Ejemplo de examen del 1er. parcial de FMEMA curso 2006-2007

00 de febrero de 0000

Esto es un ejemplo de preguntas. El examen tendrá solo 5 ó 6 preguntas (dependiendo de lo extensas que resulten) que versarán sobre cualquiera de los temas vistos en clase. El apartado a) de cada pregunta puntúa 3 puntos. El b) puntúa 7 puntos

1. a) ¿Qué relación hay entre el concepto de continuidad de una función y el concepto de límite?. Pon un ejemplo de una función que no sea contínua.

   b) Calcula
   $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x^2}\right)^{3x^2}, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}+5-\frac{1}{x^2}, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{(3/2)^x}{x^n}$$

2. a) Cómo se define el número e usando límites?.

   b1) Calcula el límite $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$. b2) Calcula el límite $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2}\,x^2+3x^3-7}{2x^3+3x}$

3. a) Relaciona los conceptos de antiimagen de una función y de soluciones de un sistema de ecuaciones.

   b) Obtener el valor de x en el que la gráfica de la función $y = y(x)$ definida de manera implícita por $2y^3 + y^2 - y^5 - (x^4 - 2x^3 + x^2) = 0$ tiene pendiente 0.

4. a) Dada una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, define el rango, el núcleo, y relaciona las dimensiones de estos entre si y con la dimensión n de $\mathbb{R}^n$. Relaciona también el rango de f con el rango de su matriz asociada.

   b) ¿Cuál es la dimensión del espacio vectorial definido por las ecuaciones
   $$\left.\begin{array}{cl} x+2y+3z & = 0 \\ 2x+y & = 0 \\ 3x+3y+3z & = 0 \end{array}\right\}?$$
   ¿Cuál es el número mínimo de ecuaciones necesario para describir este espacio?. Da una expresión de este espacio con el número mínimo de ecuaciones.

5. a) Indica un procedimiento general para calcular la matriz de una aplicación lineal.

   b) Sea V el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1,1,1)$ y $(1,1,-1)$. Sea f la plicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ que lleva los vectores de la base canónica $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ en los vectores $(1,1,1)$, $(1,1,-1)$ y $(-1,1,1)$. Escribe la matriz de f referida a la base canónica de $\mathbb{R}^3$, determina una base de $f(V)$ y obtén una expresión de $f(V)$.

6. a) Define el producto escalar de dos vectores y el producto vectorial de dos vectores. Indica sus propiedades más importantes.

   b) Dado el vector $w = (1, -1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$, obtener sus proyecciones sobre el subespacio $V = \{(x, y, z, z) \in \mathbb{R}^4;\quad x, y, z \in \mathbb{R}\}$ y sobre su ortogonal $V^{\perp}$.

7. a) El producto vectorial de dos vectores de $\mathbb{R}^n$, ¿para qué valores de n está definido?. Defínelo e indica sus propiedades más importantes.

   b1) Calcula el área del triángulo de vértices $(1, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, 1)$ en el plano $\mathbb{R}^2$.

   b2) Calcula la proyección del vector $(1, 1, 1)$ sobre el plano vectorial generado por los vectores $(0, 1, 1)$ y $(0, -1, 1)$.

8. a) Define los conceptos de derivada direccional, derivada parcial y gradiente para una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. ¿Están definidos todos esos conceptos para todos los valores posibles de n y m?.

   b) Calcula la diferencial de la función $f(x, y, z) = (xyz, \mathrm{sen}(xyz))$ y su derivada direccional en la dirección del punto $(1, 1, 1)$ en un punto arbitrario (x, y, z).

9. a) ¿Qué relación hay entre el gradiente de una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow R$ y la dirección de máxima variación?. Demuéstralo.

   b) Dada la función $f(x, y, z) = xy^2 - zy^2$,

   b1) encuentra la expresión de un vector unitario normal a una superficie de nivel arbitraria en un punto arbitrario,

   b2) encuentra el ángulo que la superficie de nivel que pasa por $(1, 1, 1)$ forma, en ese mismo punto, con el vector normal al plano XY.

10. a) ¿Qué relación hay entre el gradiente de una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y la recta normal a la hipersuperficie $f(x_1, ..., x_n) = 1$?. ¿Qué relación hay entre el gradiente de una función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow R$, el gradiente de una función $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow R$ y la recta recta tangente a la curva $\left.\begin{array}{l} f(x, y, z) = 1 \\ g(x, y, z) = 2 \end{array}\right\}$?

    b) A continuación se muestran las gráficas de dos funciones. De ellas, una es la derivada de la otra. Decir cual es la función primitiva y cual su derivada y explicar por qué.