TEMA 1

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Este material puede descargarse desde http://www.uv.es/~montes/biologia/tema1.pdf

1.- FUNCIONES.

La idea de función es uno de los conceptos más básicos en matemáticas. Una función expresa la idea de una cantidad que depende de otra o viene determinada por otra. Por ejemplo:

a. El área de un cuadrado depende de la longitud de su lado; si conocemos la longitud c del lado de un cuadrado, su área es: $A = c^2$.
b. El volumen de una esfera depende de su radio r: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.
c. El crecimiento medio de ciertas especies de plantas depende de la edad de la planta.
d. La respuesta de un nervio depende de la magnitud de los estímulos aplicados.

Vamos a dar una definición formal de una función.

Definición: Una función real de variable real es una aplicación definida en un subconjunto de valores reales, $D \subseteq R$, que asigna a cada elemento de D un único valor en R. La denotaremos:

$$\begin{array}{rl} f: & D \to R \\ & x \quad\ f(x) \end{array}$$

Notemos que $x \in D \subseteq R$ (variable o argumento) y $f(x) \in R$.

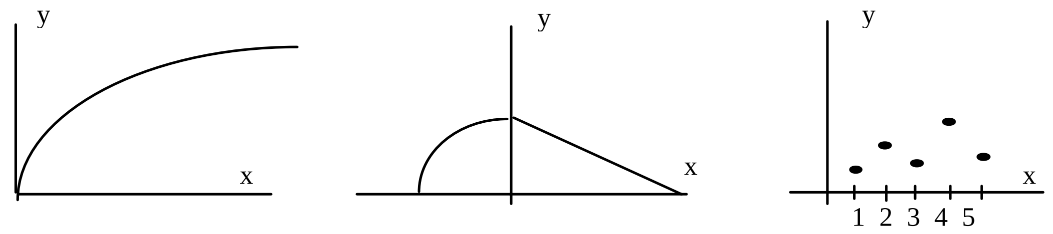
Denotemos por f una función dada. El conjunto D (normalmente es el máximo subconjunto de R para el que f(x) está bien definida, i. e., $f(x) \in R$) se denomina el **dominio** de la función f y se denota por D_f.

Generalmente nos encontraremos con funciones que se expresan estableciendo el valor de la función por medio de una fórmula algebraica en términos de la variable independiente. Por ejemplo:

$$f(x) = x^2 + 3x + 7,$$
$$g(t) = 2t^3 + \frac{3}{t-2}, \text{ etc.}$$

En la mayoría de lo casos la función se puede representar por su **gráfica**. La gráfica de una función se obtiene dibujando todos los puntos (x,y) donde x pertenece al dominio de f e y = f(x), tratando x e y como coordenadas cartesianas.

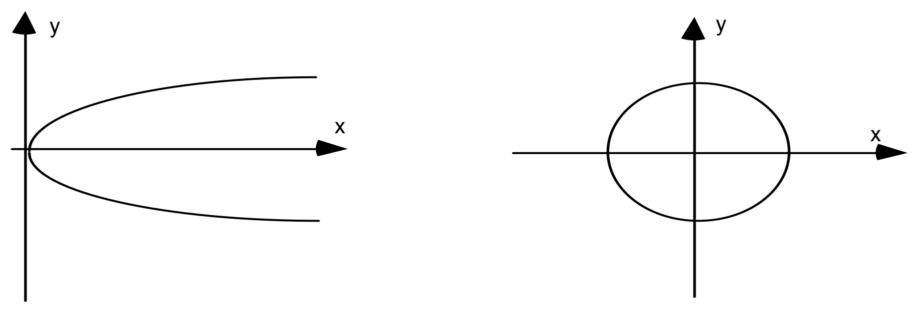
Cualquier curva dada (o conjunto de puntos) en el plano xy es la gráfica de alguna función, suponiendo que cualquier línea vertical corta la gráfica en, como máximo, un punto. Por ejemplo, las gráficas en la Figura 1.1 representan todas a funciones. (Notar que en la Figura 1.1c el dominio de la función es el conjunto de enteros {1,2,3,4,5} por ello la gráfica consiste nada más en 5 puntos).



(a) (b) (c)

Figura 1.1

Por otra parte, las gráficas en la Figura 1.2 no representan funciones. La razón es que hay líneas verticales que cortan las gráficas en más de un punto. Así, correspondiendo al valor $x = x_o$ en la primera gráfica hay dos valores y_1 e y_2 para y. En este caso, el valor de x no determina un único valor de y.



(a) (b)

Figura 1.2

En general, cuando buscamos el dominio de una función hemos de tener las siguientes condiciones en cuenta: cualquier expresión bajo de el signo de la raíz cuadrada , o dentro del logaritmo, no puede ser negativa, y el denominador de cualquier fracción no puede ser cero.

En los ejemplos anteriores las funciones que aparecen estaban definidas mediante una única expresión algebraica para todos los valores de la variable independiente a lo largo del dominio de la función. A veces necesitamos usar funciones que están definidas por más de una expresión.

Ejemplo:

Sea x la distancia en Km. a lo largo de cierta ruta de migración de pájaros. A lo largo de la ruta hay fuentes de alimentos al principio (x = 0), en x = 400 y al final, en x = 1000. La función f(x) es la distancia del punto x a la fuente de alimento más próxima. Dibujar f(x). ¿Cual es la mayor distancia de cualquier punto de la ruta a una fuente de alimento?

- Solución:

A lo largo de la ruta, x varía de 0 a 1000. La distancia del punto x a la fuente de alimento en x = 0 es x, y su distancia a la fuente de alimento en x = 1000 es igual a (1000 - x). La distancia a la fuente de alimento en x = 400 es igual a | x - 400 |. La función f(x) es igual a la más pequeña de estas tres distancias. Las gráficas de estas tres funciones se muestran en la Figura 1.3. La gráfica de f(x) aparece como una línea más gruesa en la figura. Podemos ver que f(x) viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 200 \\ |x - 400| \quad \text{si} & 200 \le x \le 700 \\ 1000 - x & 700 \le x \le 1000 \end{cases}$$

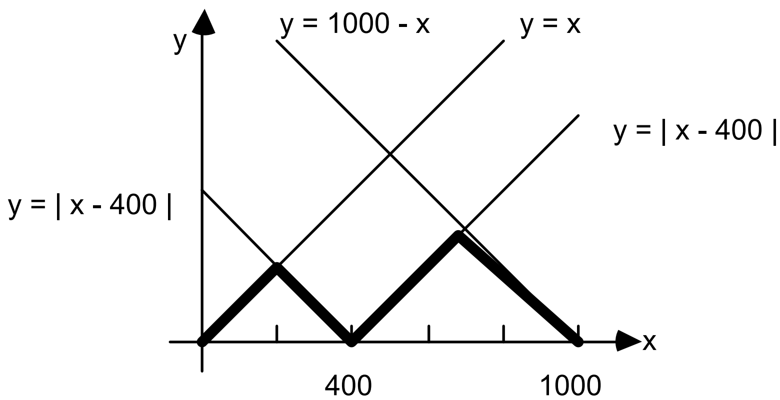


Figura 1.3

El valor máximo de f(x) ocurre en x = 700, para el que f(x) = 300. Por tanto, la distancia máxima a una fuente de alimentación es 300 Km.

Operaciones con funciones:

Dadas dos funciones f y g con dominios D_f y D_g respectivamente, definimos las siguientes funciones:

Suma:	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$D_{f+g} = D_f \cap D_g$.
Resta:	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$D_{f-g} = D_f \cap D_g$.
Producto:	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$.
Cociente:	$\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$D_{f/g} = [\, D_f \cap D_g \,] - \{ x : g(x) = 0 \}$
Composición:	$(f \circ g)(x) = f[\, g(x) \,]$	$D_{f \circ g} = \{ x : x \in D_g \text{ y } g(x) \in D_f \}$

Definición. Sea y = f(x) una función definida en un intervalo]a,b[y sea $x_0 \in$]a,b[, se dice que f(x) es contínua en el punto x_0 si $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

2.- INCREMENTOS Y RAZONES DE CAMBIO

Sea una variable x de la cual consideramos dos valores x_1, x_2. A la cantidad $\Delta x = x_2 - x_1$ la denominaremos **incremento** de x.

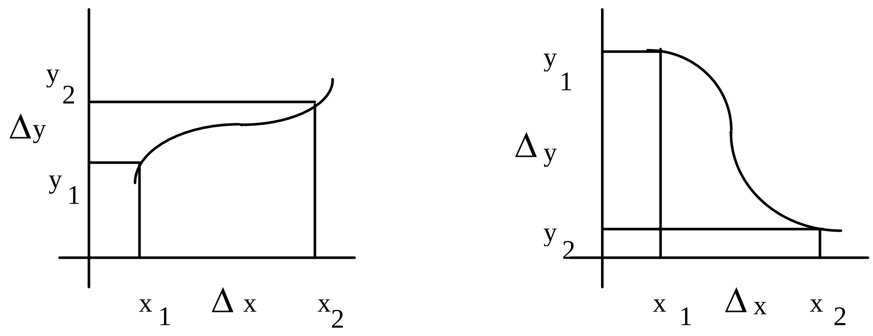
Dada y = f(x), tenemos que si $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, el **incremento** de y es

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1).$$

A la cantidad **Δy** también se le llama **cambio** o **variación** en el valor de la función.

Como $x_2 = x_1 + \Delta x$, tenemos que

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \quad \text{luego} \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$



(a) $\Delta y > 0$ (b) $\Delta y < 0$.

Figura 2.1.

<u>Ejemplo</u>:

El tamaño de una población de insectos en el instante t (medido en días) es $f(t) = 5000 - \dfrac{3000}{1+t}$. Determinar el cambio de la población para t = 2 y $\Delta t = 3$, i. e., la diferencia de población entre los días 2 y 5.

- <u>Solución</u>:

$$\Delta y = f(2+3) - f(2) = f(5) - f(2) = \left(5000 - \frac{3000}{1+5}\right) - \left(5000 - \frac{3000}{1+2}\right) =$$

$$= -\frac{3000}{6} + \frac{3000}{3} = 500$$

La población ha aumentado en 500 insectos en 3 días.

La **razón de cambio** o **razón de crecimiento** de una función f(x) en un intervalo [x, x + Δx] viene definida por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{(media de cambio de y respecto de x)}$$

Notemos que es necesario que [x, x + Δx] $\subseteq D_f$

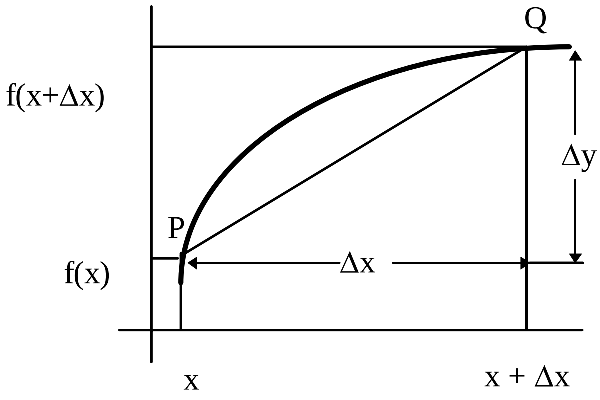


Figura 4.2

Notemos que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = pendiente de la recta que une P y Q. (Figura 4.2).

Ejemplo:

Se introduce una población de bacterias en un medio nutriente. Supongamos que el peso de la población cambia según la fórmula:

$$P(t) = 50 + \frac{100t}{21+t^2} \quad \text{mg.}$$

donde t está medido en horas. Determinar la razón de crecimiento en un periodo de cinco horas, comenzando en t = 2 horas.

- Solución:

t = 2 y Δt = 5. Por tanto,

$$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t) = P(2+5) - P(2) = P(7) - P(2) = 60 - 58 = 2 \text{ mg.}$$

Así, $\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{2}{5}$ mg/h.

3.- DERIVADAS

Si una persona viajando en un automóvil choca con una pared, no es su velocidad media desde la salida hasta el punto donde choca con la pared la que determina si sobrevivirá al accidente, sino la velocidad en el instante de la colisión

¿Qué queremos decir con velocidad de un objeto en un instante de tiempo (o **velocidad instantánea** como se conoce usualmente)?. La velocidad se define como la distancia recorrida en un cierto intervalo de tiempo dividida por la longitud del tiempo. Pero si nos referimos a la velocidad en un instante particular de tiempo, deberíamos de considerar un intervalo de tiempo de duración cero. No obstante, durante ese intervalo, la distancia recorrida sería cero, y para la velocidad, distancia dividida por tiempo, obtendríamos $\frac{0}{0}$, una cantidad que no quiere decir nada.

Para definir la velocidad instantánea de un objeto en movimiento en un cierto tiempo t, hacemos: durante cualquier intervalo de tiempo desde t hasta t + Δt, se recorre un incremento de distancia Δs. La velocidad media es $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Si el incremento Δt se toma más y más pequeño, el correspondiente intervalo de tiempo es muy corto. En consecuencia es razonable suponer que la velocidad media $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ en ese intervalo tan corto estará muy próxima a la velocidad instantánea en el tiempo t. Además, cuanto más corto sea el intervalo, mejor se aproximará la velocidad media a la velocidad instantánea.

Ejemplo:

El tamaño (peso) de una población de bacterias en un tiempo t (en minutos) viene dado por:

$$w(t) = 2t^3 \text{ mg}$$

Encontrar la razón de crecimiento instantáneo de w en t = 2 min.

- Solución:

Crecimiento de w entre t = 2 y t = 2 +Δt :

$$\Delta w = w(2 + \Delta t) - w(2) = 2(2+\Delta t)^3 - 2\cdot 2^3 = 2\left[\, 8 + 12\Delta t + 6(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3 \,\right] - 16$$
$$= 2(\Delta t)^3 + 12(\Delta t)^2 + 24\Delta t$$

La razón de crecimiento en el tiempo Δt a partir de t = 2 es:

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = 2(\Delta t)^2 + 12\Delta t + 24$$

Por tanto, el crecimiento instantáneo en t = 2:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = 24$$

Así, la población a los 2 minutos, crece con una velocidad de 24 mg/min.

Definición: Dada y = f(x), la **derivada** de la función f en el punto x es la razón de crecimiento instantáneo en x. Es decir:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Si este límite no existe, se dice que la función f no es derivable en el punto x.

Interpretación geométrica:

La derivada de una función en un punto se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto.

$$\text{pendiente de la tangente} = m_{tag} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

Ejemplo:

Encontrar la pendiente de la tangente a $f(x) = x^2$ en el punto (2,4).

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x$$

Por tanto, $f'(x) = 2x$ y $f'(2) = 4 = m_{tg}$.

La recta tangente es:

$y - y_1 = m(x - x_1)$ luego $y - 4 = 4(x - 2)$, luego $y = 4x - 4$.

Propiedades:

a) Sean f(x) y g(x) dos funciones derivables en x. Entonces:

1.- Si c es una constante, $\frac{d(cf)}{dx} = c\,\frac{df}{dx}$.

2.- $\frac{d(f \pm g)}{dx} = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}$.

3.- $\frac{d(f \bullet g)}{dx} = f \bullet \frac{dg}{dx} + g \bullet \frac{df}{dx}$.

4.- $\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \bullet \frac{df}{dx} - f \bullet \frac{dg}{dx}}{g^2}$

b) Si y = f(u) es una función de u y u = g(x) es una función de x, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \bullet \frac{du}{dx}$$

Derivadas de funciones elementales:

1.- Función constante f(x) = c: $f'(x) = 0$

2.- Función potencia $f(x) = x^p$, $p \in R$: $f'(x) = p \bullet x^{p-1}$

3.- Función logarítmica $f(x) = \log_a(x)$, $a > 0$: $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

Si g(x) = ln f(x), con f(x) > 0: g ' (x) = $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

4.- Función exponencial f(x) = a^x a>0: f ' (x) = a^x • ln a

Si g(x) = e^x: g ' (x) = e^x

5.- Funciones trigonométricas:

Si f(x) = sen x f ' (x) = cos x.

Si f(x) = cos x f ' (x) = - sen x.

Si f(x) = tg x f ' (x) = $\dfrac{1}{\cos^2 x}$

Si f(x)=arcsen x f ' (x) = $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (| x | < 1)

Si f(x) = arccos x f ' (x) = - $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. (| x | < 1)

Si f(x) = arctg x f ' (x) = $\dfrac{1}{1+x^2}$

6.- Derivada logarítmica:

Sea y = [f(x) $]^{g(x)}$ donde f(x) y g(x) son continuas y f(x) > 0. Entonces:

ln y = g(x) • ln f(x) luego $\dfrac{y'}{y}$ = g ' (x) • ln f(x) + g(x) • $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, luego

$$y' = [\,f(x)\,]^{g(x)} \cdot \left[g'(x)\cdot \ln f(x) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)} \right]$$

<u>Ejemplos</u>:

1.- y = x^x (x > 0)

ln y = x • ln x ⇒ $\dfrac{y'}{y}$ = ln x + 1 ⇒ y ' = x^x • (ln x + 1)

2.- y = (sen x $)^{\cos x}$ con 0 < x < π.

ln y = cos x • ln (sen x) ⇒ $\dfrac{y'}{y}$ = (- sen x) • ln (sen x) + cos x • $\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

$$y' = (\operatorname{sen} x)^{\cos x} \cdot \left[-\operatorname{sen} x\cdot\ln(\operatorname{sen} x) + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} \right]$$

4.- DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Si y = f(t) es una función del tiempo t, entonces como hemos visto, la derivada $\frac{dy}{dt}$ = f ' (t) representa la razón en la cual cambia. Por ejemplo, si s = f(t) es la distancia recorrida por un objeto en movimiento, entonces $\frac{ds}{dt}$ = f ' (t) da la razón del cambio de la distancia o, en otras palabras, la velocidad instantánea del objeto. Denotemos esta velocidad por v. Entonces v es también una función de t, y puede ser derivada para obtener $\frac{dv}{dt}$. Esta cantidad representa la razón en la cual la velocidad cambia, es decir, la aceleración del objeto en movimiento.

Para calcular la aceleración, hemos de derivar s y después derivar el resultado una vez más. Tenemos:

$$\text{Aceleración} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) .$$

Aceleración se llama a la segunda derivada de s respecto a t y usualmente se denota por f''(x) o, también por $\frac{d^2s}{dt^2}$.

Vamos a examinar las derivadas de orden superior en general. Sea y = f(x) una función dada de x con derivada $\frac{dy}{dx}$ = f ' (x). Técnicamente, ésta se denomina la *primera derivada de y respecto a x*. Si f ' (x) es una función derivable de x, su derivada se denomina *segunda derivada de y respecto a x*. Si la segunda derivada es una función derivable de x, su derivada es la *tercera derivada de y respecto de x*, etc.

Las derivadas de orden superior de y respecto de x se denotan por:

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}, \text{ o } y', y'', y''', ..., y^{(n)}, \text{ o } f'(x), f''(x), f'''(x), ..., f^{(n)}(x).$$

De la definición de derivadas de orden superior, tenemos que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad , \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \quad , \text{ etc.}$$

Ejemplos:

Encontrar las derivadas primera, segunda y tercera de:

1.- $y = a^x$.

$y' = a^x \cdot \ln a$, $y'' = a^x \cdot (\ln a)^2$, $y''' = a^x \cdot (\ln a)^3$

2.- y = sen x.

y ' = cos x , y'' = - sen x , y''' = - cos x

5- PRIMITIVAS.

Hemos visto que si s(t) es la distancia recorrida en el tiempo t por un objeto en movimiento, entonces la velocidad instantánea es v(t) = s'(t), la derivada de s(t). Para calcular v, simplemente derivamos s(t). No obstante, puede ocurrir que ya conociéramos la función velocidad v(t) y quisiéramos calcular la distancia s recorrida. En tal situación, conocemos la derivada s'(t) y necesitamos encontrar la función s(t), la operación inversa a la derivación.

Definición: El proceso de encontrar la función cuando se da su derivada se denomina **integración**, y la función se denomina la **integral o primitiva** de la derivada dada. Si f(x) es la derivada de F(x), esto es $\frac{dF}{dx}$ = f(x), entonces F(x) es una primitiva de f(x). Escribimos esto en la forma:

$$\int f(x)dx = F(x),$$

La función f(x) que ha de integrarse se denomina **integrando**.

Para calcular $\int f(x)dx$, hemos de pensar en una función F(x) cuya derivada es f(x). Por ejemplo, para calcular $\int 2xdx$, buscaremos una función cuya derivada sea 2x. Dado que $\frac{d}{dx}x^2 = 2x$, concluimos que $\int 2xdx = x^2$.

No obstante, hemos de observar que esta respuesta no es la única ya que la función ($C + x^2$), para cualquier constante C, es una primitiva de 2x. Escribimos

$$\int 2xdx = x^2 + C.$$

La constante C, que puede tomar cualquier valor arbitrario, se denomina **constante de integración**.

En general podemos decir que si F'(x) = f(x), entonces el conjunto de todas las primitivas de f(x) viene dado por

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$ donde C es una constante arbitraria.

Ya que la constante es arbitraria, la integral así obtenida es conocida como **integral indefinida**.

De la definición de integral, tenemos que

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x),$$

es decir, el proceso de integración y diferenciación se neutralizan mutuamente.

<u>**Tabla de integrales inmediatas**</u>**:**

1. $\int x^p dx = \dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C$ ($p \neq -1$).

2. $\int \dfrac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C.$

3. $\int e^x\, dx = e^x + C.$

4. $\int \text{sen } x\, dx = -\cos x + C.$

5. $\int \cos x\, dx = \text{sen } x + C.$

6. $\int \sec^2 x\, dx = \text{tg } x + C.$

7. $\int \text{cosec}^2 x\, dx = -\text{cotg } x + C.$

8. $\int \sec x \cdot \text{tg } x\, dx = \sec x + C.$

9. $\int \text{cosec } x \cdot \text{cotg } x\, dx = -\text{cosec } x + C.$

10. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \text{arc sen } x + C.$

11. $\int \dfrac{1}{1+x^2}\, dx = \text{arc tg } x + C.$

La fórmula 2 requiere algún comentario:

Para $x > 0$, como $|x| = x$, tenemos que $\dfrac{d}{dx} \ln|x| = \dfrac{d}{dx} \ln x = \dfrac{1}{x}$

Para $x < 0$, como $|x| = -x$, tenemos que $\dfrac{d}{dx} \ln|x| = \dfrac{d}{dx} \ln(-x) = \dfrac{1}{(-x)} \cdot (-1) = \dfrac{1}{x}$

<u>Propiedades</u>:

1. $\int a \cdot f(x)\, dx = a \cdot \int f(x)\, dx$, donde a es una constante.

2. $\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$

3. Si F(x) y G(x) son primitivas de la misma función f(x) en un intervalo [a,b], entonces, para alguna constante c, F = G + c en ese intervalo.

<u>Ejemplos</u>:

1.- La razón de crecimiento instantáneo (o velocidad de crecimiento) de una colonia de moscas de la fruta en el instante t ($t \geq 1$) es igual a $\dfrac{10(t+2)}{t}$. Cuando t = 1, hay 20 moscas en la colonia. Calcular el número de moscas para un valor cualquiera de t ($t > 1$).

- <u>Solución</u>:

Sea p(t) el tamaño de la colonia en el instante t. Sabemos que p'(t) = $\frac{10(t+2)}{t}$.

Como p(t) es la primitiva de p'(t), tenemos que

$$p(t) = \int \frac{10(t+2)}{t}\, dt = 10 \cdot \int (1+\frac{2}{t})dt = 10 \cdot [\, t + 2 \cdot \ln|t| + C \,],$$

donde C es la constante de integración. Sabemos también que cuando t = 1, p(1) = 20. Por tanto, haciendo t = 1, obtenemos:

$$p(1) = 20 = 10 \cdot [\, 1 + 2 \cdot \ln|1| + C \,] = 10 \cdot (1 + C).$$

Por tanto, 1 + C = 2, ó C = 1. Consecuentemente podemos sustituir este valor de C dentro de la expresión de p(t), obteniendo que:

$$p(t) = 10 \cdot [\, t + 2 \cdot \ln|t| + 1 \,].$$

2.- Durante las horas de luz del día la velocidad de migración de la oca viene dada por $v = 20 - \frac{t}{3}$ (millas por hora), donde t es el tiempo medido en horas empezando con t = 0 al alba. ¿Cuántas millas ha recorrido la oca hasta el instante t?. ¿Hasta dónde llegará la oca volando en 12 horas?

- <u>Solución</u>:

Sea s(t) la distancia recorrida entre el alba (t = 0) y el instante t. Entonces, s(0) = 0. También, la derivada s'(t) es igual a la velocidad, así que

$$s'(t) = 20 - \frac{t}{3}.$$

Integrando, encontramos s(t):

$$s(t) = \int \left(20 - \frac{t}{3}\right) dt = 20t - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}t^2\right) + C.$$

Para determinar el valor de C, hacemos t = 0, ya que sabemos que s(0) = 0. Encontramos que:

$$s(0) = 0 = 20 \cdot 0 - \frac{1}{6}(0)^2 + C,$$

de lo que deducimos que C = 0. Por tanto,

$$s(t) = 20t - \frac{t^2}{6},$$

que nos da la distancia recorrida hasta el instante t.

Para encontrar la distancia volada en 12 horas, hacemos t = 12. Obtenemos

$$s(12) = 20 \cdot 12 - \frac{1}{6}(12)^2 = 240 - 24 = 216.$$

5.1. - MÉTODO DE SUSTITUCIÓN.

No todas las integrales pueden resolverse directamente usando las integrales inmediatas anteriores. A menudo la integral dada puede reducirse a una integral inmediata ya conocida mediante un cambio de variable de integración. Tal método se denomina **método de sustitución** y corresponde a la regla de la cadena en derivabilidad.

Teorema:

Si F'(x) = f(x), entonces

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x)\, dx = F[g(x)] + C$$

para cualquier función diferenciable g(x) que no sea una función constante.

Ejemplos:

1.- $\int (x^2 + 3x - 7)^5 \cdot (2x + 3)\, dx.$

- Solución:

Observemos que la derivada de $(x^2 + 3x - 7)$ es igual a $(2x + 3)\, dx$, que aparece en la integral. Por tanto, tenemos que:

$$\int (x^2 + 3x - 7)^5 \cdot (2x + 3)\, dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 + 3x - 7, \\ du = (2x+3)dx \end{array} \right| = \int u^5\, du =$$

$$= \frac{u^6}{6} + C = \frac{1}{6} \cdot (x^2 + 3x - 7)^6 + C.$$

2.- $\int \frac{1}{x \cdot \ln x}\, dx.$

- Solución:

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x}\, dx. = \int \frac{1}{\ln x} \frac{1}{x} dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{u}\, du =$$

$$= \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C.$$

3.- $\int (x + 1) \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 7}\, dx.$

- Solución:

Observemos que la derivada de $(x^2 + 2x + 7)$ es igual a $(2x + 2)\, dx$, pero en la integral nada más aparece $(x + 1)\, dx$. Por tanto, multiplicando y dividiendo el integrando por 2, tenemos que:

$$\int (x + 1) \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 7}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \int \sqrt{x^2 + 2x + 7} \cdot (2x + 2)\, dx =$$

$$= \left| u = x^2 + 2x + 7, du = (2x + 2)\,dx \right| = \frac{1}{2} \cdot \int u^{1/2}\,du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\left(\frac{1}{2}+1\right)}}{\left(\frac{1}{2}+1\right)} + C =$$

$$= \frac{1}{3} u^{3/2} + C = \frac{1}{3} \cdot (x^2 + 2x + 7)^{3/2} + C.$$

4.- $\int e^{(3 + 2 \cdot \text{tg } y)} \cdot \sec^2 y\ dy.$

- <u>Solución</u>:

$$\int e^{(3 + 2 \cdot \text{tg } y)} \cdot \sec^2 y\ dy = \left| \begin{matrix} u = 3 + 2tgy, \\ du = 2\sec^2 ydy \end{matrix} \right| = \int e^u \cdot \frac{1}{2}\,du =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int e^u\,du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} \cdot e^{(3 + 2 \cdot \text{tg } y)} + C.$$

5.2.- INTEGRACIÓN POR PARTES.

El método de integración por partes puede usarse a menudo para evaluar una integral cuyo integrando consista en un producto de dos funciones. Es análogo a la fórmula de la derivada del producto y es, de hecho, obtenida de ella.

Sabemos que:

$$\frac{d}{dx}[\,u(x) \cdot v(x)\,] = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x), \text{ ó}$$

$$u(x) \cdot v'(x) = \frac{d}{dx}[\,u(x) \cdot v(x)\,] - u'(x) \cdot v(x).$$

Integrando los dos lados respecto a x, obtenemos:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx.$$

Si hacemos $u(x) = f(x)$ y $v'(x) = g(x)$. Entonces podemos escribir $v(x) = G(x)$, donde $G(x)$ denota la integral de $g(x)$, y tenemos que:

$$\boxed{\int f(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)\cdot G(x) - \int f'(x)\cdot G(x)\,dx}$$

Esta fórmula expresa la integral del producto $f(x) \cdot g(x)$ en términos de la integral del producto $f'(x) \cdot G(x)$. Es útil porque en muchos casos la integral de $f'(x) \cdot G(x)$ es más fácil de evaluar que la integral del producto original $f(x) \cdot g(x)$.

<u>Ejemplo</u>:

Calcular $\int x \cdot \text{sen } x\,dx$.

- <u>Solución</u>:

Elegimos $f(x) = x$ y $g(x) = \text{sen } x$, así que la integral dada es igual a $\int f(x) \cdot g(x)\, dx$. Entonces $f'(x) = 1$ y $G(x) = -\cos x + C_1$, donde C_1 es la constante de integración. Sustituyendo estos valores en la fórmula de integración por partes obtenemos que:

$$\int f(x) \cdot g(x)\, dx = f(x) \cdot G(x) - \int f'(x) \cdot G(x)\, dx,$$

$$\int x \cdot \text{sen } x\, dx = x \cdot (-\cos x + C_1) - \int (1) \cdot (-\cos x + C_1)\, dx =$$

$$= -x \cdot \cos x + x \cdot C_1 + \int (\cos x - C_1)\, dx =$$

$$= -x \cdot \cos x + x \cdot C_1 + \text{sen } x - C_1 \cdot x + C = -x \cdot \cos x + \text{sen } x + C,$$

donde C es de nuevo, una constante de integración.

Nota: Hemos de observar que la primera constante de integración C_1 en el ejemplo anterior, que aparece al integrar g(x) para obtener G(x), se cancela de la respuesta final. Este es siempre el caso cuando integramos por partes. Por tanto, en la práctica, nunca nos molestaremos en incluir una constante de integración en G(x), sino que simplemente tomaremos como G(x) cualquier primitiva de g(x).

Los siguientes comentarios pueden servir de orientación para decidir la elección de f y g:

a. Si el integrando es el producto de una potencia entera positiva de x (x, x^2, x^3, etc.) y una función exponencial o trigonométrica, a veces es útil tomar f(x) como esa potencia de x.
b. Si el integrando contiene un factor que sea, o bien una función logarítmica, o bien la inversa de una trigonométrica, es a menudo útil escoger esta función como f(x). Si el integrando consiste nada más de una función logarítmica o la inversa de una trigonométrica podemos tomar g(x) = 1.

<u>Ejemplos</u>:

1. Calcular $\int x \cdot \ln|x+1|\, dx$.

- <u>Solución</u>:

Escogemos $f(x) = \ln|x+1|$ y $g(x) = x$. Entonces

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}, \quad G(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, obtenemos

$$\int \ln|x+1| \cdot x\, dx = \ln|x+1| \cdot \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{2}x^2\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln|x+1| - \frac{1}{2} \cdot \int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx .$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln|x+1| - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} x^2 - x + \ln|x+1| \right] + C =$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 - 1) \ln|x+1| - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x + C.$$

2. Calcular $\int$ arc sen x dx.

- <u>Solución</u>:

En este caso podemos expresar el integrando como un producto escribiendo f(x) = arcsen x y g(x) = 1. Entonces:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad G(x) = x.$$

Integrando por partes, obtenemos

$$\int \text{arc sen } x \, dx = x \cdot \text{arc sen } x - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x \, dx .$$

Para evaluar la integral de la derecha, hacemos el cambio $u = 1 - x^2$, así que $du = - 2x\,dx$. Entonces:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{u^{1/2}} \left(-\frac{1}{2} du \right) = -\frac{1}{2} \cdot \int u^{-1/2} du = - u^{1/2} + C =$$

$$= - \sqrt{1 - x^2} + C.$$

Por tanto, $\int \text{arc sen } x \, dx = x \cdot \text{arc sen } x + \sqrt{1 - x^2} + C.$

3. Calcular $\int x^2 \cdot \text{sen } x \, dx.$

- <u>Solución</u>:

Utilizando integración por partes con $f(x) = x^2$ y g(x) = sen x, obtenemos:

$$\int x^2 \cdot \text{sen } x \, dx = - x^2 \cdot \cos x + \int 2x \cdot \cos x \, dx .$$

Integramos por partes de nuevo, esta vez con f(x) = x y g(x) = cos x:

$$\int x \cdot \cos x \, dx = x \cdot \text{sen } x - \int \text{sen } x \, dx = x \cdot \text{sen } x + \cos x.$$

Por tanto, $\int x^2 \cdot \text{sen } x \, dx = - x^2 \cdot \cos x + 2 \cdot (x \cdot \text{sen } x + \cos x) + C.$

6. - INTEGRAL DEFINIDA.

El cálculo de las áreas de rectángulos y triángulos es muy simple: el área de un rectángulo se obtiene multiplicando su base por su altura y el área de un triángulo es la mitad de la base por la altura. El área de cualquier figura plana que está encerrada por segmentos rectilineos puede también calcularse fácilmente subdividiendo la figura en triángulos y rectángulos. El área se obtiene como suma de las áreas de los triángulos y rectángulos en que hemos dividido la figura.

Cuando la figura no está encerrada por lineas rectas, entonces el área puede calcularse mediante sucesivas aproximaciones. Los matemáticos griegos fueron los primeros en usar este método para calcular el área del círculo. Primero aproximemos el área del círculo inscribiendo un rectángulo, luego mejoramos la aproximación inscribiendo un octágono, un polígono de 16 lados, etc. Obviamente, cada polígono nuevo con más lados proporciona una mejor aproximación al área del círculo que el anterior. Las áreas de los polígonos inscritos son siempre menores que el área del círculo, pero cuando el número de lados aumenta, el área se aproxima a la del círculo.

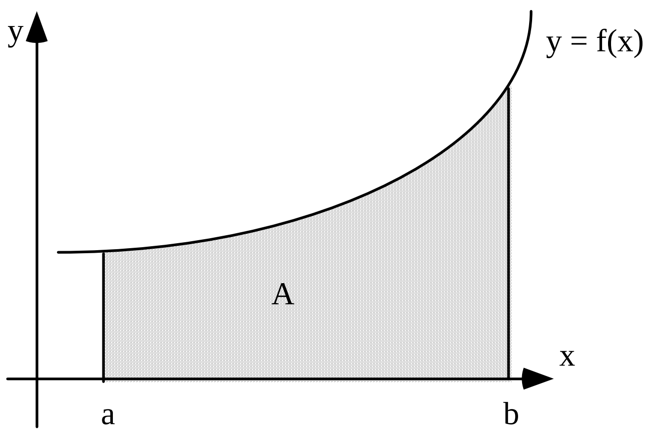


Figura 1.1

Hemos de usar una técnica similar para definir y calcular el área A, la cual está encerrada por un lado por la gráfica de una cierta función $y = f(x)$ y por otro por las rectas verticales $x = a$, $x = b$, y el eje x (Figura 1.1). Para simplificar, hemos de asumir que $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$. Sea $n > 1$ un entero positivo, y dividimos el intervalo $a \leq x \leq b$ en n subintervalos iguales, cada uno de longitud $h = \dfrac{b - a}{n}$. Los puntos de división son $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ con $b = x_n$. Entonces, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, $x_3 = a + 3h$, ... , etc. En general, el k-ésimo punto de división es $x_k = a + kh$, y el último es

$$x_n = a + nh = a + (b - a) = b.$$

En el k-ésimo subintervalo, $x_{k-1} \leq x \leq x_k$, construimos un rectángulo de altura igual al valor de f(x) en el extremo de la derecha, es decir, $f(x_k)$. El área de este rectángulo es igual a $f(x_k) \cdot h$. Un rectángulo similar se construye en cada uno de los n intervalos, y tomamos la suma de las áreas de los n rectángulos como una aproximación al área verdadera A bajo la curva. Por tanto, denotando la suma de las áreas de los rectángulos mediante A_n, tenemos

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot h = \sum_{k=1}^{n} f(a + kh) \cdot h.$$

En general, cuando n crece, la suma A_n de las áreas del rectángulo se aproxima al área A verdadera cada vez más. De hecho, tomando n suficientemente grande, podemos hacer A_n tan próximo a A como queramos; por tanto, podemos escribir el área A como el límite de A_n cuando

$n \to \infty$ (o $h \to 0$), es decir,

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \bullet h, \quad \text{ó} \quad \boxed{A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(a+kh)h}$$

donde $h = \dfrac{b - a}{n}$.

Ejemplo:

a) Aproximar el área bajo la curva $y = x^2$ entre x = 0 y x = 4 dividiendo el área en 4, 5 y 6 rectángulos.

b) Calcular el área verdadera.

Solución:

a) Tenemos a = 0, b = 4, $f(x) = x^2$ y n = 4 (Figura 1.2). Por tanto,

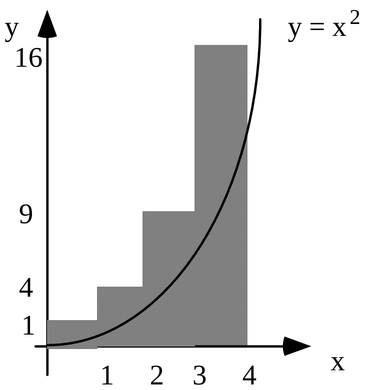


Figura 1.2

$h = \dfrac{b - a}{4} = \dfrac{4 - 0}{4} = 1$, $x_k = a + kh = k$ para $k = 1, 2, 3$ y 4. Además $f(x_k) = x_k^2 = k^2$.

Así,

$$A_4 = \sum_{k=1}^{4} f(x_k) \cdot h = 1 \cdot (1 + 4 + 9 + 16) = 30$$

Notemos que el área verdadera es menor que este valor.

Si $n = 5$, $h = \dfrac{4}{5}$, $x_k = \dfrac{4}{5}k$, $f(x_k) = \dfrac{16}{25}k^2$ y

$$A_5 = \sum_{k=1}^{5} f(x_k) \cdot h = \frac{4}{5} \cdot \frac{16}{25} (1 + 4 + 9 + 16 + 25) = \frac{704}{25} = 28.16$$

Si $n = 6$, $h = \dfrac{4}{6}$, $x_k = \dfrac{4}{6}k$, $f(x_k) = \dfrac{16}{36}k^2$ y

$$A_6 = \sum_{k=1}^{6} f(x_k) \cdot h = \frac{4}{6} \cdot \frac{16}{36} (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) = \frac{728}{27} = 26.963$$

b) $h = \dfrac{4}{n}$, $x_k = \dfrac{4}{n}k$, $f(x_k) = \dfrac{16}{n^2}k^2$ y

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot h = \sum_{k=1}^{n} \frac{16}{n^2} k^2 \frac{4}{n} = \frac{64}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 =$$

$$= \frac{64}{n^3} \frac{n (n + 1) (2n + 1)}{6} = \frac{32 (2n^2 + 3n + 1)}{3 n^2}$$

Así, $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \dfrac{64}{3} = 21.333.$

Definición: sea f(x) una función continua definida en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$. Entonces la **integral definida** de f(x) entre x = a y x = b, denotada por $\int_a^b f(x)dx$, se define como

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(a + kh)\cdot h}$$

donde $h = \frac{b - a}{n}$. Los números reales a y b se conocen como los **límites de integración**.

De la anterior definición, **si f(x) ≥ 0 en a ≤ x ≤ b**, **la integral definida** $\int_a^b f(x)dx$ **representa el área** encerrada por la curva y = f(x), el eje x, y las rectas x = a, x = b.

El siguiente teorema establece una relación muy simple entre la integral definida de una función f(x) y la primitiva de ésta:

Teorema: (Teorema Fundamental del Cálculo Integral).
Si f(x) es una función continua de x en a ≤ x ≤ b, y F(x) es cualquier primitiva de f(x), entonces

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

En la evaluación de integrales definidas eliminamos la constante de integración de la primitiva de f(x) ya que ésta se cancela en la respuesta final. Sea F(x) + C cualquier primitiva de f(x), donde C es una constante de integración. Entonces, por el teorema anterior,

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x) + C]_a^b = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a),$$

y C ha desaparecido de la respuesta.

Ejemplo: Evaluar el área encerrada por la curva y = x^2, el eje x, y las líneas x = 0 y x = 4.

Claramente la función f(x) = x^2 es no negativa para todo x, y en particular, si 0 = x = 4. Por tanto, el área requerida viene dada por:

$$\int_0^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{64}{3} \text{ unidades cuadradas.}$$

Ejemplo: Calcular $\int_a^b x^4 \, dx$.

Como $\int x^4 \, dx = \frac{x^5}{5}$ tenemos

$$\int_a^b x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5} \right]_a^b = \frac{b^5}{5} - \frac{a^5}{5} = \frac{1}{5}(b^5 - a^5)$$

<u>Propiedad</u>: Cuando calculemos integrales definidas donde encontramos la primitiva por el método de sustitución, es importante notar que los límites de integración también cambian cuando cambia la variable de integración. Es decir:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^ß f(g(y))g'(y)\, dy \qquad x=g(y),\ \alpha=g^{-1}(a),\ ß=g^{-1}(b).$$

<u>Ejemplo</u>: Calcular $\int_1^2 x \cdot e^{x^2} dx$.

Sea I = $\int_1^2 x \cdot e^{x^2} dx$. Para encontrar la primitiva de $x \cdot e^{x^2}$ hemos de hacer uso del método de sustitución. Escribimos la integral anterior como

$$I = \frac{1}{2} \int_1^2 e^{x^2} \cdot 2x\, dx.$$

Ya que 2x dx, la diferencial de x^2, aparece en la integral, hacemos $x^2 = u$, y así 2x dx = du. Cuando x = 1, u = 1^2 = 1, y cuando x = 2, u = 2^2 = 4. En consecuencia:

$$I = \frac{1}{2} \int_1^4 e^u\, du.$$

Notemos que en términos de la nueva variable u los límites de integración son 1 y 4. Entonces:

$$I = \frac{1}{2} \left[e^u \right]_1^4 = \frac{1}{2} (e^4 - e^1) = \frac{1}{2}\ e\ (e^3 - 1).$$

<u>Propiedades</u>:

(i) $\int_a^a f(x)\, dx = 0.$

(ii) $\int_a^b f(x)\, dx = - \int_b^a f(x)\, dx.$

(iii) $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$, donde c es cualquier otro número.

(iv) Si f(t) es continua en $a \leq t \leq x$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = \frac{d}{dx}\big(F(x)-F(a)\big) = f(x).$$

<u>Ejemplos</u>:

1.- $\frac{d}{dx}\left(\int_1^x t \cdot \cos t\,dt\right)$.

Por el teorema anterior tenemos que $\frac{d}{dx}\left(\int_1^x t \cdot \cos t\,dt\right) = x \cdot \cos x$.

No ha hecho falta evaluar primero la integral y entonces derivar.

2.- $\frac{d}{dx}\left(\int_1^3 t \cdot \mathrm{sen}^7\, t\,dt\right)$

En este caso es importante notar que la integral definida $\int_1^3 t \cdot \mathrm{sen}^7\, t\,dt$ tiene un valor constante y no es una función de x. Por tanto,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_1^3 t \cdot \mathrm{sen}^7\, t\,dt\right) = 0.$$

3.- $\int_0^1 \frac{d}{dx}(x^3 \cdot \mathrm{arc\ sen}\ x)\,dx$.

De la definición de primitiva, si F'(x) = f(x), integrando ambos términos:

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = F(x) + C.$$

Por tanto,

$$\int \frac{d}{dx}(x^3 \cdot \mathrm{arc\ sen}\ x)\,dx = (x^3 \cdot \mathrm{arc\ sen}\ x) + C,$$

y así

$$\int_0^1 \frac{d}{dx}(x^3 \cdot \mathrm{arc\ sen}\ x)\,dx = \left[\, x^3 \cdot \mathrm{arc\ sen}\ x \,\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$