TEMA 2.- ÁLGEBRA.

1. MATRICES. OPERACIONES CON MATRICES.

CONCEPTOS PREVIOS.

Definición de matriz.

Una matriz real es un conjunto de números reales dispuestos en filas y columnas.

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3/4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -1/2 \end{bmatrix}$$

Definición de orden de una matriz.

Se llama orden de una matriz al número de filas por el número de columnas de dicha matriz.

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3/4 & 2 \end{pmatrix}_{\texttt{ORDEN 3X4}} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -1/2 \end{bmatrix}_{\texttt{ORDEN 3X3}}$$

Representación algebraica de una matriz.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{\texttt{orden mxn}} = [a_{ij}]$$

Todos los elementos de la matriz A (mayúscula) se simbolizan con la misma letra, a, en minúscula, y dos subíndices i, j que representan:

- i: La fila a la que pertenece el elemento, i = 1, 2,…, m. (m filas)
- j: La columna a la que pertenece el elemento, j = 1, 2,…, n. (n columnas)

MATRICES ESPECIALES.

Se definen a continuación una serie de matrices especiales, quedando por definir otro tipo de matrices especiales tras introducir las operaciones con matrices y el concepto de determinante de una matriz cuadrada en secciones posteriores.

Matriz fila.

Matriz formada por una sola fila. También se conoce como vector fila.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}_{1xn}$$

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}_{\text{ORDEN 1X4}} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{\text{ORDEN 1X7}}$$

Matriz columna.

Matriz formada por una sola columna. También se conoce como vector columna.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}_{mx1}$$

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}_{\text{ORDEN 4X1}} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\text{ORDEN 5X1}}$$

Matriz nula.

Es aquella cuyos elementos son todos nulos.

$$a_{ij} = 0 \qquad \forall i = 1,2,\ldots, m; \forall j = 1,2,\ldots, n.$$

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matriz opuesta.

La matriz opuesta de una matriz $A = [a_{ij}]$ es otra matriz del mismo orden cuyos elementos son los de la matriz A multiplicados por -1.

$$-A = -[a_{ij}]=[-a_{ij}]$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad -A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -7 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Matriz cuadrada.

Es aquella que tiene el mismo número de filas que de columnas, m = n.

En una matriz cuadrada se llama diagonal principal a la línea oblicua formada por los elementos a_{ij} cuyos subíndices son iguales.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 20 \\ -2 & 3 & 0 \\ 12 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular superior.

Es una matriz cuadrada en donde los elementos que quedan por debajo de la diagonal principal son todos ceros, $a_{ij} = 0, \forall i > j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 20 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior.

Es una matriz cuadrada en donde los elementos que quedan por encima de la diagonal principal son todos ceros, $a_{ij} = 0, \forall i < j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal.

Es una matriz cuadrada donde los elementos que no están en la diagonal principal son todos nulos, $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$. Se trata de una matriz que es simultáneamente matriz triangular superior e inferior.

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{7} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz identidad.

Es una matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad, $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$; $a_{ij} = 1, \forall i = j$. Se representa por la letra I, mayúscula.

Ejemplos:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices idénticas o iguales.

Dada una matriz $A= [a_{ij}]$ de orden mxn, se dice que es igual a la matriz $B=[b_{ij}]$ del mismo orden si se verifica que $a_{ij}= b_{ij} \quad \forall i=1, 2, \ldots, m; \forall j=1, 2, \ldots, n$.

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \{x = a, y = b, z = c\}.$$

Matrices traspuestas.

Dada una matriz $A= [a_{ij}]$ de orden mxn, $A\in M_{mxn}$, su traspuesta es otra matriz que se representa por $A^t \in M_{nxm}$, y se obtiene intercambiando ordenadamente las filas por columnas:

$$a_{ji}^t= a_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m; \forall j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3/4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & -3/4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^t_{11} & a^t_{12} & a^t_{13} \\ a^t_{21} & a^t_{22} & a^t_{23} \\ a^t_{31} & a^t_{32} & a^t_{33} \\ a^t_{41} & a^t_{42} & a^t_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{pmatrix}$$

NOTA: Obsérvese que la traspuesta de la matriz traspuesta es la matriz original: $(A^t)^t = A$.

Matriz simétrica.

Se denomina matriz simétrica a aquella matriz cuadrada que es igual o idéntica a su matriz traspuesta. Teniendo en cuenta cuando dos matrices son iguales o idénticas, se tiene que:

$$A = A^t \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j = 1, 2, \ldots, n$$

NOTA: No puede haber matrices no cuadradas que sean simétricas, por lo que es condición necesaria que sea cuadrada.

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{7} & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

NOTA: Las matrices diagonales son simétricas.

Matriz antisimétrica.

Se denomina matriz antisimétrica a aquella matriz cuadrada cuya traspuesta coincide con su matriz opuesta. Teniendo en cuenta cuando dos matrices son iguales o idénticas, se tiene que:

$$A^t = -A \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j = 1, 2, \ldots, n$$

Por consiguiente, los elementos de la diagonal de una matriz antisimétrica deben ser nulos, ya que en caso contrario es imposible que un número sea igual a sí mismo cambiado de signo.

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}; -A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = A^t$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad -B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = B^t$$

OPERACIONES CON MATRICES.

Suma.

Dadas dos matrices del mismo orden, A y B, se define su suma como otra matriz, C, del mismo orden que las matrices sumando cuyos elementos se obtienen sumando a cada elemento de la primera matriz, A, el correspondiente elemento de la segunda matriz sumando, B:

$$A = [a_{ij}]_{mxn};\ B = [b_{ij}]_{mxn} \Rightarrow C = A + B = [c_{ij}]_{mxn}$$

$$\text{con } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ \forall i = 1, 2, \ldots, m;\ \forall j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -1 & 2/3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -1 & 2/3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+2 & 3+(-1) & 0+0 \\ -1+0 & (2/3)+(1/3) & 3+5 \\ 0+2 & 3+3 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 8 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Resta.

La resta de dos matrices del mismo orden A y B, se define como la suma de A más la matriz opuesta de B, por lo que resultará ser otra matriz del mismo orden, D, cuyos elementos se obtienen de restar a cada elemento de la primera matriz A (minuendo) el elemento correspondiente de la matriz que resta, B (sustraendo).

$$A = [a_{ij}]_{mxn};\ B = [b_{ij}]_{mxn} \Rightarrow D = A - B = [d_{ij}]_{mxn}$$

$$\text{con } d_{ij} = a_{ij} - b_{ij},\ \forall i = 1, 2, \ldots, m;\ \forall j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ejemplo:

$$A - B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -1 & 2/3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-2 & 3-(-1) & 0-0 \\ -1-0 & (2/3)-(1/3) & 3-5 \\ 0-2 & 3-3 & 4-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ -1 & 1/3 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Producto de una matriz por un número.

Dada una matriz $A = [\, a_{ij}]_{mxn}$ y número real $\alpha \in R$, se define el producto de un número por esa matriz como otra matriz B del mismo orden cuyos elementos se obtienen de multiplicar cada uno de los elementos de A por el número α:

$$\alpha \cdot A = B = [b_{ij}]_{mxn}$$

$$b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij} \quad \forall i = 1,2,\ldots,m; \forall j = 1,2,\ldots,m$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -1 & 2/3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \ \alpha = -2$$

$$\alpha \cdot A = -2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -1 & 2/3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)\cdot 7 & (-2)\cdot 3 & (-2)\cdot 0 \\ (-2)\cdot(-1) & (-2)\cdot(2/3) & (-2)\cdot 3 \\ (-2)\cdot 0 & (-2)\cdot 3 & (-2)\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -6 & 0 \\ 2 & -4/3 & -6 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

<u>Producto de matrices.</u>

Para poder multiplicar dos matrices A y B, $(A \cdot B)$, el número de columnas de la matriz que multiplica en primer lugar, A, debe ser igual al número de filas de la matriz que multiplica en segundo lugar, B. Así pues, dadas dos matrices A_{mxn}, B_{nxp}, el resultado de multiplicar A por B, $A \cdot B$, es otra matriz $C = A \cdot B$, con tantas filas como la matriz que multiplica en primer lugar y tantas columnas como la matriz que aparece en el producto en segundo lugar, C_{mxp}. Los elementos de la matriz C se obtienen de multiplicar las filas de la primera matriz por las columnas de la segunda matriz. Ese producto consiste en multiplicar un elemento de la fila por el correspondiente de la columna y sumar el resultado al resto de productos de elementos de esa fila por esa columna.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad \forall i = 1, \ldots, m; \forall j = 1, \ldots, p$$

Este producto de vectores fila por vectores columna se ilustra con el siguiente ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2x2}; \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}_{2x3} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}_{2x3} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix}_{2x3}$$

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{3x2}; \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{3x2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}_{2x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1+3\cdot 0 & 2\cdot 2+3\cdot(-1) & 2\cdot 1+3\cdot(-2) \\ 0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 2+1\cdot(-1) & 0\cdot 1+1\cdot(-2) \\ 1\cdot 1+2\cdot 0 & 1\cdot 2+2\cdot(-1) & 1\cdot 1+2\cdot(-2) \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$\mathrm{B}\cdot\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}_{2x3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{3x2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 0+1\cdot 1 & 1\cdot 3+2\cdot 1+1\cdot 2 \\ 0\cdot 2+(-1)\cdot 0+(-2)\cdot 1 & 0\cdot 3+(-1)\cdot 1+(-2)\cdot 2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}_{2x2}$$

NOTA: Dado como está definida la multiplicación de matrices, se tiene que la multiplicación de matrices, en general, no cumple la propiedad conmutativa:

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B} \neq \mathrm{B}\cdot\mathrm{A}$$

Está claro para el caso de dos matrices de distinto orden y en donde uno de los dos productos no exista (porque no se cumple el requisito para poderse multiplicar). El resultado que exista no coincidirá con el otro que no existe, por lo que no se cumple la propiedad conmutativa.

Para el caso de que las dos matrices sean de distinto orden y los dos productos existan, porque se cumple el requisito o condición necesaria para poderse multiplicar, el resultado de $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}$ será una matriz de distinto orden que el resultado de $\mathrm{B}\cdot\mathrm{A}$, por lo que tampoco se cumple la propiedad conmutativa, como se ha visto en el ejemplo anterior.

Si las dos matrices son del mismo orden, para que los dos productos existan, deben ser matrices cuadradas, para que se cumpla el requisito para poderse multiplicar, pero tampoco se cumple, en general, la propiedad conmutativa. En el siguiente ejemplo se da el caso de la existencia de los dos productos dando como resultado una matriz cuadrada del mismo orden en ambos casos, pero que no coincide:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B}\cdot\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices traspuestas.

A partir de conocer las operaciones básicas con matrices y el concepto de matriz traspuesta, está demostrado lo siguiente:

1.- La matriz traspuesta de la suma de dos matrices es igual a la suma de las matrices traspuestas de las matrices sumando:

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^{t} = \mathrm{A}^{t} + \mathrm{B}^{t}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & 3+0 \\ 0+2 & 1-1 \\ 1+0 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A + B)^t = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^t + B^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & 0+2 & 1+0 \\ 3+0 & 1-1 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2.- La matriz traspuesta de la matriz que resulta de multiplicar un número por una matriz es igual al producto del mismo número por la traspuesta de dicha matriz:

$$(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t \qquad \forall \alpha \in R$$

Ejemplo:

$$\alpha = 5; \; A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\alpha \cdot A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 & 5 \cdot 3 \\ 5 \cdot 0 & 5 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 0 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha \cdot A)^t = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 0 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 5 \\ 15 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \cdot A^t = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 5 \\ 15 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

3.- La matriz traspuesta de la matriz que resulta del producto de dos matrices es igual al producto de las traspuestas de las matrices que se multiplican cambiando el orden del producto:

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

$$(A_{mxn} \cdot B_{nxs})^t = (C_{mxs})^t = D_{sxm}$$
$$B^t_{sxn} \cdot A^t_{nxm} = D_{sxm}$$

NOTA: Si no se cambia de orden el producto de las traspuestas puede o no ser posible, o ser una matriz de distinto orden que la matriz que resulte de cambiar el orden del producto de traspuestas, o puede incluso ser del mismo orden, pero resultar una matriz distinta.

$$A^t_{nxm} \cdot B^t_{sxn}$$
$$¿m = s?$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{3x2} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{3x2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}_{2x3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2x3} \; ; \; B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{3x2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2x3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$A^t \cdot B^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2x3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{3x2} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}_{2x2} \neq (A \cdot B)^t$$

Matriz Idempotente.

Una vez definido el producto de matrices, se puede definir el concepto de matriz idempotente como aquella matriz cuadrada cuyo producto por sí misma es igual a sí misma:

$$A^2 = A \cdot A = A$$

Ejemplo:

La matriz identidad es una matriz idempotente. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ es idempotente.

2.- DETERMINANTES, MATRIZ INVERSA Y RANGO DE UNA MATRIZ.

DETERMINANTES.

Definición.

Se denomina **determinante** de una matriz cuadrada al número que resulta de sumar/restar todos los productos que pueden obtenerse tomando un factor y sólo uno de cada fila y un factor y sólo uno de cada columna. Los productos resultantes son n!, si n es el orden de la matriz cuadrada.[1]

El signo positivo o negativo, sumar o restar, dependerá de si las permutaciones formadas por los primeros y segundos subíndices de los elementos de la matriz cuadrada son de la misma clase o de distinta clase. Dicho de otra manera, si una vez fijado el primer subíndice de las filas, al realizar todas las permutaciones posibles de los subíndices de las columnas de la matriz, se produce un número k par o impar de **inversiones** en dichas permutaciones, se sumará o restará el producto de los elementos de la matriz correspondiente al resto de productos para obtener el determinante:

$$(-1)^k\ a_{1.} \cdot a_{2.} \cdot a_{3.} \cdot \cdots \cdot a_{n.}$$

Una **inversión** se produce cuando un elemento anterior en la permutación (un subíndice de columna) es mayor que otro posterior en dicha permutación.

Los determinantes se representan por la matriz entre dos barras paralelas:

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3 \\ -1 & 4/5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 3 \\ -1 & 4/5 \end{vmatrix}$$

Ejemplo:

Para una matriz cuadrada de orden 3, se tendrían 3 columnas y tres filas, con subíndices del 1 al 3. Fijado el primer subíndice correspondiente a las filas en 1, 2 y 3,

$$a_{1.} \cdot a_{2.} \cdot a_{3.}$$

Se tiene que las permutaciones (combinaciones sin repetición) posibles de los subíndices de las columnas {1, 2, 3} son las 6 siguientes, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$:

(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)

Las inversiones que se suceden en cada uno de los 6 casos son:

(1, 2, 3): Ninguna, k=0. 1< 2 < 3, por tanto el producto $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$ estará sumando pues estará multiplicado por $(-1)^k = (-1)^0 = 1$.

(1, 3, 2): Una, k = 1, pues el segundo elemento de la permutación es mayor que el tercero 3 > 2, pero no hay más inversiones, pues 1 < 3, 1 < 2. Por tanto, el producto $a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$ estará restando pues estará multiplicado por $(-1)^k = (-1)^1 = -1$.

[1] Se explica para el caso concreto de matrices reales cuadradas, es decir, aquellas en las que todos sus componentes son números reales, por lo que el determinante será también un número real correspondiente.

(2, 1, 3): Una, k = 1, pues el primer elemento de la permutación es mayor que el segundo 2 > 1, pero no hay más inversiones, pues 2 < 3, 1 < 3. Por tanto, el producto $a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$ estará restando pues estará multiplicado por $(-1)^k = (-1)^1 = -1$.

(2, 3, 1): Dos, k = 2, pues el primer elemento de la permutación es mayor que el tercero 2 > 1, y el segundo también es mayor que el tercero, pues 3 > 1, pero no hay más de dos, pues el primer elemento sigue siendo menor que el segundo, 2 < 3. Por tanto, el producto $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$ estará sumando pues estará multiplicado por $(-1)^k = (-1)^2 = 1$.

(3, 1, 2): Dos, k = 2, pues el primer elemento de la permutación es mayor que el segundo 3 > 1, y también es mayor que el tercero, pues 3 > 2, pero no hay más de dos, pues el segundo elemento sigue siendo menor que el tercero, 1 < 2. Por tanto, el producto $a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$ estará sumando pues estará multiplicado por $(-1)^k = (-1)^2 = 1$.

(3, 2, 1): Tres inversiones, k = 3, pues el primer elemento de la permutación es mayor que el segundo 3 > 2, también es mayor que el tercero, pues 3 > 1, y el segundo elemento es mayor que el tercero, 2 > 1. Por tanto, el producto $a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$ estará restando pues estará multiplicado por $(-1)^k = (-1)^3 = -1$.

El determinante de A será:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

NOTA: Esta definición permitiría calcular el determinante de cualquier matriz cuadrada, pero como se ha visto en el ejemplo es compleja de utilizar, por lo que se van a explicar otros métodos para obtener el determinante de una matriz cuadrada. Se partirá del caso más sencillo de matrices cuadradas de orden 2, para ver luego el de las matrices cuadradas de orden 3 mediante la Regla de Sarrus, y generalizar el cálculo de determinantes de orden superior a 3 mediante el método de los menores adjuntos.

Cálculo del determinante de orden 2.

La regla práctica para calcularlo a partir de la definición anterior es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Regla de Sarrus. Cálculo del determinante de orden 3.

La regla práctica para calcularlo a partir de la definición anterior se denomina Regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Suman: Restan:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -7 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot(-3) + 0\cdot 2\cdot 4 + 5\cdot(-7)\cdot 4 - 5\cdot 1\cdot 4 - 2\cdot 2\cdot 4 - 0\cdot(-7)\cdot(-3) =$$

$$= -6 + 0 - 140 - 20 - 16 - 0 = -182$$

<u>Menor complementario de un elemento de un determinante.</u>

Dado un determinante de orden n, se llama **menor** complementario de un elemento a_{ij} al determinante de orden (n-1) que resulta de suprimir la fila i y la columna j correspondientes a dicho elemento.

Ejemplo:

Dado el siguiente determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 9 & 5 \\ 2 & 2 & -7 & 4 \\ 3 & 1 & \sqrt{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

El menor complementario o asociado al elemento $a_{43} = 0$ es:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 9 & 5 \\ 2 & 2 & -7 & 4 \\ 3 & 1 & \sqrt{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -28$$

<u>Adjunto de un elemento de un determinante.</u>

Dado un determinante de orden n, se llama **adjunto** de un elemento a_{ij} a su menor complementario multiplicado por $(-1)^{i+j}$, es decir, tiene signo positivo si la suma de los subíndices del elemento en concreto es par, y se le cambia el signo al menor si la suma de los subíndices es un número impar.

Ejemplo:

En el ejemplo anterior, el adjunto del elemento a_{43} es

$$A_{43} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-28) = 28$$

<u>Desarrollo de un determinante de orden n.</u>

Dado un determinante de orden n, se puede obtener su valor mediante el producto de los elementos de una fila cualquiera (o los de una columna alternativamente), por sus correspondientes adjuntos:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + \cdots + a_{1n} \cdot A_{1n} \qquad \text{(fila 1)}$$

$$|A| = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} + \cdots + a_{2n} \cdot A_{2n} \qquad \text{(fila 2)}$$

$$|A| = a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33} + \cdots + a_{3n} \cdot A_{3n} \qquad \text{(fila 3)}$$

$$\vdots$$

$$|A| = a_{n1} \cdot A_{n1} + a_{n2} \cdot A_{n2} + a_{n3} \cdot A_{n3} + \cdots + a_{nn} \cdot A_{nn} \qquad \text{(fila n)}$$

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + \cdots + a_{n1} \cdot A_{n1} \qquad \text{(columna 1)}$$

$$|A| = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} + \cdots + a_{n2} \cdot A_{n2} \qquad \text{(columna 2)}$$

$$|A| = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} + \cdots + a_{n3} \cdot A_{n3} \qquad \text{(columna 3)}$$

$$\vdots$$

$$|A| = a_{1n} \cdot A_{1n} + a_{2n} \cdot A_{2n} + a_{3n} \cdot A_{3n} + \cdots + a_{nn} \cdot A_{nn} \qquad \text{(columna n)}$$

NOTA: Este método está probado, por lo que la obtención de un determinante de orden n se reduce a calcular n determinantes de orden (n-1), y así hasta que los menores (determinantes) de orden inferior a resolver sean de orden 2 ó 3 como mucho. Un determinante de orden 5, en general se resolvería con 5 de orden 4, uno de orden 4 con 4 de orden 3, uno de orden 3 con 3 de orden 2. Así, uno de orden 5 se resolvería con 5x4 = 20 menores de orden 3, ó 60 de orden 2, 5x4x3 =60. Se reduce el problema de calcular un determinante de orden superior a calcular más determinantes, pero más sencillos. Más tarde se explicará un método, basado en propiedades de los determinantes, que reducirá en la práctica el número de menores (determinantes de orden inferior) a resolver, pues se omitirá el cálculo de muchos de los adjuntos, al conseguir que el elemento correspondiente sea cero, lo que anula el sumando resultante de multiplicar el elemento nulo por su ajunto.

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 9 & 5 \\ 2 & 2 & -7 & 4 \\ 3 & 1 & \sqrt{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Se ha optado por resolver a partir de la cuarta fila, ya que contiene más elementos nulos, ceros, por lo que los cálculos se reducen:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 9 & 5 \\ 2 & 2 & -7 & 4 \\ 3 & 1 & \sqrt{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = a_{41} \cdot A_{41} + a_{42} \cdot A_{42} + a_{43} \cdot A_{43} + a_{44} \cdot A_{44} =$$

$$= 0 \cdot A_{41} + 1 \cdot A_{42} + 0 \cdot A_{43} + 3 \cdot A_{44} = A_{42} + 3 \cdot A_{44} = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 5 \\ 2 & -7 & 4 \\ 3 & \sqrt{3} & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 9 \\ 2 & 2 & -7 \\ 3 & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-7) \cdot 2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 5 + 3 \cdot 9 \cdot 4 - 5 \cdot (-7) \cdot 3 - 4 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot 2 \cdot 9 +$$

$$+ 3 \cdot [3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot 1 \cdot 9 + 3 \cdot (-1)(-7) - 3 \cdot 2 \cdot 9 - 3 \cdot 1 \cdot (-7) - 2 \cdot (-1) \cdot \sqrt{3}] =$$

$$= -42 + 10 \cdot \sqrt{3} + 108 + 105 - 12 \cdot \sqrt{3} - 36 + 18 \cdot \sqrt{3} + 54 + 63 - 162 + 63 + 6 \cdot \sqrt{3} =$$

$$= 22 \cdot \sqrt{3} + 153 = 191{,}1051\ldots$$

<u>Propiedades de los determinantes.</u>

1.- El determinante de una matriz es igual al determinante de su traspuesta:

$$|A| = |A^t|$$

2.- Si se permutan entre sí dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}; \qquad |B| = \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$|A| = -|B|$$

3.- Si un determinante tiene dos filas o dos columnas iguales, el determinante es nulo.

4.- Si en un determinante se multiplica por un número todos los elementos de una fila o de una columna, el determinante queda multiplicado por ese número, ya que todos los sumandos que proporcionan el resultado del determinante están multiplicados por dicho número.

$$\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

5.- Si un determinante tiene dos filas o dos columnas proporcionales, el determinante es nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ ka & kb & kc \\ g & h & i \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0$$

NOTA: Podría considerarse que todo determinante que contenga una fila o una columna nula, al menos, es un caso particular de esta propiedad con k = 0.

6.- Si todos los elementos de una fila o de una columna están constituidos por dos sumandos, el determinante puede descomponerse en la suma de dos determinantes:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+a' & b & c \\ d+d' & e & f \\ g+g' & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b & c \\ d' & e & f \\ g' & h & i \end{vmatrix}$$

7.- El valor de un determinante no varía si a una fila o una columna se le suma otra paralela multiplicada por un número.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d+kg & e+kh & f+ki \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d+kg & e+kh & f+ki \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ g & h & i \end{vmatrix} = |A| + 0 = |A|$$

NOTA: El conocimiento y dominio de estas propiedades es fundamental para operar con determinantes. Aplicando de manera sistemática la propiedad 7, se puede conseguir que en un determinante cualquiera se anulen todos los elementos de una fila o de una columna excepto uno de ellos, con lo que se obtiene un determinante equivalente con un desarrollo mucho más sencillo.

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Se va a calcular el determinante haciendo ceros antes de aplicar el método de los adjuntos. Según la propiedad 7, a la tercera columna se le suma la primera columna multiplicada por menos 1, lo que dará lugar a un determinante del mismo valor, quedando el siguiente determinante con una primera fila con un elemento nulo más que el determinante original:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2-2 & 4 \\ 0 & 1 & 3-0 & 1 \\ 4 & 1 & 7-4 & 1 \\ 3 & 3 & 1-3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

Según la propiedad 7, a la cuarta columna se le suma la primera columna multiplicada por menos 2, lo que dará lugar a un determinante del mismo valor, quedando el siguiente determinante con una primera fila con tres elementos nulos, lo que facilita la resolución del mismo mediante el método de los adjuntos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4-2x2 \\ 0 & 1 & 3 & 1-2x0 \\ 4 & 1 & 3 & 1-2x4 \\ 3 & 3 & -2 & 2-2x3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & -7 \\ 3 & 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14} = a_{11} \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14} = a_{11} \cdot A_{11} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-12 - 2 - 63 - 9 - 14 + 12) = 2 \cdot (-88) = -176$$

MATRIZ INVERSA Y OTRAS MATRICES.

<u>Matriz adjunta.</u>

La matriz adjunta de una matriz cuadrada A es otra matriz que resulta de sustituir cada elemento por su adjunto.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \ Adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

Calcule la matriz adjunta de $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}; \ Adj(A) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & -10 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2;\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2-3) = 1;\ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(4-0) = -4;\ A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (8-0) = 8;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(16-6) = -10;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(4-0) = -4;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2;$$

Matriz inversa.

La matriz inversa de una matriz cuadrada es otra matriz cuyo producto por la primera es igual a la matriz unidad o identidad:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

Para obtener la matriz inversa A^{-1} de una matriz A se utiliza la matriz adjunta:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|}$$

Nota: Es condición necesaria que el determinante de A sea distinto de 0.

Ejemplo:

Para calcular la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ se procede así:

Se comprueba primero si el determinante de la matriz es distinto de cero, pues en caso contrario, la matriz no admite inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \cdot 4 - 3 \cdot 1 \cdot 0 - 4 \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = -6 \neq 0$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix};\ Adj(A^t) = Adj\left(\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & -10 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz inversa A^{-1} se divide la matriz adjunta de la traspuesta de A por su determinante que ya ha sido calculado:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & -10 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}}{-6} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar que es correcta multiplicando la matriz A por su inversa recién calculada:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz A es **ortogonal** si multiplicada por su traspuesta da como resultado la matriz identidad, o dicho de otra manera, si su **matriz traspuesta** es igual a su **matriz inversa**.

$$A \cdot A^t = I \Leftrightarrow A^t = A^{-1} \Leftrightarrow A \text{ ortogonal}$$

Ejemplo

La matriz identidad es una matriz ortogonal.

Matriz regular.

Es aquella matriz que admite matriz inversa pues su determinante es distinto de cero.

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1} \Leftrightarrow A \text{ regular}$$

Ejemplos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz singular.

Es aquella matriz que NO admite matriz inversa pues su determinante es NULO.

$$|A| = 0 \Leftrightarrow \nexists A^{-1} \Leftrightarrow A \text{ singular o irregular}$$

Ejemplos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Rango de una matriz.

Se llama **rango de una matriz** al máximo orden de los menores no nulos de la matriz, es decir, es el orden del mayor menor no nulo. Se representa por

rg(A).

Para calcular el rango de una matriz se va a seguir un proceso reiterativo (algoritmo). Se busca un determinante distinto de cero que sea el más grande posible (mayor número de filas/columnas) que se pueda formar a partir de las filas y columnas de la matriz. Se empieza buscando un determinante distinto de cero de orden 1 y se va construyendo sucesivamente determinantes (menores) de orden superior, es decir, con una fila más y una columna más que el anterior de menor orden no nulo.

NOTA: El concepto de rango de una matriz es importante como se verá en el análisis de la solución de un sistema de ecuaciones lineales, pues permitirá conocer de antemano el tipo de solución de dicho sistema con sólo calcular el rango de unas matrices.

Ejemplos:

Calcule el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}_{3x4}$.

Dado que se trata de una matriz de 3 x 4, como máximo se podrá construir un determinante de orden 3, por lo que el rango de esta matriz será como máximo 3, $rg(A) \leq 3$. Se empieza por buscar un determinante de orden 1 construido con un elemento de una fila y de una columna de A que sea distinto de cero. Después se busca uno de orden 2 que no sea nulo a partir de los elementos de 2 filas y 2 columnas de A. Si se encuentra al menos uno, se procede a la búsqueda de uno de orden 3 construido de igual manera, y así sucesivamente en otros casos, no en el de este ejemplo cuyo máximo orden es 3 (menor entre el total de filas y el total de columnas de la matriz):

1.- Con la primera fila y primera columna se construye un determinante de orden 1 no nulo:

$$|2| = 2 \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 1$$

2.- Se sabe que el rango de A es como mínimo 1. Se busca ahora un menor de orden 2 no nulo. Tomando los elementos pertenecientes a la primera y segunda filas y a la primera y cuarta columnas se construye un determinante de orden 2 no nulo, aunque antes se ha calculado el menor de orden 2 resultante de tomar los elementos de las dos primeras filas que también pertenecen a las dos primeras columnas, con resultado nulo, así como el menor de orden 2 resultante de tomar los elementos de las dos primeras filas pertenecientes a la primera y tercera columnas, con resultado igualmente nulo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2$$

3.- Con el resultado anterior, se sabe que el rango de A es como mínimo 2. Se busca ahora un menor de orden 3 no nulo. Tomando los elementos pertenecientes a la primera, segunda y tercera filas y a la primera, segunda y cuarta columnas se construye un determinante de orden 3 no nulo, aunque antes se ha calculado el menor de orden 3 resultante de tomar los elementos de las 3 primeras filas que también pertenecen a las 3 primeras columnas, con resultado nulo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 2 - 0 = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg(A)} = 3$$

NOTA: Si todos los menores de orden 3 hubiesen sido nulos, el rango de A hubiera sido 2.

Por ese motivo el rango de B, matriz de 3x4 es 2:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

1.- Con la primera fila y primera columna se construye un determinante de orden 1 no nulo:

$$\begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg(A)} \geq 1$$

2.- Se sabe que el rango de A es como mínimo 1. Se busca ahora un menor de orden 2 no nulo. Tomando los elementos pertenecientes a la primera y segunda filas y a la primera y cuarta columnas se construye un determinante de orden 2 no nulo, aunque antes se ha calculado el menor de orden 2 resultante de tomar los elementos de las dos primeras filas que también pertenecen a las dos primeras columnas, con resultado nulo, así como el menor de orden 2 resultante de tomar los elementos de las dos primeras filas pertenecientes a la primera y tercera columnas, con resultado igualmente nulo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg(A)} \geq 2$$

3.- Con el resultado anterior, se sabe que el rango de A es como mínimo 2. Se busca ahora un menor de orden 3 no nulo. Todos los menores de orden 3 son nulos. Los tres que se pueden construir con la segunda columna nula serán ceros, pues todo determinante que contenga una columna o una fila nula es también nulo como se ha visto en las propiedades. Sólo quedaría un determinante que no se sabe si es nulo de antemano por no contener filas/columnas nulas y es el que resulta de utilizar la primera, tercera y cuarta columnas, así como todas las filas. Sin embargo, también es nulo, pues contiene dos columnas iguales.

Columnas: 1ª, 2ª, 3ª: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$

Columnas: 1ª, 2ª, 4ª: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 0$

Columnas: 2ª, 3ª, 4ª: $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 0$

Columnas: 1ª, 3ª, 4ª: $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 8 - 8 = 0$

Como todos los menores de orden 3 posibles de esta matriz son nulos, el rango de esta matriz es 2, no es el máximo. Sólo contiene 2 columnas y 2 filas linealmente independientes, es decir, que no se pueden expresar como combinación lineal de las otras.

3.- SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN ELEMENTALES: SUSTITUCIÓN, REDUCCIÓN E IGUALACIÓN. MÉTODOS DE CRAMER Y DE GAUSS.

CONCEPTOS PREVIOS.

Ecuación.

Se trata de una expresión analítica que plantea la determinación de los valores de los argumentos que hacen iguales dos funciones.

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$
$$f,g:R^n\to R$$

A los argumentos de las funciones se les llama entonces **incógnitas**, $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ y a los valores que tomen dichas incógnitas para que las dos funciones sean iguales en un determinado conjunto se llaman **soluciones** o **raíces** de la ecuación.

$$c=(c_1,c_2,\ldots,c_n)\in R^n\,/\,f(c)=g(c)\Leftrightarrow c\ \text{ es solución.}$$

Nótese que toda ecuación definida como antes podría expresarse así:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)-g(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$$

A partir de ahora, se va a considerar la expresión de una ecuación en general considerando que en el segundo término de la ecuación aparezca un número no necesariamente nulo, llamado **término independiente** y que procedería matemáticamente de la diferencia entre las dos funciones que se igualan, quedando en el primer término una función h(x) procedente en parte de la diferencia entre f(x) y g(x):

$$f(x)-g(x)=h(x)-b=0\Rightarrow h(x)=b$$
$$h:R^n\to R,\ x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n,\ b\in R$$

Sistemas de ecuaciones.

A un conjunto de ecuaciones se le denomina **sistema de ecuaciones** y se representaría así:

$$h(x_1,x_2,\ldots,x_n)=b\in R^m$$
$$h:R^n\to R^m$$
$$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n$$
$$b=(b_1,b_2,\ldots,b_m)\in R^m$$

En una forma más extendida, $h_i:R^n\to R;\ b_i\in R;\ i=1,2,\ldots,m$:

$$\begin{gathered}h_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=b_1\\ h_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)=b_2\\ \vdots\\ h_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)=b_m\end{gathered}$$

Tipos de solución.

En general, los tipos de solución de una ecuación o de un sistema de ecuaciones son:

- Solución única: Existe una única combinación de valores para todas las incógnitas que satisface la igualdad.
- Solución múltiple: Existe más de una combinación de valores para las incógnitas que logra la igualdad. Ese número de soluciones puede, a su vez, ser:
    - Solución múltiple con número finito de soluciones.
    - Solución múltiple con número infinito de soluciones.
- Solución no acotada: Alguna incógnita en la solución debe tender a más infinito o a menos infinito para verificarse la igualdad, lo que podría entenderse como una solución imposible de alcanzar y, por tanto, se podría considerar como inexistente.
- Inexistente: No existen combinaciones de valores en el conjunto de números (reales, enteros, racionales, etc.) en el que se plantee la búsqueda para las incógnitas que proporcionen la igualdad planteada en la ecuación.

Ejemplos:

Ecuación con solución única:

$$h(x) = 5x = -4 \Rightarrow x = -4/5$$

Ecuación con solución múltiple:

Número finito de soluciones:

La siguiente ecuación tiene dos soluciones:

$$h(x) = x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \left\langle \begin{array}{l} x = 3 \\ x = 2 \end{array} \right.$$

Infinitas soluciones:

$$h(x, y) = xy - 2y - 3x + 6 = (x-2)(y-3) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ó } y = 3$$

Las soluciones a esta ecuación son los vectores de R^2 que cumplen que:

$$\{(x, y) \in R^2 / x = 2\} \cup \{(x, y) \in R^2 / y = 3\}$$

Es decir, infinitos vectores del tipo (2, y), o del tipo (x, 3) cumplen la ecuación.

Solución no acotada:

La siguiente ecuación tiene como solución $x \to -\infty$, no está acotado el valor de x:

$$h(x) = e^x = 0 \Rightarrow \ln(e^x) = \ln(0) \to x = -\infty$$

Solución inexistente:

La solución a la siguiente ecuación no es un número real, por lo que no existe solución en dicho conjunto para esta ecuación:

$$h(x) = x^2 = -4 \Rightarrow x = \sqrt{-4} \notin R$$

Tipos de ecuación.

Atendiendo al criterio de la linealidad o no de la función h(x) que define una ecuación, se pueden clasificar en:

- Lineales: La relación existente entre las variables es lineal, es decir, las variables aparecen sumando o restando entre sí multiplicadas por números reales. En la expresión analítica de la función las variables aparecen elevadas a la potencia 1 ó 0, pero no aparecen ni multiplicadas entre sí, ni dividendo una a otra, ni como argumentos de funciones trigonométricas, logarítmicas, ni exponenciales. Se pueden expresar mediante el producto matricial de una matriz de coeficientes por una matriz (vector) de incógnitas igualado a una matriz (vector columna) de términos independientes.
- No lineales: La función refleja relaciones no lineales entre las variables, serían todas las ecuaciones que no fueran lineales.

Para las primeras se ha desarrollado más de un método de resolución que emplean cálculo matricial, mientras que las segundas suponen mayor complejidad en los métodos de resolución y la inexistencia de un método general de resolución para todas ellas.

Ejemplos:

De ecuaciones lineales:

$$5x - 2y + 3z = 32$$
$$x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 23$$

De ecuaciones no lineales:

$$5x^2y - 2y - 3z = 32$$
$$\ln(x_1) + 2x_2 - 7^{x_3} = 23$$
$$\mathrm{sen}(x + y) = 2y$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Planteamiento general.

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es un conjunto de m igualdades de la forma:

$$\begin{array}{l} h_1(x) = h_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = b_1 \\ h_2(x) = h_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = b_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ h_m(x) = h_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) = b_m \end{array}$$

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

$a_{ij} \in R$, son números reales, llamados **coeficientes**, con i = 1, 2, 3, …, m; j = 1, 2, 3, …, n.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$, son las n incógnitas.

$b_i \in R$, son números reales, llamados **términos independientes**.

Si todos los términos independientes son nulos, al sistema de ecuaciones se le llama, **homogéneo**.

La expresión matricial del sistema lineal de ecuaciones es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{nx1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{mx1}$$

$$A \cdot x = b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ es la matriz de coeficientes;

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ es la matriz o el vector de incógnitas;

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ es la matriz o vector de términos independientes.

Matriz ampliada.

A partir de un sistema de ecuaciones lineal se puede construir la matriz ampliada partiendo de la matriz A de coeficientes de las ecuaciones, añadiendo como última columna, la columna de términos independientes. Se denota por A^*.

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Esta matriz se utilizará para estudiar y resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Es un conjunto ordenado de números $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R^n$ tales que al sustituir las incógnitas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ por esos números, se verifican las m igualdades.

Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales.

Según el número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, se clasifica en:

- Sistema incompatible: Sistema sin solución.
- Sistema compatible: Sistema con al menos una solución:
    - Sistema compatible determinado: Sistema con solución única.
    - Sistema compatible indeterminado: Sistema con infinitas soluciones.

Teorema de Rouché-Fröbenius.

Dado un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas, Ax = b, con matriz de coeficientes A, y dada la matriz ampliada, A*, construida a partir de A. Entonces

a) Si el **rg(A) < rg(A*)**, el sistema es **INCOMPATIBLE**.

b) Si el **rg(A) = rg(A*)**, el sistema es **COMPATIBLE**:

1. **rg(A) = rg(A*) = n** (número de incógnitas), el sistema es compatible **DETERMINADO**.
2. **rg(A) = rg(A*) < n** (número de incógnitas), el sistema es compatible **INDETERMINADO**.

Sistemas homogéneos de ecuaciones lineales.

Si un sistema de ecuaciones lineales es homogéneo, es decir, no hay términos independientes en ninguna ecuación, se sabe de antemano que va a ser **compatible**, pues admite, al menos, una solución, la **trivial**, que consiste en que todas las incógnitas toman el valor cero.

$$Ax = b = \theta \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una solución de este sistema es la trivial: $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0,0,\ldots,0)$.

Lo que hay que estudiar es si sólo admite la solución trivial (**compatible determinado**), o admite infinitas soluciones además de la solución trivial (**compatible indeterminado**).

Ejemplos:

Clasifique los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a)

$$\begin{aligned} 2x - 2y - z &= -2 \\ 2x + y + z &= 7 \\ x - y + z &= 2 \end{aligned} \Rightarrow Ax = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{*} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es el máximo posible, 3, ya que ha sido posible encontrar un menor no nulo de orden 3 construido con sus filas y columnas. En este caso, la matriz ampliada tiene el mismo rango que A, pues el mismo menor que ha servido para concluir que A tenía el rango máximo estará incluido en la matriz ampliada y por tanto, ésta también tendrá como rango el orden de ese menor, aunque se añada una columna.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 2 + 1 + 2 + 4 = 9 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 \Rightarrow rg(A^{*}) = 3.$$

Como rg(A)= rg(A*), el sistema es compatible, y como rg(A)=rg(A*)=3, número de incógnitas, el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

b)

$$\begin{aligned} 3x + 4y - 5z &= 4 \\ x - y - z &= -2 \\ 7x + 7y - 11z &= 10 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 7 & 7 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 7 & 7 & -11 \end{pmatrix} \qquad A^{*} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 7 & 7 & -11 & 10 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, pues existe un menor de orden 2 distinto de cero y no existe ningún menor de orden 3 distinto de cero, ya que se anulan todos. Se podría apreciar que la tercera fila es el doble de la primera más la segunda, pero si no se aprecia esa circunstancia, se deben calcular todos los menores de orden 3 posibles (sólo hay uno) y comprobar que todos son nulos, por lo que el rango no puede ser el máximo.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 4 = -7 \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 7 & 7 & -11 \end{vmatrix} = 33 - 35 - 28 - 35 + 21 + 44 = 98 - 98 = 0 \Rightarrow rg(A) < 3$$

Se concluye, pues que el rango de A es 2, rg(A)=2.

Se procede ahora al estudio del rango de la matriz ampliada, teniendo en cuenta que para buscar un menor de orden 3 de la misma que sea distinto de cero se descartarían los ya calculados sólo con las columnas de A, pues eran nulos (era nulo en este caso, pues sólo había uno de orden 3). El rango máximo de A* es 3, pues se trata de una matriz de 3 por 4.

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 7 & 7 & -11 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 7 & 7 & 10 \end{vmatrix} = -30 + 28 - 56 + 28 + 42 - 40 = -28 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A^*) = 3$$

Como el rango de la matriz ampliada es mayor que el de la matriz A, rg(A*)>rg(A), el sistema no tiene solución, es INCOMPATIBLE.

c)

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ 2x + y - z &= 5 \\ -x - 2y + 2z &= -4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, pues existe un menor de orden 2 distinto de cero y no existe ningún menor de orden 3 distinto de cero, ya que se anulan todos

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) \geq 2, \operatorname{rg}(A^*) \geq 2$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 4 - 1 + 1 - 2 + 4 = 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) < 3$$

Se concluye, pues que el rango de A es 2, rg(A)=2.

Se procede ahora al estudio del rango de la matriz ampliada, teniendo en cuenta que para buscar un menor de orden 3 de la misma que sea distinto de cero se descartarían los ya calculados sólo con las columnas de A, pues eran nulos (era nulo en este caso, pues sólo había uno de orden 3). El rango máximo de A* es 3, pues se trata de una matriz de 3 por 4.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = |A| = 0 \text{ (No hace falta calcularlo, pues ya se ha calculado antes)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 4 + 5 + 1 + 10 - 8 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 4 + 4 - 5 - 1 - 10 + 8 = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 2 - 10 - 2 + 10 + 4 = 0$$

Como todos los menores de orden 3 de A* son nulos y existe uno de orden 2, calculado en el estudio del rango de A, que no se anula, se concluye que el rango de la matriz ampliada, A*, también es 2. Esto se puede concluir al apreciar que la tercera ecuación resulta de restar a la primera la segunda ecuación, lo que hubiera ahorrado el cálculo de todos los menores de orden 3 posibles (el de A y otros 3 adicionales para A*) y comprobar que todos son nulos. El rango, pues, no es el máximo.

Como el rango de la matriz ampliada es igual al de la matriz A, rg(A*) = rg(A) = 2, el sistema tiene solución, es COMPATIBLE, pero como el rango de esas matrices es menor que el número de incógnitas, 3, el sistema tiene infinitas soluciones, es COMPATIBLE INDETERMINADO.

Sistemas de ecuaciones lineales equivalentes.

Dos sistemas de ecuaciones lineales se dice que son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones. Dos sistemas de ecuaciones lineales equivalentes tienen el mismo número de incógnitas, pero no es necesario que tengan el mismo número de ecuaciones.

Obtención de sistemas equivalentes:

Si se suma a una ecuación de un sistema otra ecuación del mismo multiplicada por un número distinto de cero, se obtiene un sistema equivalente.

Si se añade a un sistema de ecuaciones otra ecuación resultado de una combinación lineal de las anteriormente existentes, el sistema resultante es equivalente al original.

Estas propiedades, aplicadas de forma generalizada y repetida, sustentan alguno de los métodos de resolución de los sistemas como el de reducción o el más general de Gauss.

Ejemplos:

Para el siguiente sistema de ecuaciones lineales se escriben a continuación sistemas de ecuaciones equivalentes construidos basándose en las propiedades anteriores.

$$x + y - 3z = 10$$
$$2x + 3y + z = 8$$
$$x - 2y - z = 2$$

Sumando las ecuaciones 1ª y 3ª se obtiene una ecuación que añadida al sistema original proporciona un sistema equivalente con un número mayor de ecuaciones que el original, pero sigue proporcionando la misma solución, pues la ecuación añadida es combinación lineal de las otras, es decir, la nueva ecuación la cumplen las soluciones que cumplían las ecuaciones que han dado origen a la nueva.

$$x + y - 3z = 10$$
$$2x + 3y + z = 8$$
$$x - 2y - z = 2$$
$$2x - y - 4z = 12$$

Si se suma a la 3ª ecuación del sistema original la 1ª ecuación y se sustituye la 3ª por el resultado, se tiene un sistema equivalente:

$$x + y - 3z = 10$$
$$2x + 3y + z = 8$$
$$2x - y - 4z = 12$$

Si se suma a la 3ª ecuación del sistema original la 1ª ecuación multiplicada por 2 y se le resta la 2ª fila, reemplazando la 3ª fila por el resultado, se tiene un sistema equivalente:

$$x + y - 3z = 10$$
$$2x + 3y + z = 8$$
$$x - 3y - 6z = 14$$

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN ELEMENTALES: SUSTITUCIÓN, REDUCCIÓN E IGUALACIÓN.

Los siguientes métodos son más básicos e intuitivos, y son poco operativos para la resolución de sistemas con un número elevado de ecuaciones que requieren de métodos de resolución como el de Cramer, el de Gauss o el de la matriz inversa, y sus adaptaciones, por ejemplo.

Sustitución.

Consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones, lo que significa dejar en uno de los dos términos de la ecuación a la incógnita y al resto de elementos en el otro término. Así queda la incógnita despejada en función del resto de incógnitas. Una vez despejada en esa ecuación, se sustituye esa incógnita en el resto de ecuaciones. Tras esa sustitución, quedará en el resto de ecuaciones el número de incógnitas inicial menos uno. El proceso de repite con una segunda incógnita en otra ecuación hasta que al final quede una ecuación con una única incógnita.

Ejemplo:

Dado el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 10 \\ 5x + 2y = 3 \end{array}\right\}$$

Se despeja de la primera ecuación la incógnita x en función de y. Después se sustituye en el resto de ecuaciones (la segunda) y se despeja la otra variable, y, en función del resto procediendo como en el caso anterior, sustituyendo en el resto de ecuaciones, pero como ya no hay más variables se acaba obteniendo la solución única que tiene el sistema:

$$x + y = 10 \Rightarrow x = 10 - y \Rightarrow 5 \cdot (10 - y) + 2y = 3 \Rightarrow 50 - 5y + 2y = 3 \Rightarrow 47 = 3y \Rightarrow y = \frac{47}{3}$$

$$x = 10 - \frac{47}{3} = \frac{30}{3} - \frac{47}{3} = -\frac{17}{3}$$

Reducción.

Se trata de un método basado en la existencia de sistemas equivalentes. Si se suma a una ecuación de un sistema otra ecuación del mismo multiplicada por un número distinto de cero, se obtiene un sistema equivalente con una ecuación diferente, pero con la misma solución. Basándose en esta propiedad, se trata de aplicarla varias veces para sustituir las ecuaciones del sistema con combinaciones lineales de ecuaciones del mismo, de manera que se obtengan finalmente ecuaciones con una única incógnita que sean fáciles o inmediatas de resolver.

Así, para el caso más sencillo de un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, los pasos a seguir por este método serían:

1.- Se multiplican los miembros de las dos ecuaciones por los números que convengan para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en las dos ecuaciones.

2.- Se restan las dos ecuaciones que hayan resultado y al tener el mismo coeficiente una incógnita, ésta se eliminará tras la resta.

3.- Se resuelve la ecuación con una incógnita y después se sustituye su solución en cualquiera de las ecuaciones iniciales para obtener la solución de la otra incógnita.

En el caso de más de dos ecuaciones, el paso 1 se repetiría con las ecuaciones que convengan para conseguir ecuaciones con una única incógnita.

Ejemplo:

Dado el siguiente sistema $\left.\begin{array}{r} x + y = 10 \\ 5x + 2y = 3 \end{array}\right\}$

Se multiplica la primera ecuación por 5. Después se restan ambas ecuaciones. Se obtiene la solución para y. Se sustituye la misma en la primera ecuación y se tiene la solución para x:

$$\begin{array}{rr} x + y = 10 \Rightarrow & 5x + 5y = 50 \\ 5x + 2y = 3 \Rightarrow & \underline{-5x - 2y = -3} \\ & 0x + 3y = 47 \Rightarrow y = \dfrac{47}{3} \end{array}$$

$$x + \frac{47}{3} = 10 \Rightarrow x = -\frac{17}{3}$$

Igualación.

Este método consiste en despejar la misma incógnita en dos ecuaciones del sistema e igualar las expresiones resultantes, quedando una ecuación con el número inicial de incógnitas menos uno. Está pensado, por ser elemental, para la resolución de sistemas de 2 ecuaciones, pues para más ecuaciones, la igualación tendría que hacerse con otros pares de ecuaciones, teniendo que combinar este método con el de sustitución para poder resolver el sistema.

Ejemplo:

Dado el siguiente sistema $\left.\begin{array}{r} x + y = 10 \\ 5x + 2y = 3 \end{array}\right\}$

Se despeja x en las dos ecuaciones. Después se igualan las dos expresiones de x, y se resuelve para la incógnita y. A continuación se sustituye la misma en cualquiera de las expresiones de x en función de y obtenidas a partir de las ecuaciones y se tiene la solución para x:

$$x = 10 - y; x = \frac{3 - 2y}{5} \Rightarrow 10 - y = \frac{3 - 2y}{5} \Rightarrow 50 - 5y = 3 - 2y \Rightarrow 47 = 3y \Rightarrow y = \frac{47}{3}$$

$$x = 10 - \frac{47}{3} = \frac{17}{3}$$

MÉTODOS DE CRAMER Y DE GAUSS.

Se van a presentar tres métodos: el de Cramer, el de Gauss y el de la matriz inversa. Los tres métodos se desarrollaron inicialmente para sistemas compatibles determinados con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas (sistemas cuadrados), aunque se pueden adaptar los sistemas que no verifiquen que m = n, siempre que sean compatibles, para que se puedan aplicar dichos métodos.

Método de Cramer.

Dado un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{nx1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{mx1}$$

$$A \cdot x = b$$

La regla de Cramer proporciona el valor de la solución para cada incógnita siempre que se verifiquen los siguientes supuestos sobre el sistema:

a) Se trate de un sistema cuadrado, es decir, que tenga el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, **m = n**.

b) El determinante de la matriz de coeficientes NO sea nulo, es decir, que la matriz de coeficientes, **A**, sea **regular**.

Estos dos supuestos configuran al sistema de ecuaciones como un sistema compatible determinado, al ser la matriz de coeficientes cuadrada y tener el máximo rango, la matriz ampliada también lo tendrá y coincidirán ambos con el número de incógnitas, n.

En ese caso, se tiene que el valor para cada incógnita se obtiene de un cociente de determinantes. En el denominador siempre aparece el determinante de la matriz de coeficientes, $|A|$. En el numerador aparece el determinante resultante de sustituir en el determinante de A la columna de coeficientes de la variable i-ésima en el sistema por la columna de términos independientes del mismo.

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

Ejemplo

Se trata de resolver el siguiente sistema cuadrado, n = m = 3:

$$\begin{array}{l} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - z = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se va a estudiar el tipo de solución.

El rg(A) es 3, pues el único menor de orden 3 que se puede construir con las filas y columnas de la matriz A es el propio determinante de la matriz y es distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 0 - 2 + 3 - 0 - 4 = -2 \neq 0$$

El rg(A*) será también 3, el máximo para una matriz de 3 por 4, ya que contiene a la matriz A que tiene dicho rango.

Por tanto, se puede aplicar la regla de Cramer para resolver el sistema. Como se ha considerado que x es la primera incógnita, y es la segunda, z la tercera, se tiene:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3}{-2} = -1{,}5 \; ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{15}{-2} = -7{,}5 \, ;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{5}{-2} = -2{,}5$$

Como se ha comentado al inicio de este apartado, los métodos de resolución de los sistemas de ecuaciones lineales se desarrollaron para sistemas compatibles determinados con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, sin embargo, se pueden adaptar los sistemas, siempre que sean compatibles, para que puedan aplicarse estos métodos aunque no se verifiquen los supuestos iniciales (**m = n** y/o matriz de coeficientes regular).

Se explica a continuación esa adaptación, con ejemplos de resolución de los **sistemas compatibles, rg(A)=rg(A*)**, mediante la regla de Cramer, aunque una vez adaptados podrían resolverse con cualquiera de los otros dos métodos que se explicarán después.

<u>Caso m = n, pero con |A| = 0</u>:

Esto supone que el rg(A) no es el máximo, rg(A) < n. Suponiendo que rg(A)=rg(A*)=k <n, el sistema es compatible indeterminado, y existirán k ecuaciones linealmente independientes y (n-k) ecuaciones que se pueden expresar como combinación lineal de las otras k, es decir son el resultado de multiplicar por números las otras ecuaciones y de sumarlas. Se trata de eliminar (n-k) ecuaciones que no aportan información adicional para la resolución del sistema, pues se pueden obtener a partir de las k ecuaciones linealmente independientes. La elección de las ecuaciones a conservar y a eliminar puede basarse en el menor de orden k no nulo que ha permitido concluir que el rango de A era k. Se conservan las ecuaciones cuyas filas se han utilizado en ese menor y se eliminan las ecuaciones cuyas filas no han intervenido en ese menor. Esta es una manera de asegurar que las k ecuaciones elegidas son linealmente independientes entre sí, y que determinarán un sistema de ecuaciones equivalente transformado con una matriz de coeficientes redefinida regular.

Una vez elegidas las ecuaciones correctas se sigue teniendo un sistema de ecuaciones compatible indeterminado, con k ecuaciones y n incógnitas, k < n. Para poder aplicar el método de resolución, se procede a pasar al segundo término de cada ecuación las incógnitas sobrantes, n - k. La elección de las incógnitas que van a pasar al segundo término es independiente de la solución que finalmente se va a obtener, pero, para ahorrar tiempo en cálculos posteriores y garantizar que se verifique el supuesto de matriz de coeficientes regular, se sugiere que las incógnitas que permanezcan en el primer término de las ecuaciones sean precisamente las que tienen como coeficientes las columnas empleadas en el menor de orden k no nulo que ha servido para determinar el rango de A. El resto de incógnitas pasaría al segundo término. Quedaría un sistema equivalente al original expresado de una nueva manera

$$\overline{A} \cdot \overline{x} = \overline{b}$$

Al aplicar cualquier método de resolución, incluido Cramer, la solución obtenida mostrará a las k incógnitas del primer término en función de las (n - k) incógnitas reubicadas en los segundos términos de las ecuaciones.

Ejemplo

El siguiente sistema cuadrado, m = n = 3, es compatible e indeterminado, ya que la tercera ecuación, por ejemplo, resulta de la suma de las dos primeras, por lo que habrá que adaptarlo para poder aplicar algún método de resolución. En otros sistemas puede no ser tan evidente la relación lineal entre ecuaciones, por lo de todas maneras se va a proceder a estudiar el rango de las dos matrices, acabando por concluir que tienen el mismo, 2, pero que es inferior al número de incógnitas.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 1 - 6 - 6 - 4 + 3 = 0 \Rightarrow \text{rg}(A) < 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5 \neq \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

El rg(A*) es mayor o igual al de A, por lo que se va intentar buscar un menor de orden 3 distinto de cero. Los menores que se van a calcular son todos menos el que ya está calculado antes, es decir, el determinante de A, primeras 3 columnas. Se calcularán los resultantes de tomar la 1ª, 2ª y 4ª; 1ª, 3ª y 4ª; y 2ª,3ª y 4ª columnas. Todos van a resultar nulos:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 2 - 9 - 12 - 6 + 5 = 27 - 27 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 6 + 9 - 12 - 18 - 5 = 35 - 35 = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 12 + 3 - 4 + 9 - 10 = 24 - 24 = 0$$

El rg(A*) = 2, ya que no hay menor de orden 3 no nulo y existe uno de orden 2 no nulo ya calculado para el caso de la matriz A. El sistema es compatible, pues coinciden los rangos, pero indeterminado, pues el rango es inferior al número de incógnitas.

Para obtener su solución mediante la aplicación de algún método de resolución se procede como ya se ha comentado. Que el rango sea 2 indica que sólo hay dos ecuaciones linealmente independientes. Se debe eliminar una ecuación. La elección de las 2 ecuaciones a mantener se basa en el menor de orden 2 no nulo calculado que estaba construido con las dos primeras filas de la matriz, por lo que se mantendrán las dos primeras ecuaciones, eliminando la tercera:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Ahora se tiene un sistema equivalente, pero con una ecuación menos que el número de incógnitas, por lo que se procede a pasar una incógnita, (n – k) = 3 -2 = 1, al segundo término de la ecuación. Se pasa x_3, pues el menor de orden 2 no nulo calculado estaba construido con las 2 primeras columnas de A:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 2 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 &= 3 - 2x_3 \end{aligned} \Rightarrow \overline{A} \cdot \overline{x} = \overline{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - x_3 \\ 3 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

Con este sistema equivalente expresado de esta manera se está ya en condiciones de aplicar cualquiera de los métodos explicados en estas páginas. En concreto, se puede resolver el sistema por Cramer, ya que se trata de un sistema cuadrado, mismas ecuaciones que incógnitas en el primer término, $m' = n'$, y con matriz de coeficientes regular, $\left|\overline{A}\right| \neq 0$, ya que su determinante ya ha sido calculado para estudiar el rg(A) y se ha visto que era no nulo.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2-x_3 & -1 \\ 3-2x_3 & 2 \end{vmatrix}}{\left|\overline{A}\right|} = \frac{2(2-x_3)+(3-2x_3)}{5} = \frac{7-4x_3}{5}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2-x_3 \\ 1 & 3-2x_3 \end{vmatrix}}{\left|\overline{A}\right|} = \frac{2(3-2x_3)-(2-x_3)+}{5} = \frac{4-3x_3}{5}$$

Las infinitas soluciones del sistema pertenecen al siguiente conjunto de R^3:

$$\left\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \,/\, x_1 = \frac{7-4x_3}{5}, x_2 = \frac{4-3x_3}{5}\right\}$$

<u>Caso m < n</u>:

Partiendo de que rg(A) = rg(A*), sistema compatible, como el nº de incógnitas, n, es mayor que el de ecuaciones, m, se tendría un sistema compatible indeterminado. Se procederá dejando en el primer término de todas las ecuaciones tantas incógnitas como ecuaciones linealmente independientes se tengan, lo que viene indicado por rg(A), suponiendo que sean m, todas las incógnitas restantes, n-m, pasarían al segundo término de las ecuaciones. Se podría redefinir el sistema original como un sistema equivalente con m incógnitas que actúan como tal, una matriz de coeficientes cuadrada de orden m, y un nuevo vector de términos independientes que no sólo contaría con los términos originales, sino con expresiones dependientes de las (n-m) incógnitas sobrantes que han pasado al segundo término.

$$\overline{A} \cdot \overline{x} = \overline{b}$$

La elección de las variables que permanecen en el primer término puede venir dada por las columnas de coeficientes que formaban parte del menor de mayor orden que ha servido para determinar el rango de A, ya que al tenerlo calculado se tendrá calculado el determinante de la nueva matriz de coeficientes, $\overline{A}$.

Ejemplo

Sirve de ejemplo lo realizado en la segunda parte del caso anterior, m = n, con rg(A)=rg(A*)<n.

<u>Caso m > n</u>:

Se sigue manteniendo que son sistemas compatibles, quedando dos posibilidades:

a) Determinado, rg(A) = rg(A*) = n, pero como m > n, "sobrarían" (m-n) ecuaciones, por lo que procede a plantear un sistema equivalente que contenga tantas ecuaciones como incógnitas linealmente independientes. La decisión de qué ecuaciones permanecen y qué ecuaciones se descartan viene dada por el menor de orden n que ha dado sustento a concluir que rg(A) = n, quedando en el sistema equivalente las ecuaciones cuyas filas se han utilizado en dicho menor y eliminando el resto de ecuaciones. Después se aplica la Regla de Cramer tal cual.

Ejemplo

Al sistema de ecuaciones del ejemplo utilizado tras explicar el método de Cramer se le ha añadido una ecuación resultante de sumar las 3 existentes, por lo que el sistema equivalente resultante seguirá siendo un sistema compatible y determinado, pero con 4 ecuaciones y 3 incógnitas. El rango de las dos matrices seguirá siendo 3, pero no será el máximo para el caso de la matriz ampliada, ya que no será posible encontrar ningún menor de orden 4 distinto de 0 (el único posible), al ser la 4ª ecuación suma de las 3 primeras. El rango de las dos matrices es coincidente con el número de incógnitas, rg(A)=rg(A*) = 3 = n, por lo que el sistema es compatible y determinado. Como m > n, se eliminarían (m-n) ecuaciones, la 4ª por ejemplo, dado que el rango de 3 se ha concluido al tomar las 3 primeras filas y columnas para construir el determinante de orden 3 no nulo de la matriz A y A*, quedando el mismo sistema equivalente que en el ejemplo comentado, procediendo de igual manera para resolverlo por Cramer.

$$\begin{array}{l} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - z = 1 \\ 4x - 3y + 3z = 9 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - z = 1 \end{array}$$

b) Indeterminado, rg(A) = rg(A*) = k < n. Como m > n > k, "sobran" (m-n) ecuaciones y "sobran" (n-k) incógnitas en el primer término. Se procede primero a eliminar las ecuaciones que sean combinación lineal de las otras. La decisión de qué ecuaciones permanecen y qué ecuaciones se descartan viene dada por el menor de orden k que ha dado sustento a concluir que rg(A) = k, quedando en el sistema equivalente las ecuaciones cuyas filas se han utilizado en dicho menor y eliminando el resto de ecuaciones. Después se procede a pasar al segundo término las (n-k) incógnitas para que quede reformulado el sistema equivalente como un sistema cuadrado tal y como ya se ha visto anteriormente.

Ejemplo

Al sistema del ejemplo con m = n, $|A| = 0$, se le ha añadido una ecuación resultante de sumar las 3 existentes, por lo que el sistema equivalente resultante seguirá siendo un sistema compatible indeterminado, pero con 4 ecuaciones y 3 incógnitas. Tras analizar el rango de las dos matrices y ver que es 2 = rg(A)=rg(A*) =k, se eliminarían 2 ecuaciones, la 3ª y 4ª, dado que el rango es dos se ha concluido al tomar las 2 primeras filas y columnas para construir el determinante de orden 2 no nulo, quedando el mismo sistema equivalente que en el ejemplo anterior, procediendo de igual manera para resolverlo por Cramer como ya se ha hecho en páginas anteriores.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 6x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 10 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Método de Gauss.

Consiste en obtener una matriz de coeficientes triangular de un sistema de ecuaciones equivalente al que se quiere resolver que es cuadrado, aplicando sucesivamente y convenientemente las operaciones con las ecuaciones (combinaciones lineales) para obtener sistemas equivalentes. Es una generalización del método elemental de reducción. Al final se obtiene un sistema equivalente en donde la última ecuación contiene una incógnita, la penúltima ecuación contiene a la anterior incógnita y a otra más, la antepenúltima ecuación contiene a las dos anteriores incógnitas y a una tercera, y así sucesivamente. Resolviendo fácilmente la última ecuación, se va sustituyendo la solución en la ecuación inmediatamente anterior para obtener el valor de la otra incógnita. Los valores obtenidos se irán sustituyendo progresivamente en las ecuaciones precedentes para resolver al completo el sistema. [2] Se trabaja con la matriz ampliada del sistema, para realizar las transformaciones en sistemas equivalentes de forma correcta, ya que contempla también los cambios en los segundos términos de las ecuaciones, es decir, en los términos independientes.

Ejemplo:

Dado el siguiente sistema, se resuelve por el método de Gauss:

$$\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Se trata de conseguir un sistema de ecuaciones equivalente que tenga por matriz de coeficientes una matriz triangular superior.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

La primera transformación del sistema pasa por intercambiar el orden de la primera y tercera filas, para facilitar luego los posteriores cálculos:

$$A^* = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

A la segunda fila se le resta la primera multiplicada por 2 para conseguir que $a_{21} = 0$:

[2] Existe otro método, de Gauss-Jordan, que consiste en obtener un sistema de ecuaciones equivalente cuya matriz de coeficientes sea diagonal, usando las mismas operaciones con las ecuaciones que garanticen la equivalencia de los sistemas (mismas soluciones) como hace el método de Gauss. Este método de Gauss-Jordan, aunque requiere más tiempo para hacer diagonal a la matriz que para triangularla, ahorra tiempo en los últimos pasos de obtención de los valores de las incógnitas, pues, al final se tiene un sistema equivalente con ecuaciones con una única incógnita distinta cada una.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -2 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \\ 6 & -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

A la tercera fila se le resta la primera multiplicada por 6 para conseguir que $a_{31} = 0$ y mantener los ceros conseguidos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \\ 6 & -2 & -2 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & -14 & -14 & 14 \end{pmatrix}$$

A la tercera fila se le resta la segunda multiplicada por 7 para conseguir que $a_{31} = 0$ y mantener los ceros conseguidos, ya que si se restara a la tercera fila la primera multiplicada por 7 se conseguiría que $a_{32} = 0$, pero sucedería que a_{31} dejaría de ser nulo, $a_{31} = -7$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & -14 & -14 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & -21 \end{pmatrix}$$

Una vez obtenido un sistema de ecuaciones lineales equivalente con matriz de coeficientes triangular, **sistema escalonado**, se procede a la obtención de las soluciones de las incógnitas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -21 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rrrl} x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = -1 \\ & -2x_2 & -3x_3 & = 5 \\ & & 7x_3 & = -21 \end{array}$$

De la tercera ecuación se obtiene fácilmente el valor de la tercera incógnita, después se sustituye la misma en la ecuación inmediatamente anterior, la segunda, en donde sólo figuran las dos últimas incógnitas, por lo que queda una ecuación con una incógnita, la penúltima, fácil de resolver. Conocidas las soluciones para las dos últimas incógnitas se sustituyen sus valores en la ecuación antepenúltima, (en este ejemplo, la primera ecuación) quedando nuevamente una ecuación con una incógnita. Y así se seguiría en el caso de existir más ecuaciones e incógnitas hasta obtener el valor de la solución para todas las incógnitas:

$$7x_3 = -21 \Rightarrow x_3 = -21/7 = -3$$

$$-2x_2 - 3(-3) = 5 \Rightarrow -2x_2 + 9 = 5 \Rightarrow -2x_2 = -4 \Rightarrow x_2 = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x_1 + 2(2) + 2(-3) = -1 \Rightarrow x_1 + 4 - 6 = -1 \Rightarrow x_1 - 2 = -1 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1, 2, -3)$$

<u>Método de la matriz inversa.</u>

Los supuestos para su aplicación son los mismos que los de la Regla o Método de Cramer, así como los de Gauss. Dado un sistema cuadrado con n ecuaciones e incógnitas, compatible y determinado, es decir, rg(A) = rg(A*) = n, lo que implica que A sea regular, se puede obtener la solución del mismo, (combinación de valores única para todas las incógnitas) mediante la multiplicación del sistema en su forma matricial por la matriz inversa de la matriz de coeficientes:

$$A \cdot x = b \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b \Rightarrow I \cdot x = A^{-1} \cdot b \Rightarrow x = A^{-1} \cdot b$$

Ejemplo

Se va a resolver el mismo ejemplo que el utilizado para ejemplificar el método de Cramer, y por tanto ya se sabe el resultado, pero si no fuera así, se procedería como siempre. Estudiar, mediante el Teorema de Rouché-Fröbenius el tipo de solución y después actuar en consecuencia.

$$\begin{array}{l} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - z = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

El rg(A)=rg(A*)=3=n, como ya se ha visto antes, por lo que el sistema es compatible y determinado y dado que m=n, sistema cuadrado, se puede aplicar el método. El determinante ya se ha calculado, $|A| = -2$.

Se procede a calcular la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \; Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

La solución se obtiene con el producto matricial de la inversa de la matriz de coeficientes por el vector de términos independientes:

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+2-\frac{1}{2} \\ -9+4-\frac{5}{2} \\ -3+2-\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{15}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1'5 \\ -7'5 \\ -2'5 \end{pmatrix}$$

4.- RESOLUCIÓN PRÁCTICA DE SISTEMAS NO LINEALES SENCILLOS.

PLANTEAMIENTO GENERAL Y TIPOS DE SOLUCIONES.

Ya se ha realizado anteriormente el planteamiento general de un sistema de ecuaciones que es válido para este caso, en el que las funciones $h_i(x)$ no son lineales.

A un conjunto de ecuaciones no lineales se le denomina **sistema de ecuaciones no lineal**, y se representaría así:

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b \in R^m$$
$$h : R^n \to R^m$$
$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$$
$$b = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \in R^m$$

Forma extensa:

$$\begin{gathered} h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_1 \\ h_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_2 \\ \vdots \\ h_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_m \end{gathered}$$

Tal y como ya se ha dicho para el caso general, a los argumentos/variables de las funciones se les llama **incógnitas**, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y a los valores que tomen dichas incógnitas para que se verifiquen las igualdades en un determinado conjunto se les llama **soluciones** o **raíces** de la ecuación

También se ha realizado anteriormente un clasificación de los distintos tipos de solución, destacando que, en comparación con los sistemas de ecuaciones lineales, se puede dar el caso de solución múltiple con un número finito de soluciones, hecho que no sucede en los sistemas lineales.

SOLUCIÓN A SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES.

No existen métodos generales de resolución para sistemas de ecuaciones no lineales como ocurre en el caso de los sistemas lineales. Se deben combinar los métodos elementales de sustitución, igualación y reducción, junto con los específicos para cada tipo de función h(x) que defina la ecuación (logarítmica, trigonométrica, exponencial, potencial, polinómica, etc.) y que se explican en parte en el tema 1 y en parte en el tema 3. Así pues, sólo se muestran a continuación unos ejemplos de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales para que sean tenidos en cuenta como una parte muy pequeña de la gran diversidad de casos que pueden darse.

Ejemplo 1

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} & xy = 0 \\ & x^2z + zy - x - y = 0 \\ & x + y + z = 2 \end{aligned}$$

De la primera ecuación

$$xy = 0 \Rightarrow x = 0 \quad ó \quad y = 0$$

Se va a considerar primero una opción para determinar posibles soluciones y después la otra opción para obtener, si es posible, otras soluciones.

Tomando x = 0 y sustituyéndolo en la segunda y tercera ecuación, se tiene:

$$\begin{aligned} &x = 0 \\ &0^2 z + zy - 0 - y = 0 \Rightarrow zy - y = 0 \\ &0 + y + z = 2 \Rightarrow y + z = 2 \end{aligned}$$

De la primera de las ecuaciones resultantes tras sustituir x = 0, se deduce

$$zy - y = 0 \Rightarrow y(z-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0, \quad ó \\ z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1 \end{cases}$$

Se tienen dos opciones de solución para esta ecuación. Se toma primero una y se sustituye en la tercera ecuación y se trata de obtener la solución. Después se procede igual con la segunda opción.

$$\begin{aligned} &x = 0 \\ &y = 0 \Rightarrow 0 + z = 2 \Rightarrow z = 2 \\ &(x^*, y^*, z^*) = (0,0,2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x = 0 \\ &z = 1 \Rightarrow y + 1 = 2 \Rightarrow y = 1 \\ &(x^*, y^*, z^*) = (0,1,1) \end{aligned}$$

Tras agotar las dos opciones, se tienen, en este ejemplo, dos puntos de R^3 que verifican las ecuaciones. De esta manera se agota el proceso para el caso de partida de x = 0 de la primera ecuación.

Partiendo de la segunda opción de solución de la primera ecuación, y = 0, se procede de manera análoga. Se sustituye en la segunda y tercera ecuación y se tiene:

$$\begin{aligned} &y = 0 \\ &x^2 z + z(0) - x - 0 = 0 \Rightarrow x^2 z - x = 0 \\ &x + 0 + z = 2 \Rightarrow x + z = 2 \end{aligned}$$

De la primera de las ecuaciones resultantes tras sustituir y = 0, se deduce

$$x^2 z - x = 0 \Rightarrow x(xz-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \quad ó \\ xz - 1 = 0 \Rightarrow xz = 1 \end{cases}$$

Se tienen dos opciones de solución para esta ecuación. Se toma primero una y se sustituye en la tercera ecuación y se trata de obtener la solución.

$$\begin{aligned} &y = 0 \\ &x = 0 \Rightarrow 0 + z = 2 \Rightarrow z = 2 \\ &(x^*, y^*, z^*) = (0,0,2), \text{ esta solución ya se había obtenido.} \end{aligned}$$

Después se procede con la segunda opción. Esta vez se despeja z en función de x en la tercera ecuación y se sustituye en la segunda opción:

$$\begin{aligned} &y = 0 \\ &xz = 1 \\ &x + z = 2 \Rightarrow x = z - 2 \end{aligned}$$

$y = 0$

$xz = (2 - z)z = 1 \Rightarrow 2z - z^2 = 1 \Rightarrow z^2 - 2z + 1 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{4-4}}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

$x = 2 - z \Rightarrow x = 2 - 1 = 1$

$(x^*, y^*, z^*) = (1,0,1)$

Este sistema de ecuaciones tiene solución múltiple con un número finito de soluciones, tres, que son $\{(0, 0, 2), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$.

Ejemplo 2

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} &2^{x+y} = 3^{x-y} \\ &2x + y = 1 \end{aligned}$$

Se despeja la incógnita "y" de la segunda ecuación y se sustituye en la primera ecuación, que quedará sólo en función de la incógnita x:

$$\begin{aligned} &2x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 2x \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2^{x+1-2x} = 3^{x-(1-2x)} \Rightarrow 2^{1-x} = 3^{3x-1} \end{aligned}$$

Si se toman logaritmos de los dos términos de la ecuación se mantiene la igualdad:

$\ln(2^{1-x}) = \ln(3^{3x-1}) \Rightarrow (1 - x)\ln 2 = (3x - 1)\ln 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln 2 - x\ln 2 = 3x\ln 3 - \ln 3 \Rightarrow \ln 2 + \ln 3 = 3x\ln 3 + x\ln 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln 2 + \ln 3 = x(3\ln 3 + \ln 2) \Rightarrow x = \dfrac{\ln 2 + \ln 3}{3\ln 3 + \ln 2} = \dfrac{\ln(2 \cdot 3)}{\ln 3^3 + \ln 2} = \dfrac{\ln(6)}{\ln 27 + \ln 2} = \dfrac{\ln 6}{\ln(27 \cdot 2)}$

$x = \dfrac{\ln 6}{\ln 54}$

$y = 1 - 2x \Rightarrow y = 1 - 2 \cdot \dfrac{\ln 6}{\ln 54} = \dfrac{\ln 54 - 2\ln 6}{\ln 54} = \dfrac{\ln 54 - \ln 36}{\ln 54} = \dfrac{\ln\left(\frac{54}{36}\right)}{\ln 54} = \dfrac{\ln(3/2)}{\ln 54}$

$(x^*, y^*) = \left(\dfrac{\ln 6}{\ln 54}, \dfrac{\ln(3/2)}{\ln 54}\right) = (0'449176895\ldots, 0'101646209\ldots)$