TEORÍA DE CATEGORÍAS

J. CLIMENT VIDAL

Resumen. We ...

Índice

1. Introduction

El concepto de universo de Grothendieck-Tarski-Sonner, que vamos a introducir a continuación, está íntimamente relacionado con el de cardinal fuertemente inaccesible. De hecho, la existencia de universos de Grothendieck equivale a la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles, como tendremos oportunidad de comprobar.

Definición 1.1. Sea $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ un conjunto. Decimos de $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ que es un *universo de Grothendieck* si cumple las siguientes condiciones:

1. $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ es $\in$-transitivo.
2. Para cada conjunto x, si $x \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces $\mathrm{Sub}(x) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.
3. Para cada conjunto x, si $x \subseteq \boldsymbol{\mathcal{U}}$ y x no es isomorfo a $\boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces $x \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.
4. $\mathbb{N} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.

Proposición 1.2. *Sea $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ un universo de Grothendieck. Entonces:*

1. *Para cada conjunto x, si $x \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces* $\mathrm{card}(x) < \mathrm{card}(\boldsymbol{\mathcal{U}})$.
2. $\aleph_0 < \mathrm{card}(\boldsymbol{\mathcal{U}})$.
3. *Para cada x, y, si $x \subseteq y$ e $y \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces $x \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.*
4. *Para cada x, y, si $x, y \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces $\{x, y\}$, (x, y) y $x \times y \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.*
5. *Para cada función F, si* $\mathrm{Dom}(F) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ *e* $\mathrm{Im}(F) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{U}}$, *entonces se cumple que* $\mathrm{Im}(F) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ *y* $F \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.
6. *Para cada conjunto x, si $x \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces $\bigcup x \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.*
7. *Para cada función F, si* $\mathrm{Dom}(F) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ *e* $\mathrm{Im}(F) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{U}}$, *entonces se cumple que* $\bigcup \mathrm{Im}(F) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ *y* $\prod \mathrm{Im}(F) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.

Date: 29 de agosto de 2011.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary: ; Secondary:

Demostración. 1. Si $x \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces $\mathrm{Sub}(x) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, luego $\mathrm{Sub}(x) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{U}}$. Por lo tanto $\mathrm{card}(x) < \mathrm{card}(\mathrm{Sub}(x)) \leq \mathrm{card}(\boldsymbol{\mathcal{U}})$. De donde $\mathrm{card}(x) < \mathrm{card}(\boldsymbol{\mathcal{U}})$.

2. Puesto que $\mathbb{N} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces, en virtud de 1, $\aleph_0 < \mathrm{card}(\boldsymbol{\mathcal{U}})$.

3. Si $x \subseteq y$ e $y \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces $x \in \mathrm{Sub}(y) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, luego $x \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.

4. Si $x, y \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces $\{x, y\} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{U}}$. Ahora bien, puesto que $\aleph_0 < \mathrm{card}(\boldsymbol{\mathcal{U}})$, el conjunto $\{x, y\}$ no es isomorfo a $\boldsymbol{\mathcal{U}}$, luego $\{x, y\} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$. Por otra parte, puesto que $(x, y) = \{\, \{x\}, \{x, y\}\, \}$, se cumple que $(x, y) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, ya que $\{x\} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ y $\{x, y\} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$. Por último, si $x, y \in U$, entonces, para cada $a \in x$ y cada $b \in y$, $a, b \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, luego $(a, b) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$. por lo tanto $x \times y \subseteq \boldsymbol{\mathcal{U}}$. Ahora bien, puesto que $\aleph_0 < \mathrm{card}(\boldsymbol{\mathcal{U}})$, $\mathrm{card}(x) < \mathrm{card}(\boldsymbol{\mathcal{U}})$ y $\mathrm{card}(y) < \mathrm{card}(\boldsymbol{\mathcal{U}})$, $\mathrm{card}(x \times y) < \mathrm{card}(U)$. Por lo tanto $x \times y \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.

5. Si F es una función tal que $\mathrm{Dom}(F) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ e $\mathrm{Im}(F) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces $\mathrm{Im}(F) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{U}}$ y $\mathrm{card}(\mathrm{Im}(F)) \leq \mathrm{card}(x) < \mathrm{card}(\boldsymbol{\mathcal{U}})$, luego $\mathrm{Im}(F) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$. Por último, ya que $F \subseteq \mathrm{Dom}(F) \times \mathrm{Im}(F) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, también tenemos que $F \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.

6. Si $x \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ e $y \in \bigcup x$, entonces $y \in z \in x$, para un $z \in x$, luego $y \in z \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, por lo tanto $y \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$. De modo que $\bigcup x \subseteq \boldsymbol{\mathcal{U}}$. Además, $\mathrm{card}(\bigcup x) \leq \sum_{z \in x} z < \mathrm{card}(\boldsymbol{\mathcal{U}})$, porque $\mathrm{card}(\boldsymbol{\mathcal{U}})$ es un cardinal regular. Luego $\bigcup x \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$. □

Proposición 1.3. *Una condición necesaria y suficiente para que un conjunto $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ sea un universo de Grothendieck es que $\boldsymbol{\mathcal{U}} = V_\zeta$, para un cardinal fuertemente inaccesible ζ.*

Demostración. □

Ejercicio. Sea U un conjunto. Demuéstrese que U es un universo de Grothendieck si y sólo si cumple las siguientes condiciones:

1. U es $\in$-transitivo.
2. Para cada conjunto x, si $x \in U$, entonces $\mathrm{Sub}(x) \in U$.
3. Para cada conjunto x, si $x \in U$ y $F\colon x \longrightarrow U$, entonces $\bigcup \mathrm{Im}(F) \in U$.
4. $\mathbb{N} \in U$.

Proposición 1.4. *Sea $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ un universo de Grothendieck. Si $x \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ e $y \subseteq x$, entonces $y \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.*

Demostración. □

Proposición 1.5. *Sea $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ un universo de Grothendieck. Si $x \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces todo conjunto cociente de x pertenece a $\boldsymbol{\mathcal{U}}$.*

Demostración. □

Proposición 1.6. *Sea $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ un universo de Grothendieck. Si $I \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ y $(\, X_i \mid i \in I\,)$ es una familia de conjuntos tal que, para cada $i \in I$, $X_i \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces $\coprod_i X_i \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.*

Demostración. □

Proposición 1.7. *Sea $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ un universo de Grothendieck. Si $X, Y \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces toda relación, función, aplicación no determinista y aplicación de X en Y, pertenece a $\boldsymbol{\mathcal{U}}$.*

Demostración. □

Proposición 1.8. *Sea U un universo de Grothendieck. Si $X, Y \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces todo conjunto de relaciones, funciones, aplicaciones no deterministas y aplicaciones de X en Y, pertenece a U.*

Demostración. □

Proposición 1.9. *Si $X \subseteq \boldsymbol{\mathcal{U}}$ es tal que su cardinal es a lo sumo el de un elemento de $\boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces $X \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.*

Demostración. Sea $I \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ tal que $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(I)$. Entonces hay una sobreyección $(x_j \mid j \in J)$ desde un subconjunto J de I hasta X. Por lo tanto $X = \bigcup_{j \in J}\{x_j\}$, así que $X \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$. □

Ejercicio. Sea U un universo de Grothendieck. Demuéstrese que toda parte finita de U es elemento de U.

Proposición 1.10. *Si $(\boldsymbol{\mathcal{U}}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ es una familia no vacía de universos de Grothendieck, entonces $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \boldsymbol{\mathcal{U}}_\lambda$ es un universo de Grothendieck.*

Demostración. □

Axioma del universo. *Existe un universo de Grothendieck.*

Axioma de Grothendieck-Tarski-Sonner. *Para cada conjunto x existe un universo de Grothendieck $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ tal que $x \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.*

Proposición 1.11. *Sea $(\, X_i \mid i \in I\,)$ una familia de conjuntos. Entonces hay un universo de Grothendieck $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ tal que, para cada $i \in I$, $X_i \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.*

Demostración. Es suficiente considerar $\bigcup_{i \in I} X_i$, porque entonces $\bigcup_{i \in I} X_i \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ y ya que $X_i \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i$, $X_i \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, para cada $i \in I$. □

Definición 1.12. Sean X e Y dos conjuntos y $n \geq 0$. Decimos de Y que es una *componente de orden n de X* si hay una sucesión finita $(\, X_j \mid j \in n+1\,)$ tal que $X_0 = X$, $X_n = Y$, y, para cada $j \in n$, $X_{j+1} \in X_j$. Convenimos que X es la única componente de orden 0 de X. Además, un conjunto Y es una *componente de X* si hay un $n \geq 0$ tal que Y que es una componente de orden n de X.

Ejercicio. Demuéstrese que todo conjunto es una componente de sí mismo y que si Y es una componente de X y Z lo es de Y, entonces Z lo es de X.

Ejercicio. Demuéstrese que las componentes de cualquier conjunto constituyen un conjunto.

Definición 1.13. Sea $\mathfrak{m}$ un cardinal. Decimos de un conjunto X que es de *tipo* $\mathfrak{m}$ (resp., de *tipo estricto* $\mathfrak{m}$, de *tipo finito*) si todas las componentes de X tienen cardinales menores o iguales que $\mathfrak{m}$ (resp., estrictamente menores que $\mathfrak{m}$, finitos)

Proposición 1.14. *Si X es un conjunto de tipo $\mathfrak{m}$ (resp., de tipo estricto $\mathfrak{m}$, de tipo finito), entonces toda componente de X y toda parte de X son de tipo $\mathfrak{m}$ (resp., de tipo estricto $\mathfrak{m}$, de tipo finito); del mismo modo $\mathrm{Sub}(X)$ es de tipo $2^{\mathfrak{m}}$ (resp., de tipo estricto $2^{\mathfrak{m}}$, de tipo finito). Además, si X es de tipo $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$, entonces X es de tipo $\mathfrak{n}$.*

Demostración. □

2. Categorías

Definición 2.1. Una *categoría* $\mathbf{C}$ consta de los siguientes datos:

1. Un conjunto $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ de *objetos*, A, B, ...
2. Un conjunto $\mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ de *morfismos* f, g, ...
3. Una aplicación $\mathrm{d}_0 \colon \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ que a cada morfismo $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ le asigna el objeto $\mathrm{d}_0(f)$, al que denominamos el *dominio* de f.
4. Una aplicación $\mathrm{d}_1 \colon \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ que a cada morfismo $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ le asigna el objeto $\mathrm{d}_1(f)$, al que denominamos el *codominio* de f.
5. Una aplicación $\mathrm{id} \colon \mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ que a cada objeto $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ le asigna el morfismo id_A, al que denominamos el morfismo *identidad* de x.

6. Siendo $\mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \prod_{\mathrm{Ob}(\mathbf{C})} \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ el conjunto definido como:
$$\mathrm{Mor}(\mathbf{C})\textstyle\prod_{\mathrm{Ob}(\mathbf{C})}\mathrm{Mor}(\mathbf{C}) = \{\, (f,g) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C})^2 \mid \mathrm{d}_0(f) = \mathrm{d}_1(g) \,\},$$
una aplicación $\circ\colon \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \prod_{\mathrm{Ob}(\mathbf{C})} \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$, que a cada par $(f,g) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \prod_{\mathrm{Ob}(\mathbf{C})} \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ le asigna el morfismo $f \circ g$, al que denominamos la *composición* de f y g.

Si $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,B)$ es el conjunto de los morfismos de $\mathbf{C}$ cuyo dominio es A y cuyo codominio es B, i.e., el conjunto definido como:
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,B) = \{\, f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C} \mid \mathrm{d}_0(f) = A \;\;\&\;\; \mathrm{d}_1(f) = B \,\}.$$
Convenimos que $f\colon A \longrightarrow B$ es sinónimo de $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,B)$.

Estando estos datos sujetos a cumplir las siguientes condiciones:

1. Para cada $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, $\mathrm{d}_0(id_A) = A$ y $\mathrm{d}_1(id_A) = A$.
2. Para cada par $(f,g) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \prod_{\mathrm{Ob}(\mathbf{C})} \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$, $\mathrm{d}_0(f \circ g) = \mathrm{d}_0(g)$ y $\mathrm{d}_1(f \circ g) = \mathrm{d}_1(f)$.
3. Si $f\colon A \longrightarrow B$, $g\colon B \longrightarrow C$ y $h\colon C \longrightarrow D$ son tres morfismos, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, i.e., el diagrama:
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] \arrow[drr, bend left=60, "(h \circ g) \circ f"] \arrow[drr, bend right=70, "h \circ (g \circ f)"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h \circ g"] & \\
 & C \arrow[r, "h"'] & D
\end{tikzcd}$$
conmuta.
4. Si $f\colon A \longrightarrow B$, entonces $f \circ id_A = f$ y $id_B \circ f = f$, i.e., los diagramas:
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "id_A"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \\
 & B
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "id_B"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$
conmutan.

En algunas ocasiones, para abreviar, denotaremos el conjunto de los objetos de una categoría $\mathbf{C}$, simplemente por $\mathbf{C}$, y si $A, B \in \mathbf{C}$, i.e., si $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, entonces denotaremos por $\mathrm{Hom}(A,B)$ o por $\mathbf{C}(A,B)$ el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,B)$ de los morfismos de A en B.

En lo que sigue, salvo indicación expresa de lo contrario, suponemos elegido un universo de Grothendieck $\boldsymbol{\mathcal{U}}$.

Corolario 2.2. *Las álgebras Booleanas* $\mathbf{A}$ *tales que* $A \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$*, junto con los homomorfismos entre ellas constituyen una categoría, a la que denotamos por* **Bool**.

Definición 2.3. Sea $\mathbf{C}$ una categoría y $f\colon A \longrightarrow B$ un morfismo de $\mathbf{C}$. Decimos que

1. El morfismo $f\colon A \longrightarrow B$ es un *monomorfismo* si, para cada objeto X de $\mathbf{C}$ y cualesquiera morfismos $g, h\colon X \longrightarrow A$, si el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] \arrow[rr, bend left=40, "f \circ g"] \arrow[rr, bend right=40, "f \circ h"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $g = h$, i.e., si cuando $f \circ g = f \circ h$, entonces $g = h$; es por ello que a este tipo de morfismos también se los denomina *simplificables a la izquierda*. Denotamos al conjunto de los monomorfismos de A en B por $\mathrm{Mono}(A, B)$. Convenimos entonces que $f\colon A \rightarrowtail B$ significa que el morfismo $f\colon A \rightarrowtail B$ es un monomorfismo.
2. El morfismo $f\colon A \longrightarrow B$ es un *epimorfismo* si, para cada objeto Y de $\mathbf{C}$ y cualesquiera morfismos $g, h\colon B \longrightarrow Y$, si el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left=40, "g \circ f"] \arrow[rr, bend right=40, "h \circ f"'] & B \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $g = h$, i.e., si cuando $g \circ f = h \circ f$, entonces $g = h$; es por ello que a este tipo de morfismos también se los denomina *simplificables a la derecha*. Convenimos entonces que $f\colon A \twoheadrightarrow B$ significa que el morfismo $f\colon A \longrightarrow B$ es un epimorfismo, y denotamos al conjunto de los epimorfismos de A en B por $\mathrm{Epi}(A, B)$.
3. El morfismo $f\colon A \longrightarrow B$ es un *isomorfismo* si existe un $g\colon B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$. A los isomorfismos de un objeto en sí mismo los denominamos *automorfismos*.

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos álgebras Booleanas. Demuéstrese que si un homomorfismo $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es inyectivo, resp., sobreyectivo, entonces es un monomorfismo, resp., epimorfismo.

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos álgebras Booleanas. Demuéstrese que un homomorfismo $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es un isomorfismo precisamente si es un homomorfismo biyectivo.

Proposición 2.4. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra Booleana. Entonces* $\neg$ *es un isomorfismo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{A}^{\mathrm{op}}$ *y* $\neg \circ \neg = \mathrm{id}_{\mathbf{A}}$.

3. Functores

Definición 3.1. Dadas dos categorías $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, un *functor* de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$ es un triplo $F = (\mathbf{C}, (F_0, F_1), \mathbf{D})$, denotado por $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$, en el que F_0 es una aplicación de $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ en $\mathrm{Ob}(\mathbf{D})$, F_1 una aplicación de $\mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ to $\mathrm{Mor}(\mathbf{D})$, y que cumple las siguientes condiciones:

1. Los diagramas:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "\mathrm{d}_0"'] & \mathrm{Mor}(\mathbf{D}) \arrow[d, "\mathrm{d}_0"] \\ \mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_0"'] & \mathrm{Ob}(\mathbf{D}) \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "\mathrm{d}_1"'] & \mathrm{Mor}(\mathbf{D}) \arrow[d, "\mathrm{d}_1"] \\ \mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_0"'] & \mathrm{Ob}(\mathbf{D}) \end{tikzcd}$$

   conmutan.
2. El diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_0"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathrm{Ob}(\mathbf{D}) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_1"'] & \mathrm{Mor}(\mathbf{D}) \end{tikzcd}$$

   conmuta.
3. El diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \prod_{\mathrm{Ob}(\mathbf{C})} \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_1^2"] \arrow[d, "\circ"'] & \mathrm{Mor}(\mathbf{D}) \prod_{\mathrm{Ob}(\mathbf{D})} \mathrm{Mor}(\mathbf{D}) \arrow[d, "\circ"] \\ \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_1"'] & \mathrm{Mor}(\mathbf{D}) \end{tikzcd}$$

   conmuta.

De ahora en adelante, para un functor $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$, convenimos en denotar mediante el mismo símbolo F a las dos aplicaciones F_0 y F_1.

Proposición 3.2. *Sean $F\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, $G\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ y $H\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ tres functores. Entonces:*

1. *Siendo $Id_{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}, (id_{\mathrm{Ob}(\mathbf{A})}, id_{\mathrm{Mor}(\mathbf{A})}), \mathbf{A})$, se cumple que $Id_{\mathbf{A}}\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$, el functor* identidad *de $\mathbf{A}$, es un endofunctor de $\mathbf{A}$.*
2. *Siendo $G \circ F = (\mathbf{A}, (G_0 \circ F_0, G_1 \circ F_1), \mathbf{C})$, se cumple que $G \circ F\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$, el functor* composición *de F y G, es un functor de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{C}$.*
3. (Asociatividad)*. El diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "G \circ F"'] \arrow[rr, bend left=60, "(H \circ G) \circ F"] \arrow[drr, bend right=60, "H \circ (G \circ F)"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "G"] \arrow[dr, "H \circ G"] & \\ & \mathbf{C} \arrow[r, "H"'] & \mathbf{D} \end{tikzcd}$$

   conmuta.

4. (Neutros). *Los diagramas:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "Id_{\mathbf{A}}"] \arrow[dr, "F"'] & \mathbf{A} \arrow[d, "F"] \\ & \mathbf{B} \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "F"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "Id_{\mathbf{B}}"] \\ & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

conmutan.

Definición 3.3. Decimos que un functor $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ es un *isomorfismo* de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$ si existe un functor $G\colon \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ tal que $G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$ y $F \circ G = \mathrm{Id}_{\mathbf{D}}$.

Demuéstrese que una condición necesaria y suficiente para que un functor $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ sea un isomorfismo es que tanto F_0 como F_1 sean isomorfismos.

Definición 3.4. Decimos que un functor $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ es *fiel* si, para cada par de morfismos $f, g\colon A \longrightarrow B$ de $\mathbf{C}$, si $F(f) = F(g)$, entonces $f = g$; que es *pleno* si, para cada morfismo $u\colon F(A) \longrightarrow F(B)$ de $\mathbf{D}$, existe un morfismo $f\colon A \longrightarrow B$ tal que $F(f) = u$; y que es *esencialmente sobreyectivo* si, para cada $D \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$, existe un $C \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ tal que D y $F(C)$ son isomorfos. Por último, decimos que el functor F es una *equivalencia* si es fiel, pleno y esencialmente sobreyectivo.

Demuéstrese que todo isomorfismo de categorías es una equivalencia entre las mismas.

Para cada conjunto A la categoría asociada a (A, ∇_A) es equivalente a la categoría asociada al conjunto ordenado $(1, \leq)$.

Definición 3.5. Sea $\mathbf{K}$ una categoría. Una *categoría concreta* sobre $\mathbf{K}$ es un par $(\mathbf{C}, G)$ en el que $\mathbf{C}$ es una categoría y $G\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{K}$ un functor fiel. Un *functor concreto* $F\colon (\mathbf{C}, G) \longrightarrow (\mathbf{D}, H)$ sobre $\mathbf{K}$ de la categoría concreta $(\mathbf{C}, G)$ sobre $\mathbf{K}$ en la categoría concreta $(\mathbf{D}, H)$ sobre $\mathbf{K}$ es un functor $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & & \mathbf{D} \arrow[dl, "H"] \\ & \mathbf{K} & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Decimos que el functor concreto $F\colon (\mathbf{C}, G) \longrightarrow (\mathbf{D}, H)$ sobre $\mathbf{K}$ es un *isomorfismo de categorías concretas* de $(\mathbf{C}, G)$ en $(\mathbf{D}, H)$ si F es un isomorfismo.

Proposición 3.6 (Stone)**.** *Las categorías concretas* $(\mathbf{Bool}, G_{\mathbf{Bool}})$ *y* $(\mathbf{BRng}, G_{\mathbf{BRng}})$ *sobre* $\mathbf{Set}$ *son concretamente isomorfas, i.e., hay un isomorfismo* $F\colon \mathbf{Bool} \longrightarrow \mathbf{BRng}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Bool} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G_{\mathbf{Bool}}"'] & & \mathbf{BRng} \arrow[dl, "G_{\mathbf{BRng}}"] \\ & \mathbf{Set} & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. $\square$

Definimos a continuación el concepto de functor contravariante de una categoría en otra, que, en definitiva, es reducible al concepto de functor, haciendo uso de la dual de una categoría.

Definición 3.7. Dadas dos categorías $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, un *functor contravariante* de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$ es un triplo $F = (\mathbf{C}, (F_0, F_1), \mathbf{D})$, denotado por $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$, en el que F_0 es una aplicación de $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ en $\mathrm{Ob}(\mathbf{D})$, F_1 una aplicación de $\mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ to $\mathrm{Mor}(\mathbf{D})$, y que cumple las siguientes condiciones:

1. Los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "\mathrm{d}_1"'] & \mathrm{Mor}(\mathbf{D}) \arrow[d, "\mathrm{d}_0"] \\
\mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_0"'] & \mathrm{Ob}(\mathbf{D})
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "\mathrm{d}_0"'] & \mathrm{Mor}(\mathbf{D}) \arrow[d, "\mathrm{d}_1"] \\
\mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_0"'] & \mathrm{Ob}(\mathbf{D})
\end{tikzcd}$$

   conmutan.
2. El diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_0"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathrm{Ob}(\mathbf{D}) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_1"'] & \mathrm{Mor}(\mathbf{D})
\end{tikzcd}$$

   conmuta.
3. Siendo tw el automorfismo de $\mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \prod \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ que intercambia las coordenadas y $F_1^2 \circ \mathrm{tw}$ la aplicación de $\mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \prod_{\mathrm{Ob}(\mathbf{C})} \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ en $\mathrm{Mor}(\mathbf{D}) \prod_{\mathrm{Ob}(\mathbf{D})} \mathrm{Mor}(\mathbf{D})$, que a un par (f, g) del primero le asigna el par $(F_1(g), F_1(f))$ del segundo, entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \prod_{\mathrm{Ob}(\mathbf{C})} \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_1^2 \circ \mathrm{tw}"] \arrow[d, "\circ"'] & \mathrm{Mor}(\mathbf{D}) \prod_{\mathrm{Ob}(\mathbf{D})} \mathrm{Mor}(\mathbf{D}) \arrow[d, "\circ"] \\
\mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \arrow[r, "F_1"'] & \mathrm{Mor}(\mathbf{D})
\end{tikzcd}$$

   conmuta.

Lo mismo que para los functores, de ahora en adelante, para un functor contravariante $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$, denotaremos mediante el mismo símbolo F a las dos aplicaciones F_0 y F_1.

Demuéstrese que dar un functor contravariante de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$ equivale a dar un functor de $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ en $\mathbf{D}$ o un functor de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}^{\mathrm{op}}$.

Ejemplo. De la categoría $\mathbf{Set}$ en la categoría $\mathbf{CABA}$, de las álgebras Booleanas completas atómicas y homomorfismos completos, tenemos el functor contravariante $\mathrm{P}^-\colon \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{CABA}$ que a un conjunto A le asigna el álgebra Booleana completa atómica $\mathbf{Sub}(A)$ y a una aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ le asigna el homomorfismo completo $f^{-1}\colon \mathbf{Sub}(B) \longrightarrow \mathbf{Sub}(A)$.

Definición 3.8. Una *dualidad* o *antiequivalencia* de una categoría $\mathbf{C}$ en otra categoría $\mathbf{D}$ es un functor contravariante F de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$ que es fiel pleno y esencialmente sobreyectivo.

4. Transformaciones naturales

Dados dos functores $F, G\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ vamos a definir a continuación el concepto de transformación natural del functor F en el functor G. Esta noción nos permitirá obtener una caracterización de las dualidades.

Definición 4.1. Sean $F, G\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ dos functores de la categoría $\mathbf{C}$ en la categoría $\mathbf{D}$. Una *transformación natural* o un *morfismo functorial* de F en G es un triplo (F, η, G), denotado por $\eta\colon F \longrightarrow G$, en el que η es una aplicación de $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ en $\mathrm{Mor}(\mathbf{D})$ tal que:

1. Para cada $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, $\eta_A\colon F(A) \longrightarrow G(A)$.
2. Para cada $f\colon A \longrightarrow B \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ el diagrama:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

conmuta. Si $\eta\colon F \longrightarrow G$ es tal que, para cada $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, $\eta_A\colon F(A) \longrightarrow G(A)$ es un isomorfismo, entonces decimos que η es un *isomorfismo functorial* de F en G.

Proposición 4.2. *Sea G un functor contravariante de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$. Una condición necesaria y suficiente para que G sea una dualidad de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$ es que exista un functor contravariante F de $\mathbf{D}$ en $\mathbf{C}$ y dos isomorfismos functoriales $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathbf{D}} \longrightarrow G \circ F$ y $\varepsilon\colon F \circ G \longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$.*

5. Construcciones sobre las categorías

Una congruencia débil sobre una categoría $\mathbf{C}$ es un par ordenado

$$\Phi = \left(\Phi, \left(\Phi_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ a' & b' \end{smallmatrix}\right)}\right)_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ a' & b' \end{smallmatrix}\right) \in \Phi \times \Phi}\right)$$

en el que Φ es una relación de equivalencia sobre $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ y, para cada matriz $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ a' & b' \end{smallmatrix}\right) \in \Phi \times \Phi$, en donde convenimos que $(a, a') \in \Phi$ y que $(b, b') \in \Phi$, $\Phi_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ a' & b' \end{smallmatrix}\right)}$ es un subconjunto de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(a, b) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(a', b')$ tal que

1. $\Delta_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(a,b)} \subseteq \Phi_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ a & b \end{smallmatrix}\right)}$.
2. $\Phi^{-1}_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ a' & b' \end{smallmatrix}\right)} = \Phi_{\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ a & b \end{smallmatrix}\right)}$.
3. $\Phi_{\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{smallmatrix}\right)} \circ \Phi_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ a' & b' \end{smallmatrix}\right)} \subseteq \Phi_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{smallmatrix}\right)}$.
4. $\Phi_{\left(\begin{smallmatrix} b & c \\ b' & c' \end{smallmatrix}\right)} \circ \Phi_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ a' & b' \end{smallmatrix}\right)} \subseteq \Phi_{\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ a' & c' \end{smallmatrix}\right)}$.

Las condiciones tercera y cuarta pueden ser visualizadas mediante el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, sloped, "\equiv"] & b \arrow[r, "g"] \arrow[d, phantom, sloped, "\equiv"] & c \arrow[d, phantom, sloped, "\equiv"] \arrow[r, squiggly] & a \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d, phantom, sloped, "\equiv"] & c \arrow[d, phantom, sloped, "\equiv"] \\
a' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, phantom, sloped, "\equiv"] & b' \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, phantom, sloped, "\equiv"] & c' & a' \arrow[r, "g' \circ f'"'] & c' \\
a'' \arrow[r, "f''"] \arrow[d, squiggly] & b'' & & & \\
a \arrow[r, "f"'] \arrow[d, phantom, sloped, "\equiv"] & b \arrow[d, phantom, sloped, "\equiv"] & & & \\
a'' \arrow[r, "f''"'] & b'' & & &
\end{tikzcd}$$

En el caso de que Φ sea $\Delta_{\mathrm{Ob}(\mathbf{C})}$ obtenemos el concepto usual de congruencia sobre una categoría.

Estudiar el sistema de todas las congruencias débiles sobre una categoría y establecer los teoremas de isomorfía de Dedekind-Noether. Para la categoría cociente, $\mathbf{C}/\Phi$, considerar como conjunto de objetos $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})/\Phi$, y, para dos objetos $[a]_\Phi$, $[b]_\Phi$, como conjunto de morfismos

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}([a]_\Phi, [b]_\Phi) = \bigcup_{\substack{x \in [a]_\Phi \\ y \in [b]_\Phi}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x, y) / \bigcup_{\substack{x, x' \in [a]_\Phi \\ y, y' \in [b]_\Phi}} \Phi\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}.$$

Considerar un conjunto preordenado $\mathbf{A} = (A, \leq)$, la categoría asociada y la congruencia débil inducida sobre tal categoría por la relación de equivalencia $\equiv = \leq \cap \geq$ sobre $\mathbf{A}$.

Otro ejemplo con los núcleos de los functores.

6. Especies de estructura con morfismos sobre una categoría

A continuación definimos, para una categoría $\mathbf{K}$, la noción de especie de estructura con morfismos sobre $\mathbf{K}$.

Let $\mathbf{K}$ be an arbitrary, but fixed, category. A *species of structure with morphisms* relative to $\mathbf{K}$ is a pair $\mathcal{S} = (\mathrm{Str}_{\mathcal{S}}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}})$, where $\mathrm{Str}_{\mathcal{S}}$ is a function such that $\mathrm{Dom}(\mathrm{Str}_{\mathcal{S}}) = \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$, the set of all objects of $\mathbf{K}$, and $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}$ is a function such that $\mathrm{Dom}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}) = (\coprod_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})} \mathrm{Str}_{\mathcal{S}}(Y))^2 = (\bigcup_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})} (\{Y\} \times \mathrm{Str}_{\mathcal{S}}(Y))^2$, subject to satisfy the following conditions:

1. For every $((Y, \xi), (Y', \xi')) \in \mathrm{Dom}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}})$, it happens that
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}((Y, \xi), (Y', \xi')) \subseteq \{(Y, \xi)\} \times \mathrm{Hom}(Y, Y') \times \{(Y', \xi')\}.$$
2. For every $Y, Y', Y'' \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$, every $\xi \in \mathrm{Str}_{\mathcal{S}}(Y)$, every $\xi' \in \mathrm{Str}_{\mathcal{S}}(Y')$, and every $\xi'' \in \mathrm{Str}_{\mathcal{S}}(Y'')$, if $\mathsf{f} = ((Y, \xi), f, (Y', \xi')) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}((Y, \xi), (Y', \xi'))$ and $\mathsf{f}' = ((Y', \xi'), f', (Y'', \xi'')) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}((Y', \xi'), (Y'', \xi''))$, then it also happens that $\mathsf{f}' \circ \mathsf{f} = ((Y, \xi), f' \circ f, (Y'', \xi'')) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}((Y, \xi), (Y'', \xi''))$.
3. For every $Y, Y' \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$, every isomorphism $f \colon Y \longrightarrow Y'$, and every $\xi' \in \mathrm{Str}_{\mathcal{S}}(Y')$ there exists a unique $\xi \in \mathrm{Str}_{\mathcal{S}}(Y)$ such that $\mathsf{f} = ((Y, \xi), f, (Y', \xi')) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}((Y, \xi), (Y', \xi'))$ and $\mathsf{f}^{-1} = ((Y', \xi'), f^{-1}, (Y, \xi)) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}((Y', \xi'), (Y, \xi))$.

Let $\mathcal{S} = (\mathrm{Str}_{\mathcal{S}}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}})$ be a species of structure with morphisms relative to $\mathbf{K}$. Then, for every object Y in $\mathrm{Ob}(\mathbf{K})$, we call the elements of $\mathrm{Str}_{\mathcal{S}}(Y)$ *$\mathcal{S}$-structures on Y*, moreover, we call the elements of $\coprod_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})} \mathrm{Str}_{\mathcal{S}}(Y)$, i.e., the pairs (Y, ξ), where $Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ and ξ is an $\mathcal{S}$-structure on Y, $\mathcal{S}$-*structured objects*, and, finally, for a pair (Y,ξ), (Y',ξ') of $\mathcal{S}$-structured objects, we call the elements of $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}((Y,\xi),(Y',\xi'))$, i.e., the triples $((Y,\xi),\varphi,(Y',\xi'))$, which, to abbreviate, we agree to write as $\varphi\colon (Y,\xi) \longrightarrow (Y',\xi')$, $\mathcal{S}$-*admissible morphisms* from (Y,ξ) to (Y',ξ').

We denote by $\mathbf{K}(\mathcal{S})$ the corresponding category and by $G_{\mathcal{S}}$ the forgetful functor from $\mathbf{K}(\mathcal{S})$ to $\mathbf{K}$.

Let $(\mathbf{K}, G_{\mathbf{K}})$ be a transportable concrete category over a (base) category $\mathbf{L}$, thus $G_{\mathbf{K}}$ is a transportable, faithful, and amnestic functor from $\mathbf{K}$ to $\mathbf{L}$. The functor $G_{\mathbf{K}}$ is called *amnestic* if every isomorphism φ in a fibre of $G_{\mathbf{K}}$, i.e., such that $G_{\mathbf{K}}(\varphi) = id_L$, for some object L of $\mathbf{L}$, is an identity morphism in $\mathbf{K}$. The functor $G_{\mathbf{K}}$ is called *transportable* if every isomorphism ψ from $G_{\mathbf{K}}(Y)$ to L', for an object Y of $\mathbf{K}$ and an object L' of $\mathbf{L}$, lifts to a unique isomorphism φ from Y to Y' of $\mathbf{K}$, with $G_{\mathbf{K}}(Y') = L'$ (and $G_{\mathbf{K}}(\varphi) = \psi$).

Lema 6.1. *Sea A un S-conjunto, $(A^i,\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ una familia de S-espacios de clausura y $f^{\cdot} = (f^i)_{i\in I}$ una familia de S-aplicaciones, en la que, para cada $i \in I$, $f^i\colon A \longrightarrow A^i$. Entonces hay un único sistema de clausura heterogéneo $\mathcal{C}$ sobre A, al que denotamos por $\mathrm{L}^{f^{\cdot}}(A^i,\mathcal{C}_i)_{i\in I}$, y denominamos el levantamiento optimal de $(A^i,\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ a través de $f^{\cdot}$, tal que:*

1. *Para cada $i \in I$, $f^i\colon (A, \mathrm{L}^{f}(A^i,\mathcal{C}_i)_{i\in I}) \longrightarrow (A^i,\mathcal{C}_i)$.*
2. *Dado un S-espacio de clausura $(B,\mathcal{B})$ y $g\colon B \longrightarrow A$, si, para cada $i \in I$, $f^i \circ g\colon (B,\mathcal{B}) \longrightarrow (A^i,\mathcal{C}_i)$, entonces $g\colon (B,\mathcal{B}) \longrightarrow (A, \mathrm{L}^{f^{\cdot}}(A^i,\mathcal{C}_i)_{i\in I})$.*

Además, se cumple que:

1. *Para cada sistema de clausura heterogéneo $\mathcal{C}$ sobre A:*
$$\mathrm{L}^{\mathrm{id}_A}(A,\mathcal{C}) = \mathcal{C}.$$
2. *Si, para cada $i \in I$, $(A^{i,m},\mathcal{C}_{i,m})_{m\in \mathrm{M}_i}$ es una familia de S-espacios de clausura, $g^{i,\cdot} = (g^{i,m})_{m\in\mathrm{M}_i}$ una familia de S-aplicaciones, en la que, para cada $m \in \mathrm{M}_i$, $g^{i,m}\colon A^i \longrightarrow A^{i,m}$ y $\mathcal{C}_i = \mathrm{L}^{g^{i,\cdot}}(A^{i,m},\mathcal{C}_{i,m})_{m\in\mathrm{M}_i}$, entonces*
$$\mathrm{L}^{(g^{i,\cdot}\circ f^{\cdot})_{i\in I}}(A^{i,m},\mathcal{C}_{i,m})_{(i,m)\in\coprod_{i\in I}\mathrm{M}_i} = \mathrm{L}^{f^{\cdot}}(A^i,\mathcal{C}_i)_{i\in I}.$$

Demostración. Es suficiente que tomemos como $\mathrm{L}^{f^{\cdot}}(A^i,\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ el sistema de clausura heterogéneo sobre A generado por $\bigcup_{i\in I}\{\, (f^i)^{-1}[C] \mid C \in \mathcal{C}_i \,\}$. □

Obsérvese que, para cada S-conjunto A, el levantamiento optimal de $(A^i,\mathcal{C}_i)_{i\in\varnothing}$ a través de $f^{\cdot} = (f^i)_{i\in\varnothing}$ es $\{A\}$.

Definición 6.2. Sea $f\colon (A,\mathcal{C}) \longrightarrow (B,\mathcal{D})$ un morfismo de S-espacios de clausura. Decimos que f es un morfismo optimal si, para cada S-espacio de clausura $(C,\mathcal{E})$ y cada aplicación $g\colon C \longrightarrow A$, si $f \circ g\colon (C,\mathcal{E}) \longrightarrow (B,\mathcal{D})$, entonces $g\colon (C,\mathcal{E}) \longrightarrow (A,\mathcal{C})$.

Proposición 6.3. *Sea $f\colon (A,\mathcal{C}) \longrightarrow (B,\mathcal{D})$ un morfismo de S-espacios de clausura. Una condición necesaria y suficiente para que f sea un morfismo optimal es que $\mathcal{C} = \mathrm{L}^{f}(B,\mathcal{D})$.*

Proposición 6.4. *Si $f\colon (A,\mathcal{C}) \longrightarrow (B,\mathcal{D})$ y $g\colon (B,\mathcal{D}) \longrightarrow (C,\mathcal{E})$ son morfismos optimales, entonces $g\circ f\colon (A,\mathcal{C}) \longrightarrow (C,\mathcal{E})$ es un morfismo optimal. Además, si $g\circ f\colon (A,\mathcal{C}) \longrightarrow (C,\mathcal{E})$ es un morfismo optimal, entonces se cumple que $f\colon (A,\mathcal{C}) \longrightarrow (B,\mathcal{D})$ es optimal.*

Lema 6.5. *Sea A un S-conjunto, $(A^i,\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ una familia de S-espacios de clausura heterogéneos y $f^{\cdot} = (f^i)_{i\in I}$ una familia de S-aplicaciones, en la que, para cada $i \in I$, $f^i\colon A^i \longrightarrow A$. Entonces hay un único sistema de clausura heterogéneo $\mathcal{C}$*

sobre A, al que denotamos por $L_{f^{\cdot}}(A^i, \mathcal{C}_i)_{i\in I}$, y denominamos el levantamiento co-optimal de $(A^i, \mathcal{C}_i)_{i\in I}$ a través de $f^{\cdot}$, tal que:

1. *Para cada $i \in I$, $f^i\colon (A^i, \mathcal{C}_i) \longrightarrow (A, L_{f^{\cdot}}(A^i, \mathcal{C}_i)_{i\in I})$.*
2. *Dado un S-espacio de clausura $(B, \mathcal{D})$ y $g\colon A \longrightarrow B$, si, para cada $i \in I$, $g \circ f^i\colon (A^i, \mathcal{C}_i) \longrightarrow (B, \mathcal{D})$, entonces $g\colon (A, L_{f^{\cdot}}(A^i, \mathcal{C}_i)_{i\in I}) \longrightarrow (B, \mathcal{D})$.*

Además, se cumple que:

1. *Para cada sistema de clausura heterogéneo $\mathcal{C}$ en A:*
$$L_{\mathrm{id}_A}(A, \mathcal{C}) = \mathcal{C}.$$
2. *Si, para cada $i \in I$, $(A^{i,m}, \mathcal{C}_{i,m})_{m\in \mathrm{M}_i}$ es una familia de S-espacios de clausura, $g^{i,\cdot} = (g^{i,m})_{m\in\mathrm{M}_i}$ una familia de S-aplicaciones, en la que, para cada $m \in \mathrm{M}_i$, $g^{i,m}\colon A^{i,m} \longrightarrow A^i$ y $\mathcal{C}_i = L_{g^i}(A^{i,m}, \mathcal{C}_{i,m})_{m\in\mathrm{M}_i}$, entonces*
$$L_{(f^{\cdot}\circ g^{i,\cdot})_{i\in I}}(A^{i,m}, \mathcal{C}_{i,m})_{(i,m)\in\coprod_{i\in I}\mathrm{M}_i} = L_{f^{\cdot}}(A^i, \mathcal{C}_i)_{i\in I}.$$

Demostración. Es suficiente que tomemos como $\mathrm{L}_{f^{\cdot}}(A^i, \mathcal{C}_i)_{i\in I}$ el subconjunto de $\mathrm{Sub}(A)$ definido como:
$$\mathrm{L}_{f^{\cdot}}(A^i, \mathcal{C}_i)_{i\in I} = \{\, C \subseteq A \mid \forall i \in I\,(\,(f^i)^{-1}[C] \in \mathcal{C}_i\,)\,\}.$$
□

Para cada S-conjunto A, el levantamiento co-optimal de $(A^i, \mathcal{C}_i)_{i\in\varnothing}$ a través de $f^{\cdot} = (f^i)_{i\in\varnothing}$ es $\mathrm{Sub}(A)$.

Corolario 6.6. *El functor de olvido de la categoría* $\mathbf{ClSp}(S)$ *en la categoría* $\mathbf{Set}^S$ *has left and right adjoints.*

Corolario 6.7. *El functor de olvido de la categoría* $\mathbf{ClSp}(S)$ *en la categoría* $\mathbf{Set}^S$ *constucts limits and colimits.*

Estudiar lo mismo para las categorías de los S-espacios de clausura algebraicos y los substitucionales (con estos últimos hay problemas).

Definición 6.8. Sea $f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (B, \mathcal{D})$ un morfismo de S-espacios de clausura. Decimos que f es un morfismo co-optimal si, para cada S-espacio de clausura $(C, \mathcal{E})$ y cada aplicación $g\colon B \longrightarrow C$, si $g \circ f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (C, \mathcal{E})$, entonces $g\colon (B, \mathcal{D}) \longrightarrow (C, \mathcal{E})$.

Proposición 6.9. *Sea $f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (B, \mathcal{D})$ un morfismo de S-espacios de clausura. Una condición necesaria y suficiente para que f sea un morfismo co-optimal es que $\mathcal{D} = L_f(A, \mathcal{C})$.*

Proposición 6.10. *Si $f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (B, \mathcal{D})$ y $g\colon (B, \mathcal{D}) \longrightarrow (C, \mathcal{E})$ son morfismos co-optimales, entonces $g\circ f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (C, \mathcal{E})$ es un morfismo co-optimal. Además, si $g\circ f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (C, \mathcal{E})$ es un morfismo co-optimal, entonces $g\colon (B, \mathcal{D}) \longrightarrow (C, \mathcal{E})$ es co-optimal.*

7. Morfismos universales

8. Límites y colímites

9. Functores adjuntos

10. Mónadas

11. Extensiones de Kan

Referencias

[1] A. Tarski and R.L. Vaught, *Arithmetical extensions of relational systems*, Compositio Math., **13** (1957) pp. 81–102.

Universidad de Valencia, Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia, Apt. 22.109 E-46071 Valencia, Spain

E-mail address: Juan.B.Climent@uv.es