

Experimentos sencillos permiten evaluar momentos dipolares magnéticos

Determinación Experimental del Momento Dipolar Magnético: un método estático y dos dinámicos

Juan Bisquert, José A. Manzanares y Salvador Mafé

ABSTRACT: One «static» and two «dynamic» methods are used to determine the magnetic dipole moment of a parallelepipedal magnet. The static method is based on the measurement of the magnetic field of the magnet by means of a Hall probe. In the dynamic methods, the frequencies of either the longitudinal or the transverse oscillations performed by the magnet when placed in an external magnetic field are measured. Special attention is paid to the effects caused by a non-uniform magnetization of the magnet. The analysis is intended for clarifying the important concept of «magnetic dipole moment», and can be readily employed as a laboratory project at an undergraduate level.

1. INTRODUCCION

El dipolo magnético es la fuente elemental del magnetismo y su estudio constituye una parte esencial de los cursos de Física General y Electromagnetismo. A continuación presentaremos una serie de experimentos sencillos que pueden facilitar la comprensión del concepto de momento dipolar magnético. Los experimentos muestran tres métodos de medida del momento dipolar.

En un trabajo previo [1] estudiamos el movimiento de un imán de forma paralelepípedica a lo largo del eje de una bobina circular. Como paso intermedio, desarrollamos un método «estático» para la determinación del momento magnético del imán, m . Este método estaba basado en la representación de los valores experimentales del campo magnético creado por el imán en los puntos situados a lo largo del eje, B_{ex} , en función de los valores teóricos del cociente B_{th}/m obtenidos suponiendo una imanación uniforme del imán [1]. Las implicaciones experimentales del procedimiento anterior se estudian con más detalle en este trabajo. En primer lugar, analizaremos qué sucede cuando las medidas se efectúan en puntos cercanos al imán y, a continuación, compararemos los resultados que se obtienen cuando se mide primero en un extremo del imán, y luego en el otro extremo.

Por otra parte, determinaremos de forma independiente a la anterior el momento magnético del imán mediante dos métodos «dinámicos». El primero se basa en la medida de la frecuencia de las oscilaciones transversales efectuadas por el imán en el seno de un campo magnético externo [2, 3]. El segundo método emplea también la frecuencia de oscilación del imán, pero esta vez las oscilaciones son longitudinales y tienen lugar a lo largo del eje de una bobina circular [1].

Aunque en todas las experiencias se ha empleado un imán paralelepípedico, el tratamiento puede reformularse de forma sencilla para cualquier otra geometría (por ejemplo, un imán en forma de barra cilíndrica) siempre que éste tenga una simetría definida y su longitud a lo largo de la dirección de imanación sea mucho mayor que sus dimensiones transversales. Por otra parte, el equipo experimental que se requiere es muy común en el laboratorio de alumnos, de modo que nuestro estudio se puede emplear como una práctica de laboratorio. De hecho, los datos experimentales que presentamos han sido tomados por alumnos siguiendo unas instrucciones elementales de laboratorio. Los métodos de medida empleados son bastante estimulantes y, como se verá después, conducen a tres determinaciones independientes de m muy similares. Por tanto, pensamos que la realización de experiencias como las descritas en este trabajo pueden contribuir a una mejor comprensión del importante (aunque, tal vez, difícil) concepto del «momento dipolar magnético».

2. METODO ESTATICO

Consideremos el imán mostrado en la figura 1, donde $2L$ es su longitud a lo largo de la dirección de imanación, $2a$ su altura y $2b$ su anchura. Si suponemos que la imanación del imán es uniforme, entonces el campo B_{th} que crea

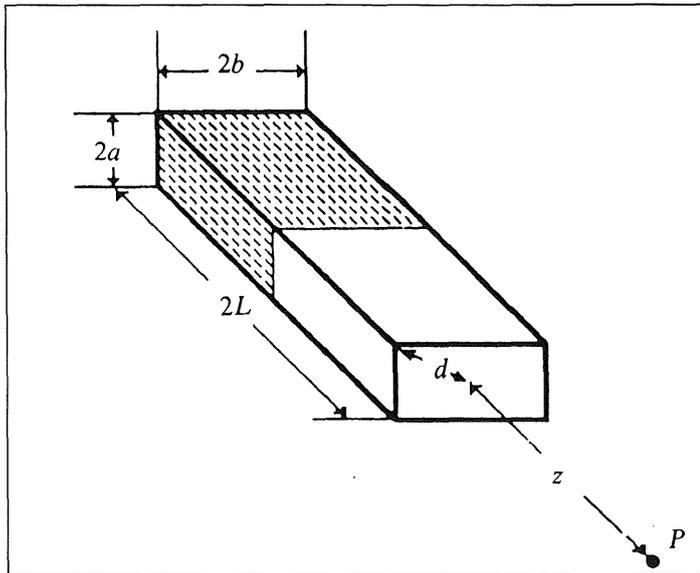


FIGURA 1: Forma y dimensiones del imán. El campo magnético se mide para una serie de puntos *P* sobre el eje del imán situados a distancias *z* de uno de sus extremos.

en el punto *z* puede calcularse aplicando los principios básicos del electromagnetismo, con el resultado [1]

$$B_{th}(z) = \frac{\mu_0 m}{8\pi L a b} \left\{ \arctan \left(\frac{a}{b} \frac{z + 2L}{\sqrt{d^2 + (z + 2L)^2}} \right) - \arctan \left(\frac{a}{b} \frac{z}{\sqrt{d^2 + z^2}} \right) + \arctan \left(\frac{b}{a} \frac{z + 2L}{\sqrt{d^2 + (z + 2L)^2}} \right) - \arctan \left(\frac{b}{a} \frac{z}{\sqrt{d^2 + z^2}} \right) \right\} \quad (1)$$

donde *m*, momento magnético del imán, es el producto de la imanación por el volumen. Si introducimos las dimensiones reales del imán (*a* = 3,45 mm, *b* = 8,45 mm, *L* = 3,50 cm, y *d*² = *a*² + *b*²) en la ecuación (1), podemos obtener los valores teóricos de *B_{th}/m* para varias distancias *z* (por ejemplo, tomando una distancia de separación de 1 cm entre dos puntos consecutivos. Estos valores aparecen en la tabla 1.

A continuación, medimos el campo magnético *B_{ex}(z)* en los mismos puntos en donde antes calculamos *B_{th}(z)* mediante una sonda de efecto Hall (Phywe 11749.01). El procedimiento de medida consiste en mover el imán sobre una regla con la punta de la sonda situada justo en el origen de la misma. Tomamos primero un conjunto de datos *B_{ex,N}(z)* con el polo N del imán apuntando hacia la sonda. A continuación, y sin alterar la situación relativa de la sonda y la regla, rotamos 180° el imán alrededor de su eje vertical y tomamos otro conjunto de datos, *B_{ex,S}(z)*.

Una primera cuestión es averiguar cuál es la región de medida que conducirá al resultado más fiable para *m*. La sensibilidad de la sonda empleada (0,01 mT) impone una cota superior para *z*: los puntos correspondientes a *z* > 20 cm están fuera de nuestro alcance, como muestra la tabla 1. Por otra parte, las desviaciones de la hipótesis de imanación uniforme pueden llegar a ser importantes para puntos demasiado cercanos al imán [4], de modo que la ecuación (1)

dejará de ser válida para dichos puntos. Esto es realmente lo que sucede cuando se consideran todos los datos contenidos en la tabla 1 (véase la figura 2). Si la ecuación (1) fuera válida para todos los puntos experimentales, entonces un ajuste de *B_{ex}* en función de *B_{th}/m* daría una línea recta. Sin embargo, los puntos representados en la figura 2 se acercan más a una parábola que a una recta. No obstante, es un hecho significativo que las desviaciones de los puntos experimentales respecto a la línea recta sean pequeñas, sobre todo si tenemos en cuenta la sencillez del modelo empleado [1] para obtener la ecuación (1) así como el rango de distancias considerado (nótese que estamos midiendo muy cerca del imán).

Aunque es una tentación buscar ahora una explicación a las curvas de la figura 2, es mucho más conveniente considerar en primer lugar sólo aquellos datos tomados no demasiado cerca del imán. Por ejemplo, los datos obtenidos para *z* > 2*L* = 7 cm son válidos. Así, las rectas que ajustan dichos datos (véase la figura 3) indican que los efectos debidos a una imanación no uniforme del imán son despreciables. Las pendientes obtenidas en los correspondientes ajustes por el método de mínimos cuadrados llevan a:

$$m_N = (3,98 \pm 0,05) \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

y

$$m_S = (3,98 \pm 0,05) \text{ A} \cdot \text{m}^2.$$

La coincidencia de los resultados parece confirmar la fiabilidad del procedimiento. Nuestro resultado final para el método estático es:

$$m_{st} = (3,98 \pm 0,05) \text{ A} \cdot \text{m}^2 \quad (2)$$

Otra verificación de la validez del método se basa en el significado de la ordenada en el origen de las rectas que aparecen en la figura 3. Es claro que esta ordenada debe corresponder al valor *B₀* de la componente del campo magnético externo (no debido al imán) en la dirección de la regla. Pero esta componente se suma al campo creado por el imán cuando medimos *B_{ex,N}* y se resta al medir *B_{ex,S}*. Por tanto, las dos ordenadas deben tener iguales valores absolutos y signos opuestos. Esto es, en efecto, lo que resulta del ajuste anterior, pues:

TABLA 1: Resultados teóricos para *B_{th}/m* (ecuación 1) y experimentales para *B_{ex}*, polos *N* y *S*, en función de *z*.

<i>z</i> (cm)	<i>B_{th}/m</i> (mT/A·m ²)	<i>B_{ex,N}</i> (mT)	<i>B_{ex,S}</i> (mT)
3	1,38	4,76	4,70
4	0,75	2,79	2,75
5	0,463	1,81	1,73
6	0,308	1,24	1,16
7	0,216	0,90	0,81
8	0,158	0,68	0,59
9	0,120	0,53	0,44
10	0,0929	0,42	0,33
11	0,0736	0,34	0,25
12	0,0594	0,29	0,19
13	0,0486	0,24	0,15
14	0,0404	0,21	0,12
15	0,0339	0,18	0,09
16	0,0287	0,16	0,07
17	0,0246	0,14	0,05
18	0,0212	0,13	0,04

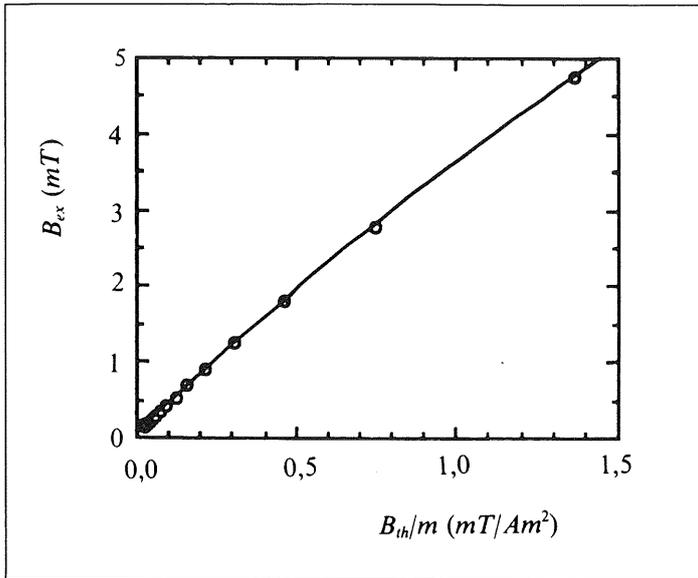


FIGURA 2: Representación de $B_{ex,N}$ frente a B_{th}/m para los datos de la tabla 1. Se omite la representación de $B_{ex,S}$ por motivos de claridad. Las curvas (parábolas) de ajuste son: $B_{ex,N} = 0,0522 + 3,96 B_{th} - 0,384 B_{th}^2$ y $B_{ex,S} = -0,04339 + 4,03 B_{th} - 0,416 B_{th}^2$.

$$B_{0,N} = (4,7 \pm 0,5) 10^{-5} T$$

y

$$B_{0,S} = -(4,3 \pm 0,5) 10^{-5} T.$$

Si el único campo magnético presente fuera el de la Tierra y la regla se colocara apuntando hacia el Norte, los valores anteriores corresponderían a la componente horizontal del campo magnético terrestre.

3. METODO DE LAS OSCILACIONES TRANSVERSALES

Este método es muy conocido [2] y consiste en medir la frecuencia (por ejemplo mediante una célula fotoeléctrica) de las oscilaciones transversales de un imán alrededor de un eje vertical cuando se le coloca en un campo magnético ex-

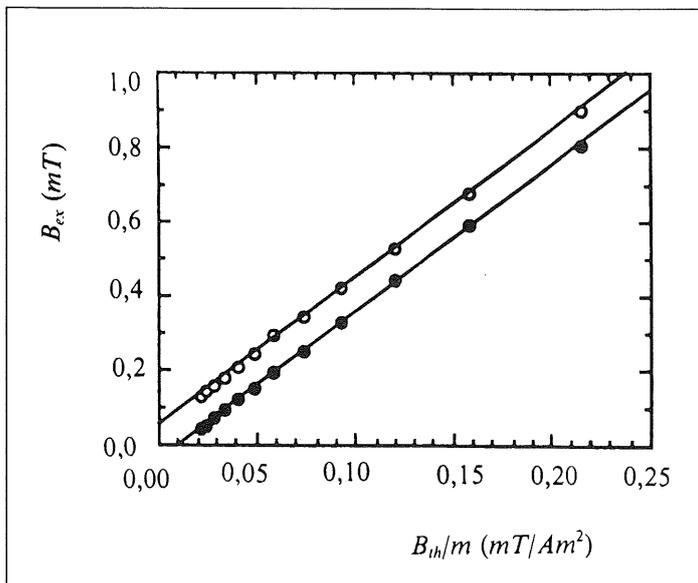


FIGURA 3: Representación de $B_{ex,N}$ y $B_{ex,S}$ frente a B_{th}/m para aquellos datos de la tabla 1 con $z > 7$ cm. Las curvas (rectas) de ajuste son ahora: (\circ) $B_{ex,N} = 0,0475 + 3,98 B_{th}$; (\bullet) $B_{ex,S} = -0,0437 + 0,39 B_{th}$.

terno (véase la figura 4). En nuestro montaje experimental, este campo tiene un valor conocido [5] y es proporcionado por unas bobinas de Helmholtz (Phywe 06960.00). Como muestra la figura 4, el imán se cuelga por medio de un hilo y se sitúa sobre el eje definido por los centros de las bobinas. El campo magnético B_{ct} en el punto de dicho eje que está situado a una distancia $R/2$ de los centros de las bobinas es

$$B_{ct} = \frac{NI\mu_0}{2R} (1 + (1/2)^2)^{-3/2} \quad (3)$$

donde R es el radio de las bobinas, N su número de arrollamientos e I la intensidad de corriente eléctrica que circula por cada uno de ellos.

Si el imán de la figura 4 se separa un ángulo pequeño θ de su posición de equilibrio, oscilará alrededor de dicha posición de acuerdo con la ecuación de movimiento

$$I_n \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mB_{ct}\theta, \quad (4)$$

donde I_n es el momento de inercia del imán. Si sustituimos la masa del imán, $M = 78,4$ g, y sus dimensiones, obtenemos

$$I_n = M(a^2 + b^2)/3 = (3,23 \pm 0,02) 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (5)$$

La frecuencia de oscilación viene dada por

$$\omega_{tr}^2 = mB_{ct}/I_n \quad (6)$$

de las ecuaciones (3), (5) y (6), con $R = 20$ cm y $N = 154$, obtenemos ω_{tr}^2 en función de la corriente I y el momento m del imán

$$\omega_{tr}^2 = 21,43 mI = mI' \quad (7)$$

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 5 y el valor que encontramos para m es

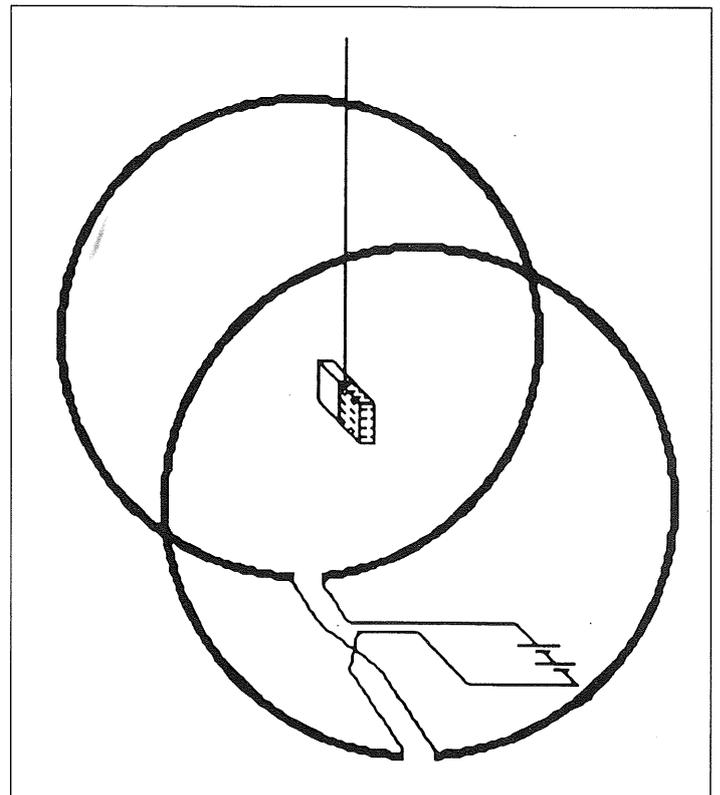


FIGURA 4: Esquema del montaje experimental para el método de las oscilaciones transversales.

$$m_{tr} = (4,1 \pm 0,2) \text{ A} \cdot \text{m}^2 \quad (8)$$

A pesar de la simplicidad del montaje experimental empleado, el imán oscila de forma regular siempre que la corriente sea lo suficientemente alta ($I > 2 \text{ A}$). A menores intensidades, las oscilaciones no tienen lugar alrededor de un eje fijo. No obstante, se pueden observar oscilaciones regulares para cualquier corriente eléctrica si se emplea un instrumento de momento de inercia conocido que mantenga siempre el imán en un plano de oscilación fijo [6].

4. METODO DE LAS OSCILACIONES LONGITUDINALES

En esta sección modificaremos el experimento descrito en la referencia [1] de modo que el resultado final sea ahora el momento magnético del imán. El imán se coloca sobre el carrito de un carril de aire (Phywe 1120217) de modo que sólo pueda oscilar longitudinalmente a lo largo del eje de una bobina. Si se considera que el imán es «puntual» (despreciamos su tamaño) y que la bobina es «infinitamente delgada» (despreciamos su grosor), la frecuencia teórica (véase la ecuación (5) de la referencia [1]) es

$$\omega_{L1}^2 = 3\mu_0 m N I / 2M_T R^3 \quad (9)$$

donde M_T es la suma de las masas del carrito y del imán. La ecuación 9 se puede escribir como

$$\omega_{L1}^2 = 0,146 m I \equiv m I_1 \quad (10)$$

Un método teórico más refinado que tuviera en cuenta el tamaño finito del imán y el grosor de la espira (véase la ecuación (24) de la referencia [1]) llevaría a

$$\omega_{L2}^2 = 0,138 m I \equiv m I_2 \quad (11)$$

Los resultados experimentales para ω_{L2}^2 se muestran en la figura 6 (se obtiene también una dependencia similar para ω_{L1}^2 y, por tanto, hemos omitido la figura correspondiente). De las pendientes de las rectas respectivas para ω_{L1}^2 y ω_{L2}^2 se tiene que

$$m_{L1} = (3,8 \pm 0,2) \text{ A} \cdot \text{m}^2 \quad (12)$$

y

$$m_{L2} = (4,0 \pm 0,2) \text{ A} \cdot \text{m}^2 \quad (13)$$

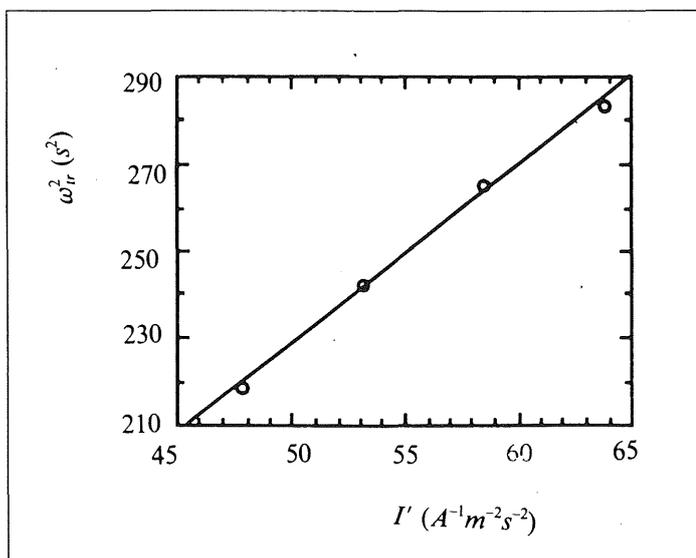


FIGURA 5: Resultados experimentales para ω_{tr}^2 (método de las oscilaciones transversales) para diferentes valores de I' (ecuación 7).

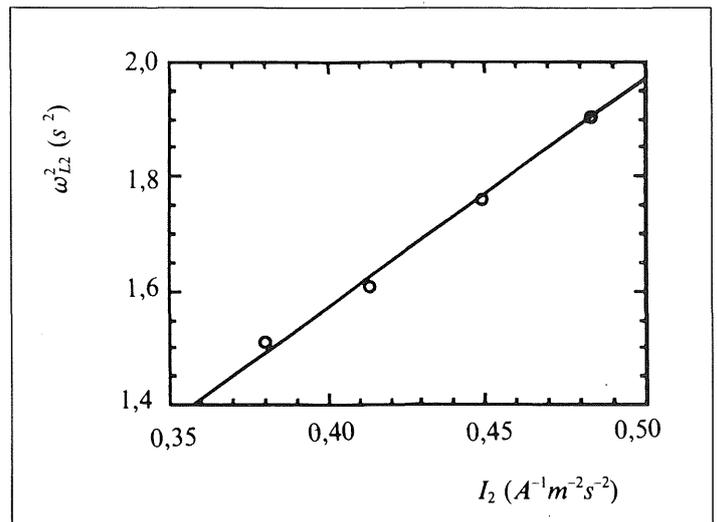


FIGURA 6: Resultados experimentales para ω_{L2}^2 (método de las oscilaciones longitudinales) para distintos valores de I_2 (ecuación 11).

Los resultados mostrados en las expresiones (12) y (13) acuerdan razonablemente bien con los obtenidos mediante los dos métodos anteriores (véanse las ecuaciones (2) y (8)). En particular, los dos procedimientos más refinados llevan a resultados muy similares (ecuaciones (2) y (13)).

5. DISCUSION

Hemos estudiado tres métodos independientes para la determinación experimental del momento magnético de un imán. El primero se basa en el campo magnético creado por el mismo imán, mientras que los otros dos hacen uso de un campo externo. El concepto de momento dipolar magnético se presenta así en dos situaciones físicas distintas. Los experimentos son muy simples y llevan a resultados similares para m .

Analizaremos finalmente la hipótesis de imanación uniforme del imán. Basano *et al.* [4] han afirmado que en realidad la imanación no puede ser estrictamente uniforme puesto que ésta debe disminuir en los extremos del imán debido a efectos magnetostáticos. Un modo intuitivo de estudiar este fenómeno se basa en considerar el momento magnético por unidad de longitud, $n(x)$, con una corrección de segundo orden en x respecto al caso uniforme [4]

$$n(x) = \frac{m}{2L} + \frac{kL^2}{3} - kx^2, \quad (14)$$

donde las constantes se eligen de modo que el momento dipolar total del imán sea m (véase la figura 7)

$$\int_{-L}^{+L} n(x) dx = m. \quad (15)$$

Si despreciamos los efectos debidos a la extensión transversal del imán, el campo magnético en un punto situado a una distancia z del mismo puede obtenerse sumando las contribuciones de dipolos elementales de momento $dm = n(x) dx$ (véase la figura 7)

$$B(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{-L}^{+L} \frac{dm}{(z + L - x)^3} \quad (16)$$

con el resultado

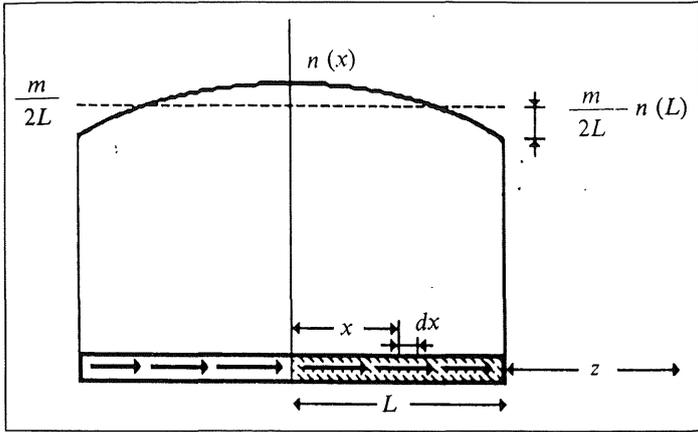


FIGURA 7: El imán de la figura 1 suponiendo una magnetización no uniforme. Se representa en línea continua la magnetización $n(x)$ por unidad de volumen y longitud y, a trazos, una magnetización uniforme. La desviación respecto de ésta se ha exagerado por motivos de claridad. Dentro del imán se muestran varios dipolos elementales de momentos distintos.

$$B(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{4L} \left(m + \frac{2kL^3}{3} \right) \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{(z+2L)^2} \right) - \frac{\mu_0}{2\pi} k \left[\frac{(z+2L)^2}{2} \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{(z+2L)^2} \right) - 2(z+L) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+2L} \right) + \log \left(1 + \frac{2L}{z} \right) \right]. \quad (17)$$

La siguiente cuestión es explicar las curvas (parábolas) que aparecen en la figura 2 ó, al menos, el hecho de que los términos cuadráticos en B_{ih} tengan coeficientes negativos. Para ello, reescribiremos la ecuación 17 como

$$B(z) = B_{unif}(z) - \frac{\mu_0}{2\pi} k F(z) \quad (18)$$

donde $F(z)$ se define a partir de las ecuaciones (17) y (18), y

$$B_{unif}(z) = \frac{\mu_0 m}{8L\pi} \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{(z+2L)^2} \right). \quad (19)$$

es el campo magnético creado por un imán de imanación uniforme. Una expresión similar a la (19) se obtiene a partir de la ecuación (1) para $z \gg a, b$. Nótese que B_{unif} es aproximadamente el campo magnético teórico que aparece en el eje horizontal de la figura 2. Por tanto, si reescribimos la ecuación (18) en términos de B_{unif} , la función resultante debe dar cuenta de la dependencia parabólica observada en la figura 2. Como k es un parámetro correctivo pequeño, podemos aceptar que B_{unif} viene dado por la ecuación (19) y desarrollar $F(z)$ en serie de potencias de L/z . Reteniendo sólo los términos de orden más pequeño, la ecuación (18) queda en la forma

$$B(z) \approx B_{unif}(z) - \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{16}{15} k \left(\frac{L}{z} \right)^5. \quad (20)$$

Para introducir B_{unif} en el segundo sumando de la ecuación (20), emplearemos la aproximación dipolar. El resultado final es

$$B(z) \approx B_{unif}(z) - \left(\frac{2\pi}{\mu_0} \right)^{2/3} \frac{16}{15} \frac{kL^5}{m^{5/3}} B_{unif}(z)^{5/3}. \quad (21)$$

Vemos ahora que el exponente $5/3$ tiene un valor cercano a 2 y que la ecuación 20 puede explicar los términos cuadráticos que aparecen en el ajuste no lineal de la figura 2. Además, es posible estimar cuantitativamente la desviación respecto de la imanación uniforme del imán. En efecto, la ecuación (14) para $x = +L$ queda como

$$\frac{n(+L)}{m/2L} = 1 - \frac{4kL^3}{3m} \quad (22)$$

y, por tanto, un parámetro adecuado para evaluar esta desviación es (véase la figura 7)

$$\Delta \equiv \frac{4kL^3}{3m} \quad (23)$$

Obsérvese que si queremos estimar Δ hemos de conocer previamente k . Podemos convertir el exponente $5/3$ de la ecuación (21) en un 2 si introducimos en esta ecuación el valor medio \bar{B} del campo magnético

$$B(z) \approx B_{unif}(z) - c B_{unif}^2(z) \quad (24)$$

donde

$$c \equiv \left(\frac{2\pi}{\mu_0} \right)^{2/3} \frac{16}{15} \frac{kL^5}{m^{5/3}} \bar{B}^{-1/3}. \quad (25)$$

Finalmente, de la ecuación (25) es claro que

$$\Delta \approx \frac{4}{3} \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \right)^{2/3} \frac{m^{2/3} \bar{B}^{1/3}}{L^2} c \quad (26)$$

donde c puede obtenerse a partir de los ajustes de la figura 2. Si introducimos los datos numéricos en la ecuación 26 resulta $\Delta = 0,0003\%$, que está de acuerdo con la pequeña desviación respecto de la imanación uniforme en la figura 2. Desde luego, hubiera sido posible seguir un procedimiento alternativo al anterior y ajustar los resultados experimentales de la figura 2 directamente a la ecuación (21). El ajuste conduce entonces a los valores de m y k (ó Δ) buscados. Sin embargo, las conclusiones que se obtienen siguiendo este proceso no son muy distintas a las aquí discutidas.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a Manuel Delicado y Belén Serrano, estudiantes de Física de segundo año en la UNED-CA de Albacete su diligencia durante la realización de parte de las medidas aquí recogidas.

REFERENCIAS

- [1] J. BISQUERT, E. HURTADO, S. MAFÉ y J. PINA. 1990. *Am. J. Phys.* **58** 838; (Erratum) 1991 **59** en prensa.
- [2] D. HALLYDAY y R. RESNICK. 1978. *Physics* (New York: Wiley).
- [3] E. LEVIN. 1988. *Am. J. Phys.* **56** 688.
- [4] L. BASANO, P. OTONELLO y C. PONTIGIA. 1988. *Am. J. Phys.* **56** 517.
- [5] E. M. PURCELL. 1989. *Am. J. Phys.* **57**; 1990 **58** 296.
- [6] E. LEVIN. 1984. *Am. J. Phys.* **52** 248.

Juan Bisquert está en el Departamento de Ciencias Experimentales de la Universidad Jaume I de Castellón y José A. Manzanares y Salvador Mafé en el de Termodinámica de la Universidad de Valencia en Burjassot