g)"] \arrow[dr, "h"'] & \mathbf{Ceq}(f,g) \arrow[d, "t"] \\
& & \mathbf{Y}
\end{tikzcd}
$$

Demostración. Sea $\mathbf{Ceq}(f,g)$ la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra cociente de $\mathbf{B}$ entre la congruencia $\mathrm{C}_{f,g}$, generada por la relación

$$\mathrm{R}_{f,g} = \{\, (f(a), g(a)) \mid a \in A \,\},$$

en B, y $\mathrm{ceq}(f,g)$ la proyección canónica de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{Ceq}(f,g)$. Es evidente que $\mathrm{ceq}(f,g) \circ f = \mathrm{eq}(f,g) \circ g$.

Además, si $\mathbf{Y}$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $h\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{Y}$ un homomorfismo tal que $h \circ f = h \circ g$, entonces $\mathrm{C}_{f,g} \subseteq \mathrm{Ker}(h)$, porque $\mathrm{R}_{f,g} \subseteq \mathrm{Ker}(h)$, $\mathrm{Ker}(h)$ es una congruencia sobre $\mathbf{B}$ y $\mathrm{C}_{f,g}$ es la mínima congruencia sobre $\mathbf{B}$ que contiene a $\mathrm{R}_{f,g}$, luego, por la propiedad universal del cociente, hay un único homomorfismo $t\colon \mathbf{Ceq}(f,g) \longrightarrow \mathbf{Y}$ tal que $t \circ \mathrm{ceq}(f,g) = h$. □

Cuando digamos que un diagrama de la forma:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathbf{B} \arrow[r, "c"] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}
$$

es un *coigualador*, ello significará que la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{C}$ junto con el homomorfismo c es un coigualador de f y g.

En la proposición anterior hemos demostrado, para un par de homomorfismos, ambos con el mismo dominio y codominio, la existencia de al menos un par ordenado, formado por unaq $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y un homomorfismo desde el codominio de los homomorfismos dados hasta la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra, sujeto a cumplir un par de condiciones; pero no hemos afirmado que tal par sea absolutamente único. Demostramos a continuación que el par ordenado de la proposición anterior, es único, sólo, salvo isomorfismo.

Proposition 4.13. *Sean $f, g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ dos homomorfismos. Si un par ordenado $(\mathbf{C}, c)$, en el que $\mathbf{C}$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $c\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$, tiene las propiedades:*

1. *$c \circ f = c \circ g$.*
2. *Para cualquier $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{Y}$ y cada homomorfismo $h\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{Y}$, si $h \circ f = h \circ g$, entonces hay un único homomorfismo $u\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Y}$ tal que $u \circ c = h$.*

Entonces hay un único isomorfismo $t\colon \mathbf{Ceq}(f,g) \longrightarrow \mathbf{C}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B} \arrow[r, "ceq(f{,}g)"] \arrow[dr, "c"'] & \mathbf{Ceq}(f,g) \arrow[d, "t"] \\ & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposition 4.14. *Si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "u"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "v"] \\ \mathbf{A}' \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, shift right, "g'"'] & \mathbf{B}' \end{tikzcd}$$

conmuta serialmente, i.e., si $v \circ f = f' \circ u$ *y* $v \circ g = g' \circ u$*, entonces hay un único homomorfismo* $\mathrm{Ceq}(u,v)\colon \mathbf{Ceq}(f,g) \longrightarrow \mathbf{Ceq}(f',g')$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B} \arrow[r, "ceq(f{,}g)"] \arrow[d, "v"'] & \mathbf{Ceq}(f,g) \arrow[d, "\mathrm{Ceq}(u{,}v)"] \\ \mathbf{B}' \arrow[r, "ceq(f'{,}g')"'] & \mathbf{Ceq}(f',g') \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposition 4.15. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra. Entonces hay dos conjuntos* X, R*, dos homomorfismos* $f,g\colon \mathbf{T_\Sigma}(R) \longrightarrow \mathbf{T_\Sigma}(X)$ *y un homomorfismo* $h\colon \mathbf{T_\Sigma}(X) \longrightarrow \mathbf{A}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{T_\Sigma}(R) \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathbf{T_\Sigma}(X) \arrow[r, "h"] & \mathbf{A} \end{tikzcd}$$

es un coigualador de f *y* g.

Demostración. Sea X un conjunto de generadores de la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$. Entonces $\mathbf{A}$ es la imagen homomorfa, mediante $\mathrm{in}_X^\sharp$, de la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre sobre X, luego isomorfa al cociente $\mathbf{T_\Sigma}(X)/\mathrm{Ker}(\mathrm{in}_X^\sharp)$. Ahora bien, ya que $\mathrm{Ker}(\mathrm{in}_X^\sharp)$ es una congruencia, es, en particular, un cerrado de $\mathbf{T_\Sigma}(X)^2$, luego, siendo R un conjunto de generadores de la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{Ker}(\mathrm{in}_X^\sharp)$, ésta será la imagen homomorfa, mediante $\mathrm{in}_R^\sharp$, de la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre sobre R. Entonces es suficiente tomar como f la composición de $\mathrm{in}_R^\sharp$ y de la proyección p_0 de $\mathbf{Ker}(\mathrm{in}_X^\sharp)$ en $\mathbf{T_\Sigma}(X)$, como g la composición de $\mathrm{in}_R^\sharp$ y de la proyección p_1 de $\mathbf{Ker}(\mathrm{in}_X^\sharp)$ en $\mathbf{T_\Sigma}(X)$ y como h, $\mathrm{in}_X^\sharp$. □

Demuéstrese que:

1. Para el diagrama, serialmente, conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbf{A}}"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbf{B}}"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

se cumple que

$$\mathrm{Ceq}(\mathrm{id}_{\mathbf{A}}, \mathrm{id}_{\mathbf{B}}) = \mathrm{id}_{\mathbf{Ceq}(f,g)}.$$

2. Si los diagramas:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "u"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "v"] \\ \mathbf{A}' \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, shift right, "g'"'] & \mathbf{B}' \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} \mathbf{A}' \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, shift right, "g'"'] \arrow[d, "u'"'] & \mathbf{B}' \arrow[d, "v'"] \\ \mathbf{A}'' \arrow[r, shift left, "f''"] \arrow[r, shift right, "g''"'] & \mathbf{B}'' \end{tikzcd}$$

son, serialmente, conmutativos, entonces se cumple que

$$\mathrm{Ceq}(u', v') \circ \mathrm{Ceq}(u, v) = \mathrm{Ceq}(u' \circ u, v' \circ v).$$

4.3. Sumas amalgamadas. Ahora que disponemos de los conceptos de coproducto y de coigualador, demostramos, apoyándonos en ellos, la existencia de un nuevo tipo de límite inductivo, el de *suma amalgamada* de dos homomorfismos con el mismo dominio.

Proposition 4.16. *Sean* $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{A}$ *y* $g\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{B}$ *dos homomorfismos con el mismo dominio. Entonces existe un par ordenado* $(\mathbf{A} \amalg_{\mathbf{C}} \mathbf{B}, (i_{\mathbf{A}}, i_{\mathbf{B}}))$*, la* suma amalgamada de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ bajo $\mathbf{C}$ relativa a f y g, *en el que* $\mathbf{A} \amalg_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$ *es una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* $i_{\mathbf{A}}$ *un homomorfismo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{A} \amalg_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$ *e* $i_{\mathbf{B}}$ *un homomorfismo de* $\mathbf{B}$ *en* $\mathbf{A} \amalg_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$*, que tiene las siguientes propiedades:*

1. *El diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "i_{\mathbf{B}}"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, "i_{\mathbf{A}}"'] & \mathbf{A} \amalg_{\mathbf{C}} \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

conmuta.

2. (Propiedad universal de la suma amalgamada) *Para cada* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{Y}$ *y cualesquiera homomorfismos* u *de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{Y}$ *y* v *de* $\mathbf{B}$ *en* $\mathbf{Y}$ *si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "v"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, "u"'] & \mathbf{Y} \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay un único homomorfismo $t\colon \mathbf{A}\amalg_{\mathbf{C}}\mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{Y}$ *tal que los dos triángulos del diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{B} \arrow[d, "i_{\mathbf{B}}"] \arrow[ddr, bend left, "v"] & \\
\mathbf{A} \arrow[r, "i_{\mathbf{A}}"'] \arrow[drr, bend right, "u"'] & \mathbf{A}\amalg_{\mathbf{C}}\mathbf{B} \arrow[dr, "t"] & \\
 & & \mathbf{Y}
\end{tikzcd}
$$

conmutan.

La situación descrita por las condiciones anteriores la expresamos diagramáticamente como:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "i_{\mathbf{B}}"] \arrow[ddr, bend left, "v"] & \\
\mathbf{A} \arrow[r, "i_{\mathbf{A}}"'] \arrow[drr, bend right, "u"'] & \mathbf{A}\amalg_{\mathbf{C}}\mathbf{B} \arrow[dr, "t"] & \\
 & & \mathbf{Y}
\end{tikzcd}
$$

Demostración. Sea $\mathbf{A}\amalg_{\mathbf{C}}\mathbf{B}$ el coigualador de $\mathrm{in}_{\mathbf{A}}\circ f, \mathrm{in}_{\mathbf{B}}\circ g\colon \mathbf{C}\longrightarrow \mathbf{A}\coprod\mathbf{B}$, $i_{\mathbf{A}}$ la composición de la inclusión canónica de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}\coprod\mathbf{B}$ y de la proyección canónica de $\mathbf{A}\coprod\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}\amalg_{\mathbf{C}}\mathbf{B}$ e $i_{\mathbf{B}}$ la composición de la inclusión canónica de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}\coprod\mathbf{B}$ y de la proyección canónica de $\mathbf{A}\coprod\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}\amalg_{\mathbf{C}}\mathbf{B}$. Es evidente que entonces el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "i_{\mathbf{B}}"] \\
\mathbf{A} \arrow[r, "i_{\mathbf{A}}"'] & \mathbf{A}\amalg_{\mathbf{C}}\mathbf{B}
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Además, si $\mathbf{Y}$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $u\colon \mathbf{A}\longrightarrow\mathbf{Y}$, $v\colon \mathbf{B}\longrightarrow\mathbf{Y}$ dos homomorfismos tales que el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "v"] \\
\mathbf{A} \arrow[r, "u"'] & \mathbf{Y}
\end{tikzcd}
$$

conmuta, entonces, por la propiedad universal del coproducto, hay un único homomorfismo $[u,v]^{\flat}\colon \mathbf{A}\coprod\mathbf{B}\longrightarrow\mathbf{Y}$ tal que $[u,v]^{\flat}\circ\mathrm{in}_{\mathbf{A}} = u$ y $[u,v]^{\flat}\circ\mathrm{in}_{\mathbf{B}} = v$ y, por cumplirse que $u\circ f = v\circ g$, tenemos que $\mathrm{Ker}([u,v]^{\flat})$ contiene a la congruencia $\mathrm{C}_{\mathrm{in}_{\mathbf{A}}\circ f, \mathrm{in}_{\mathbf{B}}\circ g}$ en $\mathbf{A}\coprod\mathbf{B}$, luego, por la propiedad universal de la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra cociente, hay un único homomorfismo t de $\mathbf{A} \amalg_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$ en $\mathbf{X}$ tal que $t \circ \mathrm{pr}_{\mathrm{C}_{\mathrm{in}_{\mathbf{A}} \circ f, \mathrm{in}_{\mathbf{B}} \circ g}} = [u, v]^{\flat}$. Para el homomorfismo t se cumple que los dos triángulos del diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{B} \arrow[d, "i_{\mathbf{B}}"] \arrow[ddr, bend left, "v"] & \\
\mathbf{A} \arrow[r, "i_{\mathbf{A}}"'] \arrow[drr, bend right, "u"'] & \mathbf{A} \amalg_{\mathbf{C}} \mathbf{B} \arrow[dr, "t"] & \\
 & & \mathbf{Y}
\end{tikzcd}
$$

conmutan. Dejamos, como ejercicio, la demostración de que t es el único homomorfismo de $\mathbf{A} \amalg_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$ en $\mathbf{X}$ con las propiedades indicadas. $\square$

Cuando digamos de un diagrama de la forma:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "v"] \\
\mathbf{A} \arrow[r, "u"'] & \mathbf{Y}
\end{tikzcd}
$$

que es un *cuadrado cocartesiano*, ello significará que la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{Y}$ es una suma amalgamada de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ bajo $\mathbf{C}$ relativa a f y g, y que u y v son las aplicaciones estructurales.

En la proposición anterior hemos demostrado, para un par de homomorfismos, ambos con el mismo dominio, la existencia de al menos un par ordenado, formado por una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y dos homomorfismos desde los codominios de los homomorfismos dadas hasta la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra, sujeto a cumplir un par de condiciones; pero no hemos afirmado que tal par sea absolutamente único. Demostramos a continuación que el par ordenado de la proposición anterior, es único, sólo, salvo isomorfismo.

Proposition 4.17. *Sean* $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{A}$ *y* $g\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{B}$ *dos homomorfismos con el mismo dominio. Si un par ordenado* $(\mathbf{E}, (p, q))$*, en el que* $\mathbf{E}$ *es ua* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra,* $p\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{E}$ *y* $q\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{E}$ *tiene las propiedades:*

1. *El diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "q"] \\
\mathbf{A} \arrow[r, "p"'] & \mathbf{E}
\end{tikzcd}
$$

   conmuta.

2. *Para cada* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{Y}$ *y cualesquiera homomorfismos* $u\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{Y}$ *y* $v\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{Y}$ *si el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "v"] \\
\mathbf{A} \arrow[r, "u"'] & \mathbf{Y}
\end{tikzcd}
$$

conmuta, entonces hay un único homomorfismo $t\colon \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{Y}$ *tal que los dos triángulos del diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{B} \arrow[d, "i_{\mathbf{B}}"] \arrow[ddr, bend left, "v"] & \\
\mathbf{A} \arrow[r, "i_{\mathbf{A}}"'] \arrow[drr, bend right, "u"'] & \mathbf{E} \arrow[dr, "t"] & \\
& & \mathbf{Y}
\end{tikzcd}$$

conmutan,

entonces hay un único isomorfismo $t\colon \mathbf{A} \amalg_{\mathbf{C}} \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{E}$ *tal que los dos triángulos del diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{B} \arrow[d, "i_{\mathbf{B}}"] \arrow[ddr, bend left, "q"] & \\
\mathbf{A} \arrow[r, "i_{\mathbf{A}}"'] \arrow[drr, bend right, "p"'] & \mathbf{A} \amalg_{\mathbf{C}} \mathbf{B} \arrow[dr, "t"] & \\
& & \mathbf{E}
\end{tikzcd}$$

conmutan.

Demostración. □

Proposition 4.18. *Si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{C} \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd, "w"] & \mathbf{B} \arrow[dd, "v"] \\
\mathbf{A} \arrow[dd, "u"'] & & \\
& \mathbf{C}' \arrow[r, "g'"] \arrow[dl, "f'"'] & \mathbf{B}' \\
\mathbf{A}' & &
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay un único homomorfismo $u \amalg_w v \colon \mathbf{A} \amalg_{\mathbf{C}} \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}' \amalg_{\mathbf{C}'} \mathbf{B}'$ *tal que el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{C} \arrow[rr, "g"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd, "w"] & & \mathbf{B} \arrow[dl, "i_{\mathbf{B}}"] \arrow[dd, "v"] \\
\mathbf{A} \arrow[rr, "i_{\mathbf{A}}"'] \arrow[dd, "u"'] & & \mathbf{A} \amalg_{\mathbf{C}} \mathbf{B} \arrow[dd, "u \amalg_w v"] & \\
 & \mathbf{C}' \arrow[rr, "g'"] \arrow[dl, "f'"'] & & \mathbf{B}' \arrow[dl, "i_{\mathbf{B}'}"] \\
\mathbf{A}' \arrow[rr, "i_{\mathbf{A}'}"'] & & \mathbf{A}' \amalg_{\mathbf{C}'} \mathbf{B}' &
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Demostración. □

Demuéstrese que:

1. Para el diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{C} \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}_{\mathbf{C}}"] & \mathbf{B} \arrow[dd, "\mathrm{id}_{\mathbf{B}}"] \\
\mathbf{A} \arrow[dd, "\mathrm{id}_{\mathbf{A}}"'] & & \\
 & \mathbf{C} \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "f"'] & \mathbf{B} \\
\mathbf{A} & &
\end{tikzcd}
$$

   se cumple que

$$\mathrm{id}_{\mathbf{A}} \amalg_{\mathrm{id}_{\mathbf{C}}} \mathrm{id}_{\mathbf{B}} = \mathrm{id}_{\mathbf{A} \amalg_{\mathbf{C}} \mathbf{B}}.$$

2. Si los diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{C} \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd, "w"] & \mathbf{B} \arrow[dd, "v"] \\
\mathbf{A} \arrow[dd, "u"'] & & \\
 & \mathbf{C}' \arrow[r, "g'"] \arrow[dl, "f'"'] & \mathbf{B}' \\
\mathbf{A}' & &
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{C}' \arrow[r, "g'"] \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dd, "w'"] & \mathbf{B}' \arrow[dd, "v'"] \\
\mathbf{A}' \arrow[dd, "u'"'] & & \\
 & \mathbf{C}'' \arrow[r, "g''"] \arrow[dl, "f''"'] & \mathbf{B}'' \\
\mathbf{A}'' & &
\end{tikzcd}
$$

   conmutan, entonces se cumple que

$$(u' \amalg_{w'} v') \circ (u \amalg_w v) = (u' \circ u) \amalg_{w' \circ w} (v' \circ v).$$

Definition 4.19. Un homomorfismo $f \colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es un *epimorfismo regular* si existen dos homomorfismos $u, v \colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{A}$ tales que el par ordenado $(\mathbf{B}, f)$ es un coigualador de u y v.

Proposition 4.20. *Una condición necesaria y suficiente para que un homomorfismo* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *sea un epimorfismo es que sea sobreyectivo.*

4.4. Sistemas inductivos de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras. A continuación consideramos los conceptos de sistema inductivo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras y morfismo inductivo entre sistemas inductivos de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras, nociones debidas, en casos particulares, a Pontrjagin y que son de gran importancia para la topología algebraica y el álgebra homológica.

Definition 4.21. Un *sistema inductivo de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras* es un par ordenado $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ en el que $\mathbf{S}$ es un conjunto preordenado y $\boldsymbol{\mathcal{A}} = ((\mathbf{A}_s \mid s \in S), (a_{s,s'} \mid (s,s') \in \preceq))$ tal que:

1. Para cada $s \in S$, $\mathbf{A}_s$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra.
2. Para cada $(s,s') \in \preceq$, $a_{s,s'}\colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \mathbf{A}_{s'}$ es un homomorfismo.
3. Para cada $s \in S$, $a_{s,s} = \mathrm{id}_{\mathbf{A}_s}$.
4. Para cada $s, s', s'' \in S$, si $(s,s') \in \preceq$ y $(s', s'') \in \preceq$, entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_s \arrow[r, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "a_{s,s''}"'] & \mathbf{A}_{s'} \arrow[d, "a_{s',s''}"] \\
& \mathbf{A}_{s''},
\end{tikzcd}$$

   conmuta.

A los homomorfismos $a_{s,s'}\colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \mathbf{A}_{s'}$ los denominamos los *homomorfismos de transición* del sistema inductivo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$.

Example. Sea A un conjunto, $\mathbf{B}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $V, W \subseteq A$ tales que $W \subseteq V$. Entonces tenemos el homomorfismo

$$\mathrm{H}(\mathrm{in}_{W,V}, \mathrm{id}_{\mathbf{B}})\colon \mathrm{Hom}(V, \mathbf{B}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(W, \mathbf{B}),$$

que a un $g\colon V \longrightarrow B$ le asigna $g \upharpoonright W$.

Sea $\mathbf{S}$ un conjunto preordenado dirigido superiormente y $(V_s \mid s \in S)$ una aplicación isótona de $\mathbf{S}$ en $(\mathrm{Sub}(A), \subseteq^{-1})$; así que, para cada $(s,s') \in \preceq$, $V_{s'} \subseteq V_s$. Entonces

$$(\mathbf{S}, ((\mathrm{Hom}(V_s, \mathbf{B}) \mid s \in S), (a_{s,s'} \mid (s,s') \in \preceq))),$$

en el que, para cada $(s,s') \in \preceq$, $a_{s,s'}$ es el homomorfismo $\mathrm{H}(\mathrm{in}_{V_{s'},V_s}, \mathrm{id}_{\mathbf{B}})$ de $\mathrm{Hom}(V_s, \mathbf{B})$ en $\mathrm{Hom}(V_{s'}, \mathbf{B})$ que a un $g\colon V_s \longrightarrow B$ le asigna $g \upharpoonright V_{s'}$, es un sistema inductivo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras.

Example. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y (X, R) una presentación de $\mathbf{A}$. Entonces el par ordenado

Example. Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y X un conjunto. Entonces el par ordenado

$$(\mathbf{Sub}_f(X), ((\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(K) \mid K \in \mathrm{Sub}_f(X)), (\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\mathrm{in}_{K,L}) \mid K \subseteq L))),$$

es un sistema inductivo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras.

Example. El par ordenado $((\mathbf{Pol}_n(\mathbf{A}) \mid n \in \mathbb{N}), (\mathrm{Pol}_{\mathrm{in}_{n,n+1}}(\mathbf{A}) \mid n \in \mathbb{N}))$ es un sistema inductivo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras.

Example. El par ordenado $((\mathbf{Alg}_n(\mathbf{A}) \mid n \in \mathbb{N}), (\mathrm{Alg}_{\mathrm{in}_{n,n+1}}(\mathbf{A}) \mid n \in \mathbb{N}))$ es un sistema inductivo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras.

Example. Sean I un conjunto y $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras indexada por I. Entonces $(\mathbf{Sub}_f(I), ((\coprod(\mathbf{A}_i \mid i \in J) \mid J \in \mathrm{Sub}_f(I)), (\mathrm{in}_{K,J} \mid K \subseteq J)))$ es un sistema inductivo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras.

Example. Sean S un conjunto, $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $(X_s \mid s \in S)$ una familia de cerrados de $\mathbf{A}$ tal que, para cualesquiera $s, s' \in S$ exista un $s'' \in S$ de modo que $X_s \cup X_{s'} \subseteq X_{s''}$. Entonces, considerando sobre S el preorden $\preceq$ definido como:

$$s \preceq s' \leftrightarrow X_s \subseteq X_{s'},$$

tenemos que $(\mathbf{S}, ((\mathbf{X}_s \mid s \in S), (\mathrm{in}_{\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_{s'}} \mid s \preceq s')))$ es un sistema inductivo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras.

4.5. Límites inductivos de los sistemas inductivos.

Proposition 4.22. *Sea* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *un sistema inductivo de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras. Entonces hay un par ordenado* $(\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}), (a_s \mid s \in S))$*, el* límite inductivo *del sistema inductivo* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$*, en el que* $\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *es una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y, para cada* $s \in S$*,* a_s*, la* inclusión canónica *s-ésima, es un homomorfismo de* $\mathbf{A}_s$ *en* $\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$*, tal que:*

1. *Para cada* $(s, s') \in \preceq$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "a_s"'] & & \mathbf{A}_{s'} \arrow[dl, "a_{s'}"] \\ & \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) & \end{tikzcd}$$

conmuta.

2. *Para cada par ordenado* $(\mathbf{L}, (l_s \mid s \in S))$ *en el que, para cada* $s \in S$*,* $l_s \colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \mathbf{L}$*, si, para cada* $(s, s') \in \preceq$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "l_s"'] & & \mathbf{A}_{s'} \arrow[dl, "l_{s'}"] \\ & \mathbf{L} & \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces hay un único homomorfismo $u \colon \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow \mathbf{L}$ *tal que, para cada* $s \in S$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[r, "a_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[d, "u"] \\ & \mathbf{L} \end{tikzcd}$$

conmuta.

La situación descrita por las condiciones anteriores la expresamos diagramáticamente como:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "a_s"] \arrow[ddr, bend right, "l_s"'] & & \mathbf{A}_{s'} \arrow[dl, "a_{s'}"'] \arrow[ddl, bend left, "l_{s'}"] \\ & \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[d, "u"] & \\ & \mathbf{L} & \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) = \mathbf{Ceq}(f, g)$, el coigualador de los homomorfismos f, g de $\coprod_{(s,s')\in\leq} \mathbf{A}_s$ en $\coprod_{s\in S} \mathbf{A}_s$, siendo $f = [\mathrm{in}_s \mid (s, s') \in\leq]^\flat$ y $g = [\mathrm{in}_{s'} \circ a_{s,s'} \mid (s, s') \in\leq]^\flat$ los únicos homomorfismos de $\coprod_{(s,s')\in\leq} \mathbf{A}_s$ en $\coprod_{s\in S} \mathbf{A}_s$ tales que, para cada $(s, s') \in\leq$, el cuadrado superior, resp., el cuadrado inferior, del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_s \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbf{A}_s}"] \arrow[d, "\mathrm{in}_{s,s'}"'] & \mathbf{A}_s \arrow[d, "\mathrm{in}_s"] & \mathbf{A}_s \arrow[dl, "\mathrm{in}_s"'] \arrow[d, "a_s"] \\
\coprod_{(s,s')\in\leq} \mathbf{A}_s \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \coprod_{s\in S} \mathbf{A}_s \arrow[r, "\mathrm{ceq}(f,g)"] & \mathbf{Ceq}(f, g) \\
\mathbf{A}_s \arrow[r, "a_{s,s'}"'] \arrow[u, "\mathrm{in}_{s,s'}"] & \mathbf{A}_{s'} \arrow[u, "\mathrm{in}_{s'}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta, y, para cada $s \in S$, sea a_s la composición de in_s y de $\mathrm{pr}_{\mathrm{C}_{(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})}} = \mathrm{ceq}(f, g)$, siendo $\mathrm{C}_{(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})}$ la congruencia sobre $\coprod_{s\in S} \mathbf{A}_s$ generada por la relación binaria

$$\mathrm{R}_{(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})} = \bigcup\nolimits_{(s,s')\in\leq} \mathrm{R}_{\mathrm{in}_s,\mathrm{in}_{s'}\circ a_{s,s'}}$$

en el conjunto subyacente de la $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra $\coprod_{s\in S} \mathbf{A}_s$, donde, a su vez, $\mathrm{R}_{\mathrm{in}_s,\mathrm{in}_{s'}\circ a_{s,s'}}$ es

$$\mathrm{R}_{\mathrm{in}_s,\mathrm{in}_{s'}\circ a_{s,s'}} = \{\, (\mathrm{in}_s(x), \mathrm{in}_{s'}(a_{s,s'}(x))) \mid x \in A_s \,\}.$$

Entonces el par ordenado $(\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}), (a_s \mid s \in S))$ cumple las condiciones de la proposición. En efecto, por una parte, para cada $(s, s') \in\preceq$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
a_{s'} \circ a_{s,s'} &= \mathrm{pr}_{\mathrm{C}_{(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})}} \circ \mathrm{in}_{s'} \circ a_{s,s'} && (\text{porque } a_{s'} = \mathrm{pr}_{\mathrm{C}_{(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})}} \circ \mathrm{in}_{s'}) \\
&= \mathrm{pr}_{\mathrm{C}_{(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})}} \circ g \circ \mathrm{in}_{s,s'} \\
&= \mathrm{pr}_{\mathrm{C}_{(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})}} \circ f \circ \mathrm{in}_{s,s'} && (\text{porque } \mathrm{pr}_{\mathrm{C}_{(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})}} \text{ coiguala a } f \text{ y } g) \\
&= \mathrm{pr}_{\mathrm{C}_{(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})}} \circ \mathrm{in}_s \\
&= a_s && (\text{porque } a_s = \mathrm{pr}_{\mathrm{C}_{(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})}} \circ \mathrm{in}_s),
\end{aligned}$$

i.e., que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "a_s"'] & & \mathbf{A}_{s'} \arrow[dl, "a_{s'}"] \\
& \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Por otra parte, si un par ordenado $(\mathbf{L}, (l_s \mid s \in S))$, arbitrario, pero fijo, en el que, para cada $s \in S$, $l_s \colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \mathbf{L}$, es tal que, para cada $(s, s') \in\preceq$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "l_s"'] & & \mathbf{A}_{s'} \arrow[dl, "l_{s'}"] \\
& \mathbf{L} &
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces, en virtud de la propiedad universal del coproducto, hay un único homomorfismo $[l_s \mid s \in S]^\flat : \coprod(\mathbf{A}_s \mid s \in S) \longrightarrow \mathbf{L}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_s \arrow[r, "\mathrm{in}_{\mathbf{A}_s}"] \arrow[dr, "l_s"'] & \coprod(\mathbf{A}_s \mid s \in S) \arrow[d, "{[l_s \mid s \in S]^\flat}"] \\
& \mathbf{L}
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, para cada $(s, s') \in \leq$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
[l_s \mid s \in S]^\flat \circ f \circ \mathrm{in}_{s,s'} &= [l_s \mid s \in S]^\flat \circ \mathrm{in}_s \\
&= l_s \\
&= l_{s'} \circ a_{s,s'} \\
&= [l_s \mid s \in S]^\flat \circ \mathrm{in}_{s'} \circ a_{s,s'} \\
&= [l_s \mid s \in S]^\flat \circ g \circ \mathrm{in}_{s,s'}.
\end{aligned}$$

Luego $[l_s \mid s \in S]^\flat \circ f = [l_s \mid s \in S]^\flat \circ g$, por lo tanto, en virtud de la propiedad universal del coigualador, podemos afirmar que existe un único homomorfismo $u\colon \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow \mathbf{L}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\coprod(\mathbf{A}_s \mid s \in S) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{C}(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})}"] \arrow[dr, "{[l_s \mid s \in S]^\flat}"'] & \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[d, "u"] \\
& \mathbf{L}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Ahora bien, puesto que, para cada $s \in S$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_s \arrow[r, "\mathrm{in}_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \coprod(\mathbf{A}_s \mid s \in S) \arrow[d, "{[l_s \mid s \in S]^\flat}"] \\
& \mathbf{L}
\end{tikzcd}$$

conmuta, también, para cada $s \in S$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_s \arrow[r, "\mathrm{in}_s"] \arrow[rr, bend left, "a_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \coprod(\mathbf{A}_s \mid s \in S) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{C}(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})}"] \arrow[d, "{[l_s \mid s \in S]^\flat}"] & \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[dl, bend left, "u"] \\
& \mathbf{L} &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por consiguiente hay al menos un homomorfismo u de $\varinjlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})$ en $\mathbf{L}$ tal que, para cada $s \in S$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_s \arrow[r, "a_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \varinjlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[d, "u"] \\
 & \mathbf{L}
\end{tikzcd}$$

conmuta. Dejamos, como ejercicio, la demostración de que hay a lo sumo un homomorfismo u de $\varinjlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})$ en $\mathbf{L}$ tal que, para cada $s \in S$, $u \circ a_s = l_s$.

□

En la proposición anterior se ha demostrado, para un sistema inductivo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras, la existencia de al menos un par ordenado, formado por una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y una familia de homomorfismos desde cada uno de las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras de la familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras subyacente a la segunda coordenada del sistema inductivo, hasta la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra, sujeto a cumplir, por una parte, una condición de compatibilidad respecto de los homomorfismos subyacentes a la segunda coordenada del sistema inductivo, y, por otra, una cierta propiedad universal; pero, ni hemos afirmado que tal par sea absolutamente único, ni que las inclusiones canónicas sean necesariamente inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

Demostraremos en lo que sigue, entre otras cosas, que:

- El par ordenado de la proposición anterior, es único salvo isomorfismo.
- Una condición suficiente para que una inclusión canónica sea inyectiva, sobreyectiva o biyectiva, es que los homomorfismos de transición sean inyectivos, sobreyectivos o biyectivos.

Proposition 4.23. *Sea* $(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})$ *un sistema inductivo de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras. Entonces:*

1. *Para cada* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{Y}$ *y cualesquiera homomorfismos* $f, g\colon \varinjlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow \mathbf{Y}$*, si, para cada* $s \in S$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[r, "a_s"] \arrow[rr, bend left, "f \circ a_s"] \arrow[rr, bend right, "g \circ a_s"'] & \mathbf{A}_s \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathbf{Y}
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $f = g$*, i.e., la familia* $(a_s \mid s \in S)$ *es* colectivamente epimórfica.

2. *Para cada par ordenado* $(\mathbf{L}, (l_s \mid s \in S))$*, en el que* $\mathbf{L}$ *sea una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y, para cada* $s \in S$*,* $l_s\colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \mathbf{L}$ *un homomorfismo, si para cada* $(s, s') \in \preceq$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "l_s"'] & & \mathbf{A}_{s'} \arrow[dl, "l_{s'}"] \\
 & \mathbf{L} &
\end{tikzcd}$$

conmuta, y para cada monomorfismo $t\colon \mathbf{L} \rightarrowtail \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$*, si, para cada* $s \in S$*, el digrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[rr, "a_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & & \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \\ & \mathbf{L} \arrow[ur, tail, "t"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces t *es un isomorfismo, i.e., la familia* $(a_s \mid s \in S)$ *es* extremal.

Demostración. □

Corollary 4.24. *Sea* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *un sistema inductivo de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras. Si un par ordenado* $(\mathbf{Q}, (q_s \mid s \in S))$*, en el que* $\mathbf{Q}$ *es una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y, para cada* $s \in S$*,* $q_s\colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \mathbf{Q}$ *un homomorfismo, cumple que:*

1. *Para cada* $(s, s') \in \preceq$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "q_s"'] & & \mathbf{A}_{s'} \arrow[dl, "q_{s'}"] \\ & \mathbf{Q} & \end{tikzcd}$$

   conmuta.

2. *Para cada par ordenado* $(\mathbf{L}, (l_s \mid s \in S))$*, en el que* $\mathbf{L}$ *es una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y, para cada* $s \in S$*,* $l_s\colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \mathbf{L}$ *un homomorfismo, si, para cada* $(s, s') \in \preceq$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "l_s"'] & & \mathbf{A}_{s'} \arrow[dl, "l_{s'}"] \\ & \mathbf{L} & \end{tikzcd}$$

   conmuta, entonces hay un único homomorfismo $u\colon \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{L}$ *tal que, para cada* $s \in S$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[r, "q_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \mathbf{Q} \arrow[d, "u"] \\ & \mathbf{L} \end{tikzcd}$$

   conmuta.

Entonces hay un único isomorfismo t *de* $\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *en* $\mathbf{Q}$ *tal que, para cada* $s \in S$*, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[r, "a_s"] \arrow[dr, "q_s"'] & \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[d, "u"] \\ & \mathbf{Q} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Si un sistema inductivo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ es tal que el conjunto preordenado $\mathbf{S}$ está dirigido superiormente, entonces la construcción de $\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ se simplifica, porque en lugar de considerar la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\coprod(\mathbf{A}_s \mid s \in S)/\mathrm{C}_{(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})}$, es suficiente que consideremos la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra, también denotada por $\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$, cuyo conjunto subyacente es el cociente $\coprod(A_s \mid s \in S)/\mathrm{R}_{(\mathbf{S},\mathcal{A})}$, del coproducto de la familia de conjuntos $(A_s \mid s \in S)$, entre $\mathrm{R}_{(\mathbf{S},\mathcal{A})}$, que es la mínima relación de equivalencia sobre $\coprod(A_s \mid s \in S)$ que contiene a todos los pares ordenados de $\coprod(A_s \mid s \in S)$ de la forma $((x, s), (a_{s,s'}(x), s'))$, con $x \in A_s$ y $(s, s') \in \preceq$, i.e., por definición:

$$\mathrm{R}_{(\mathbf{S},\mathcal{A})} = \mathrm{Eg}_{\coprod_{s\in S} A_s}\big(\textstyle\bigcup_{(s,s')\in\preceq}\{\, ((x, s), (a_{s,s'}(x), s')) \in \big(\coprod_{s\in S} A_s\big)^2 \mid x \in A_s \,\}\big)$$

y cuya estructura de $\mathbf{\Sigma}$-álgebra viene dada asociando a cada $\sigma \in \Sigma$, con $\mathrm{ar}(\sigma) = n$, la operación n-aria F_σ de $(\coprod(A_s \mid s \in S)/\mathrm{R}_{(\mathbf{S},\mathcal{A})})^n$ en $\coprod(A_s \mid s \in S)/\mathrm{R}_{(\mathbf{S},\mathcal{A})}$ que a un $([(x_\alpha, s_\alpha)] \mid \alpha \in n)$ del primero le asigna $[F^t_\sigma(a_{s_\alpha,t}(x_\alpha) \mid \alpha \in n), t)]$, siendo t una cota superior de $(s_\alpha \mid \alpha \in n)$ en $\mathbf{S}$ y F^t_σ la operación estructural de $\mathbf{A}_t$ correspondiente a σ.

Demuéstrese que una condición necesaria y suficiente para que $((x, s), (y, t)) \in \mathrm{R}_{(\mathbf{S},\mathcal{A})}$ es que exista un $u \in S$ tal que $s, t \leq u$ y $a_{s,u}(x) = a_{t,u}(y)$.

Proposition 4.25. *Sea* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *un sistema inductivo de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras tal que* $\mathbf{S}$ *esté dirigido superiormente. Entonces el par ordenado* $(\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}), (a_s \mid s \in S))$ *en el que* $\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *es la* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $(\coprod(A_s \mid s \in S)/\mathrm{R}_{(\mathbf{S},\mathcal{A})}, (F_\sigma \mid \sigma \in \Sigma))$ *y, para cada* $s \in S$, a_s *la composición de* in_s *y de* $\mathrm{pr}_{R_{(\mathbf{S},\mathcal{A})}}$ *(de manera que, para cada* $s \in S$, a_s *asigna a un* $x \in A_s$ *la clase de equivalencia* $[(x, s)]$*), es un* límite inductivo *del sistema inductivo* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$

Demostración. Las operaciones F_σ están bien definidas. En efecto, si $u \in S$ fuera tal que, para cada $i \in n$, $s_\alpha \leq u$, entonces

$$[F^t_\sigma(a_{s_\alpha,t}(x_\alpha) \mid \alpha \in n), t)] = [F^u_\sigma(a_{s_\alpha,u}(x_\alpha) \mid \alpha \in n), u)],$$

porque, por estar el conjunto preordenado $\mathbf{S}$ dirigido superiormente, existiría un $v \in S$ tal que $t, u \leq v$, luego, por ser $a_{t,v}$ y $a_{u,v}$ homomorfismos se cumpliría que

$$a_{t,v}(F^t_\sigma(a_{s_\alpha,t}(x_\alpha) \mid \alpha \in n)) = a_{u,v}(F^u_\sigma(a_{s_\alpha,u}(x_\alpha) \mid \alpha \in n)).$$

Además, para cada $s \in S$, $a_s = \mathrm{pr}_{R_{(\mathbf{S},\mathcal{A})}} \circ \mathrm{in}_s$ es un homomorfismo de $\mathbf{A}_s$ en $\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$. En efecto, dado un $s \in S$, un $\sigma \in Sigma$, con $\mathrm{ar} = n$ y una familia $(x_\alpha \mid \alpha \in n)$ en A_s, se cumple que

$$\begin{aligned} a_s(F^s_\sigma(x_\alpha \mid \alpha \in n)) &= [(F^s_\sigma(x_\alpha \mid \alpha \in n), s)] \\ &= F_\sigma([(x_\alpha, s)] \mid \alpha \in n). \end{aligned}$$

Por último, el par ordenado $(\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}), (a_s \mid s \in S))$ cumple las condiciones de la proposición. En efecto, por una parte, para cada $(s, s') \in\preceq$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "a_s"'] & & \mathbf{A}_{s'} \arrow[dl, "a_{s'}"] \\ & \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) & \end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., para cada $x \in A_s$, se cumple que $[(x, s)] = [(a_{s,s'}(x), s')]$, por definición de $R_{(\mathbf{S},\mathcal{A})}$

Por otra parte, si un par ordenado $(\mathbf{L}, (l_s \mid s \in S))$, arbitrario, pero fijo, en el que, para cada $s \in S$, $l_s\colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \mathbf{L}$ es un homomorfismo, es tal que, para cada

$(s, s') \in \preceq$, el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "l_s"'] & & \mathbf{A}_{s'} \arrow[dl, "l_{s'}"] \\
& \mathbf{L} &
\end{tikzcd}
$$

conmuta, entonces, en virtud de la propiedad universal del coproducto de familias de conjuntos, hay una única aplicación $[l_s \mid s \in S] : \coprod(A_s \mid s \in S) \longrightarrow L$ tal que el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
A_s \arrow[r, "\mathrm{in}_{A_s}"] \arrow[dr, "l_s"'] & \coprod(A_s \mid s \in S) \arrow[d, "{[l_s \mid s \in S]}"] \\
& L
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Además, $R_{(\mathbf{S},\mathcal{A})} \subseteq \mathrm{Ker}([l_s \mid s \in S])$, porque $R_{(\mathbf{S},\mathcal{A})}$ es la mínima congruencia sobre $\coprod(A_s \mid s \in S)$ que contiene a $\bigcup_{(s,s') \in \preceq} \{ ((x, s), (a_{s,s'}(x), s')) \in \left(\coprod_{s \in S} A_s\right)^2 \mid x \in A_s \}$ y porque $\mathrm{Ker}([l_s \mid s \in S])$ es una relación de equivalencia sobre $\coprod(A_s \mid s \in S)$ que contiene a $\bigcup_{(s,s') \in \preceq} \{ ((x, s), (a_{s,s'}(x), s')) \in \left(\coprod_{s \in S} A_s\right)^2 \mid x \in A_s \}$. Entonces, en virtud de la propiedad universal del conjunto cociente, podemos afirmar que existe una única aplicación $u \colon \varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A}) \longrightarrow L$ tal que el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\coprod(A_s \mid s \in S) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\Phi_{(\mathbf{S},\mathcal{A})}}"] \arrow[dr, "{[l_s \mid s \in S]}"'] & \varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A}) \arrow[d, "u"] \\
& L
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Además, u es un homomorfismo de $\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ en $\mathbf{L}$.

Ahora bien, puesto que, para cada $s \in S$, el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
A_s \arrow[r, "\mathrm{in}_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \coprod(A_s \mid s \in S) \arrow[d, "{[l_s \mid s \in S]}"] \\
& L
\end{tikzcd}
$$

conmuta, también, para cada $s \in S$, el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
A_s \arrow[r, "\mathrm{in}_s"] \arrow[rr, bend left, "a_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \coprod(A_s \mid s \in S) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\Phi_{(\mathbf{S},\mathcal{A})}}"] \arrow[d, "{[l_s \mid s \in S]}"] & \varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A}) \arrow[dl, bend left, "u"] \\
& L &
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Por consiguiente hay al menos un homomorfismo u de $\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ en $\mathbf{L}$ tal que, para cada $s \in S$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[r, "a_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[d, "u"] \\ & \mathbf{L} \end{tikzcd}$$

conmuta. Dejamos, como ejercicio, la demostración de que hay a lo sumo un homomorfismo u de $\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ en $\mathbf{L}$ tal que, para cada $s \in S$, $u \circ a_s = l_s$.

$\square$

En el ejemplo 4.4, para el sistema inductivo

$$(\mathbf{S}, ((\mathrm{Hom}(V_s, B) \mid s \in S), (a_{s,s'} \mid (s, s') \in \preceq))),$$

su límite inductivo está formado, por una parte, por las clases de equivalencia, o *gérmenes de aplicaciones*, $[(f, s)]$, con $(f, s) \in \coprod(\mathrm{Hom}(V_s, B) \mid s \in S)$, y siendo dos pares ordenados (f, s) y (g, s') equivalentes precisamente cuando exista un $s'' \in S$ tal que $V_{s''} \subseteq V_s \cap, V_{s'}$ y $f \restriction V_{s''} = g \restriction V_{s''}$, y, por otra, por la familia de aplicaciones $(a_s \mid (s, s') \in \preceq)$, en la que, para cada $s \in S$ y para cada $f \in \mathrm{Hom}(V_s, B)$, $a_s(f) = [(f, s)]$

Demuéstrese que el límite inductivo del sistema inductivo del ejemplo 4.4 es isomorfo a $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(X)$.

Demuéstrese que el límite inductivo del sistema inductivo del ejemplo 4.4 es isomorfo a $\mathbf{Pol}_\omega(\mathbf{A})$.

Demuéstrese que el límite inductivo del sistema inductivo del ejemplo 4.4 es isomorfo a $\mathbf{Alg}_\omega(\mathbf{A})$.

Demuéstrese que el límite inductivo del sistema inductivo del ejemplo 4.4 es isomorfo a $\coprod(\mathbf{A}_s \mid s \in S)$.

Demuéstrese que el límite inductivo del sistema inductivo del ejemplo 4.4 es isomorfo a $\bigcup(\mathbf{X}_s \mid s \in S)$.

Proposition 4.26. *Sea $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ un sistema inductivo de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras, con $\mathbf{S}$ dirigido superiormente y $(\mathbf{L}, (l_s \mid s \in S))$ tal que, para cada $s \in S$, $l_s \colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \mathbf{L}$ sea un homomorfismo y, para cada $(s, s') \in \preceq$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[rr, "a_{s,s'}"] \arrow[dr, "l_s"'] & & \mathbf{A}_{s'} \arrow[dl, "l_{s'}"] \\ & \mathbf{L} & \end{tikzcd}$$

conmute. Entonces para el único homomorfismo $u \colon \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow \mathbf{L}$ tal que, para cada $s \in S$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[r, "a_s"] \arrow[dr, "l_s"'] & \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[d, "u"] \\ & \mathbf{L} \end{tikzcd}$$

conmuta, se cumple que:

1. *Una condición necesaria y suficiente para que u sea sobreyectivo es que $L = \bigcup_{s \in S} \mathrm{Im}(l_s)$.*

2. *Una condición necesaria y suficiente para que u sea inyectivo es que, para cada $s \in S$ y para cada $x, y \in A_s$, si $l_s(x) = l_s(y)$, entonces exista un $s' \in S$ tal que $s \preceq s'$ y $a_{s,s'}(x) = a_{s,s'}(y)$.*

Demostración. 1. Puesto que un homomorfismo es sobreyectivo si y sólo si su imagen coincide con su codominio, u será sobreyectivo precisamente si $u_*(\varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A})) = L$. Ahora bien, $\varinjlim(\mathbf{S}, \mathcal{A}) = \bigcup_{s \in S} \mathrm{Im}(a_s)$, luego u será sobreyectivo precisamente si $u_*(\bigcup_{s \in S} \mathrm{Im}(a_s)) = L$, i.e., si y sólo si $\bigcup_{s \in S} \mathrm{Im}(u \circ a_s) = L$, pero, para cada $s \in S$, $u \circ a_s = l_s$, luego u será sobreyectivo cuando y sólo cuando $\bigcup_{s \in S} \mathrm{Im}(l_s) = L$.

2. *La condición es necesaria.* Supongamos que $u\colon \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow \mathbf{L}$ sea inyectivo y sean $s \in S$ y $x, y \in A_s$ tales que $l_s(x) = l_s(y)$. Entonces, ya que, para cada $s \in S$, $u \circ a_s = l_s$, $u(a_s(x)) = u(a_s(y))$, luego, por ser u inyectivo, $a_s(x) = a_s(y)$. Por consiguiente, en virtud del lema **??**, hay un $s' \in S$ tal que $s \preceq s'$ y $a_{s,s'}(x) = a_{s,s'}(y)$.

La condición es suficiente. Supongamos que para cada $s \in S$ y para cada $x, y \in A_s$, si $l_s(x) = l_s(y)$, entonces exista un $s' \in S$ tal que $s \preceq s'$ y $a_{s,s'}(x) = a_{s,s'}(y)$. Sean $X, Y \in \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ tales que $u(X) = u(Y)$. Entonces, en virtud del lema **??**, hay un $s \in S$ y $x, y \in A_s$ tales que $a_s(x) = X$ y $a_{s'}(y) = Y$. luego $u(a_s(x)) = u(a_s(y))$, pero $u \circ a_s = l_s$, así que $l_s(x) = l_s(y)$. Por lo tanto, en virtud de la hipótesis, existe un $s' \in S$ tal que $s \preceq s'$ y $a_{s,s'}(x) = a_{s,s'}(y)$; pero esto último significa precisamente que $X = Y$, ya que $X = [(x, s)]$, $Y = [(y, s)]$ y $X = Y$ si y sólo si existe un $s' \in S$ tal que $s \preceq s'$ y $a_{s,s'}(x) = a_{s,s'}(y)$ □

Proposition 4.27. *Sea $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ un sistema inductivo de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras, con $\mathbf{S}$ dirigido superiormente. Entonces una condición suficiente para que $a_s\colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ sea inyectivo, sea cual sea $s \in S$, es que, para cada $(s, s') \in \preceq$, $a_{s,s'}\colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \mathbf{A}_{s'}$ sea inyectivo.*

Demostración. □

Proposition 4.28. *Sea $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ un sistema inductivo de conjuntos, con $\mathbf{S}$ dirigido superiormente. Entonces una condición suficiente para que $a_s\colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ sea sobreyectivo, sea cual sea $s \in S$, es que, para cada $(s, s') \in \preceq$, $a_{s,s'}\colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \mathbf{A}_{s'}$ sea sobreyectivo.*

Demostración. □

Corollary 4.29. *Sea $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ un sistema inductivo de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras, con $\mathbf{S}$ dirigido superiormente. Entonces una condición suficiente para que $a_s\colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ sea un isomorfismo, sea cual sea $s \in S$, es que, para cada $(s, s') \in \preceq$, $a_{s,s'}\colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \mathbf{A}_{s'}$ lo sea.*

Demostración. □

4.6. Morfismos inductivos entre sistemas inductivos.

Definition 4.30. Si $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ y $(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ son dos sistemas inductivos de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras, un *morfismo inductivo* de $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ en $(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ es un triplo ordenado $((\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}), \Phi, (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}}))$, abreviado como Φ y denotado por

$$\Phi\colon (\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}}),$$

en el que $\Phi = (\varphi, f)$, con $\varphi\colon \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{T}$ y $f = (f_s \mid s \in S)$, siendo, para cada $s \in S$, $f_s\colon \mathbf{A}_s \longrightarrow \mathbf{B}_{\varphi(s)}$, i.e.,

$$(f_s \mid s \in S) \in \prod(\mathrm{Hom}(\mathbf{A}_s, \mathbf{B}_{\varphi(s)}) \mid s \in S),$$

tal que, para cada $(s, s') \in\preceq$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[r, "f_s"] \arrow[d, "a_{s,s'}"'] & \mathbf{B}_{\varphi(s)} \arrow[d, "b_{\varphi(s),\varphi(s')}"] \\ \mathbf{A}_{s'} \arrow[r, "f_{s'}"'] & \mathbf{B}_{\varphi(s')} \end{tikzcd}$$

conmuta. Además, $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{B}}_\varphi)$ es el sistema inductivo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras para el que la coordenada s-ésima de la primera componente de $\boldsymbol{\mathcal{B}}_\varphi$ es $\mathbf{B}_{\varphi(s)}$, para cada $s \in S$, y la coordenada (s, s')-ésima de la segunda componente de $\boldsymbol{\mathcal{B}}_\varphi$ es $b_{\varphi(s),\varphi(s')}$, para cada $(s, s') \in\preceq$.

Proposition 4.31.

1. *Si* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *es un sistema inductivo de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras, entonces*
$$\mathrm{id}_{(\mathbf{S},\boldsymbol{\mathcal{A}})} = (\mathrm{id}_{\mathbf{S}}, \mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}),$$
siendo $\mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = (\mathrm{id}_{\mathbf{A}_s} \mid s \in S)$*, es un endomorfismo inductivo de* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$*, el morfismo inductivo* identidad *de* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$.
2. *Si* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$*,* $(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ *y* $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\mathcal{C}})$ *son tres sistemas inductivos de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras,* $\Phi = (\varphi, f)$ *un morfismo inductivo del primero en el segundo y* $\Psi = (\psi, g)$ *uno del segundo en el tercero, entonces*
$$\Psi \circ \Phi = (\psi \circ \varphi, g_\varphi \circ f),$$
siendo g_φ *la familia indexada por* S*, cuya coordenada* s*-ésima es:*
$$g_{\varphi(s)} \colon B_{\varphi(s)} \longrightarrow C_{\psi(\varphi(s))},$$
y, por lo tanto, siendo $g_\varphi \circ f$ *la familia de homomorfismos, indexada por* S*, cuya coordenada* s*-ésima es:*
$$\mathbf{A}_s \xrightarrow{f_s} \mathbf{B}_{\varphi(s)} \xrightarrow{g_{\varphi(s)}} \mathbf{C}_{\psi(\varphi(s))},$$
es un morfismo inductivo de $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *en* $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\mathcal{C}})$*, el morfismo inductivo* composición *de ambos.*

Demostración. Puesto que la primera parte es sencilla de demostrar, nos limitamos a demostrar la segunda.

Por ser $\Phi = (\varphi, f)$ y $\Psi = (\psi, g)$ morfismos inductivos, los diagramas:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[r, "f_s"] \arrow[d, "a_{s,s'}"'] & \mathbf{B}_{\varphi(s)} \arrow[d, "b_{\varphi(s),\varphi(s')}"] \\ \mathbf{A}_{s'} \arrow[r, "f_{s'}"'] & \mathbf{B}_{\varphi(s')} \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} \mathbf{B}_t \arrow[r, "g_t"] \arrow[d, "b_{t,t'}"'] & \mathbf{C}_{\psi(t)} \arrow[d, "c_{\psi(t),\psi(t')}"] \\ \mathbf{B}_{t'} \arrow[r, "g_{t'}"'] & \mathbf{C}_{\psi(t')} \end{tikzcd}$$

conmutan. Por consiguiente el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_s \arrow[r, "g_{\varphi(s)} \circ f_s"] \arrow[d, "a_{s,s'}"'] & \mathbf{C}_{\psi(\varphi(s))} \arrow[d, "c_{\psi(\varphi(s)),\psi(\varphi(s'))}"] \\ \mathbf{A}_{s'} \arrow[r, "g_{\varphi(s')} \circ f_{s'}"'] & \mathbf{C}_{\psi(\varphi(s'))} \end{tikzcd}$$

también conmuta. □

Proposition 4.32. *Sea Φ un morfismo inductivo de $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ en $(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$, Ψ uno de $(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ en $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\mathcal{C}})$ y Ξ uno de $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\mathcal{C}})$ en $(\mathbf{V}, \boldsymbol{\mathcal{D}})$. Entonces:*

1. (Asociatividad). *El diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Psi \circ \Phi"'] \arrow[drr, bend left=50, "(\Xi \circ \Psi) \circ \Phi"] \arrow[drr, bend right=60, "\Xi \circ (\Psi \circ \Phi)"'] & (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}}) \arrow[d, "\Psi"'] \arrow[dr, "\Xi \circ \Psi"] & \\
& (\mathbf{U}, \boldsymbol{\mathcal{C}}) \arrow[r, "\Xi"'] & (\mathbf{V}, \boldsymbol{\mathcal{D}})
\end{tikzcd}
$$

   conmuta.

2. (Neutros). *Los diagramas:*

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[r, "id_{(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})}"] \arrow[dr, "\Phi"'] & (\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[d, "\Phi"] \\
& (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Phi"'] & (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}}) \arrow[d, "id_{(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})}"] \\
& (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})
\end{tikzcd}
$$

   conmutan.

Demostración. □

4.7. Límites inductivos de los morfismos inductivos.

Proposition 4.33. *Si $\Phi\colon (\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ es un morfismo inductivo, entonces hay un único homomorfismo*

$$\varinjlim \Phi\colon \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow \varinjlim(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}}),$$

denominada el límite inductivo *de Φ tal que, para cada $s \in S$, el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_s \arrow[r, "a_s"] \arrow[d, "f_s"'] & \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[d, "\varinjlim \Phi"] \\
\mathbf{B}_{\varphi(s)} \arrow[r, "b_{\varphi(s)}"'] & \varinjlim(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Además, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_s \arrow[r, "a_s"] \arrow[d, "f_s"'] & \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[d, "\coprod f"] \arrow[dd, bend left=60, "\varinjlim \Phi"] \\
\mathbf{B}_{\varphi(s)} \arrow[r, "b_{\varphi(s)}"'] \arrow[dr, "b_{\varphi(s)}"'] & \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\varphi}) \arrow[d, "i_{\varphi}"] \\
& \varinjlim(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})
\end{tikzcd}$$

conmuta, siendo i_{φ} *el único homomorfismo de* $\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\varphi})$ *en* $\varinjlim(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\coprod(\mathbf{B}_{\varphi(s)} \mid s \in S) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{C}_{(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\varphi})}}"] \arrow[d, "\mathrm{in}_{\varphi}"'] & \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\varphi}) \arrow[d, "i_{\varphi}"] \\
\coprod(B_t \mid t \in T) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{C}_{(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})}}"'] & \varinjlim(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})
\end{tikzcd}$$

conmuta, y, denotándola por el mismo símbolo, $\coprod f$ *el único homomorfismo de* $\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *en* $\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\varphi})$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\coprod(\mathbf{A}_s \mid s \in S) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{C}_{(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})}}"] \arrow[d, "\coprod f"'] & \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[d, "\coprod f"] \\
\coprod(\mathbf{B}_{\varphi(s)} \mid s \in S) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{C}_{(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\varphi})}}"'] & \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\varphi})
\end{tikzcd}$$

conmuta. Así que

$$\varinjlim \Phi = i_{\varphi} \circ \coprod f.$$

Demostración. □

Proposition 4.34. *Sean* $\Phi\colon (\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ *y* $\Psi\colon (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}}) \longrightarrow (\mathbf{U}, \boldsymbol{\mathcal{C}})$ *dos morfismos inductivos. Entonces:*

1. $\varinjlim \mathrm{id}_{(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})} = \mathrm{id}_{\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})}$.
2. $\varinjlim(\Psi \circ \Phi) = \varinjlim \Psi \circ \varinjlim \Phi$.

Además, si $\Phi = (\varphi, f)$ y $\Psi = (\psi, g)$, entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \arrow[rr, "\varinjlim \Phi"] \arrow[rrrr, bend left, "\varinjlim \Psi \circ \Phi"] \arrow[dr, "\coprod f"'] \arrow[ddrr, bend right, "\coprod (g_{\varphi} \circ f)"'] & & \varinjlim(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}}) \arrow[rr, "\varinjlim \Psi"] \arrow[dr, "\coprod g"] & & \varinjlim(\mathbf{U}, \boldsymbol{\mathcal{C}}) \\
& \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\varphi}) \arrow[ur, "i_{\varphi}"'] \arrow[rr, "\varinjlim(\varphi, g_{\varphi})"] \arrow[dr, "\coprod g_{\varphi}"'] & & \varinjlim(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{C}}_{\psi}) \arrow[ur, "i_{\psi}"'] & \\
& & \varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{C}}_{\psi \circ \varphi}) \arrow[ur, "i_{\varphi}"'] \arrow[uurr, bend right, "i_{\psi \circ \varphi}"'] & &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Proposition 4.35. *Sea $\Phi \colon (\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ un morfismo inductivo, con $\mathbf{S}$ y $\mathbf{T}$ dirigidos superiormente. Si hay un subconjunto S' de S que es cofinal en $\mathbf{S}$, $\varphi[S']$ es cofinal en $\mathbf{T}$ y, para cada $s' \in S'$, $f_{s'} \colon \mathbf{A}_{s'} \longrightarrow \mathbf{B}_{\varphi(s')}$ es un isomorfismo, entonces $\varinjlim \Phi$ es un isomorfismo.*

Demostración. □

Antes de enunciar un corolario de la proposición anterior, convenimos que si $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ es un sistema inductivo de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras, con $\mathbf{S}$ dirigido superiormente, y S' un subconjunto de S tal que, siendo $\mathbf{S}'$ el par ordenado $(S', \preceq \cap (S' \times S'))$, $\mathbf{S}'$ es, a su vez, un conjunto preordenado dirigido superiormente, entonces $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) {\restriction} S'$, la *restricción de* $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *a* $\mathbf{S}'$, denota el sistema inductivo de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras cuya primera coordenada es $(S', \preceq \cap (S' \times S'))$ y cuya segunda coordenada tiene como primera componente la restricción de $(\mathbf{A}_s \mid s \in S)$ a S' y como segunda componente la restricción de $(a_{s,s'} \mid (s, s') \in \preceq)$ a $\preceq \cap (S' \times S')$.

Corollary 4.36. *Si $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ es un sistema inductivo de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras y S' es un subconjunto cofinal de $\mathbf{S}$, con $\mathbf{S}$ dirigido superiormente, entonces para el morfismo inductivo canónico $\Phi = (\mathrm{in}_{\mathbf{S}'}, (\mathrm{id}_{\mathbf{A}_{s'}} \mid s' \in S'))$ de $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) {\restriction} S'$ en $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ se cumple que $\varinjlim \Phi$ es un isomorfismo.*

Demostración. □

Corollary 4.37. *Sea $\boldsymbol{\Sigma}$ una signatura algebraica y $V = \{\, v_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ un conjunto infinito numerable sobre él consideramos el buen orden que se obtiene del buen orden natural sobre $\mathbb{N}$ por transporte de estructura, entonces el conjunto $\{\, \downarrow v_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$, siendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\downarrow v_n = \{\, v_i \mid i \in n \,\}$, es un subconjunto cofinal de $\mathbf{Sub}_f(V)$ y, por lo tanto, la $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra subyacente del límite inductivo del sistema inductivo*

$$((\{\, \downarrow v_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}, \subseteq), ((\mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\downarrow v_n) \mid n \in \mathbb{N}), (\mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathrm{in}_{\downarrow v_n, \downarrow v_{n+1}}) \mid n \in \mathbb{N}))),$$

es isomorfa a $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(V)$.

Como una aplicación del concepto de límite inductivo de un sistema inductivo de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras, consideramos a continuación los conceptos de producto reducido y ultraproducto de una familia de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras relativo a un filtro, resp., un ultrafiltro, sobre el conjunto de índices de la familia en cuestión.

Definition 4.38. Sea I un conjunto. Un *filtro* sobre I es un subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathrm{Sub}(I)$ que tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{F} \neq \varnothing$.
2. $\varnothing \notin \mathcal{F}$.
3. Para cada $J \subseteq I$, si $J \in \mathcal{F}$, entonces $\Uparrow J \subseteq \mathcal{F}$.
4. Para cada $J, K \in \mathcal{F}$, $J \cap K \in \mathcal{F}$.

Denotamos por $\mathrm{Fil}(I)$ el conjunto de los filtros sobre I.

Sea $\mathcal{F}$ un *filtro* sobre I. Demuéstrese que:

1. La intersección de cualquier familia finita no vacía en $\mathcal{F}$ también pertenece a $\mathcal{F}$.
2. $I \in \mathcal{F}$.
3. Sobre el conjunto vacío no hay ningún filtro.

Proposition 4.39. *Sea I un conjunto y $J \subseteq I$ no vacío. Demuéstrese que $\Uparrow J$ es un filtro sobre I. En particular, $\Uparrow I = \{I\}$ es un filtro sobre I. A los filtros de este tipo los denominamos filtros* principales *sobre I; a los demás filtros sobre I los llamamos* no principales*.*

Proposition 4.40. *Un filtro $\mathcal{F}$ sobre I es principal precisamente si $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \in \mathcal{F}$.*

Demostración. $\square$

Demuéstrese que cualquier filtro sobre un conjunto finito es principal.

Sobre cualquier conjunto infinito hay filtros no principales. Los más simples son los filtros de *Fréchet*.

Proposition 4.41. *Sea I un conjunto infinito y $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito tal que $\mathfrak{m} \leq \mathrm{card}(I)$. Entonces el conjunto $\mathrm{Fre}_{I,\mathfrak{m}}$ definido como:*

$$\mathrm{Fre}_{I,\mathfrak{m}} = \{\, J \subseteq I \mid \mathrm{card}(I - J) < \mathfrak{m} \,\},$$

es un filtro no principal sobre I.

Demostración. $\square$

Demuéstrese que sobre el conjunto de los números naturales, el único filtro de Fréchet es el formado por los subconjuntos de $\mathbb{N}$ cuyo complementario es finito.

Demuéstrese que si aceptamos la hipótesis del contínuo, entonces sobre el conjunto de los números reales, los únicos filtros de Fréchet son, por una parte, el formado por los subconjuntos de R cuyo complementario es finito, y, por otra, el formado por todos los subconjuntos de R cuyo complementario es finito o infinito numerable.

Muéstrese un ejemplo de filtro no principal que no sea filtro de Fréchet sobre el conjunto de los números naturales.

Proposition 4.42. *Sea I un conjunto no vacío. Entonces la intersección de cualquier familia no vacía de filtros sobre I es un filtro sobre I. Además, la unión de cualquier cadena no vacía de filtros sobre I es un filtro sobre I.*

Demostración. $\square$

En algunas ocasiones, dado un conjunto no vacío I, conviene disponer de algún criterio sobre un subconjunto $\mathcal{C}$ de $\mathrm{Sub}(I)$, que nos asegure que tal conjunto $\mathcal{C}$ está incluido en algún filtro sobre sobre I.

Definition 4.43. Sea I un conjunto no vacío y $\mathcal{C}$ un subconjunto de $\mathrm{Sub}(I)$. Decimos que $\mathcal{C}$ tiene la *propiedad de la intersección finita* o que es un *sistema centrado*, si cumple las siguientes condiciones:

1. $\mathcal{C} \neq \varnothing$.
2. Para cada $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$, si $\mathcal{D}$ es finito y no vacío, entonces $\bigcap_{d\in\mathcal{D}} D \neq \varnothing$

Proposition 4.44. *Sea I un conjunto no vacío. Una condición necesaria y suficiente para que un subconjunto $\mathcal{C}$ de $\mathrm{Sub}(I)$ esté incluido en un filtro sobre I es que $\mathcal{C}$ tenga la propiedad de la intersección finita.*

Demostración. $\square$

Definition 4.45. Sea I un conjunto no vacío. Un *ultrafiltro* sobre I es un filtro maximal en el conjunto ordenado $(\mathrm{Fil}(I), \subseteq)$.

Demuéstrese que los ultrafiltros principales sobre un conjunto no vacío I son los de la forma $\Uparrow \{i\}$, para algún $i \in I$.

La existencia de ultrafiltros no principales sobre conjuntos infinitos es consecuencia de la siguiente proposición.

Proposition 4.46. *Sea I un conjunto no vacío. Una condición necesaria y suficiente para que un subconjunto $\mathcal{C}$ de $\mathrm{Sub}(I)$ esté incluido en un ultrafiltro sobre I es que $\mathcal{C}$ tenga la propiedad de la intersección finita. En particular, cada filtro sobre I está incluido en al menos un ultrafiltro sobre I.*

Demostración. $\square$

Demuéstrese que todo filtro sobre un conjunto no vacío I es la intersección de todos los ultrafiltros sobre I que lo contienen.

Proposition 4.47. *Sea I un conjunto y $\mathcal{F}$ es un filtro sobre I. Una condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{F}$ sea un ultrafiltro sobre I es que para cada $J \subseteq I$, $J \in \mathcal{F}$ si y sólo si $I - J \notin \mathcal{F}$.*

Demostración. $\square$

Theorem 4.48. *El axioma de elección es equivalente a la extensibilidad de todo filtro hasta un ultrafiltro.*

Demostración. $\square$

Proposition 4.49. *Sea I un conjunto y $\mathcal{F}$ un filtro sobre I. Entonces $(\mathcal{F}, \leq)$, siendo $\leq$ la relación binaria en $\mathcal{F}$ definida como:*

$$\leq = \{\, (J, K) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid K \subseteq J \,\},$$

es un conjunto preordenado dirigido superiormente.

Proposition 4.50. *Sea I un conjunto, $\mathcal{F}$ un filtro sobre I y $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras. Entonces el par ordenado*

$$\left(\left(\prod_{j\in J} \mathbf{A}_j\right), (\mathrm{p}_{J,K} \mid (J,K) \in \leq)\right),$$

*es un sistema inductivo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras. Al límite inductivo de tal sistema inductivo de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras lo denominamos el*producto reducido *de $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ relativo al filtro $\mathcal{F}$ sobre I, a la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra subyacente la denotamos por $\prod_{\mathcal{F}}(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ y, para cada $J \in \mathcal{F}$, a los homomorfismos estructurales de $\prod_{j\in J} \mathbf{A}_j$ en $\prod_{\mathcal{F}}(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$, por $\mathrm{p}_{\mathcal{F},J}$. En particular, si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro sobre I, al límite inductivo anterior lo denominamos el* ultraproducto *de $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ relativo al ultrafiltro $\mathcal{F}$ sobre I. Además, la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\prod_{\mathcal{F}}(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ es isomorfa a la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \equiv_{\mathcal{F}}$, siendo $\equiv_{\mathcal{F}}$ la congruencia sobre $\prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ definida como:*

$$\equiv_{\mathcal{F}} = \{\, (x, y) \in \left(\prod_{i\in I} A_i\right)^2 \mid \mathrm{Eq}(x, y) \in \mathcal{F} \,\}.$$

4.8. Algunos límites y colímites de familias de sistemas inductivos. Del mismo modo que para el universo de conjuntos y aplicaciones, demostramos la existencia de productos y coproductos de familias de conjuntos así como la de igualadores de pares de aplicaciones con el mismo dominio y codominio, ahora, para el universo de discurso formado por los sistemas inductivos de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras y los morfismos entre ellos, demostramos la existencia de productos y coproductos de familias de sistemas inductivos de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras, así como la de igualadores de pares de mofismos con el mismo dominio y codominio.

Proposition 4.51. *Sea* $((\mathbf{S}^i,\boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i\in I)$ *una familia de sistemas inductivos de* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebras. Entonces hay un par ordenado* $\big(\prod((\mathbf{S}^i,\boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i\in I), (\mathrm{pr}^i \mid i\in I)\big)$*, también denotado por* $\big(\prod_{i\in I}(\mathbf{S}^i,\boldsymbol{\mathcal{A}}^i), (\mathrm{pr}^i \mid i\in I)\big)$*, en el que* $\prod((\mathbf{S}^i,\boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i\in I)$*, el* producto *de* $((\mathbf{S}^i,\boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i\in I)$*, es un sistema inductivo de* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebras y, para cada* $i\in I$*,* pr^i*, la* proyección canónica i-ésima *del producto, es un morfismo inductivo de* $\prod((\mathbf{S}^i,\boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i\in I)$ *en* $(\mathbf{S}^i,\boldsymbol{\mathcal{A}}^i)$*, que tiene la siguiente* propiedad universal*:*

Para cada par ordenado $((\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}}),(\Psi^i \mid i\in I))$*, en el que* $(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}})$ *es un sistema inductivo de* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebras y, para cada* $i\in I$*,* $\Psi^i\colon (\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}}) \longrightarrow (\mathbf{S}^i,\boldsymbol{\mathcal{A}}^i)$*, hay un único morfismo inductivo* $\big\langle \Psi^i \mid i\in I\big\rangle : (\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}}) \longrightarrow \prod((\mathbf{S}^i,\boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i\in I)$ *tal que, para cada* $i\in I$*, el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}}) \arrow[d, "\langle \Psi^i \mid i\in I\rangle"'] \arrow[dr, "\Psi^i"] & \\
\prod((\mathbf{S}^i,\boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i\in I) \arrow[r, "\mathrm{pr}^i"'] & (\mathbf{S}^i,\boldsymbol{\mathcal{A}}^i)
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Demostración. Es suficiente tomar como primera coordenada de $\prod((\mathbf{S}^i,\boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i\in I)$ el producto de la familia de conjuntos preordenados d.s. $(\mathbf{S}^i \mid i\in I)$ y, como segunda coordenada, el par ordenado cuya primera componente es

$$\big(\textstyle\prod(\mathbf{A}^i_{s_i} \mid i\in I) \mid (s_i \mid i\in I)\in \prod(S^i \mid i\in I)\big)$$

y cuya segunda componente es

$$\Big(\textstyle\prod(a^i_{s_i,s'_i} \mid i\in I) \mid ((s_i \mid i\in I),(s'_i \mid i\in I)) \in \preceq\Big);$$

y, por otra parte, para cada $i\in I$, como primera coordenada de pr^i, pr_i, la proyección canónica de $\prod(\mathbf{S}^i \mid i\in I)$ en $\mathbf{S}^i$, y, como segunda coordenada, $(\mathrm{pr}_{\mathbf{A}^i_{s_i}} \mid (s_i \mid i\in I)\in \prod(S^i \mid i\in I))$

□

Proposition 4.52. *Sea* $((\mathbf{S}^i,\boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i\in I)$ *una familia de sistemas inductivos de* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebras. Entonces hay un par ordenado* $\big(\coprod((\mathbf{S}^i,\boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i\in I), (\mathrm{in}^i \mid i\in I)\big)$*, también denotado por* $\big(\coprod_{i\in I}(\mathbf{S}^i,\boldsymbol{\mathcal{A}}^i), (\mathrm{in}^i \mid i\in I)\big)$*, en el que* $\coprod((\mathbf{S}^i,\boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i\in I)$*, el* coproducto *de* $((\mathbf{S}^i,\boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i\in I)$*, es un sistema inductivo de* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebras y, para cada* $i\in I$*,* in^i*, la* inclusión canónica i-ésima *del coproducto, es un morfismo inductivo de* $(\mathbf{S}^i,\boldsymbol{\mathcal{A}}^i)$ *en* $\coprod((\mathbf{S}^i,\boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i\in I)$*, que tiene la siguiente* propiedad universal*:*

Para cada par ordenado $((\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}}),(\Psi^i \mid i\in I))$*, en el que* $(\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}})$ *es un sistema inductivo de* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebras y, para cada* $i\in I$*,* $\Psi_i\colon (\mathbf{S}^i,\boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \longrightarrow (\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}})$*, hay un único morfismo inductivo* $\big[\Psi^i \mid i\in I\big] : \coprod((\mathbf{S}^i,\boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i\in I) \longrightarrow (\mathbf{T},\boldsymbol{\mathcal{B}})$ *tal que, para cada*

$i \in I$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{S}^i, \boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \arrow[r, "\mathrm{in}^i"] \arrow[dr, "\Psi^i"'] & \coprod((\mathbf{S}^i, \boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I) \arrow[d, "{[f_i \mid i \in I]}"] \\ & (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}}) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Es suficiente tomar como primera coordenada de $\coprod((\mathbf{S}^i, \boldsymbol{\mathcal{A}}^i) \mid i \in I)$ el coproducto de la familia de conjuntos preordenados d.s. $(\mathbf{S}^i \mid i \in I)$ y, como segunda coordenada, el par ordenado cuya primera componente es

$$(\mathbf{A}^i_s \mid (s, i) \in \coprod(S^i \mid i \in I))$$

y cuya segunda componente es

$$(a^i_{s,s'} \mid ((s, i), (s', i)) \in \preceq);$$

y, por otra parte, para cada $i \in I$, como primera coordenada de in^i, in_i, la inclusión canónica de $\mathbf{S}^i$ en $\coprod(\mathbf{S}^i \mid i \in I)$, y, como segunda coordenada, $(\mathrm{id}_{\mathbf{A}^i_s} \mid (s, i) \in \coprod(S^i \mid i \in I))$.

□

Proposition 4.53. *Sean $\Phi, \Psi \colon (\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ dos morfismos inductivos, con $\Phi = (\varphi, f)$ y $\Psi = (\psi, g)$. Entonces existe un par ordenado $(\mathbf{Eq}(\Phi, \Psi), eq(\Phi, \Psi))$, el* igualador *de Φ y Ψ, en el que $\mathbf{Eq}(\Phi, \Psi)$ es un sistema inductivo de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras y* $\mathrm{eq}(\Phi, \Psi)$ *un morfismo inductivo de $\mathbf{Eq}(\Phi, \Psi)$ en $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$, que tiene las siguientes propiedades:*

1. $\Phi \circ eq(\Phi, \Psi) = \Psi \circ eq(\Phi, \Psi)$.
2. (Propiedad universal del igualador) *Para cada sistema inductivo de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\mathcal{C}})$ y cada morfismo proyectivo $\Xi \colon (\mathbf{U}, \boldsymbol{\mathcal{C}}) \longrightarrow (\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$, si $\Phi \circ \Xi = \Psi \circ \Xi$, entonces hay un único morfismo proyectivo $\Gamma \colon (\mathbf{U}, \boldsymbol{\mathcal{C}}) \longrightarrow Eq(\Phi, \Psi)$ tal que $eq(\Phi, \Psi) \circ \Gamma = \Xi$.*

Demostración. Es suficiente tomar como primera coordenada de $\mathbf{Eq}(\Phi, \Psi)$, el conjunto preordenado $\mathbf{Eq}(\varphi, \psi)$, formado por el igualador de $\varphi, \psi \colon S \longrightarrow T$, y la restricción del preorden de $\mathbf{S}$ a ésa parte, y como segunda coordenada, $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, el par ordenado cuya primera componente, $\mathbf{E}_s$, para cada $s \in \mathrm{Eq}(\varphi, \psi)$, es $\mathbf{Eq}(f_s, g_s)$, y cuya segunda componente, $e_{s,s'}$, para cada $s, s' \in \mathrm{Eq}(\varphi, \psi)$, tal que $s \preceq s'$, es el único homomorfismo de $\mathbf{Eq}(f_s, g_s)$ en $\mathbf{Eq}(f_{s'}, g_{s'})$ tal que $a_{s,s'} \circ \mathrm{eq}(f_s, g_s) = \mathrm{eq}(f_{s'}, g_{s'}) \circ e_{s,s'}$; y, por otra parte, como primera coordenada de $\mathrm{eq}(\Phi, \Psi)$, $\mathrm{eq}(\varphi, \psi)$, y, como segunda coordenada $(\mathrm{eq}(f_s, g_s) \mid s \in \mathrm{eq}(\varphi, \psi))$.

□

5. Variedades homogéneas

> Si hi ha moltes equacions d'aquesta mena, caldrà reduir-les totes a una de sola, a saber: aquella els termes de la qual ocupin els graus inferiors en la sèrie de magnituds contínuament proporcionals segons la qual hagin de ser ordenats.
>
> *R. Descartes.*

> Many important classes of algebras occurring in practice, such as groups, rings, lattices, etc., may be completely described by identical relations. Such equational classes or varieties have many useful properties; in particular, they always possess free algebras, and the members of the variety may be characterized as homomorphic images of the free algebras.

P. Cohn.

En esta sección, para un dominio de operaciones formales y un conjunto de variables, definimos la noción de *ecuación*, relativa a tal dominio y conjunto de variables. Pasamos entonces a definir la relación binaria de *validez* entre $\mathbf{\Sigma}$-álgebras y fórmulas, obteniendo la conexión de Galois contravariante para la *lógica ecuacional.* Además, definimos las *clases ecuacionales* o *primitivas*, haciendo uso de los conceptos lógicos de ecuación y de validez, y establecemos el *teorema de caracterización* de Birkhoff de tales clases ecuacionales, en términos puramente algebraicos, mediante los operadores de formación de imágenes homomorfas, subálgebras y productos. De este modo se pone en evidencia que el estudio de la lógica ecuacional equivale al de cierto tipo de categorías. También definimos las relaciones de *consecuencia semántica* y *sintáctica* entre conjuntos de ecuaciones y ecuaciones y demostramos el *teorema de completud* de Birkhoff, según el cual ambas relaciones coinciden. Por último, estudiamos las *álgebras de polinomios con coeficientes en un álgebra e indeterminadas en un conjunto*, que nos permitirán obtener las operaciones algebraicas sobre un álgebra, del mismo modo que las álgebras libres nos permitieron obtener las operaciones polinómicas sobre las álgebras; y las *clases implicacionales*, que generalizan a las ecuacionales, y de las que son ejemplos los monoides regulares.

5.1. Ecuaciones y validez.

Definition 5.1. Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica homogénea y X un conjunto. Una $(\mathbf{\Sigma}, X)$-*ley* o $(\mathbf{\Sigma}, X)$-*identidad* o $(\mathbf{\Sigma}, X)$-*ecuación* es un par ordenado $(P, Q) \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)^2$. Denotamos al conjunto de todas las $(\mathbf{\Sigma}, X)$-leyes, que es $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)^2$, por $\mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X)$.

Definition 5.2. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $(P, Q) \in \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X)$. Decimos que (P, Q) es *válida* en $\mathbf{A}$ o que $\mathbf{A}$ *satisface* (P, Q) o que $\mathbf{A}$ es un *modelo* de (P, Q), y lo denotamos por $\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma}, X} (P, Q)$ o por $\mathbf{A} \models (P, Q)$, si, para cada homomorfismo $f\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \longrightarrow \mathbf{A}$, $f(P) = f(Q)$.

Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $(P, Q) \in \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X)$. Demuéstrese que $\mathbf{A} \models (P, Q)$ si y sólo si $(P, Q) \in \bigcap_{f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X), \mathbf{A})} \mathrm{Ker}(f)$.

Proposition 5.3. *Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y $(P, Q) \in \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X)$. Una condición necesaria y suficiente para que $\mathbf{A} \models (P, Q)$ es que, para cada homomorfismo $f\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \longrightarrow \mathbf{A}$, exista un homomorfismo $g\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Cg}(P, Q) \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Cg}(P,Q)}"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Cg}(P, Q) \arrow[dl, "g"] \\ \mathbf{A} & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. La condición es necesaria. Sea $f\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \longrightarrow \mathbf{A}$ un homomorfismo. Entonces existe un homomorfismo $g\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Cg}(P, Q) \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Cg}(P,Q)}"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Cg}(P, Q) \arrow[dl, "g"] \\ \mathbf{A} & \end{tikzcd}$$

conmuta, porque al ser $\mathbf{A} \models (P, Q)$, $\mathrm{Cg}(P, Q) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.

La condición es suficiente. Si $f\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \longrightarrow \mathbf{A}$ es un homomorfismo, entonces hay un homomorfismo $g\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Cg}(P,Q) \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que $f = g \circ \mathrm{pr}_{\mathrm{Cg}(P,Q)}$. Por lo tanto, ya que $[P] = [Q]$, $f(P) = g([P]) = g([Q]) = f(Q)$. □

Proposition 5.4. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y* $(P,Q) \in \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X)$*. Una condición necesaria y suficiente para que* $\mathbf{A} \models (P,Q)$ *es que, para cada* $f\colon X \longrightarrow A$*,* $f^{\sharp}(P) = f^{\sharp}(Q)$*.*

Demostración. Es consecuencia inmediata del hecho de que hay una biyección (natural) entre el conjunto $\mathrm{Hom}(X, G(\mathbf{A}))$ de las aplicaciones del conjunto de las variables X en el conjunto subyacente $G(\mathbf{A})$ de la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$, y el conjunto $\mathrm{Hom}(\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X), \mathbf{A})$, de los homomorfismos de la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ sobre X, en la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$.

□

La relación binaria de *satisfacibilidad* $\models_{\mathbf{\Sigma},X}$ de Birkhoff, es un subconjunto de $\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})) \times \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X)$. Pero debemos observar que tal relación binaria se obtiene a partir de la relación ternaria $\cdot \models_{\mathbf{\Sigma},X} \cdot[\cdot]$, subconjunto de $\left(\bigcup_{\mathbf{A}\in\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}))}\{\mathbf{A}\} \times \mathrm{Hom}(X, G(\mathbf{A}))\right) \times \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X)$, definida como:

$$\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma},X} (P,Q)[f] \quad \text{si y sólo si} \quad f^{\sharp}(P) = f^{\sharp}(Q),$$

para cualesquiera $\mathbf{A} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}))$, $f \in \mathrm{Hom}(X, G(\mathbf{A}))$ y $(P,Q) \in \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X)$; en cuyo caso decimos que la valoración $f\colon X \longrightarrow A$ es una *solución* de la $(\mathbf{\Sigma}, X)$-ecuación (P,Q) en la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$.

Entonces obtenemos la relación binaria $\models_{\mathbf{\Sigma},X}$ a partir de la ternaria $\cdot \models_{\mathbf{\Sigma},X} \cdot[\cdot]$ definiéndola como:

$$\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma},X} (P,Q) \quad \text{si y sólo si} \quad \forall f \in \mathrm{Hom}(X, G(\mathbf{A}))\,(\,\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma},X} (P,Q)[f]\,),$$

i.e., la $(\mathbf{\Sigma}, X)$-ecuación (P,Q) es válida en la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ si y sólo si todas las valoraciones son soluciones de la $(\mathbf{\Sigma}, X)$-ecuación (P,Q) en $\mathbf{A}$.

Proposition 5.5. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra y* $(P,Q) \in \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X)$*. Una condición necesaria y suficiente para que* $\mathbf{A} \models (P,Q)$ *es que* $P^{\mathbf{A}} = Q^{\mathbf{A}}$*, i.e., que* P *y* Q *determinen la misma operación polinómica en* $\mathbf{A}$*.*

Demostración. Puesto que $P^{\mathbf{A}}$, $Q^{\mathbf{A}} \in \mathrm{Pol}_X(\mathbf{A})$, $P^{\mathbf{A}} = Q^{\mathbf{A}}$ si y sólo si, para cada $f\colon X \longrightarrow A$, $P^{\mathbf{A}}(f) = Q^{\mathbf{A}}(f)$. Por consiguiente, es suficiente que demostremos que, para cada $f\colon X \longrightarrow A$ y cada $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ se cumple la *ley de intercambio*, i.e., que:

$$f^{\sharp}(P) = P^{\mathbf{A}}(f),$$

i.e., que la acción de la extensión canónica $f^{\sharp}$ de la valoración $f\colon X \longrightarrow A$, sobre el símbolo de operación polinómica P coincide con la acción de la operación polinómica $P^{\mathbf{A}}$ determinada por el símbolo de operación polinómica P, sobre la valoración f.

Sea $\mathcal{P}$ el subconjunto de $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ definido como:

$$\mathcal{P} = \{\, P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \mid \forall f\colon X \longrightarrow A\,(f^{\sharp}(P) = P^{\mathbf{A}}(f))\,\}.$$

Vamos a demostrar, por inducción algebraica, que $\mathcal{P} = \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$.

Se cumple que $\{\,(x) \mid x \in X\,\} \subseteq \mathcal{P}$. En efecto, si $x \in X$ y $f\colon X \longrightarrow A$, entonces

$$\begin{aligned} (x)^{\mathbf{A}}(f) &= \mathrm{pr}_{X,x}(f) && \text{(por la definición de } \mathrm{Pd}_{X,\mathbf{A}}) \\ &= f(x) \\ &= f^{\sharp}((x)) && \text{(por la definición de } f^{\sharp}). \end{aligned}$$

En segundo lugar, se cumple que $\mathcal{P}$ es una subálgebra de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. En efecto, si $\sigma \in \Sigma_0$ y $f\colon X \longrightarrow A$, entonces $(\sigma)^{\mathbf{A}}(f) = \sigma^{\mathbf{A}}$ y $f^{\sharp}((\sigma)) = \sigma^{\mathbf{A}}$, porque $f^{\sharp}$ es un homomorfismo de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ en $\mathbf{A}$, luego $(\sigma)^{\mathbf{A}}(f) = f^{\sharp}((\sigma))$. Sea ahora $n \in \mathbb{N} - 1$, $\sigma \in \Sigma_n$, $(P_j \mid j \in n)$ una n-familia en $\mathcal{P}$ y $f\colon X \longrightarrow A$ entonces

$$
\begin{aligned}
((\sigma)P_0 \cdots P_{n-1})^{\mathbf{A}}(f) &= (F_\sigma \circ \langle P_j^{\mathbf{A}} \mid j \in n\rangle)(f) \\
&= F_\sigma(P_j^{\mathbf{A}}(f) \mid j \in n) \\
&= F_\sigma(f^{\sharp}(P_j) \mid j \in n) && \text{(por la hipótesis)} \\
&= f^{\sharp}((\sigma)P_0 \cdots P_{n-1}) && \text{(porque } f^{\sharp} \text{ es un homomorfismo).}
\end{aligned}
$$

Queda por lo tanto demostrado que $\mathcal{P}$ es una subálgebra de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Podemos pues afirmar que una condición necesaria y suficiente para que $\mathbf{A} \models (P, Q)$ es que $P^{\mathbf{A}} = Q^{\mathbf{A}}$.

□

5.2. Clases ecuacionales.

Definition 5.6. Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica, X un conjunto y $(P, Q) \in \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X)$ una $(\mathbf{\Sigma}, X)$-ecuación. Entonces $\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(\{\,(P, Q)\,\})$ o, para abreviar, $\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(P, Q)$, la *clase ecuacional* o la *clase primitiva generada por* $\{\,(P, Q)\,\}$ es el conjunto definido como:

$$\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(P, Q) = \{\, \mathbf{A} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})) \mid \mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma},X} (P, Q) \,\},$$

de modo que $\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(P, Q)$ consta de todas las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras $\mathbf{A}$ que satisfacen la $(\mathbf{\Sigma}, X)$-ecuación (P, Q).

Proposition 5.7. *Sea* $\mathbf{\Sigma}$ *una signatura algebraica y* X *un conjunto. Entonces la aplicación* $\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}$ *de* $\mathrm{Sub}(\mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X))$ *en* $\mathrm{Sub}(\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})))$ *definida como:*

$$
\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}
\begin{cases}
\mathrm{Sub}(\mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X)) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}))) \\
\qquad \Phi \qquad\quad \longmapsto \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(\Phi) =
\begin{cases}
\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})), & si\ \Phi = \varnothing; \\
\bigcap_{(P,Q)\in\Phi} \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(P, Q), & si\ \Phi \neq \varnothing,
\end{cases}
\end{cases}
$$

tiene las siguientes propiedades:

1. *Para cada* $\Phi \subseteq \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X)$*,* $\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(\Phi) \neq \varnothing$*.*
2. *Para cada* $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X)$*, si* $\Phi \subseteq \Psi$*, entonces* $\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(\Psi) \subseteq \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(\Phi)$*, i.e., a más leyes menos álgebras que las cumplan.*

Al conjunto $\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(\Phi)$*, de todas las* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras* $\mathbf{A}$ *que satisfacen todas las* $(\mathbf{\Sigma}, X)$*-ecuaciones* $(P, Q) \in \Phi$*, lo denominamos la* clase ecuacional *o la* clase primitiva*, generada por* Φ.

Demostración. Sea $\Phi \subseteq \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X)$. Si $\Phi = \varnothing$, entonces, por definición, $\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(\Phi) = \mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}))$ y este último conjunto no es vacío, porque $\mathbf{1}$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Si $\Phi \neq \varnothing$, tampoco es vacía la clase ecuacional generada por Φ, porque, para cada $(P, Q) \in \Phi$, se cumple que $\mathbf{1} \models_{\mathbf{\Sigma},X} (P, Q)$.

Sean $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X)$ tales que $\Phi \subseteq \Psi$. Si $\Phi = \varnothing$, entonces $\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(\Phi) = \mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}))$, luego, obviamente, $\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(\Psi) \subseteq \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(\Phi)$. Por otra parte, si $\Phi \neq \varnothing$, entonces $\Psi \neq \varnothing$, luego podemos considerar $\bigcap_{(P,Q)\in\Phi} \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(P, Q)$ y $\bigcap_{(P,Q)\in\Psi} \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(P, Q)$, por lo tanto, ya que $\{\, \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(P, Q) \mid (P, Q) \in \Phi \,\} \subseteq \{\, \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(P, Q) \mid (P, Q) \in \Psi \,\}$,también en este caso se cumple que $\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(\Psi) \subseteq \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(\Phi)$ □

Demuéstrese que una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(\Phi)$ precisamente si

$$\Phi \subseteq \textstyle\bigcap_{f\in\mathrm{Hom}(\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X),\mathbf{A})} \mathrm{Ker}(f),$$

o, lo que es equivalente, si y sólo si, para cada $(P, Q) \in \Phi$, $P^{\mathbf{A}} = Q^{\mathbf{A}}$.

Antes de estudiar otras propiedades de los conjuntos de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras de la forma $\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(\Phi)$, para algún conjunto de $(\mathbf{\Sigma}, X)$-ecuaciones Φ, vamos a demostrar que para definir el concepto de clase ecuacionalmente definible, es suficiente que tomemos las operaciones polinómicas formales que ocurren en las ecuaciones definitorias de la clase ecuacional, del álgebra libre sobre un conjunto de variables infinito numerable, arbitrario pero fijo. Para ello, comenzamos definiendo el concepto de leyes equivalentes, relativas a dos conjuntos de variables.

Definition 5.8. Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica, X e Y dos conjuntos, $(P, Q) \in \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X)$ y $(P', Q') \in \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, Y)$. Decimos que (P, Q) y (P', Q') son *leyes equivalentes* si $\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(P, Q) = \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},Y}(P', Q')$, i.e., si, para cada $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma},X} (P, Q)$ si y sólo si $\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma},Y} (P', Q')$.

La proposición que sigue se fundamenta, en última instancia, en que, por tener las operaciones formales ariedades finitas, en las operaciones polinómicas formales ocurren a lo sumo un número finito de variables y, por lo tanto, en cada ley, que es un par de operaciones polinómicas formales, hay a lo sumo un número finito de variables

Proposition 5.9. *Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica, X un conjunto y $\Phi \subseteq \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X)$ un conjunto de $(\mathbf{\Sigma}, X)$-ecuaciones. Entonces hay un conjunto infinito numerable V y un conjunto $\Psi \subseteq \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)$ de $(\mathbf{\Sigma}, V)$-ecuaciones tales que $\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(\Phi) = \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Psi)$.*

Demostración. Sabemos que, para cada subconjunto Y de X, $\mathbf{Sg}_{\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)}(\eta_X[Y])$, la subálgebra de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ generada por $\eta_X[Y]$, es isomorfa a $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(Y)$. Además, dada una operación polinómica formal $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, $P \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)}(\eta_X[\mathrm{Var}(P)])$, siendo $\mathrm{Var}(P)$ el conjunto de las variables de P, que es un subconjunto finito de X y el menor de ellos con tal propiedad. Luego si $(P, Q) \in \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X)$, entonces, denotando por $\mathrm{Var}(P, Q)$ la unión de $\mathrm{Var}(P)$ y $\mathrm{Var}(Q)$, se cumple que $P, Q \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)}(\eta_X[\mathrm{Var}(P, Q)])$, siendo $\mathrm{Var}(P, Q)$ el menor subconjunto finito de X con tal propiedad. Por lo tanto, hay una $(\mathbf{\Sigma}, \mathrm{Var}(P, Q))$-ecuación (P', Q'), con P', resp. Q', la operación polinómica formal transformada de P, resp. de Q, mediante el isomorfismo de $\mathbf{Sg}_{\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)}(\eta_X[\mathrm{Var}(P, Q)])$ en $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\mathrm{Var}(P, Q))$, tal que (P, Q) y (P', Q') son leyes equivalentes.

Por otra parte, es evidente que si K y L son dos conjuntos isomorfos, entonces, para una ecuación $(P, Q) \in \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, K)$ y la transformada $(P', Q') \in \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, L)$ de (P, Q), mediante el isomorfismo de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(K)$ en $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(L)$, se cumple que (P, Q) y (P', Q') son leyes equivalentes.

De todo esto podemos concluir que, para un conjunto $\Phi \subseteq \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X)$, es suficiente que consideremos un conjunto infinito numerable, arbitrario pero fijo, V (que muy bien pudiera ser $\mathbb{N}$) y como conjunto de ecuaciones $\Psi \subseteq \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)$ el formado por las $(\mathbf{\Sigma}, V)$-ecuaciones obtenidas de las ecuaciones $(P, Q) \in \Phi$ mediante las transformaciones:

$$\begin{aligned}\mathbf{Sg}_{\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)}(\eta_X[\mathrm{Var}(P, Q)]) &\cong \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\mathrm{Var}(P, Q))\\ &\cong \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n)\\ &\cong \mathbf{Sg}_{\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)}(\eta_V[\downarrow v_n]) \rightarrowtail \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V),\end{aligned}$$

siendo $n = \mathrm{card}(\mathrm{Var}(P, Q))$. □

Esta última proposición permite que, sin pérdida de generalidad, nos limitemos a considerar, en todo lo relativo a las clases ecuacionalmente definibles, ecuaciones cuyos términos sean miembros del conjunto subyacente de un álgebra libre sobre un conjunto infinito numerable.

De ahora en adelante, salvo indicación expresa de lo contrario, todas las ecuaciones serán $(\mathbf{\Sigma}, V)$-ecuaciones, para un conjunto de variables $V = \{ v_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ infinito numerable, arbitrario pero fijo. Observemos que, por ser V isomorfo a $\mathbb{N}$, por transporte de estructura, podremos, cuando convenga, considerar al conjunto V como bien ordenado.

Ahora vamos a demostrar una serie de proposiciones que nos permitirán afirmar, entre otras cosas, que, para cada conjunto Φ de $(\mathbf{\Sigma}, V)$-ecuaciones, la clase ecuacional $\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Phi)$, generada por Φ, está cerrada bajo ciertos operadores clausura.

Proposition 5.10. *Sea* $(P,Q) \in \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)$ *y* $f\colon \mathbf{B} \rightarrowtail \mathbf{A}$*. Si* $\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma},V} (P,Q)$*, entonces* $\mathbf{B} \models_{\mathbf{\Sigma},V} (P,Q)$*. En particular, si* $\mathbf{B}$ *es una subálgebra de* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma},V} (P,Q)$*, entonces* $\mathbf{B} \models_{\mathbf{\Sigma},V} (P,Q)$*.*

Demostración. Sea $g\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{B}$. Entonces $f \circ g\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{A}$, luego $f(g(P)) = f(g(Q))$, por lo tanto, ya que f es inyectiva, $g(P) = g(Q)$, así que $\mathbf{B} \models_{\mathbf{\Sigma},V} (P,Q)$. □

Corollary 5.11. *Sea* $(P,Q) \in \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)$ *y* $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{B}$ *dos* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras isomorfas. Entonces* $\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma},V} (P,Q)$ *si y sólo si* $\mathbf{B} \models_{\mathbf{\Sigma},V} (P,Q)$*.*

Proposition 5.12. *Sea* $(P,Q) \in \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)$ *y* $f\colon \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$*. Si* $\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma},V} (P,Q)$*, entonces* $\mathbf{B} \models_{\mathbf{\Sigma},V} (P,Q)$*. En particular, si* Φ *es una congruencia sobre* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma},V} (P,Q)$*, entonces* $\mathbf{B}/\Phi \models_{\mathbf{\Sigma},V} (P,Q)$*.*

Demostración. Sea $g\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{B}$. Entonces, por ser las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras libres proyectivas, hay un homomorfismo $t\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \arrow[dl, "t"'] \arrow[d, "g"] \\
\mathbf{A} \arrow[r, two heads, "f"'] & \mathbf{B}
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
g(P) &= f(t(P)) \\
&= f(t(Q)) && \text{(porque } \mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma},V} (P,Q)\text{)} \\
&= g(Q).
\end{aligned}$$

Así que $\mathbf{B} \models_{\mathbf{\Sigma},V} (P,Q)$.

□

Proposition 5.13. *Sea* $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ *una familia de* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras y* $P = Q \in \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)$*. Si, para cada* $i \in I$*,* $\mathbf{A}_i \models_{\mathbf{\Sigma},V} (P,Q)$*, entonces* $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i \models_{\mathbf{\Sigma},V} (P,Q)$*.*

Demostración. Sea $g\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$. Entonces, para cada $i \in I$, $\mathrm{pr}_i(g(P)) = \mathrm{pr}_i(g(Q))$, porque, para cada $i \in I$, $\mathbf{A}_i \models_{\mathbf{\Sigma},V} (P,Q)$, luego $g(P) = g(Q)$. Así que $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i \models_{\mathbf{\Sigma},V} (P,Q)$. □

Definition 5.14. Sea $(\mathbf{A}_i)_{i \in I}$ una familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras y $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Decimos que $\mathbf{A}$ que es un *producto subdirecto* de $(\mathbf{A}_i)_{i \in I}$ si $\mathbf{A}$ es una subálgebra de $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$ y si, para cada $i \in I$, $\mathrm{pr}_i[A] = A_i$. Si tal es el caso lo denotamos por $\mathbf{A} \leq_{\mathrm{sd}} \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$

A continuación definimos una serie de operadores sobre $\mathrm{Sub}(\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})))$ que nos permitirán caracterizar algebraicamente a las clases ecuacionales, que recordemos fueron definidas haciendo uso de nociones lógicas, concretamente, del concepto de ecuación y del de satisfacción de una ecuación en un álgebra.

Definition 5.15.

1. Denotamos por I la endoaplicación de $\mathrm{Sub}(\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})))$ que a un subconjunto $\mathcal{A}$ de $\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}))$ le asigna el subconjunto del mismo definido como:
$$\mathrm{I}(\mathcal{A}) = \{\, \mathbf{B} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})) \mid \exists \mathbf{A} \in \mathcal{A}\, (\mathrm{Iso}(\mathbf{B}, \mathbf{A}) \neq \varnothing) \,\}.$$

De modo que $\mathrm{I}(\mathcal{A})$ consta de todas las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras que son isomorfas a alguna $\mathbf{\Sigma}$-álgebra de $\mathcal{A}$.

2. Denotamos por S la endoaplicación de $\mathrm{Sub}(\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})))$ que a un subconjunto $\mathcal{A}$ de $\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}))$ le asigna el subconjunto del mismo definido como:
$$\mathrm{S}(\mathcal{A}) = \{\, \mathbf{B} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})) \mid \exists \mathbf{A} \in \mathcal{A}\, (\mathrm{Mono}(\mathbf{B}, \mathbf{A}) \neq \varnothing) \,\}.$$
Así que $\mathrm{S}(\mathcal{A})$ consta de todas las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras que son isomorfas a alguna subálgebra de alguna $\mathbf{\Sigma}$-álgebra de $\mathcal{A}$.
3. Denotamos por H la endoaplicación de $\mathrm{Sub}(\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})))$ que a un subconjunto $\mathcal{A}$ de $\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}))$ le asigna el subconjunto del mismo definido como:
$$\mathrm{H}(\mathcal{A}) = \{\, \mathbf{B} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})) \mid \exists \mathbf{A} \in \mathcal{A}\, (\mathrm{Epi}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \neq \varnothing) \,\}.$$
Luego $\mathrm{H}(\mathcal{A})$ consta de todas las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras que son isomorfas a algún cociente de alguna $\mathbf{\Sigma}$-álgebra de $\mathcal{A}$.
4. Denotamos por P la endoaplicación de $\mathrm{Sub}(\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})))$ que a un subconjunto $\mathcal{A}$ de $\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}))$ le asigna el subconjunto del mismo definido como:
$$\mathrm{P}(\mathcal{A}) = \left\{ \mathbf{B} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists I \in \boldsymbol{\mathcal{U}}, \exists (\mathbf{A}_i \mid i \in I) \in \mathcal{A}^I \\ \text{tal que } \mathrm{Iso}(\mathbf{B}, \prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)) \neq \varnothing \end{array} \right\}.$$
Por lo tanto $\mathrm{P}(\mathcal{A})$ consta de todas las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras que son isomorfas a algún producto de alguna familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras de $\mathcal{A}$.
5. Denotamos por P_{sd} la endoaplicación de $\mathrm{Sub}(\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})))$ que a un subconjunto $\mathcal{A}$ de $\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}))$ le asigna el subconjunto del mismo definido como:
$$\mathrm{P}_{\mathrm{sd}}(\mathcal{A}) = \left\{ \mathbf{B} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists \mathbf{A} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})), \exists I \in \boldsymbol{\mathcal{U}}, \exists (\mathbf{A}_i \mid i \in I) \in \mathcal{A}^I \\ \text{tales que } \mathbf{A} \leq_{\mathrm{sd}} \prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \text{ e } \mathrm{Iso}(\mathbf{B}, \mathbf{A}) \neq \varnothing \end{array} \right\}.$$
De manera que $\mathrm{P}_{\mathrm{sd}}(\mathcal{A})$ consta de todas las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras que son isomorfas a algún producto subdirecto de alguna familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras de $\mathcal{A}$.

Demuéstrese que $\mathrm{P}_{\mathrm{sd}}(\mathcal{A})$ consta de todas aquellas $\mathbf{\Sigma}$-álgebras $\mathbf{B}$ para las que existe un $I \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, una familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras $(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \in \mathcal{A}^I$ y un monomorfismo $f\colon \mathbf{B} \rightarrowtail \prod(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ tal que, para cada $i \in I$, $\mathrm{pr}_i \circ f$ es un homomorfismo sobreyectivo de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}_i$.

Proposition 5.16. *Los operadores* I, H, S, P *y* P_{sd} *son operadores clausura sobre* $\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}))$. *Además, si* J *es uno de ellos, entonces* $\mathrm{I} \circ \mathrm{J} = \mathrm{J}$ *y* $\mathrm{J} \circ \mathrm{I} = \mathrm{J}$.

Demostración. □

Demuéstrese que todas las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras finales pertenecen a $\mathrm{P}_{\mathrm{sd}}(\mathcal{A})$, sea cual sea $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}))$.

Proposition 5.17. *Los operadores* $\mathrm{H} \circ \mathrm{S}$, $\mathrm{S} \circ \mathrm{P}$, $\mathrm{H} \circ \mathrm{P}$ *y* $\mathrm{H} \circ \mathrm{P}_{sd}$ *son operadores clausura sobre* $\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}))$. *Además,* $\mathrm{P}_{sd} \circ \mathrm{P} = \mathrm{P}_{sd}$, $\mathrm{P} \circ \mathrm{P}_{sd} = \mathrm{P}_{sd}$, $\mathrm{P}_{sd} \circ \mathrm{S} = \mathrm{S} \circ \mathrm{P}$ *y* $\mathrm{S} \circ \mathrm{P}_{sd} = \mathrm{S} \circ \mathrm{P}$.

Demostración. □

Definition 5.18. Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}))$. Decimos que $\mathcal{A}$ es una *variedad* de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras si $\mathcal{A}$ está cerrado bajo los operadores H, S y P, i.e., si $\mathrm{H}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$, $\mathrm{S}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$ y $\mathrm{P}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$. Denotamos por $\mathrm{Var}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}))$ el conjunto de todas las variedades de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras.

Proposition 5.19. *El conjunto* $\mathrm{Var}(\mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma}))$ *es un sistema de clausura sobre el conjunto* $\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma}))$.

Demostración. □

Sabemos que para cada conjunto, hay una biyección entre el conjunto de los sistemas de clausura sobre el mismo y el conjunto de los operadores clausura sobre tal conjunto, por lo tanto $\mathrm{Var}(\mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma}))$ tendrá asociado un operador clausura sobre el conjunto $\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma}))$.

Theorem 5.20 (Tarski)**.** *El operador clausura sobre el conjunto* $\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma}))$ *asociado al sistema de clausura* $\mathrm{Var}(\mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma}))$ *es* HSP.

Demostración. Para cada $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma}))$, se cumple que $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{HSP}(\mathcal{A})$, porque los tres operadores son extensivos e isótonos. Por otra parte, para cada $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma}))$, se cumple que $\mathrm{H}(\mathrm{HSP}(\mathcal{A})) \subseteq \mathrm{HSP}(\mathcal{A})$, $\mathrm{S}(\mathrm{HSP}(\mathcal{A})) \subseteq \mathrm{HSP}(\mathcal{A})$ y $\mathrm{P}(\mathrm{HSP}(\mathcal{A})) \subseteq \mathrm{HSP}(\mathcal{A})$, en virtud de la Prop 5.17.

Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma}))$ y $\mathcal{V}$ una variedad de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}$. Entonces $\mathrm{P}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{P}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$, luego $\mathrm{S}(\mathrm{P}(\mathcal{A})) \subseteq \mathrm{S}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$, por lo tranto $\mathrm{H}(\mathrm{S}(\mathrm{P}(\mathcal{A}))) \subseteq \mathrm{H}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$, i.e., $\mathrm{HSP}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{V}$. □

La mínima variedad de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras es $\bigcap \mathrm{Var}(\mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma}))$, que coincide con $\mathrm{HSP}(\varnothing)$. Por consiguiente tal variedad consta de todas las $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras finales, si hay símbolos de operación 0-arios en la signatura algebraica y consta de la $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra sobre el vacío junto con todos las finales, en caso contrario, i.e., si $\Sigma_0 = \varnothing$.

Proposition 5.21. *Sea* $\boldsymbol{\Sigma}$ *una signatura algebraica y* $\Phi \subseteq \mathrm{Ec}(\boldsymbol{\Sigma}, V)$. *Entonces* $\mathcal{V}_{\boldsymbol{\Sigma},V}(\Phi) \in \mathrm{Var}(\mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma}))$.

Demostración. □

Ahora vamos a demostrar la inversa de la proposición anterior, i.e., el teorema de caracterización de Birkhoff, según el cual toda variedad $\mathcal{A}$ se puede representar como una clase ecuacional, i.e., como $\mathcal{V}_{\boldsymbol{\Sigma},V}(\Phi)$, para algún conjunto de ecuaciones $\Phi \subseteq \mathrm{Ec}(\boldsymbol{\Sigma}, V)$. Para ello empezamos definiendo el concepto de clase ecuacional no trivial y demostrando que toda clase ecuacional no trivial tiene álgebras libres

Definition 5.22. Sea $\mathcal{V}$ una clase ecuacional de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras. Decimos que $\mathcal{V}$ *no es trivial* si hay al menos un $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ tal que $\mathrm{card}(A) \geq 2$.

En la sección que dedicamos a las $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras libres demostramos que el functor de olvido $G_{\boldsymbol{\Sigma}} \colon \mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma}) \longrightarrow \mathbf{Set}$ tiene un adjunto a la izquierda $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma}} \colon \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma})$. Ahora demostramos que dado un conjunto de ecuaciones $\Phi \subseteq \mathrm{Ec}(\boldsymbol{\Sigma}, V)$, si la categoría canónicamente asociada a la clase ecuacional $\mathcal{V}_{\boldsymbol{\Sigma},V}(\Phi)$, a la que denotamos por $\mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma}, \Phi)$, no es trivial, entonces el functor de olvido $G_{\boldsymbol{\Sigma},\Phi} \colon \mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma}, \Phi) \longrightarrow \mathbf{Set}$, tiene un adjunto a la izquierda $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma},\Phi} \colon \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma}, \Phi)$.

Proposition 5.23. *Sea* $\Phi \subseteq \mathrm{Ec}(\boldsymbol{\Sigma}, V)$ *un conjunto de ecuaciones y supongamos que la categoría* $\mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma}, \Phi)$ *no sea trivial, i.e., que exista una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{A}$ *tal que, para cada* $(P, Q) \in \Phi$, $\mathbf{A} \models_{\boldsymbol{\Sigma},V} (P, Q)$ *y* $\mathrm{card}(A) \geq 2$. *Entonces, para cada conjunto* X *se cumple que existe una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-algebra* $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\Sigma},\Phi}(X)$ *en* $\mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma}, \Phi)$, *la* $(\boldsymbol{\Sigma}, \Phi)$*-algebra* libre *sobre* X, *y una aplicación* ν_X *de* X *en* $\mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma},\Phi}(X)$, *la* inclusión de los generadores, *tal que para cada* $\boldsymbol{\Sigma}$*-algebra* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma}, \Phi)$ *y cada aplicación* $f \colon X \longrightarrow A$, *hay* *un único* $\mathbf{\Sigma}$*-homomorfismo* $f^\flat$ *de* $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma},\Phi}(X)$ *en* $\mathbf{A}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\nu_X"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma},\Phi}(X) \arrow[d, "f^\flat"] \\ & A \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. A partir de las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras absolutamente libres $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$ y $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, de todos los homomorfismos $h\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ entre ambas álgebras libres y del conjunto de ecuaciones $\Phi \subseteq \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)$, obtenemos la relación binaria $R_\Phi = \bigcup_h h^2[\Phi]$ en $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$. Sea C_Φ la congruencia sobre $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ generada por R_Φ. Entonces la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra cociente $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma},\Phi}(X) = \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/C_\Phi$ junto con la composición $\nu_X = \mathrm{pr}_{C_\Phi} \circ \eta_X$ de $\eta_X : X \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ y $\mathrm{pr}_{C_\Phi}\colon \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \longrightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma},\Phi}(X)$ cumple las condiciones del teorema.

En efecto, por una parte, dada una ecuación $(P, Q) \in \Phi$ y un homomorfismo $f\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma},\Phi}(X)$, puesto que toda $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre es proyectiva, hay un homomorfismo $g\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "f"] \\ \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[r, two heads, "\mathrm{pr}_{C_\Phi}"'] & \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma},\Phi}(X) \end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_{C_\Phi} \circ g)$. Pero $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_{C_\Phi} \circ g) = (g^2)^{-1}[C_\Phi]$, así que $\mathrm{Ker}(f) = (g^2)^{-1}[C_\Phi]$. Ahora bien, por definición, C_Φ es la mínima congruencia sobre $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ que contiene a $\bigcup_h h^2[\Phi]$ y puesto que queremos demostrar que $f(P) = f(Q)$, i.e., que $[g(P)]_{C_\Phi} = [g(Q)]_{C_\Phi}$, o, lo que es equivalente, que $(g(P), g(Q)) \in C_\Phi$, es suficiente que se demuestre que $(g(P), g(Q)) \in \Gamma$, siendo Γ cualquier congruencia sobre $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ que contenga a $\bigcup_h h^2[\Phi]$. Pero si Γ tiene esas propiedades, entonces $g^2[\Phi] \subseteq \Gamma$, luego $(g(P), g(Q)) \in \Gamma$. Por lo tanto, $f(P) = f(Q)$.

Por otra parte, $\nu_X : X \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma},\Phi}(X)$ es inyectiva, ya que si $x, y \in X$ son tales que $x \neq y$, entonces, por no ser $\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}, \Phi)$ trivial, hay una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ en $\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}, \Phi)$ tal que $\mathrm{card}(A) \geq 2$ y, por lo tanto, una aplicación $f\colon X \longrightarrow A$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Luego hay un único homomorfismo $f^\sharp\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[d, "f^\sharp"] \\ & A \end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto $f^\sharp((x)) \neq f^\sharp((y))$, ya que $f^\sharp((x)) = f^\sharp(\eta_X(x)) = f(x)$ y $f^\sharp((y)) = f^\sharp(\eta_X(y)) = f(y)$. Demostramos a continuación que $C_\Phi \subseteq \mathrm{Ker}(f^\sharp)$. Para ello es suficiente que demostremos que, para cada $h\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, $h^2[\Phi] \subseteq \mathrm{Ker}(f^\sharp)$. Sea $h\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, entonces $f^\sharp \circ h$ es un homomorfismo de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$ en $\mathbf{A}$, luego, ya que $\mathbf{A}$ pertenece a $\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}, \Phi)$, para cada $(P, Q) \in \Phi$, se cumple que $f^\sharp(h(P)) = f^\sharp(h(Q))$, i.e., que $h^2[\Phi] \subseteq \mathrm{Ker}(f^\sharp)$. Así que $C_\Phi \subseteq \mathrm{Ker}(f^\sharp)$. Por lo tanto, en virtud de la propiedad universal del cociente, hay un único homomorfismo

$g\colon \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma},\Phi}(X) \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{C_\Phi}"] \arrow[dr, "f^\sharp"'] & \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma},\Phi}(X) \arrow[d, "g"] \\ & \mathbf{A} \end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto, $g([(x)]_{C_\Phi}) = f^\sharp((x))$ y $g([(y)]_{C_\Phi}) = f^\sharp((y))$, así que $g([(x)]_{C_\Phi}) \neq g([(y)]_{C_\Phi})$, por consiguiente $((x),(y)) \notin \mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_{C_\Phi})$. Queda con ello demostrado que ν_X es inyectiva.

Por último, demostramos que para cada $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ en $\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma},\Phi)$ y cada aplicación $f\colon X \longrightarrow A$, hay un único $\mathbf{\Sigma}$-homomorfismo $f^\flat$ de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma},\Phi}(X)$ en $\mathbf{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\nu_X"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma},\Phi}(X) \arrow[d, "f^\flat"] \\ & A \end{tikzcd}$$

conmuta.

Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra en $\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma},\Phi)$ y $f\colon X \longrightarrow A$ una aplicación. Entonces hay un único homomorfismo $f^\sharp\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[d, "f^\sharp"] \\ & A \end{tikzcd}$$

conmuta. Además, se cumple que $C_\Phi \subseteq \mathrm{Ker}(f^\sharp)$. En efecto, dado un homomorfismo $h\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ y una ecuación $(P,Q) \in \Phi$, tenemos que $f^\sharp(h(P)) = f^\sharp(h(Q))$, porque, por ser $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra en $\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma},\Phi)$, se cumple que

$$\Phi \subseteq \bigcap (\mathrm{Ker}(t) \mid t\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{A}),$$

luego, para $t = f^\sharp \circ h$, tenemos que $\Phi \subseteq \mathrm{Ker}(f^\sharp \circ h)$, de modo que $(h(P),h(Q)) \in \mathrm{Ker}(f^\sharp)$. Por lo tanto hay un único homomorfismo $f^\flat$ de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma},\Phi}(X)$ en $\mathbf{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{C_\Phi}"] \arrow[dr, "f^\sharp"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma},\Phi}(X) \arrow[d, "f^\flat"] \\ & A \end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto también conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\nu_X"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma},\Phi}(X) \arrow[d, "f^\flat"] \\ & A \end{tikzcd}$$

□

Demuéstrese que $f^\flat$ es el único homomorfismo de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma},\Phi}(X)$ en $\mathbf{A}$ tal que $f^\flat \circ \nu_X = f$.

Corollary 5.24. *Si la categoría* $\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}, \Phi)$ *no es trivial, entonces cualquier* $(\mathbf{\Sigma}, \Phi)$*-álgebra es isomorfa a un cociente de una* $(\mathbf{\Sigma}, \Phi)$*-álgebra libre.*

Lo mismo que en el caso de las álgebras absolutamente libres, si los conjuntos X e Y son isomorfos, entonces las $(\mathbf{\Sigma}, \Phi)$-álgebras libres $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma},\Phi}(X)$ y $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma},\Phi}(Y)$ son isomorfas. Pero, a diferencia de lo que ocurre con las álgebras absolutamente libres, dos $(\mathbf{\Sigma}, \Phi)$-álgebras libres pueden ser isomorfas, pero no serlo sus conjuntos de generadores libres. Los teoremas de Fujiwara que establecemos a continuación, aclaran la situación descrita.

Proposition 5.25 (Fujiwara)**.** *Si la categoría* $\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}, \Phi)$ *no es trivial y las* $(\mathbf{\Sigma}, \Phi)$*-álgebras libres* $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma},\Phi}(X)$ *y* $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma},\Phi}(Y)$ *son isomorfas, siendo* X *o* Y *un conjunto infinito, entonces* X *e* Y *son isomorfos.*

Demostración. □

Proposition 5.26 (Fujiwara)**.** *Si* Φ *se puede extender hasta un conjunto de ecuaciones* Ψ *tal que la categoría* $\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}, \Psi)$ *no sea trivial y, para cada conjunto finito* X*,* $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma},\Psi}(X)$ *es finita, entonces en la categoría* $\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}, \Phi)$*, las álgebras libres isomorfas tienen conjuntos de generadores libres isomorfos*

Demostración. □

Una vez demostrada la existencia de álgebras libres en las clases ecuacionales no triviales, y con el objetivo de establecer el teorema de representación de Birkhoff, necesitamos considerar las ecuaciones, con variables en un conjunto arbitrario, que son válidas en una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Para ello, dado un conjunto de variables X, definimos la aplicación $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}$ de $\mathrm{Sub}(\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})))$ en $\mathrm{Sub}(\mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X))$, inducida, lo mismo que la aplicación $\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}$ de $\mathrm{Sub}(\mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X))$ en $\mathrm{Sub}(\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})))$, por la relación de satisfacibilidad entre álgebras y ecuaciones.

Definition 5.27. Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica, X un conjunto y $\mathbf{A} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Entonces $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\{\mathbf{A}\})$ o, para abreviar, $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathbf{A})$, la *teoría ecuacional generada por* $\{\mathbf{A}\}$ es el conjunto definido como:

$$\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathbf{A}) = \{\, (P, Q) \in \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X) \mid \mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma},X} (P, Q) \,\},$$

de modo que $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathbf{A})$ consta de todas las $(\mathbf{\Sigma}, X)$-ecuaciones (P, Q) válidas en $\mathbf{A}$.

La proposición que sigue afirma que el par de operadores $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}$ y $\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}$ determina una conexión de Galois contravariante entre el conjunto ordenado de los conjuntos de ecuaciones y el conjunto ordenado de los conjuntos de álgebras.

Proposition 5.28. *Sea* $\mathbf{\Sigma}$ *una signatura algebraica y* X *un conjunto. Si* $\mathbf{\Sigma}$ *tiene al menos una operación formal cero-aria o* X *no es vacío, entonces la aplicación* $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}$ *de* $\mathrm{Sub}(\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})))$ *en* $\mathrm{Sub}(\mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X))$ *definida como:*

$$\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X} \begin{cases} \mathrm{Sub}(\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}))) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X)) \\ \qquad\mathcal{A} \qquad\qquad \longmapsto \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}) = \begin{cases} \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X), & si\ \mathcal{A} = \varnothing; \\ \bigcap_{\mathbf{A}\in\mathcal{A}} \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathbf{A}), & si\ \Phi \neq \varnothing, \end{cases} \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. *Para cada* $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Sub}(\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})))$*,* $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}) \neq \varnothing$*.*
2. *Para cada* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathrm{Sub}(\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})))$*, si* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$*, entonces* $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{B}) \subseteq \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A})$*, i.e., a más* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras menos leyes válidas en ellas.*

Al conjunto de ecuaciones $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A})$ *lo llamamos la* teoría ecuacional generada *por* $\mathcal{A}$.

Además, se cumple que:

1. *Para cada* $\Phi \subseteq \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X)$, $\Phi \subseteq \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(\Phi))$.
2. *Para cada* $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}))$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}))$.

Demostración. Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Sub}(\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})))$. Si $\mathcal{A} = \varnothing$, entonces, por definición, $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}) = \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X)$ y este último conjunto no es vacío, porque hemos supuesto que $\mathbf{\Sigma}$ tiene al menos una operación formal cero-aria o X no es vacío. Si $\mathcal{A} \neq \varnothing$, tampoco es vacía la teoría ecuacional generada por $\mathcal{A}$, porque, para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ y cada operación polinómica formal $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, se cumple que $\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma},X} (P, P)$.

Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathrm{Sub}(\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})))$, tales que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Si $\mathcal{A} = \varnothing$, entonces $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}) = \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X)$, luego, obviamente, $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{B}) \subseteq \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A})$. Por otra parte, si $\mathcal{A} \neq \varnothing$, entonces $\mathcal{B} \neq \varnothing$, luego podemos considerar $\bigcap_{\mathbf{A}\in\mathcal{A}} \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathbf{A})$ y $\bigcap_{\mathbf{B}\in\mathcal{B}} \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathbf{B})$, por lo tanto, ya que $\{\, \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathbf{A}) \mid \mathbf{A} \in \mathcal{A} \,\} \subseteq \{\, \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathbf{B}) \mid \mathbf{B} \in \mathcal{B} \,\}$,también en este caso se cumple que $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{B}) \subseteq \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A})$.

Por último, en virtud de las definiciones de los operadores $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}$ y $\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}$, se cumple que $\Phi \subseteq \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(\Phi))$ y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}))$. □

Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Sub}(\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})))$. Demuéstrese que:

$$\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}) = \begin{cases} \bigcap_{\mathbf{A}\in\mathcal{A}} \bigcap_{f\in\mathrm{Hom}(\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X),\mathbf{A})} \mathrm{Ker}(f), & \text{si } \mathcal{A} \neq \varnothing; \\ \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X), & \text{si } \mathcal{A} = \varnothing. \end{cases}$$

Proposition 5.29. *Sea* $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Sub}(\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})))$. *Entonces* $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A})$ *es una congruencia totalmente invariante sobre la* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, *i.e., es una congruencia sobre* $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ *y, para cada endomorfismo* f *de* $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ *y cada* $(P, Q) \in \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, X)$, *si* $(P, Q) \in \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A})$, *entonces* $(f(P), f(Q)) \in \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A})$.

Demostración. □

Proposition 5.30. *Los puntos fijos del operador clausura* $\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V} \circ \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}$ *son las clases ecuacionales y los del operador clausura* $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V} \circ \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}$ *las congruencias totalmente invariantes. Además, los conjuntos ordenados* $\mathbf{Fix}(\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V} \circ \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V})$ *y* $\mathbf{Fix}(\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V} \circ \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V})$ *son retículos algebraicos antiisomorfos, i.e., se cumple, por una parte, que hay una clase ecuacional máxima, el conjunto de todas las* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebras, que la intersección de un conjunto no vacío de clases ecuacionales es una clase ecuacional y que la unión de un conjunto no vacío dirigido superiormente de clases ecuacionales es una clase ecuacional; por otra, que hay una congruencia totalmente invariante máxima, que la intersección de un conjunto no vacío de congruencias totalmente invariantes es una congruencia totalmente invariante y que la unión de un conjunto no vacío dirigido superiormente de congruencias totalmente invariantes es una congruencia totalmente invariante; y, por último, que hay una correspondencia biunívoca entre las clases ecuacionales y las congruencias totalmente invariantes, que es, además, antítona.*

Demostración. Si $\Phi = \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Phi))$, entonces, en virtud de la proposición anterior, Φ es una congruencia totalmente invariante. Recíprocamente, supongamos que Φ sea una congruencia totalmente invariante sobre $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$. Entonces, ya que siempre se cumple que $\Psi \subseteq \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Psi))$, para cualquier conjunto Ψ de ecuaciones, sólo falta demostrar que, siendo la congruecia Φ totalmente invariante, tenemos que $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Psi)) \subseteq \Phi$. Ahora bien, se cumple que $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)/\Phi \in \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Phi)$, porque, dada una ecuación $(P, Q) \in \Phi$ y un $f\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)/\Phi$, por ser las álgebras libres proyectivas, existe un $g\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$ tal que el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
& \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "f"] \\
\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \arrow[r, two heads, "\mathrm{pr}_{\Phi}"'] & \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)/\Phi
\end{tikzcd}
$$

conmuta, luego $(g(P), g(Q)) \in \Phi$, por lo tanto $f(P) = f(Q)$. Si $(P, Q) \notin \Phi$, entonces (P, Q) no es válida en $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)/\Phi$, porque hay al menos un homomorfismo de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$ en $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)/\Phi$, e.g., la proyección canónica, para el que la ecuación (P, Q) no está en el núcleo de la misma. Por consiguiente $(P, Q) \notin \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Phi))$. $\square$

Proposition 5.31. *Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ una variedad de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras. Entonces se cumple que $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}) \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Por ser $\mathcal{A}$ una variedad, $\mathrm{P}_{\mathrm{sd}}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$. Por consiguiente, todo se reduce a comprobar que $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}) \in \mathrm{P}_{\mathrm{sd}}(\mathcal{A})$, i.e., que existe un $I \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, una familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras $(\mathbf{A}_i \mid i \in I) \in \mathcal{A}^I$ y un monomorfismo

$$f\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}) \rightarrowtail \textstyle\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$$

tal que, para cada $i \in I$, $\mathrm{pr}_i \circ f$ es un homomorfismo sobreyectivo de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A})$ en $\mathbf{A}_i$.

Por ser $\mathcal{A}$ una variedad, para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ y cada $f\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \longrightarrow \mathbf{A}$, se cumple que $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Ker}(f) \in \mathcal{A}$. Por lo tanto, ya que $\mathrm{Hom}(\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X), \mathbf{A}) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, también $\prod_f \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Ker}(f) \in \mathrm{A}$. Ahora bien, para cada $f\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \longrightarrow \mathbf{A}$, $\bigcap_f \mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, luego hay un único homomorfismo $\mathrm{p}_{\mathbf{A},f}$ de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\bigcap_f \mathrm{Ker}(f)$ en $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Ker}(f)$ tal que, para cada $f\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \longrightarrow \mathbf{A}$, el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
& \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[dl, "\mathrm{pr}"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_f"] & \\
\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\bigcap_f \mathrm{Ker}(f) \arrow[rr, "\mathrm{p}_{\mathbf{A},f}"'] & & \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Ker}(f)
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Luego, para una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$, arbitraria pero fija, hay un único homomorfismo $[\mathrm{p}_{\mathbf{A},f}]_f$ de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\bigcap_f \mathrm{Ker}(f)$ en $\prod_f \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Ker}(f)$ tal que, para cada $f\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \longrightarrow \mathbf{A}$, el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\bigcap_f \mathrm{Ker}(f) \arrow[d, "{[\mathrm{p}_{\mathbf{A},f}]_f}"'] \arrow[dr, "\mathrm{p}_{\mathbf{A},f}"] & \\
\prod_f \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathbf{A},f}"'] & \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Ker}(f)
\end{tikzcd}
$$

conmuta. El homomorfismo $[\mathrm{p}_{\mathbf{A},f}]_f$ es inyectivo. En efecto, si $P, Q \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ son tales que $[\mathrm{p}_{\mathbf{A},f}]_f([P]) = [\mathrm{p}_{\mathbf{A},f}]_f([Q])$, entonces, en virtud de la definición de $[\mathrm{p}_{\mathbf{A},f}]_f$ y de $\mathrm{p}_{\mathbf{A},f}$, se cumple que, para cada $f\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \longrightarrow \mathbf{A}$, $[P]_{\mathrm{Ker}(f)} = [Q]_{\mathrm{Ker}(f)}$, luego que $(P, Q) \in \bigcap_f \mathrm{Ker}(f)$, i.e., $[P] = [Q]$. Por consiguiente podemos afirmar que $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\bigcap_f \mathrm{Ker}(f) \in \mathcal{A}$. De este modo hemos obtenido el conjunto

$$\{\, \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\bigcap_f \mathrm{Ker}(f) \mid \mathbf{A} \in \mathcal{A} \,\}$$

que, aparentemente, sólo es un subconjunto de $\boldsymbol{\mathcal{U}}$. No obstante, vamos a demostrar que existe un conjunto $I \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ y una sobreyección de I en $\{\, \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\bigcap_f \mathrm{Ker}(f) \mid \mathbf{A} \in \mathcal{A} \,\}$, lo cual, en virtud de las propiedades del universo de Grothendieck $\boldsymbol{\mathcal{U}}$, nos permitirá afirmar que $\{\, \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\bigcap_f \mathrm{Ker}(f) \mid \mathbf{A} \in \mathcal{A} \,\}$ es un elemento de $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ y podremos continuar con la demostración.

Sea $I = \{\, \Phi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)) \mid \exists \mathbf{A} \in \mathcal{A}\, (\, \Phi = \bigcap_{f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X), \mathbf{A})} \mathrm{Ker}(f)\,)\,\}$. Puesto que $\mathrm{Cgr}(\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ e $I \subseteq \mathrm{Cgr}(\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X))$, $I \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$. Es evidente que hay una sobreyección de I en el conjunto $\{\, \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\bigcap_f \mathrm{Ker}(f) \mid \mathbf{A} \in \mathcal{A} \,\}$, por lo tanto este último conjunto pertenece a $\boldsymbol{\mathcal{U}}$. Entonces, por ser $\mathcal{A}$ una variedad, $\prod_{\Phi \in I} \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\Phi \in \mathcal{A}$. Por lo tanto, ya que $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathbf{A} \in \mathcal{A}} \bigcap_f \mathrm{Ker}(f)$, para cada $\Phi \in I$, se cumple que $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}) \subseteq \Phi$, luego hay un único homomorfismo sobreyectivo $\mathrm{p}_{\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}),\Phi}$ de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A})$ en $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\Phi$ tal que, para cada $\Phi \in I$, el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[dl, "\mathrm{pr}"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{\Phi}"] & \\
\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}) \arrow[rr, "\mathrm{p}_{\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}),\Phi}"'] & & \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\Phi
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Luego hay un único homomorfismo

$$[\mathrm{p}_{\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}),\Phi}]_{\Phi \in I} \colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}) \longrightarrow \prod_{\Phi \in I} \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\Phi$$

tal que, para cada $\Phi \in I$, el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}) \arrow[d, "{[\mathrm{p}_{\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}),\Phi}]_{\Phi \in I}}"'] \arrow[dr, "\mathrm{p}_{\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}),\Phi}"] & \\
\prod_{\Phi \in I} \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\Phi \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\Phi}"'] & \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\Phi
\end{tikzcd}
$$

conmuta. El homomorfismo $[\mathrm{p}_{\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}),\Phi}]_{\Phi}$ es inyectivo. En efecto, si $P, Q \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ son tales que $[\mathrm{p}_{\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}),\Phi}]_{\Phi}([P]) = [\mathrm{p}_{\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}),\Phi}]_{\Phi}([Q])$, entonces, en virtud de la definición de $[\mathrm{p}_{\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}),\Phi}]_{\Phi}$ y de $\mathrm{p}_{\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}),\Phi}$, se cumple que, para cada $\Phi \in I$, $[P]_{\Phi} = [Q]_{\Phi}$, luego que, para cada $\Phi \in I$, $(P,Q) \in \Phi$, así que $(P,Q) \in \bigcap_{\Phi \in I} \Phi$. Pero $\bigcap_{\Phi \in I} \Phi = \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A})$, luego $(P,Q) \in \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A})$, por lo tanto $[P] = [Q]$. Podemos, por fin, afirmar que $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}) \in \mathcal{A}$ $\square$

Establecemos a continuación la última proposición necesaria para demostrar el teorema de representación de Birkhoff.

Proposition 5.32. *Sea X un conjunto infinito y $\mathcal{A}$ una variedad de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras. Entonces se cumple que $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A})$ es una $(\mathbf{\Sigma}, \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{A}))$-álgebra libre sobre el conjunto X, i.e., que $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}) \in \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{A}))$ y que, siendo ν_X la composición de $\eta_X \colon X \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ y $\mathrm{pr}_{\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A})} \colon \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A})$, el par $(\nu_X, \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}))$, es tal que, para cada $\mathbf{B}$ en $\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{A}))$ y cada $f \colon X \longrightarrow B$, existe un único $f^{\flat} \colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{B}$ tal que el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\nu_X"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}) \arrow[d, "f^{\flat}"] \\
 & \mathbf{B}
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Demostración. Puesto que $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathbf{A}} \bigcap_{g} \mathrm{Ker}(g)$, con $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ y $g\colon \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{A}$, $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathbf{A}} \bigcap_{f} \mathrm{Ker}(g)$, con $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ y $f\colon \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \longrightarrow \mathbf{A}$ y $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma},\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{A})}(X)$ es el cociente de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ entre la congruencia Ψ sobre $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ generada por $\bigcup_h h^2[\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{A})]$, con $h\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, todo se reduce a demostrar que Ψ coincide con $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A})$. Para demostrar que $\Psi \subseteq \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A})$ es suficiente que verifiquemos que, para cada $h\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, $h^2[\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{A})] \subseteq \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A})$. Dados h y $(P,Q) \in \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{A})$, se cumple que $(h(P), h(Q)) \in \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A})$, porque si $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ y $f\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \longrightarrow \mathbf{A}$, entonces $f \circ h\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{A}$ y, ya que $(P,Q) \in \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{A})$, también $f(h(P)) = f(h(Q))$.

Recíprocamente, si la ecuación $(P,Q) \in \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A})$, entonces, debido a que $\mathrm{Var}(P,Q) \subseteq_{\mathrm{fin}} X$, hay una parte Y de X tal que $\mathrm{card}(Y) = \aleph_0$ y $P,Q \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)}(\eta_X[Y])$. Sean pues $j\colon V \longrightarrow X$ y $q\colon X \longrightarrow V$ tales que $q \circ j = \mathrm{id}_V$ e $\mathrm{Im}(j) = Y$. Entonces hay un único par de homomorfismos $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(j)$ de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$ en $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ y $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(q)$ de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ en $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$ tales que los diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[d, "j"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \arrow[d, "\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(j)"] \\
X \arrow[r, "\eta_X"] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "q"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[d, "\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(q)"] \\
V \arrow[r, "\eta_V"] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)
\end{tikzcd}
$$

conmutan. Además, $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(q) \circ \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(j) = \mathrm{id}_{\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)}$ y $\mathrm{Im}(\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(j)) = \mathrm{Sg}_{\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)}(\eta_X[Y])$. Por lo tanto hay dos operaciones polinómicas formales $\overline{P}, \overline{Q} \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$ tales que $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(j)(\overline{P}) = P$ y $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(j)(\overline{Q}) = Q$. Veamos que $(\overline{P}, \overline{Q}) \in \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A})$. Sea $g\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{A}$, entonces, ya que el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \arrow[r, "\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(j)"] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[d, "\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(q)"] \\
\mathbf{A} & \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X) \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}
$$

conmuta y $(P,Q) \in \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A})$, $g(\overline{P}) = g(\overline{Q})$, por lo tanto $(\overline{P}, \overline{Q}) \in \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A})$. Luego, ya que $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(j)\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, tenemos que $(P,Q) = (\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(j)(\overline{P}), \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(j)(\overline{P})) \in \bigcup_h h^2[\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A})]$, con $h\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$, de donde $(P,Q) \in \Psi$. □

Theorem 5.33 (Birkhoff)**.** *Una condición necesaria y suficiente para que un conjunto $\mathcal{A}$ de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras sea una variedad es que exista un conjunto de ecuaciones $\Phi \subseteq \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)$ tal que $\mathcal{A} = \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Phi)$.*

Demostración. Si $\mathcal{A} = \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Phi)$, para un conjunto de ecuaciones $\Phi \subseteq \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)$, entonces $\mathcal{A}$ es una variedad, según vimos con anterioridad. Recíprocamente, si $\mathcal{A}$ es una variedad, entonces, en virtud de las definiciones de los operadores $\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}$ y $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}$, se cumple que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{A}))$.

Por otra parte, si $\mathbf{A} \in \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{A}))$, entonces $\mathbf{A}$ es una imagen homomorfa de una $(\Sigma, \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{A}))$-álgebra libre $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma},\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{A})}(X)$ sobre un conjunto infinito X. Pero $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma},\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{A})}(X) = \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A})$ y $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A}) \in \mathcal{A}$, luego, por ser $\mathbf{A}$ una imagen homomorfa de $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},X}(\mathcal{A})$, $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$. □

5.3. Las relaciones de consecuencia semántica y sintáctica. Sabemos que $\models_{\mathbf{\Sigma},V}$, la relación de satisfacibilidad de Birkhoff, es una relación que se establece entre objetos matemáticos de una cierta especie, las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras, y una determinada clase de entidades formales, las $(\mathbf{\Sigma}, V)$-ecuaciones, i.e., en definitiva, una relación entre la semántica y la sintaxis; demostrándose, en última instancia, que son esencialmente indistinguibles, debido al antiisomorfismo existente entre las clases ecuacionales y las congruencias totalmente invariantes. A partir de esa relación definimos, a continuación, otra relación binaria, la relación de *consecuencia semántica*, denotada por $\Vdash_{\mathbf{\Sigma},V}$, pero esta vez entre conjuntos de $(\mathbf{\Sigma}, V)$-ecuaciones y $(\mathbf{\Sigma}, V)$-ecuaciones, y que pretende dar cuenta, algebraicamente, de cuando se puede afirmar que una cierta ecuación es válida, suponiendo que las ecuaciones de un cierto conjunto de ecuaciones sean ya válidas.

Definition 5.34. Sea Φ un conjunto de $(\mathbf{\Sigma}, V)$-ecuaciones y (P, Q) una $(\mathbf{\Sigma}, V)$-ecuación. Entonces decimos que (P, Q) es una *consecuencia semántica* de Φ, y lo denotamos por $\Phi \Vdash_{\mathbf{\Sigma},V} (P, Q)$, si $\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Phi) \subseteq \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(P, Q)$.

Demuéstrese que una condición necesaria y suficiente para que (P, Q) sea una concecuencia semántica de Φ es que $(P, Q) \in \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Phi))$, la congruencia totalmente invariante generada por Φ.

La relación $\Vdash_{\mathbf{\Sigma},V}$ de consecuencia semántica, determina una endoaplicación $\mathrm{Cn}_{\Vdash_{\mathbf{\Sigma},V}}$ del conjunto $\mathrm{Sub}(\mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V))$, precisamente la definida como:

$$\mathrm{Cn}_{\Vdash_{\mathbf{\Sigma},V}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(\mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)) \\ \qquad \Phi \qquad \longmapsto \{\, (P, Q) \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)^2 \mid \Phi \Vdash_{\mathbf{\Sigma},V} (P, Q)) \,\}. \end{cases}$$

Demuéstrese que $\mathrm{Cn}_{\Vdash_{\mathbf{\Sigma},V}} = \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V} \circ \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}$ y que es un operador clausura sobre el conjunto $\mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)$.

La relación de consecuencia semántica $\Vdash_{\mathbf{\Sigma},V}$ entre un conjunto de ecuaciones Φ y una ecuación (P, Q), la hemos definido haciendo uso, en principio, de todas las valoraciones f del conjunto infinito numerable V en todas las álgebras $\mathbf{A}$ que sean modelo del conjunto de ecuaciones Φ. Por consiguiente, si alguna de las álgebras $\mathbf{A}$ tuviera al menos dos elementos, el número de las valoraciones a considerar sería al menos $\aleph_1$, que, desde un punto de vista constructivo, no tiene ningún sentido.

Ahora definimos una nueva relación binaria $\vdash_{\mathbf{\Sigma},V}$, la relación de *consecuencia sintáctica*, entre conjuntos de $(\mathbf{\Sigma}, V)$-ecuaciones y $(\mathbf{\Sigma}, V)$-ecuaciones, que tiene un caracter finitista, algorítmico, y demostramos que el operador $\mathrm{Cn}_{\vdash_{\mathbf{\Sigma},V}}$ asociado a la relación $\vdash_{\mathbf{\Sigma},V}$, coincide con el operador $\mathrm{Cn}_{\Vdash_{\mathbf{\Sigma},V}}$, que no deja de ser, hasta cierto punto, sorprendente, dado el caracter platonizante del operador $\mathrm{Cn}_{\Vdash_{\mathbf{\Sigma},V}}$. De hecho, el operador $\mathrm{Cn}_{\vdash_{\mathbf{\Sigma},V}}$ será el operador de formación de las subálgebras no deterministas de una determinada álgebra no determinista sobre $\mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)$. Es por ello que definimos a continuación el concepto de álgebra no determinista y el operador de formación de las subálgebras no deterministas de una tal álgebra.

Definition 5.35. Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y A un conjunto. Una $\mathbf{\Sigma}$-*estructura algebraica no determinista* sobre el conjunto A es una aplicación

$$R\colon \Sigma \longrightarrow \textstyle\bigcup_{\sigma\in\Sigma} \mathrm{Hom}(A^{\mathrm{ar}(\sigma)}, \mathrm{Sub}(A))$$

tal que, para cada $\sigma \in \Sigma$, $R_\sigma \in \mathrm{Hom}(A^{\mathrm{ar}(\sigma)}, \mathrm{Sub}(A))$.

En algunos casos, para evitar equivocaciones, denotaremos la $\mathbf{\Sigma}$-estructura algebraica no determinista que estemos considerando sobre un conjunto A por $R^{\mathbf{A}}$, y a las operaciones no deterministas que la componen por $R^{\mathbf{A}}_\sigma$, con $\sigma \in \Sigma$. Además, cuando $\mathrm{ar}(\sigma) = 0$, denotaremos por $\sigma^{\mathbf{A}}$ el valor de $R^{\mathbf{A}}_\sigma\colon 1 \longrightarrow \mathrm{Sub}(A)$ en el único miembro de 1, que es un subconjunto de A.

Una $\mathbf{\Sigma}$-*álgebra no determinista* es un par ordenado $\mathbf{A} = (A, R)$, en el que A es un conjunto y R una $\mathbf{\Sigma}$-estructura algebraica no determinista sobre A.

Definition 5.36. Sea $\mathbf{A} = (A, R)$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra no determinista y X un subconjunto de A.

1. Si $\sigma \in \Sigma$, con $\operatorname{ar}(\sigma) = n$, decimos que X está *cerrado bajo la operación no determinista* $R_\sigma \colon A^n \longrightarrow \operatorname{Sub}(A)$ si, para cada $a \in X^n$, $R_\sigma(a) \subseteq X$, i.e., si $\bigcup_{a \in X^n} R_\sigma(a) \subseteq X$.
2. Decimos que X es un *cerrado* de $\mathbf{A}$ si, para cada $\sigma \in \Sigma$ con $\operatorname{ar}(\sigma) = n$, y cada $a \in X^n$, $R_\sigma(a) \subseteq X$, i.e., si X está cerrado bajo cada una de las operaciones no deterministas estructurales de $\mathbf{A}$. Al conjunto de los cerrados de $\mathbf{A}$ lo denotamos por $\mathrm{S}(\mathbf{A})$.

Proposition 5.37. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra no determinista. Entonces el conjunto de los cerrados de* $\mathbf{A}$, $\mathrm{S}(\mathbf{A})$, *es un sistema de clausura algebraico sobre* A, *i.e., tiene las siguientes propiedades:*

1. $A \in S(\mathbf{A})$.
2. *Si* $\mathcal{C} \subseteq S(\mathbf{A})$ *y* $\mathcal{C} \neq \varnothing$, *entonces* $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \in S(\mathbf{A})$.
3. *Si* $\mathcal{C} \subseteq S(\mathbf{A})$, $\mathcal{C} \neq \varnothing$ *y si dados* $X, Y \in \mathcal{C}$, *hay un* $Z \in \mathcal{C}$ *tal que* $X \cup Y \subseteq Z$, *entonces* $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \in S(\mathbf{A})$.

Demostración. □

Corollary 5.38. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\boldsymbol{\Sigma}$*-álgebra no determinista. Entonces la endoaplicación* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *del conjunto* $\operatorname{Sub}(A)$, *definida como:*

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}} \begin{cases} \operatorname{Sub}(A) & \longrightarrow \operatorname{Sub}(A) \\ \quad X & \longmapsto \bigcap\{\, C \in \mathrm{S}(\mathbf{A}) \mid X \subseteq C \,\} \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. $\operatorname{Im}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}) \subseteq S(\mathbf{A})$.
2. $\{\, X \in \operatorname{Sub}(A) \mid X = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \,\} = S(\mathbf{A})$.
3. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es extensiva o inflacionaria, i.e., para cada* $X \in \operatorname{Sub}(A)$, *se cumple que* $X \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.
4. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es isótona, i.e., para cada* $X, Y \in \operatorname{Sub}(A)$, *si* $X \subseteq Y$, *entonces se cumple que* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(Y)$.
5. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es idempotente, i.e., para cada* $X \in \operatorname{Sub}(A)$, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X))$.
6. $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *es algebraica, i.e., para cada* $\mathcal{X} \subseteq \operatorname{Sub}(A)$, *si* $\mathcal{X} \neq \varnothing$ *y para cada* $X, Y \in \mathcal{X}$, *existe un* $Z \in \mathcal{X}$ *tal que* $X \cup Y \subseteq Z$, *entonces* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\bigcup \mathcal{X}) = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

Por consiguiente, para cada $X \subseteq A$, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ *es el mínimo cerrado de* $\mathbf{A}$ *que contiene a* X, *y lo denominamos el* cerrado de $\mathbf{A}$ generado por X.

Demostración. □

A continuación, introducimos unas nociones que nos permitirán obtener una descripción más *constructiva* de la subálgebra no determinista generada por un conjunto, y que son formalmente idénticas a las consideradas en el caso de las álgebras ordinarias.

Definition 5.39. Sea $\mathbf{A} = (A, R)$ una $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebra no determinista. Entonces:

1. Denotamos por $\mathrm{E}_{\mathbf{A}}$ el operador sobre $\operatorname{Sub}(A)$, definido como:

$$\mathrm{E}_{\mathbf{A}} \begin{cases} \operatorname{Sub}(A) & \longrightarrow \operatorname{Sub}(A) \\ \quad X & \longmapsto X \cup \Big(\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \bigcup_{a \in X^{\operatorname{ar}(\sigma)}} R_\sigma(a) \Big) \end{cases}.$$

2. Si $X \subseteq A$, entonces denotamos por $(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X) \mid n \in \mathbb{N})$ la familia en $\operatorname{Sub}(A)$ definida por recursión como:

$$\mathrm{E}^0_{\mathbf{A}}(X) = X,$$
$$\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{E}_{\mathbf{A}}(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)), \text{ si } n \geq 0.$$

Además, convenimos que:

$$\mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X) = \bigcup(\mathrm{E}^{n}_{\mathbf{A}}(X) \mid n \in \mathbb{N}).$$

Proposition 5.40. *Si* $\mathbf{A}$ *es una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra no determinista y* $X \subseteq A$*, entonces* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X)$.

Demostración. □

Definition 5.41. Denotamos por $\mathbf{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)$ el álgebra no determinista cuyo conjunto subyacente es $\mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)$ y cuyas operaciones no deterministas estructurales son:

1. R_{rf}, siendo R_{rf} la operación no determinista ceroaria definida como:
$$\mathrm{R}_{\mathrm{rf}} \begin{cases} 1 \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)) \\ 0 \longmapsto \Delta_{\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)}. \end{cases}$$
También denotada, para cada $P \in \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$, por:
$$(\mathrm{R}_{\mathrm{rf}})\ \frac{}{(P, P)}.$$
2. R_{sm}, siendo R_{sm} la operación no determinista unaria definida como:
$$\mathrm{R}_{\mathrm{sm}} \begin{cases} \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)) \\ (P, Q) \longmapsto \{\, (Q, P) \,\}. \end{cases}$$
También denotada por:
$$(\mathrm{R}_{\mathrm{sm}})\ \frac{(P, Q)}{(Q, P)}.$$
3. R_{tr}, siendo R_{tr} la operación no determinista binaria definida como:
$$\mathrm{R}_{\mathrm{tr}} \begin{cases} \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)^2 \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)) \\ ((P, Q), (R, S)) \longmapsto \mathrm{R}_{\mathrm{tr}}((P, Q), (R, S)) = \begin{cases} \{\, (P, S) \,\}, & \text{si } Q = R; \\ \varnothing, & \text{si } Q \neq R. \end{cases} \end{cases}$$
También denotada por:
$$(\mathrm{R}_{\mathrm{tr}})\ \frac{(P, Q), (Q, R)}{(P, R)}.$$
4. Para cada $n \in \mathbb{N} - 1$ y cada $\sigma \in \Sigma_n$, R_{σ}, siendo R_{σ} la operación no determinista n-aria definida como:
$$\mathrm{R}_{\sigma} \begin{cases} \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)^n \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)) \\ ((P_j, Q_j) \mid j \in n) \longmapsto \{\, ((\sigma)P_0 \cdots P_{n-1}, (\sigma)Q_0 \cdots Q_{n-1}) \,\}. \end{cases}$$
También denotada por:
$$(\mathrm{R}_{\sigma})\ \frac{((P_j, Q_j) \mid j \in n)}{((\sigma)P_0 \cdots P_{n-1}, (\sigma)Q_0 \cdots Q_{n-1})}.$$
5. Para cada valoración $f\colon V \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$, R_f, siendo R_f la operación no determinista unaria definida como:
$$\mathrm{R}_{f} \begin{cases} \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)) \\ (P, Q) \longmapsto \{\, (f^{\sharp}(P), f^{\sharp}(Q)) \,\}. \end{cases}$$
También denotada por:
$$(\mathrm{R}_{\sigma})\ \frac{(P, Q)}{(f^{\sharp}(P), f^{\sharp}(Q))}.$$

Por último, si Φ es un conjunto de $(\mathbf{\Sigma}, V)$-ecuaciones y $(P, Q) \in \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)$, entonces decimos que (P, Q) es una *consecuencia sintáctica* de Φ, y lo denotamos por $\Phi \vdash_{\mathbf{\Sigma}, V} (P, Q)$, si $(P, Q) \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)}(\Phi)$.

Proposition 5.42. *Una condición necesaria y suficiente para que un conjunto de* $(\mathbf{\Sigma}, V)$*-ecuaciones* Φ *sea una subálgebra no determinista de* $\mathbf{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)$ *es que sea una congruencia totalmente invariante sobre* $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$

Demostración. □

Proposition 5.43. *El conjunto* $\mathrm{Cl}(\mathbf{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V))$ *de las subálgebras no deterministas de* $\mathbf{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)$ *es un sistema de clausura algebraico sobre* $\mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)$ *o, lo que es equivalente, el conjunto de las congruencias totalmente invariantes sobre* $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$ *es un sistema de clausura algebraico sobre* $\mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)$

Demostración. □

Puesto que para demostrar el teorema de completud de Birkhoff será conveniente, damos otra descripción de la subálgebra no determinista de $\mathbf{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)$ generada por un conjunto de $(\mathbf{\Sigma}, V)$-ecuaciones Φ.

Proposition 5.44. *Sea* Φ *un conjunto de* $(\mathbf{\Sigma}, V)$*-ecuaciones y* $(P, Q) \in \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)$*. Una condición necesaria y suficiente para que* $(P, Q) \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)}(\Phi)$ *es que exista una familia finita no vacía* $((P_i, Q_i) \mid i \in m)$ *en* $\mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)^m$ *tal que:*

1. $(P, Q) = (P_{m-1}, Q_{m-1})$.
2. $\forall i \in m$, $(P_i, Q_i) \in \mathrm{R}_{rf}$, *o* $(P_i, Q_i) \in \Phi$, *o* $\exists k \in i$ *tal que* $(P_i, Q_i) \in \mathrm{R}_{sm}(P_k, Q_k)$, *o* $\exists k, l \in i$ *tales que* $(P_i, Q_i) \in \mathrm{R}_{tr}((P_k, Q_k), (P_l, Q_l))$, *o* $\exists k \in i$ *y* $\exists f \colon V \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$ *tales que* $(P_i, Q_i) \in \mathrm{R}_f(P_k, Q_k)$, *o* $\exists n \in \mathbb{N} - 1$, $\exists (j_\alpha \mid \alpha \in n) \in i^n$ *y* $\exists \sigma \in \Sigma_n$ *tales que* $(P_i, Q_i) \in \mathrm{R}_\sigma((P_j, Q_j) \mid j \in n)$.

Demostración. □

Theorem 5.45 (de corrección de Birkhoff)**.** *Para cada* $\Phi \subseteq \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)$ *y cada* $(P, Q) \in \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)$*, si* $\Phi \vdash_{\mathbf{\Sigma}, V} (P, Q)$*, entonces* $\Phi \Vdash_{\mathbf{\Sigma}, V} (P, Q)$*.*

Demostración. Supongamos que $\Phi \vdash_{\mathbf{\Sigma}, V} (P, Q)$. Entonces, en virtud de la proposición anterior existe una familia finita no vacía $((P_i, Q_i) \mid i \in m)$ en $\mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)^m$ tal que:

1. $(P, Q) = (P_{m-1}, Q_{m-1})$.
2. $\forall i \in m$, $(P_i, Q_i) \in \mathrm{R}_{\mathrm{rf}}$, o $(P_i, Q_i) \in \Phi$, o $\exists k \in i$ tal que $(P_i, Q_i) \in \mathrm{R}_{\mathrm{sm}}(P_k, Q_k)$, o $\exists k, l \in i$ tales que $(P_i, Q_i) \in \mathrm{R}_{\mathrm{tr}}((P_k, Q_k), (P_l, Q_l))$, o $\exists k \in i$ y $\exists f \colon V \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$ tales que $(P_i, Q_i) \in \mathrm{R}_f(P_k, Q_k)$, o $\exists n \in \mathbb{N} - 1$, $\exists (j_\alpha \mid \alpha \in n) \in i^n$ y $\exists \sigma \in \Sigma_n$ tales que $(P_i, Q_i) \in \mathrm{R}_\sigma((P_j, Q_j) \mid j \in n)$.

Sea $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra y supongamos que, para cada $(M, N) \in \Phi$, $\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma}, V} (M, N)$. Puesto que (P, Q) es el último término de una sucesión finita no vacía, procedemos por inducción sobre la sección inicial $m = [0, m-1]$.

Se cumple que $\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma}, V} (P_0, Q_0)$. En efecto, porque (P_0, Q_0) o bien pertenece a $\Delta_{\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)}$ o bien pertenece a Φ. Si lo primero, entonces $P_0 = Q_0$, luego si $h \colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{A}$, entonces $h(P_0) = h(Q_0)$, por lo tanto $\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma}, V} (P_0, Q_0)$. Si lo segundo, entonces, por la hipótesis, también $\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma}, V} (P_0, Q_0)$. Luego, en cualquiera de los dos casos, $\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma}, V} (P_0, Q_0)$.

Sea $i \in m - 1$ y supongamos que, para cada $j \in i$, $\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma}, V} (P_j, Q_j)$. Si (P_i, Q_i) pertenece a $\Delta_{\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)}$ o pertenece a Φ, entonces, por el mismo motivo que antes, $\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma}, V} (P_i, Q_i)$. Si $\exists k \in i$ tal que $(P_i, Q_i) \in \mathrm{R}_{\mathrm{sm}}(P_k, Q_k)$, entonces, por la hipótesis de inducción, $\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma}, V} (P_k, Q_k)$, luego, para cada $h \colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{A}$, $h(P_k) = h(Q_k)$, pero $(P_i, Q_i) = (Q_k, P_k)$, luego $h(P_i) = h(Q_i)$. Si $\exists k, l \in i$ tales que $(P_i, Q_i) \in \mathrm{R}_{\mathrm{tr}}((P_k, Q_k), (P_l Q_l))$, entonces $\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma}, V} (P_k, Q_k)$ y $\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma}, V} (P_l, Q_l)$. Ahora bien, $Q_k = P_l$, luego $\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma}, V} (P_i, Q_i)$, porque $(P_i, Q_i) = (P_k, Q_l)$ y si $h \colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{A}$, entonces de $h(P_k) = h(Q_k)$ y de $h(Q_k) = h(P_l) = h(Q_l)$, obtenemos que $h(P_k) = h(Q_l)$. Si $\exists n \in \mathbb{N} - 1$, $\exists (j_\alpha \mid \alpha \in n) \in i^n$ y $\exists \sigma \in \Sigma_n$ tales que

$(P_i, Q_i) \in \mathrm{R}_\sigma((P_j, Q_j) \mid j \in n)$, entonces, para cada $\alpha \in n$, $\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma},V} (P_{j_\alpha}, Q_{j_\alpha})$. Ahora bien, $(P_i, Q_i) = ((\sigma)P_{j_0} \cdots P_{j_{n-1}}, (\sigma)Q_{j_0} \cdots Q_{j_{n-1}})$, y si $h\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{A}$, entonces $h((\sigma)P_{j_0} \cdots P_{j_{n-1}}) = h((\sigma)Q_{j_0} \cdots Q_{j_{n-1}})$, porque h es un homomorfismo. Si $\exists k \in i$ y $\exists f\colon V \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$ tales que $(P_i, Q_i) \in \mathrm{R}_f(P_k = Q_k)$, entonces $\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma},V} (P_k, Q_k)$. Ahora bien, si $h\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{A}$, entonces $h \circ f^\sharp\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{A}$, luego $h \circ f^\sharp(P_k) = h \circ f^\sharp(Q_k)$, así que $h(P_i) = h(Q_i)$, por lo tanto $\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma},V} (P_i, Q_i)$. Podemos pues afirmar que, para cada $i \in m$, $\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma},V} (P_i, Q_i)$, luego que $\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma},V} (P, Q)$. Por consiguiente $\Phi \Vdash_{\mathbf{\Sigma},V} (P, Q)$. □

Theorem 5.46 (de adecuación de Birkhoff)**.** *Para cada* $\Phi \subseteq \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)$ *y cada* $(P, Q) \in \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)$*, si* $\Phi \Vdash_{\mathbf{\Sigma},V} (P, Q)$*, entonces* $\Phi \vdash_{\mathbf{\Sigma},V} (P, Q)$*.*

Demostración. Por una parte, sabemos que una condición necesaria y suficiente para que $\Phi \Vdash_{\mathbf{\Sigma},V} (P, Q)$ es que $(P, Q) \in \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Phi)$ y, por otra, que $\Phi \vdash_{\mathbf{\Sigma},V} (P, Q)$ precisamente si $(P, Q) \in \mathrm{Sg}_{\mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma},V)}(\Phi)$. Ahora bien, tanto $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Phi)$ como $\mathrm{Sg}_{\mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma},V)}(\Phi)$ son congruencias totalmente invariantes sobre $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$, por lo tanto si demostramos que $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Phi)$ es la mínima congruencia totalmente invariante sobre $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$ que contiene a Φ y que $\mathrm{Sg}_{\mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma},V)}(\Phi)$ contiene a Φ, entonces $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Phi) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma},V)}(\Phi)$. Es evidente que tanto $\mathrm{Sg}_{\mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma},V)}(\Phi)$ como $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Phi)$ contienen a Φ. Sea ahora Ψ una congruencia totalmente invariante sobre $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$ que contenga a Φ, entonces $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Phi)) \subseteq \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Psi))$, luego es suficiente que demostremos que $\Psi = \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Psi))$ para que podamos afirmar que $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Phi)) \subseteq \Psi$. Siempre se cumple que $\Psi \subseteq \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Psi))$. Para establecer la inclusión inversa demostramos, en primer lugar, que $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)/\Psi \in \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Psi)$, i.e., que, para cada $(P, Q) \in \Psi$, cada $f\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)/\Psi$, $f(P) = f(Q)$. Sea $(P, Q) \in \Psi$ y $f\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)/\Psi$. Entonces hay un homomorfismo $h\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] \\
\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \arrow[r, two heads, "\mathrm{pr}_{\Psi}"'] & \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)/\Psi
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto $f(P) = [h(P)]_\Psi$ y $f(Q) = [h(Q)]_\Psi$. Ahora bien, $[h(P)]_\Psi = [h(Q)]_\Psi$, o, lo que es equivalente, $(h(P), h(Q)) \in \Psi$, porque Ψ es una congruencia totalmente invariante sobre $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$, luego $f(P) = f(Q)$. Por último, demostramos que, para cada $(P, Q) \in \mathrm{Ec}_{\mathbf{\Sigma},V}$, si $(P, Q) \notin \Psi$, entonces $\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Psi)$ no está incluida en $\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\{\,(P, Q)\,\})$. Sea $(P, Q) \in \mathrm{Ec}_{\mathbf{\Sigma},V}$ tal que $(P, Q) \notin \Psi$. Entonces, por lo anterior, $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)/\Psi \in \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Psi)$, pero $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)/\Psi \notin \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\{\,(P, Q)\,\})$, porque para la proyección canónica $\mathrm{pr}_\Psi\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)/\Psi$ se cumple que $(P, Q) \notin \Psi$. Por lo tanto, si Ψ es una congruencia totalmente invariante sobre $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V)$, entonces $\Psi = \mathrm{Th}_{\mathbf{\Sigma},V}(\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Psi))$.

□

Definition 5.47. Sea $\mathcal{A}$ una variedad y $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$. Una *presentación* de $\mathbf{A}$ es un par (X, R) en el que X es un conjunto y $R \subseteq \mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)^2$ tal que $\mathbf{A}$ es isomorfa a $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\mathrm{Cg}_{\mathcal{A}}(R)$, siendo $\mathrm{Cg}_{\mathcal{A}}(R)$ la congruencia sobre $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ definida como:

$$\mathrm{Cg}_{\mathcal{A}}(R) = \bigcap\{\, \Phi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)) \mid R \subseteq \Phi \ \ \& \ \ \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)/\Phi \in \mathcal{A} \,\},$$

i.e., la mínima congruencia sobre $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ que contiene a R y para la que tal cociente pertenece a $\mathcal{A}$.

5.4. Algebras de polinomios. En lo que sigue $\mathcal{A} = \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Phi)$ es una variedad de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras, siendo $\Phi \subseteq \mathrm{Ec}(\mathbf{\Sigma}, V)$ un conjunto de ecuaciones arbitrario pero fijo.

Proposition 5.48. *Sea* $\mathbf{R} \in \mathcal{A}$ *y* S *un conjunto. Entonces hay un par* $(\eta_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}[X_s]_{s\in S})$ *en el que* $\mathbf{R}[X_s]_{s\in S}$ *es una* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra perteneciente a la variedad* $\mathcal{A}$*, a la que denominamos la* $\mathcal{A}$-álgebra de los polinomios con coeficientes en $\mathbf{R}$ e indeterminadas en S, $\eta_{\mathbf{R}}$ *un homomorfismo de* $\mathbf{R}$ *en* $\mathbf{A}[X_s]_{s\in S}$ *y una aplicación* $\eta_S\colon S \longrightarrow R[X_s]_{s\in S}$ *tal que, para cada* $\mathbf{\Sigma}$*-álgebra* $\mathbf{B} \in \mathcal{A}$*, cada homomorfismo* g *de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{B}$ *y cada aplicación* $b\colon S \longrightarrow B$*, hay un único homomorfismo* $b^\sharp$ *de* $\mathbf{R}[X_s]_{s\in S}$ *en* $\mathbf{B}$ *tal que los diagramas:*

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{R}[X_s]_{s\in S} \arrow[dd, "b^\sharp"] \\
\mathbf{R} \arrow[ur, "\eta_{\mathbf{R}}"] \arrow[dr, "g"'] & \\
 & \mathbf{B}
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
R[X_s]_{s\in S} \arrow[dd, "b^\sharp"'] & \\
 & S \arrow[ul, "\eta_S"'] \arrow[dl, "b"] \\
B &
\end{tikzcd}
$$

conmutan.

Demostración. Sea $\mathbf{R}[X_s]_{s\in S} = \mathbf{R} \amalg_{\mathbf{\Sigma},\Phi} \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma},\Phi}(S)$ el coproducto, en la categoría $\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}, \Phi)$, de $\mathbf{R}$ y $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma},\Phi}(S)$, que, recordemos, es el cociente de $\mathbf{R} \amalg_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma},\Phi}(S)$, el coproducto en $\mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma})$ de $\mathbf{R}$ y $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma},\Phi}(S)$, entre la congruencia generada por $\bigcup_f f^2[\Phi]$, con $f\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{R} \amalg_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma},\Phi}(S)$ (o, lo que es equivalente, el cociente de la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{R} \amalg_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma},\Phi}(S)$, entre $\bigcap\{\, \Psi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{R} \amalg_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma},\Phi}(S)) \mid \mathbf{R} \amalg_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma},\Phi}(S)/\Psi \in \mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}, \Phi)\,\}$).

En general, si $\mathbf{A}$ es una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra, entonces la congruencia sobre $\mathbf{A}$ generada por $\bigcup_f f^2[\Phi]$, con $f\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{A}$, y la congruencia $\bigcap_{\Psi\in\mathrm{Cgr}_\Phi(\mathbf{A})} \Psi$ sobre $\mathbf{A}$, siendo $\mathrm{Cgr}_\Phi(\mathbf{A}) = \{\, \Psi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A}) \mid \mathbf{A}/\Psi \in \mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}, \Phi)\,\}$, coinciden. En efecto, al haber un encajamiento subdirecto de $\mathbf{A}/\bigcap_{\Psi\in\mathrm{Cgr}_\Phi(\mathbf{A})} \Psi$ en $\prod_{\Psi\in\mathrm{Cgr}_\Phi(\mathbf{A})} \mathbf{A}/\Psi$, se cumple que $\mathbf{A}/\bigcap_{\Psi\in\mathrm{Cgr}_\Phi(\mathbf{A})} \Psi \in \mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}, \Phi)$, luego $\bigcap_{\Psi\in\mathrm{Cgr}_\Phi(\mathbf{A})} \Psi$ es la mínima congruencia sobre $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A}/\bigcap_{\Psi\in\mathrm{Cgr}_\Phi(\mathbf{A})} \Psi \in \mathbf{Alg}(\mathbf{\Sigma}, \Phi)$, por lo tanto $\bigcap_{\Psi\in\mathrm{Cgr}_\Phi(\mathbf{A})} \Psi$ está contenida en la congruencia sobre $\mathbf{A}$ generada por $\bigcup_f f^2[\Phi]$, con $f\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{A}$. Para demostrar la otra inclusión es suficiente que verifiquemos que, para cada $f\colon \mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(V) \longrightarrow \mathbf{A}$, cada $(P, Q) \in \Phi$ y cada $\Psi \in \mathrm{Cgr}_\Phi(\mathbf{A})$, se cumple que $(f(P), f(Q)) \in \Psi$, pero eso es consecuencia de que toda $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre es proyectiva.

$\square$

Proposition 5.49. *Sea* $\mathbf{R} \in \mathcal{A}$ *y* S *un conjunto. Entonces* $\mathbf{R}^{R^S} \in \mathcal{A}$*. Por consiguiente* $\mathrm{Pol}_S(\mathbf{R})$ *y* $\mathrm{Alg}_S(\mathbf{R}) \in \mathcal{A}$

Demostración. $\square$

Proposition 5.50. *Sea* $\mathbf{R} \in \mathcal{A}$ *y* S *un conjunto. Entonces* $\mathrm{Alg}_S(\mathbf{R})$ *es una imagen homomorfa de* $\mathbf{R}[X_s]_{s\in S}$*, la* $\mathcal{A}$*-álgebra de los polinomios con coeficientes en* $\mathbf{R}$ *e indeterminadas en* S*.*

Demostración. $\square$

5.5. Clases implicacionales.

Definition 5.51. Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica homogénea y X un conjunto. Una $(\mathbf{\Sigma}, X)$-*implicación* es un triplo ordenado $(\Lambda, (P_\lambda, Q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (P, Q))$, denotado por $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}(P_\lambda, Q_\lambda) \Longrightarrow (P, Q)$, en el que Λ es un conjunto, $(P_\lambda, Q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de $(\mathbf{\Sigma}, X)$-ecuaciones y (P, Q) una $(\mathbf{\Sigma}, X)$-ecuación. A la familia $(P_\lambda, Q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ la denominamos la familia de las *premisas* de la implicación, y a (P,Q) la *conclusión* de la misma. Si $\Phi = (\Lambda, (P_\lambda, Q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (P,Q))$ es una $(\mathbf{\Sigma}, X)$-implicación, a $(P_\lambda, Q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ la denotaremos por $\mathcal{P}(\Phi)$ y a (P,Q) por $\mathcal{C}(\Phi)$.

Definition 5.52. Sea $\Phi = \bigwedge_{\lambda\in\Lambda}(P_\lambda, Q_\lambda) \implies (P,Q)$ una $(\mathbf{\Sigma}, X)$-implicación y $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Decimos que Φ es *válida* en $\mathbf{A}$ o que $\mathbf{A}$ *satisface* Φ o que $\mathbf{A}$ es un *modelo* de Φ, y lo denotamos por $\mathbf{A} \models_{\mathbf{\Sigma},X} \Phi$ o por $\mathbf{A} \models \Phi$, si, para cada homomorfismo $f\colon \mathbf{T_\Sigma}(X) \longrightarrow \mathbf{A}$, si, para cada $\lambda \in \Lambda$, $f(P_\lambda) = f(Q_\lambda)$, entonces $f(P) = f(Q)$.

Sea Φ una $(\mathbf{\Sigma}, X)$-implicación y $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Demuéstrese que una condición necesaria y suficiente para que $\mathbf{A}$ sea modelo de Φ es que si $\{\, (P_\lambda, Q_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda \,\} \subseteq \bigcap_{f\in\mathrm{Hom}(\mathbf{T_\Sigma}(X),\mathbf{A})} \mathrm{Ker}(f)$, entonces $(P,Q) \in \bigcap_{f\in\mathrm{Hom}(\mathbf{T_\Sigma}(X),\mathbf{A})} \mathrm{Ker}(f)$.

A continuación demostramos el teorema de caracterización de Banaschewski-Herrlich [**?**].

Proposition 5.53 (Banaschewski-Herrlich)**.** *Sea Φ una $(\mathbf{\Sigma}, X)$-implicación y $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Una condición necesaria y suficiente para que $\mathbf{A} \models \Phi$ es que, para cada homomorfismo $f\colon \mathbf{T_\Sigma}(X)/\mathrm{Cg}((P_\lambda, Q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \longrightarrow \mathbf{A}$, exista un homomorfismo $g\colon \mathbf{T_\Sigma}(X)/\mathrm{Cg}((P_\lambda, Q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (P,Q)) \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{T_\Sigma}(X)/\mathrm{Cg}((P_\lambda, Q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \arrow[r, "\mathrm{p}"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{T_\Sigma}(X)/\mathrm{Cg}((P_\lambda, Q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (P,Q)) \arrow[dl, "g"] \\
\mathbf{A} &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Sea f un homomorfismo del cociente $\mathbf{T_\Sigma}(X)/\mathrm{Cg}((P_\lambda, Q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ en $\mathbf{A}$. Entonces existe un homomorfismo $g\colon \mathbf{T_\Sigma}(X)/\mathrm{Cg}((P_\lambda, Q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (P,Q)) \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{T_\Sigma}(X)/\mathrm{Cg}((P_\lambda, Q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \arrow[r, "\mathrm{p}"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{T_\Sigma}(X)/\mathrm{Cg}((P_\lambda, Q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (P,Q)) \arrow[dl, "g"] \\
\mathbf{A} &
\end{tikzcd}$$

conmuta, porque al ser $\mathbf{A} \models \Phi$, $(P,Q) \in \mathrm{Ker}(f)$.

Si $f\colon \mathbf{T_\Sigma}(X) \longrightarrow \mathbf{A}$ es tal que, para cada $\lambda \in \Lambda$, $f(P_\lambda) = f(Q_\lambda)$, entonces hay un homomorfismo h de $\mathbf{T_\Sigma}(X)/\mathrm{Cg}((P_\lambda, Q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ en $\mathbf{A}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{T_\Sigma}(X) \arrow[r, "\mathrm{pr}"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{T_\Sigma}(X)/\mathrm{Cg}((P_\lambda, Q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \arrow[dl, "h"] \\
\mathbf{A} &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Luego hay un $g\colon \mathbf{T_\Sigma}(X)/\mathrm{Cg}((P_\lambda, Q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (P,Q)) \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que $h = g \circ \mathrm{p}$ y, por lo tanto, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{T_\Sigma}(X) \arrow[r, "\mathrm{pr}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{T_\Sigma}(X)/\mathrm{Cg}((P_\lambda, Q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \arrow[r, "\mathrm{p}"] \arrow[d, "h"] & \mathbf{T_\Sigma}(X)/\mathrm{Cg}((P_\lambda, Q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (P,Q)) \arrow[dl, "g"] \\
& \mathbf{A} &
\end{tikzcd}$$

conmuta. De donde, $f(P) = f(Q)$. $\square$

Proposition 5.54. *Sea Φ una $(\mathbf{\Sigma}, X)$-implicación y $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Una condición necesaria y suficiente para que $\mathbf{A} \models \Phi$ es que, para cada $f\colon X \longrightarrow A$, si, para cada $\lambda \in \Lambda$, $f^\sharp(P_\lambda) = f^\sharp(Q_\lambda)$, entonces $f^\sharp(P) = f^\sharp(Q)$.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de lo que precede y del hecho de que hay una biyección (natural) entre el conjunto $\mathrm{Hom}(X, G(\mathbf{A}))$ de las aplicaciones del conjunto de las variables X en el conjunto subyacente $G(\mathbf{A})$ de la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$, y el conjunto $\mathrm{Hom}(\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X), \mathbf{A})$, de los homomorfismos de la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra libre $\mathbf{T}_{\mathbf{\Sigma}}(X)$ sobre X, en la $\mathbf{\Sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$.

$\square$

Proposition 5.55. *Sea Φ una $(\mathbf{\Sigma}, X)$-implicación y $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Una condición necesaria y suficiente para que $\mathbf{A} \models \Phi$ es que, si, para cada $\lambda \in \Lambda$, $P_\lambda^{\mathbf{A}} = Q_\lambda^{\mathbf{A}}$, entonces $P^{\mathbf{A}} = Q^{\mathbf{A}}$*

Demostración. $\square$

Proposition 5.56. *Sea $f\colon \mathbf{B} \rightarrowtail \mathbf{A}$ y Φ una $(\mathbf{\Sigma}, X)$-implicación. Si $\mathbf{A} \models \Phi$, entonces $\mathbf{B} \models \Phi$. En particular, si $\mathbf{B}$ es una subálgebra de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A} \models \Phi$, entonces $\mathbf{B} \models \Phi$.*

Demostración. $\square$

Corollary 5.57. *Sea Φ una $(\mathbf{\Sigma}, X)$-implicación y $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ dos $\mathbf{\Sigma}$-álgebras isomorfas. Entonces $\mathbf{A} \models \Phi$ si y sólo si $\mathbf{B} \models \Phi$.*

Proposition 5.58. *Sea $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras y Φ una $(\mathbf{\Sigma}, X)$-implicación. Si, para cada $i \in I$, se cumple que $\mathbf{A}_i \models \Phi$, entonces $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i \models \Phi$.*

Demostración. $\square$

Proposition 5.59. *Sea $(\mathbf{A}_i \mid i \in I)$ una familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras y Φ una $(\mathbf{\Sigma}, X)$-implicación. Si, para cada $i \in I$, se cumple que $\mathbf{A}_i \models \Phi$, entonces Φ es válida en cualquier producto subdirecto de $(\mathbf{A}_i)_{i \in I}$.*

Definition 5.60. Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica homogénea y X un conjunto. Una $(\mathbf{\Sigma}, X)$-*implicación finitaria* es una $(\mathbf{\Sigma}, X)$-implicación Φ para la que se cumple que el conjunto $\mathrm{Var}((P_\lambda, Q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, (P, Q))$ es finito

Proposition 5.61. *Sea $f\colon \mathbf{B} \rightarrowtail \mathbf{A}$ y Φ una $(\mathbf{\Sigma}, X)$-implicación finitaria. Si $\mathbf{A} \models \Phi$, entonces $\mathbf{B} \models \Phi$. En particular, si $\mathbf{B}$ es una subálgebra de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A} \models \Phi$, entonces $\mathbf{B} \models \Phi$.*

Corollary 5.62. *Sea Φ una $(\mathbf{\Sigma}, X)$-implicación finitaria y $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ dos $\mathbf{\Sigma}$-álgebras isomorfas. Entonces $\mathbf{A} \models \Phi$ si y sólo si $\mathbf{B} \models \Phi$.*

Proposition 5.63. *Sea Φ una $(\mathbf{\Sigma}, X)$-implicación finitaria y $(\mathbf{A}_i)_{i \in I}$ una familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras. Si, para cada $i \in I$, $\mathbf{A}_i \models \Phi$, entonces $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i \models \Phi$.*

Proposition 5.64. *Sea Φ una $(\mathbf{\Sigma}, X)$-implicación finitaria y $(\mathbf{A}_i)_{i \in I}$ una familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras. Si, para cada $i \in I$, se cumple que $\mathbf{A}_i \models \Phi$, entonces Φ es válida en cualquier producto subdirecto de $(\mathbf{A}_i)_{i \in I}$.*

Proposition 5.65. *Sea Φ una $(\mathbf{\Sigma}, X)$-implicación finitaria y $(\mathbf{A}_i)_{i \in I}$ una familia de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras dirigida superiormente. Si, para cada $i \in I$, se cumple que $\mathbf{A}_i \models \Phi$, entonces Φ es válida en $\bigcup_{i \in I} \mathbf{A}_i$.*

Definition 5.66. Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica homogénea y X un conjunto. Una $(\mathbf{\Sigma}, X)$-*claúsula de Horn universal positiva* es una $(\mathbf{\Sigma}, X)$-implicación Φ tal que Λ es finito.

Obsérvese que toda claúsula de Horn universal positiva es una implicación finitaria, porque al ser el conjunto de los índices de las premisas finito, y tener las ecuaciones un número finito de variables, la implicación necesariamente tiene un número finito de variables.

Proposition 5.67. *Sea $f\colon \mathbf{B} \rightarrowtail \mathbf{A}$ y Φ una $(\boldsymbol{\Sigma}, X)$-claúsula de Horn universal positiva. Si $\mathbf{A} \models \Phi$, entonces $\mathbf{B} \models \Phi$. En particular, si $\mathbf{B}$ es una subálgebra de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A} \models \Phi$, entonces $\mathbf{B} \models \Phi$.*

Corollary 5.68. *Sea Φ una $(\boldsymbol{\Sigma}, X)$-claúsula de Horn universal positiva y $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ dos $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras isomorfas. Entonces $\mathbf{A} \models \Phi$ si y sólo si $\mathbf{B} \models \Phi$.*

Proposition 5.69. *Sea Φ una $(\boldsymbol{\Sigma}, X)$-claúsula de Horn universal positiva y $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ una familia de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras. Si, para cada $i \in I$, se cumple que $\mathbf{A}_i \models \Phi$, entonces $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i \models \Phi$.*

Proposition 5.70. *Sea Φ una $(\boldsymbol{\Sigma}, X)$-claúsula de Horn universal positiva y $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ una familia de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras. Si, para cada $i \in I$, se cumple que $\mathbf{A}_i \models \Phi$, entonces Φ es válida en cualquier producto subdirecto de $(\mathbf{A}_i)_{\in I}$.*

Proposition 5.71. *Sea Φ una $(\boldsymbol{\Sigma}, X)$-claúsula de Horn universal positiva y $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ una familia de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras dirigida superiormente. Si, para cada $i \in I$, se cumple que $\mathbf{A}_i \models \Phi$, entonces Φ es válida en $\bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i$.*

Proposition 5.72. *Sea Φ una $(\boldsymbol{\Sigma}, X)$-claúsula de Horn universal positiva y $(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ un sistema inductivo de $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras tal que $\mathbf{S}$ esté dirigido superiormente. Si, para cada $i \in I$, se cumple que $\mathbf{A}_i \models \Phi$, entonces Φ es válida en $\varinjlim(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$.*

6. Teorías algebraicas de Lawvere

> Modern universal algebra has two advantages over this classical approach: elegance, avoiding the confusion about exactly what the operations of an algebra are, and abstractness, considering algebras in any category with products, not just a category of sets.
>
> *J. Smith.*

A partir de una signatura algebraica $\boldsymbol{\Sigma}$ y de un conjunto de variables infinito numerable $V = \{\, v_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$, arbitrario pero fijo, obtenemos una categoría especial, la *teoría algebraica de Lawvere*, relativa a $\boldsymbol{\Sigma}$ y V, a la que denotamos por $\mathsf{Law}(\underline{\Sigma}, V)$y definida como:

- $\mathrm{Ob}(\mathsf{Law}(\underline{\Sigma}, V)) = \mathbb{N}$.
- Para cada $p, q \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Law}(\underline{\Sigma}, V)}(p, q) = \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\downarrow v_q)^p$.
- Para cada $n, p, q \in \mathbb{N}$, $(P_i \mid i \in n)\colon n \longrightarrow p$ y $(Q_j \mid j \in p)\colon p \longrightarrow q$, la composición de $(P_i \mid i \in n)\colon n \longrightarrow p$ y $(Q_j \mid j \in p)\colon p \longrightarrow q$ es $(Q_j \mid j \in p)^\sharp \circ (P_i \mid i \in n)^\sharp$ o, lo que es equivalente, $((Q_j \mid j \in p)^\sharp \circ (P_i \mid i \in n))^\sharp$. Observemos que esta composición la hemos obtenido haciendo uso de la propiedad universal de las álgebras libres, aplicada al diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\downarrow v_n \arrow[r, "\eta_{\downarrow v_n}"] \arrow[dr, "(P_i \mid i \in n)"'] & \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\downarrow v_n) \arrow[d, "(P_i \mid i \in n)^\sharp"] \\
\downarrow v_p \arrow[r, "\eta_{\downarrow v_p}"] \arrow[dr, "(Q_j \mid j \in p)"'] & \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\downarrow v_p) \arrow[d, "(Q_j \mid j \in p)^\sharp"] \\
\downarrow v_q \arrow[r, "\eta_{\downarrow v_q}"] & \mathrm{T}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\downarrow v_q)
\end{tikzcd}
$$

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, el morfismo identidad de n es la n-familia $((v_i) \mid i \in n)$ en $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_n)$

La categoría $\mathsf{Law}(\underline{\Sigma}, V)$es especial, no sólo porque tiene como objetos a los números naturales y como morfismos de un número natural n en otro p, a las n-familias en $\mathrm{T}_{\mathbf{\Sigma}}(\downarrow v_p)$, sino porque se cumple que:

- El 0 es un objeto inicial en $\mathsf{Law}(\underline{\Sigma}, V)$.
- Para cada $n \geq 1$, n junto con los n morfismos $(v_0), \ldots, (v_{n-1}) \colon 1 \longrightarrow n$, es un coproducto de n-copias del objeto 1. Además, cuando $n = 1$, $(v_0) \colon 1 \longrightarrow 1$ es precisamente id_1.

Definition 6.1. Una *teoría algebraica de Lawvere*, o una *teoría*, para abreviar, es una categoría $\mathbf{T}$ tal que:

1. $\mathrm{Ob}(\mathbf{T}) = \mathbb{N}$.
2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ hay una familia $(\mathrm{in}_{n,i} \mid i \in n)$ en la que, para cada $i \in n$, $\mathrm{in}_{n,i} \colon 1 \longrightarrow n$ y $(n, (\mathrm{in}_{n,i} \mid i \in n))$ es un coproducto de $(1 \mid i \in n)$ en $\mathbf{T}$, i.e., para cada $p \in \mathbb{N}$ y cada familia $(f_i \mid i \in n)$ en $\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(1, p)$, existe un único morfismo $[f_0, \ldots, f_{n-1}] \colon n \longrightarrow p$ tal que, para cada $i \in n$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\mathrm{in}_{n,i}"] \arrow[dr, "f_i"'] & n \arrow[d, "{[f_i \mid i \in I]}"] \\ & p \end{tikzcd}$$

   conmuta.
3. El morfismo $\mathrm{in}_{1,0} \colon 1 \longrightarrow 1$ es el morfismo identidad id_1.

Demuéstrese que en una teoría $\mathbf{T}$, el 0 es el objeto inicial. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $[\mathrm{in}_{n,0}, \ldots, \mathrm{in}_{n,n-1}]$ es el morfismo identidad del objeto n

En la teoría $\mathsf{Law}(\underline{\Sigma}, V)$, para $n \geq 1$, los morfismos distinguidos $\mathrm{in}_{n,i} \colon 1 \longrightarrow n$ son los términos (v_i). Además, dados los términos $P_0, \ldots, P_{n-1} \colon 1 \longrightarrow p$, el único morfismo $[P_0, \ldots, P_{n-1}]$ de n en p tal que, para cada $i \in n$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "(v_i)"] \arrow[dr, "P_i"'] & n \arrow[d, "{[P_i \mid i \in I]}"] \\ & p \end{tikzcd}$$

conmuta, es precisamente la n-tupla $(P_i \mid i \in n)$.

Definition 6.2. Sean $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}'$ dos teorías. Un *morfismo de teorías* de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}'$ es un functor covariante de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}'$ que preserva los objetos y los morfismos distinguidos, i.e., esencialmente, una familia de aplicaciones $(\varphi_{n,p} \mid (n,p) \in \mathbb{N}^2)$ en la que, para cada $n, p \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n,p} \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(n,p) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}'}(n,p)$ y tal que:

1. Para cada $n, p, q \in \mathbb{N}$, cada $f \colon n \longrightarrow p$ y cada $g \colon p \longrightarrow q$ se cumple que:
$$\varphi_{n,q}(g \circ f) = \varphi_{p,q}(g) \circ \varphi_{n,p}(f).$$
2. Para cada $n \geq 1$ y cada $i \in n$ se cumple que:
$$\varphi_{1,n}(\mathrm{in}_{n,i}) = \mathrm{in}'_{n,i}.$$

Además, un morfismo de teorías $\varphi \colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$ es *sobreyectivo* o *inyectivo* si cada una de las aplicaciones $\varphi_{n,p} \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(n,p) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}'}(n,p)$ es sobreyectiva o inyectiva, respectivamente.

En los ejercicios que siguen caracterizamos los isomorfismos, monomorfismos y epimorfismos regulares entre teorías algebraicas.

Un morfismo de teorías $\varphi\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$ es un isomorfismo precisamente si, para cada $n, p \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n,p}\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(n,p) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}'}(n,p)$ es una biyección.

Un morfismo de teorías $\varphi\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$ es un monomorfismo precisamente si, para cada $n, p \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n,p}\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(n,p) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}'}(n,p)$ es una aplicación inyectiva.

Un morfismo de teorías $\varphi\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$ es un epimorfismo regular precisamente si, para cada $n, p \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n,p}\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(n,p) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}'}(n,p)$ es una aplicación sobreyectiva.

A continuación, haciendo uso de los morfismos entre teorías, definimos los conceptos de *subteoría* y de teoría *cociente* de una teoría.

Definition 6.3. Sean $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}'$ dos teorías. Decimos que $\mathbf{T}$ es una *subteoría* de $\mathbf{T}'$ si, para cada $n, p \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(n,p) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}'}(n,p)$ y la inclusión canónica de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}'$ es un morfismo de teorías. Por otra parte, decimos que $\mathbf{T}'$ es un *cociente* de $\mathbf{T}$ si hay un morfismo de teorías sobreyectivo de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}'$.

Proposition 6.4. *La categoría* $\mathbf{TH}$ *formada por las teorías y morfismos entre ellas es completa y cocompleta, los morfismos sobreyectivos junto con los inyectivos constituyen un sistema de factorización y, además, está bien-potenciada y bien-copotenciada.*

Recordemos que cuando estudiamos las $\boldsymbol{\Sigma}$-álgebras definimos una serie de operadores sobre el conjunto $\mathrm{Sub}(\mathrm{Ob}(\mathbf{Alg}(\boldsymbol{\Sigma})))$ que nos permitieron caracterizar algebraicamente a las clases ecuacionales. A continuación definimos, por analogía con lo mencionado, una serie de operadores sobre el conjunto $\mathrm{Sub}(\mathrm{Ob}(\mathbf{TH}))$.

Definition 6.5.

1. Denotamos por I la endoaplicación de $\mathrm{Sub}(\mathrm{Ob}(\mathbf{TH}))$ que a un subconjunto $\mathcal{T}$ de $\mathrm{Ob}(\mathbf{TH})$ le asigna el subconjunto del mismo definido como:
$$\mathrm{I}(\mathcal{T}) = \{\, \mathbf{T} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{TH}) \mid \exists \mathbf{A} \in \mathcal{T}\, (\mathrm{Iso}(\mathbf{T}, \mathbf{A}) \neq \varnothing) \,\}.$$
De modo que $\mathrm{I}(\mathcal{T})$ consta de todas las teorías $\mathbf{T}$ que son isomorfas a alguna teoría de $\mathcal{T}$.
2. Denotamos por S la endoaplicación de $\mathrm{Sub}(\mathrm{Ob}(\mathbf{TH}))$ que a un subconjunto $\mathcal{T}$ de $\mathrm{Ob}(\mathbf{TH})$ le asigna el subconjunto del mismo definido como:
$$\mathrm{S}(\mathcal{T}) = \{\, \mathbf{T} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{TH}) \mid \exists \mathbf{A} \in \mathcal{T}\, (\mathrm{Mono}(\mathbf{T}, \mathbf{A}) \neq \varnothing) \,\}.$$
De modo que $\mathrm{S}(\mathcal{T})$ consta de todas las teorías $\mathbf{T}$ que son isomorfas a alguna subteoría de alguna teoría de $\mathcal{T}$.
3. Denotamos por H la endoaplicación de $\mathrm{Sub}(\mathrm{Ob}(\mathbf{TH}))$ que a un subconjunto $\mathcal{T}$ de $\mathrm{Ob}(\mathbf{TH})$ le asigna el subconjunto del mismo definido como:
$$\mathrm{H}(\mathcal{T}) = \{\, \mathbf{T} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{TH}) \mid \exists \mathbf{A} \in \mathcal{T}\, (\mathrm{Epi}(\mathbf{A}, \mathbf{T}) \neq \varnothing) \,\}.$$
De modo que $\mathrm{H}(\mathcal{T})$ consta de todas las teorías $\mathbf{T}$ que son isomorfas a algún cociente de alguna teoría de $\mathcal{T}$.
4. Denotamos por P la endoaplicación de $\mathrm{Sub}(\mathrm{Ob}(\mathbf{TH}))$ que a un subconjunto $\mathcal{T}$ de $\mathrm{Ob}(\mathbf{TH})$ le asigna el subconjunto del mismo definido como:
$$\mathrm{P}(\mathcal{T}) = \left\{ \mathbf{T} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{TH}) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists I \in U, \exists (\mathbf{A}_i \mid i \in I) \in \mathcal{T}^I \\ \text{tal que } \mathrm{Iso}(\mathbf{T}, \prod (\mathbf{A}_i \mid i \in I)) \neq \varnothing \end{array} \right\}.$$
De modo que $\mathrm{P}(\mathcal{T})$ consta de todas las teorías $\mathbf{T}$ que son isomorfas a algún producto de alguna familia de teorías de $\mathcal{T}$.

Definition 6.6. Sea $\mathbf{T}$ una teoría. Una congruencia sobre $\mathbf{T}$ es una familia $\Phi = (\Phi_{n,p} \mid (n,p) \in \mathbb{N}^2)$ en la que, para cada $n, p \in \mathbb{N}$, $\Phi_{n,p}$ es una relación de equivalencia sobre el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(n,p)$, tal que:

1. Para cada $n, p, q \in \mathbb{N}$, cada $f, g\colon n \longrightarrow p$ y cada $f', g'\colon p \longrightarrow q$ se cumple que:
$$\frac{f \equiv g \pmod{\Phi_{n,p}} \ \& \ f' \equiv g' \pmod{\Phi_{p,q}}}{f' \circ f \equiv g' \circ g \pmod{\Phi_{n,q}}}.$$
2. Para cada $n, p \in \mathbb{N}$ y cada par $(f_i \mid i \in n)$ y $(g_i \mid i \in n)$, con $f_i, g_i\colon 1 \longrightarrow p$, para cada $i \in n$, se cumple que:
$$\frac{f_i \equiv g_i \pmod{\Phi_{1,p}}}{[f_0, \ldots, f_{n-1}] \equiv [g_0, \ldots, g_{n-1}] \pmod{\Phi_{n,p}}}.$$

Denotamos por $\mathrm{Cgr}(\mathbf{T})$ el conjunto de las congruencias sobre la teoría algebraica $\mathbf{T}$.

Demuéstrese que hay una correspondencia biunívoca entre los cocientes regulares de una teoría y las congruencias sobre la misma.

Proposition 6.7. *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría algebraica. Entonces el conjunto de las congruencias sobre* $\mathbf{T}$*, es un sistema de clausura algebraico sobre* $(\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(n,p)^2 \mid (n,p) \in \mathbb{N}^2)$*, i.e., tiene las siguientes propiedades:*

1. $(\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(n,p)^2 \mid (n,p) \in \mathbb{N}^2) \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{T})$.
2. *Si* $(\Phi^i \mid i \in I)$ *es una familia no vacía en* $\mathrm{Cgr}(\mathbf{T})$*, entonces* $\bigcap_{i\in I} \Phi^i$ *es una congruencia sobre* $\mathbf{T}$*.*
3. *Si* $(\Phi^i \mid i \in I)$ *es una familia no vacía en* $\mathrm{Cgr}(\mathbf{T})$ *y si dados* $i, j \in I$*, hay un* $k \in I$ *tal que* $\Phi^i \cup \Phi^j \subseteq \Phi^k$*, entonces* $\bigcup_{i\in I} \Phi^i$ *es una congruencia sobre* $\mathbf{T}$*.*

Demostración. □

Corollary 6.8. *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría algebraica. Entonces la endoaplicación* $\mathrm{Cg}_{\mathbf{T}}$ *del conjunto* $\mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(n,p)^2 \mid (n,p) \in \mathbb{N}^2)$*, definida como:*
$$\mathrm{Cg}_{\mathbf{T}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(n,p)^2 \mid (n,p) \in \mathbb{N}^2) & \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(n,p)^2 \mid (n,p) \in \mathbb{N}^2) \\ \qquad\qquad \Phi & \longmapsto \bigcap\{\, \Psi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{T}) \mid \Phi \subseteq \Psi \,\} \end{cases}$$
tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{Im}(\mathrm{Cg}_{\mathbf{T}}) \subseteq \mathrm{Cgr}(\mathbf{T})$.
2. $\{\, \Phi \in \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(n,p)^2 \mid (n,p) \in \mathbb{N}^2) \mid \Phi = \mathrm{Cg}_{\mathbf{T}}(\Phi) \,\} = \mathrm{Cgr}(\mathbf{T})$.
3. $\mathrm{Cg}_{\mathbf{T}}$ *es extensiva, i.e., para cada* $\Phi \in \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(n,p)^2 \mid (n,p) \in \mathbb{N}^2)$*,*
$$\Phi \subseteq \mathrm{Cg}_{\mathbf{T}}(\Phi).$$
4. $\mathrm{Cg}_{\mathbf{T}}$ *es isótona, i.e., para cada* $\Phi, \Psi \in \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(n,p)^2 \mid (n,p) \in \mathbb{N}^2)$*, si* $\Phi \subseteq \Psi$*, entonces*
$$\mathrm{Cg}_{\mathbf{T}}(\Psi) \subseteq \mathrm{Cg}_{\mathbf{T}}(\Psi).$$
5. $\mathrm{Cg}_{\mathbf{T}}$ *es idempotente, i.e., para cada* $\Phi \in \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(n,p)^2 \mid (n,p) \in \mathbb{N}^2)$*,*
$$\mathrm{Cg}_{\mathbf{T}}(\Phi) = \mathrm{Cg}_{\mathbf{T}}(\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi)).$$
6. $\mathrm{Cg}_{\mathbf{T}}$ *es algebraica, i.e., para cada familia no vacía dirigida superiormente* $(\Phi^i \mid i \in I)$ *en* $\mathrm{Cgr}(\mathbf{T})$ *se cumple que*
$$\mathrm{Cg}_{\mathbf{T}}(\textstyle\bigcup_{i\in I} \Phi^i) = \bigcup_{i\in I} \mathrm{Cg}_{\mathbf{T}}(\Phi^i).$$

Por consiguiente, para cada $\Phi \subseteq (\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(n,p)^2 \mid (n,p) \in \mathbb{N}^2)$*,* $\mathrm{Cg}_{\mathbf{T}}(\Phi)$ *es la mínima congruencia sobre* $\mathbf{T}$ *que contiene a* Φ*, y la denominamos la congruencia sobre* $\mathbf{T}$ generada *por* Φ*.*

Demostración. □

Las congruencias sobre las teorías y los morfismos entre teorías están relacionados entre sí del mismo modo que lo están las congruencias sobre las $\mathbf{\Sigma}$-álgebras y los homomorfismos entre $\mathbf{\Sigma}$-álgebras.

Proposition 6.9. *Sea* $\varphi\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$ *un morfismo de teorías. Entonces* $\mathrm{Ker}(\varphi)$ *es una congruencia sobre* $\mathbf{T}$*. Recíprocamente, si* Φ *es una congruencia sobre* $\mathbf{T}$*, entonces hay una teoría* $\mathbf{T}/\Phi$ *y un morfismo sobreyectivo* Pr_Φ *de* $\mathbf{T}$ *en* $\mathbf{T}/\Phi$ *cuyo núcleo es* Φ*.*

Demostración. □

Las teorías algebraicas de Lawvere $\mathsf{Law}(\underline{\Sigma}, V)$se pueden caracterizar mediante una propiedad universal.

Proposition 6.10. *Sea* $\mathbf{\Sigma}$ *una signatura algebraica y* $V = \{\, v_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ *un conjunto de variables infinito numerable, arbitrario pero fijo. Entonces el par ordenado* $(\mathsf{Law}(\underline{\Sigma}, V), \eta_{\mathbf{\Sigma},V})$ *en el que* $\eta_{\mathbf{\Sigma},V}$ *es la aplicación de* Σ *en* $\mathrm{Mor}(\mathsf{Law}(\underline{\Sigma}, V))$ *definida como:*

$$\eta_{\mathbf{\Sigma},V} \begin{cases} \Sigma \longrightarrow \mathrm{Mor}(\mathsf{Law}(\underline{\Sigma}, V)) \\ \sigma \longmapsto \sigma(v_i \mid i \in \mathrm{ar}(\sigma)), \end{cases}$$

siendo $\sigma(v_i \mid i \in \mathrm{ar}(\sigma))$ *una abreviatura de* $(\sigma) \curlywedge \curlywedge((v_i) \mid i \in \mathrm{ar}(\sigma))$*, tiene la siguiente propiedad universal:*

Para cada par ordenado $(\mathbf{T}, \varphi)$*, en el que* $\mathbf{T}$ *es una teoría y* $\varphi\colon \Sigma \longrightarrow \mathrm{Mor}(\mathbf{T})$ *una aplicación tal que, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y cada* $\sigma \in \Sigma_n$*,* $\varphi(\sigma) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(1, n)$*, hay un único morfismo* $\varphi^\sharp\colon \mathsf{Law}(\underline{\Sigma}, V) \longrightarrow \mathbf{T}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[r, "\eta_{\mathbf{\Sigma},V}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathrm{Mor}(\mathsf{Law}(\underline{\Sigma}, V)) \arrow[d, "\varphi^\sharp"] \\
 & \mathrm{Mor}(\mathbf{T})
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. □

Demuéstrese que la proposición anterior significa que el functor $G\colon \mathbf{TH} \longrightarrow \mathbf{Sig}$ de la categoría de teorías en la de signaturas algebraicas, que a una teoría $\mathbf{T}$ le asocia la signatura algebraica $(\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(1, n) \mid n \in \mathbb{N})$, tiene un adjunto por la izquierda.

Corollary 6.11. *Cualquier teoría algebraica* $\mathbf{T}$ *es la imagen homomorfa de una teoría algebraica de Lawvere* $\mathsf{Law}(\underline{\Sigma}, V)$*, para alguna signatura algebraica* $\mathbf{\Sigma}$*.*

Corollary 6.12. *Hay una teoría algebraica inicial, que es precisamente la teoría algebraica de Lawvere sobre la signatura algebraica vacía*

Definition 6.13. Decimos que una teoría algebraica $\mathbf{T}$ *no es trivial* si el único morfismo de la teoría inicial en $\mathbf{T}$ es inyectivo

Ahora vamos a asociar a cada conjunto una teoría algebraica. Pero antes de llevar a cabo tal asociación observemos que dado un conjunto A se cumple, para cada $n \in \mathbb{N}$, que hay una familia $(\mathrm{pr}_{n,i} \mid i \in n)$ en la que, para cada $i \in n$, $\mathrm{pr}_{n,i}\colon A^n \longrightarrow A^1$ y $(A^n, (\mathrm{pr}_{n,i} \mid i \in n))$ es un producto de $(A^1 \mid i \in n)$ en $\mathbf{Set}$. Además, el morfismo $\mathrm{pr}_{1,0}\colon A^1 \longrightarrow A^1$ es el morfismo identidad id_{A^1}.

Definition 6.14. Sea A un conjunto. Entonces denotamos por $\mathbf{Th}(A)$ la teoría algebraica que tiene como morfismos de n en p las aplicaciones de A^p en A^n

Demuéstrese que $\mathbf{Th}(A)$ es una teoría algebraica (Obsérvese que es, esencialmente, la dual de la subcategoría plena de **Set** determinada por todas las potencias finitas A^n del conjunto A)

Proposition 6.15. *Sea $\mathbf{\Sigma}$ una signatura algebraica y $\mathbf{A}$ una $\mathbf{\Sigma}$-álgebra. Entonces hay un único morfismo de teorías $\mathrm{Pd}^{\mathbf{A}}\colon \mathsf{Law}(\underline{\Sigma}, V) \longrightarrow \mathrm{Th}(A)$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $\sigma \in \Sigma_n$, se cumple que:*

$$\mathrm{Pd}^{\mathbf{A}}(\sigma(v_i \mid i \in n)) = F_\sigma,$$

siendo $\sigma(v_i \mid i \in n)$, como antes, una abreviatura de $(\sigma) \curlywedge \curlywedge((v_i) \mid i \in n)$ y F_σ la operación estructural sobre A correspondiente a σ.

Demostración. □

Demostramos a continuación que cada variedad de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras determina una teoría algebraica da Lawvere, y que cualquier teoría algebraica da Lawvere se obtiene de ésa forma. Podría decirse, informalmente, que las variedades son a las teorías algebraicas, como las presentaciones de los grupos son a los grupos.

Proposition 6.16. *Sea Φ un conjunto de $(\mathbf{\Sigma}, V)$-ecuaciones y $\mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Phi)$ la variedad determinada por Φ. Entonces $\mathsf{Law}(\underline{\Sigma}, V)/\equiv_\Phi$ es una teoría algebraica, siendo $\equiv_\Phi$ la congruencia sobre $\mathsf{Law}(\underline{\Sigma}, V)$ definida como:*

$$\equiv_\Phi = \bigcap_{\mathbf{A} \in \mathcal{V}_{\mathbf{\Sigma},V}(\Phi)} \mathrm{Ker}(\mathrm{Pd}^{\mathbf{A}}).$$

Demostración. □

Proposition 6.17. *Sea $\mathbf{T}$ una teoría algebraica. Entonces hay una signatura algebraica $\mathbf{\Sigma}$ y un conjunto Φ de $(\mathbf{\Sigma}, V)$-ecuaciones tal que $\mathbf{T}$ es isomorfa a $\mathsf{Law}(\underline{\Sigma}, V)/\equiv_\Phi$.*

Demostración. En virtud del corolario 6.11 hay una signatura algebraica $\mathbf{\Sigma}$ y un morfismo sobreyectivo φ de $\mathsf{Law}(\underline{\Sigma}, V)$en $\mathbf{T}$. Entonces tomando como conjunto de ecuaciones Φ el formado por todas las ecuaciones $(P, Q) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathsf{Law}(\underline{\Sigma},V)}(1, n)^2$ para las que se cumple que $\varphi(P) = \varphi(Q)$, tenemos que $\mathbf{T}$ es isomorfa a $\mathsf{Law}(\underline{\Sigma}, V)/\equiv_\Phi$. □

Es posible que la razón mas importante para tomar en consideración las teorías algebraicas en relación con las variedades sea que exista algo arbitrario en el tratamiento del álgebra universal, al hacerlo depender precisamente de las signaturas algebraicas, que no son otra cosa, junto con los conjuntos de ecuaciones, que presentaciones de las teorías algebraicas, que sí son lo que permanece invariante.

Definition 6.18. Una *presentación de una teoría algebraica* es un par $(\mathbf{\Sigma}, \Phi)$ en el que $\mathbf{\Sigma}$ es una signatura algebraica y Φ un conjunto de $(\mathbf{\Sigma}, V)$-ecuaciones. Decimos que dos presentaciones $(\mathbf{\Sigma}, \Phi)$ y $(\mathbf{\Sigma}', \Phi')$ son equivalentes precisamente si las teorías algebraicas $\mathsf{Law}(\underline{\Sigma}, V)/\equiv_\Phi$ y $\mathbf{Law}(\mathbf{\Sigma}', V)/\equiv_{\Phi'}$ son isomorfas.

Cada teoría algebraica $\mathbf{T}$ determina una categoría $\mathbf{Alg}(\mathbf{T})$ de $\mathbf{T}$-álgebras, que es una abstracción del concepto de variedad de $\mathbf{\Sigma}$-álgebras.

Demostraremos que la categoría cuyos objetos son las categorías $\mathbf{Alg}(\mathbf{T})$ y cuyos morfismos son los functores entre tales categorías que conmutan con los functores de olvido en la categoría **Set**, es antiisomorfa a la categoría **TH**.

Definition 6.19. Sea $\mathbf{T}$ una teoría algebraica. Una $\mathbf{T}$-álgebra es un par $\mathbf{A} = (A, \alpha)$ en el que A es un conjunto y $\alpha\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{Th}(A)$ un morfismo de teorías algebraicas. Si $f\colon n \longrightarrow p \in \mathrm{Mor}(\mathbf{T})$, entonces convenimos en denotar por $f_\alpha\colon A^p \longrightarrow A^n$ la imagen de f mediante α. Por otra parte, si $\mathbf{A} = (A, \alpha)$ y $\mathbf{B} = (B, \beta)$ son dos **T**-álgebras, un homomorfismo$h\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es una aplicación de A en B tal que, para cada $f\colon n \longrightarrow p \in \mathrm{Mor}(\mathbf{T})$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A^p \arrow[r, "h^p"] \arrow[d, "f_\alpha"'] & B^p \arrow[d, "f_\beta"] \\ A^n \arrow[r, "h^n"'] & B^n \end{tikzcd}$$

conmuta.

Proposition 6.20. *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría algebraica y* A *un conjunto. Entonces son equivalentes:*

1. $\alpha\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{Th}(A)$ *un morfismo de teorías algebraicas.*
2. α *es un functor de* $\mathbf{T}^{op}$ *en* **Set** *tal que el valor de* α *en* $\mathrm{in}_{n,i}\colon 1 \longrightarrow n$ *es la* i*-ésima proyección* $\mathrm{pr}_{n,i}\colon A^n \longrightarrow A$*, siendo* $A = \alpha(1)$*.*

Además, siendo $\mathbf{A} = (A, \alpha)$ *y* $\mathbf{B} = (B, \beta)$ *dos* $\mathbf{T}$*-álgebras, son equivalentes:*

1. $h\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *es un homomorfismo.*
2. h *es una transformación natural del functor contravariante* α *en el functor contravariante* β*.*

Referencias

Universidad de Valencia, Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia, Apt. 22.109 E-46071 Valencia, Spain
E-mail address: `Juan.B.Climent@uv.es`