TEORÍA DE LA COMPUTABILIDAD

J. Climent Vidal.

1. Descripción.

La teoría de la computabilidad, también denominada teoría de la recursión, es una de las cuatro partes que constituyen la lógica matemática, siendo las otras tres, la teoría de conjuntos, la teoría de modelos y la teoría de la demostración, y se ocupa del estudio y clasificación de las relaciones y aplicaciones computables. Además, la teoría de la computabilidad, junto con la teoría de autómatas, lenguajes y máquinas, es el fundamento de la informática teórica y esta, a su vez, de la industria de los ordenadores.

Desde tiempo inmemorial se sabe que cierta clase de problemas, e.g., la determinación del máximo común divisor de dos números enteros, mediante el algoritmo de Euclides, o la determinación de los números primos, mediante la criba de Eratóstenes, son algorítmicamente solubles, i.e., hay algoritmos o procedimientos mecánicos que permiten obtener la solución del problema en cuestión. De manera que hasta principios del siglo XX se daba por hecho que existían algoritmos y que el único problema residía en determinarlos. Así pues, si lo que se desea es determinar un algoritmo, no hay ninguna necesidad de definir la clase de todos los algoritmos; eso sólo es necesario si se pretende demostrar que algún problema no es algorítmicamente soluble, i.e., que para dicho problema no hay ningún algoritmo que lo resuelva.

Es posible que el primero en afirmar la no existencia de un algoritmo fuera Tietze en 1908, quién dijo de los grupos de presentación finita:

"…la cuestión acerca de cuándo dos grupos son isomorfos no es soluble en general."

Pero parece ser que fue, por una parte, el problema de la decidibilidad de la lógica de predicados planteado por Hilbert y Ackermann en su libro sobre lógica, publicado en 1928, y, por otra, el asunto de la solubilidad de todo problema matemático, lo que indujo, en aras a resolverlos, a diversos investigadores a partir de 1930, y entre los que cabe mencionar a Gödel, Church y Turing, a proponer diversas formalizaciones del concepto informal de función mecánicamente computable. Debido a que de todas esas formalizaciones, y de otras propuestas por Kleene, Post y Markoff, se demostró que eran dos a dos equivalentes, se propuso la hipótesis, conocida como Hipótesis de Church-Turing-Post-Kleene, que afirma la coincidencia entre el concepto informal de función parcial mecánica o algorítmicamente computable, y el concepto formal, matemático, de aplicación parcial recursiva. Naturalmente, esa hipótesis, de carácter similar a otras hipótesis propuestas en las ciencias empíricas, no es demostrable, y su fundamento último reside en las equivalencias antes mencionadas.

Este curso estará dedicado, en primer lugar, al estudio de diferentes clases de aplicaciones recursivas, desde las recursivas primitivas, hasta las parciales recursivas, pasando por las recursivas generales, así como al de diversas clases de relaciones, entre las que cabe citar a las recursivas primitivas, las recursivamente enumerables y a las recursivas, demostrando además, ciertos teoremas fundamentales de la teoría de la recursión, debidos en gran medida a Kleene; y, en segundo lugar, a la aplicación de la teoría de la recursión a la demostración de la indecidibilidad de la lógica de predicados de primer orden, i.e., a la demostración de que el conjunto de los números de Gödel de los teoremas de la lógica de predicados de primer orden no es recursivo, aunque sí sea recursivamente enumerable; y de los teoremas de incompletitud de Gödel, de los cuales, el primero da cuenta, esencialmente, de la diferencia, en la aritmética, entre las nociones de verdad y demostrabilidad, mientras que el segundo afirma que, bajo ciertas condiciones, no es posible demostrar desde una teoría, la consistencia de la misma, i.e., esencialmente que el infinito no es eliminable en las matemáticas

2. Programa de la asignatura.

1. Nociones previas de la teoría de conjuntos. Operadores funcionales, relacionales y mixtos.
2. Aplicaciones y relaciones recursivas primitivas.
3. relaciones recursivamente enumerables.
4. Aplicaciones parciales recursivas.
5. Aplicaciones y relaciones recursivas generales.
6. Aplicaciones recursivas universales para las aplicaciones recursivas primitivas.
7. Aplicaciones parciales recursivas universales para las aplicaciones parciales recursivas y relaciones recursivamente enumerables universales para las relaciones recursivamente enumerables.
8. El teorema de Church-Turing y los teoremas de incompletitud de Gödel.

Referencias

[1] M. Davis, *Computability and unsolvability*, Dover, 1982.

[2] M. Davis, *The undecidable: Basic papers on undecidable propositions, unsolvable problems and computable functions*, Raven Press, 1965.

[3] S. Kleene, *Introduction to metamathematics*, North-Holland, 1952.

[4] H. Rogers, *Theory of recursive functions and effective computability*, McGraw-Hill, 1967.

[5] R. Soare, *Recursively enumerable sets and degrees*, Springer-Verlag, 1987.