INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

Dentro del campo general de la teoría de la optimización, también conocida como programación matemática conviene distinguir diferentes modelos de optimización.

Los modelos de optimización se caracterizan contener:

Variables o decisiones a realizar
Ecuaciones de restricción o limitaciones
Función (es) objetivo.

Una de las características de los modelos de optimización es la existencia de un único decisor frente a otras disciplinas donde puede existir más de un decir (por ejemplo, la teoría de juego).

Breve clasificación, atendiendo a varios criterios:

a) **Según la naturaleza de los datos**, podemos hablar de modelos ***deterministas*** o de modelos ***estocasticos***. Consideraremos problemas deterministas a todos aquellos problemas en donde conocemos con exactitud los datos que intervienen en el modelo, mientras que en otro caso podremos hablar de modelos estocasticos.

b) **Según la variable tiempo**, si interviene de forma explícita en el modelo, entonces lo consideraremos como un problema ***dinámico*** frente a los problemas ***estáticos***, en donde no lo esta.

c) Atendiendo a los **objetivos del problema**, podemos hablar de modelos con ***objetivo único*** frente los problemas con objetivos múltiples o ***multiobjetivos.***

d) Según tengan o no restricciones, podemos hablar de problemas ***restringidos*** o problemas ***sin restricciones***.

e) Atendiendo a la **linealidad** de las funciones que intervienen, también podemos clasificar a los modelos en ***lineales*** (todas las funciones son lineales) o modelos ***no lineales***.

f) Atendiendo a la **continuidad de las variables**, también los podemos clasificar como problemas ***continuos*** o problemas ***discretos***.

PLANTEAMIENTO Y CONCEPTOS PREVIOS.

El planteamiento general problema de programación matemática:

$$\begin{aligned} &\text{Optimizar } f(x_1,x_2,...,x_n) \\ &\text{sujeto a: } g_1(x_1,x_2,...,x_n) \leq b_1 \\ &\qquad g_2(x_1,x_2,...,x_n) \leq b_2 \\ &\qquad \dots \\ &\qquad g_m(x_1,x_2,...,x_n) \leq b_m \end{aligned}$$

o en forma abreviada

$$\begin{aligned} &\text{Opt } f(x) \\ &\text{s.a. } g(x) \leq b \end{aligned}$$

donde

$$f:R^n \to R, \qquad x \in R^n, \qquad g:R^n \to R^m \qquad b \in R^m$$

La función **f** denominada ***función objetivo***, es una función definida de un dominio de R^n sobre R, y representa una descripción matemática del objetivo que se pretende alcanzar con el problema planteado.

El vector **X** es el vector de ***variables instrumentales o variables de decisión***, de entre cuyos valores posibles se trata de elegir aquél o aquellos que proporcionen el valor óptimo de la función f.

Conjunto de oportunidades, denominaremos así al conjunto de puntos $X \in R^n$ que verifican todas y cada una de las restricciones y al mismo tiempo pertenecen al dominio de definición de la función. En adelante lo representaremos por S.

El problema de la programación matemática consiste en elegir aquel o aquellos valores de las variables instrumentales pertenecientes al conjunto de oportunidades S, es decir, $X \in S$, que proporcionan el mayor o menor valor de la función objetivo.

Problema de programación matemática de la forma:

$$\begin{aligned} &\text{Max } f(X) \\ \text{s.a.} \quad & g(X) \leq b \end{aligned}$$

Convenciones:

1.-Min f(X) = -Max[-f(X)]

2.- Restriciciones: $g(X) \leq b$. Si $g_1(X) \geq b_1$; $-g_1(X) \leq -b_1$,

3.- Igualdades: $h_2(X)=b_2$, en $g_2(X) \leq b_2$ y $-g_2(X) \leq -b_2$,

OTRA CLASIFICACIÓN: (Para el curso)

Programación Clásica:

$$\begin{aligned} &\text{Max } f(x_1,x_2,...,x_n) \\ \text{s.a.} \quad & h_1(x_1,x_2,...,x_n) = b_1 \\ & h_2(x_1,x_2,...,x_n) = b_2 \\ & \qquad \ldots \\ & h_m(x_1,x_2,...,x_n) = b_m \end{aligned}$$

Condición: $m < n$

Caso particular: $m=0$,

$$\text{Max } f(x_1,x_2,...,x_n)$$

Programación no lineal

$$\begin{aligned} & \text{Max } f(x_1,x_2,...,x_n) \\ \text{s.a.} \quad & g_1(x_1,x_2,...,x_n) \le b_1 \\ & g_2(x_1,x_2,...,x_n) \le b_2 \\ & \quad ... \\ & g_m(x_1,x_2,...,x_n) \le b_m \end{aligned}$$

En este tipo de problemas se puede, además, añadir restricciones sobre el signo de las variables.

Programación lineal

$$\begin{aligned} & \text{Max } Z(x) = c_1x_1+c_2x_2+ \cdots +c_nx_n \\ \text{s.a.} \quad & a_{11}x_1+a_{12}x_2+ \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ & a_{21}x_1+a_{22}x_2+ \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ & \quad . . . . \\ & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+ \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\ & x_1,x_2, \cdots,x_n \ge 0 \end{aligned}$$

o en forma abreviada

$$\begin{aligned} & \text{Max } Z = c^t x \\ \text{s.a.} \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

siendo $c,x \in R^n$, $b \in R^m$ y $A \in M_{mxn}$

x_i es libre : $\quad$ **$x_i = x_{i1} - x_{i2}$** $\quad$ **$x_{i1} \ge 0$** $\quad$ **$x_{i2} \ge 0$**

$x_j \le 0$: $\quad$ **$x_j = -x_{j1}$**

TIPOS DE ÓPTIMOS.

Consideremos la función $f:S\subseteq R^n \rightarrow R$ y x^* un óptimo de dicha función, entonces se dice que dicho punto x^* es:

***Máximo local o relativo*:**

x^* es un máximo local en S, si

$$f(x^*) \geq f(x) \quad \forall\, x \in D\cap B(x^*,\delta)$$

***Máximo local único o estricto**:*

x^* es un máximo local estricto en S, si

$$f(x^*) > f(x) \quad \forall\, x \in D\cap B(x^*,\delta)$$

***Máximo global o absoluto:*:**

x^* es un máximo global en S, si

$$f(x^*) \geq f(x) \quad \forall\, x \in S$$

Máximo global único o estricto:

x^* es un máximo global estricto en S, si

$$f(x^*) > f(x) \quad \forall\, x \in S$$

Mínimo local o relativo:

x^* es un mínimo local en S, si

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall\, x \in D\cap B(x^*,\delta)$$

Mínimo local único o estricto:

x^* es un mínimo local estricto en S, si

$$f(x^*) < f(x) \quad \forall\, x \in D\cap B(x^*,\delta)$$

Mínimo global o absoluto::

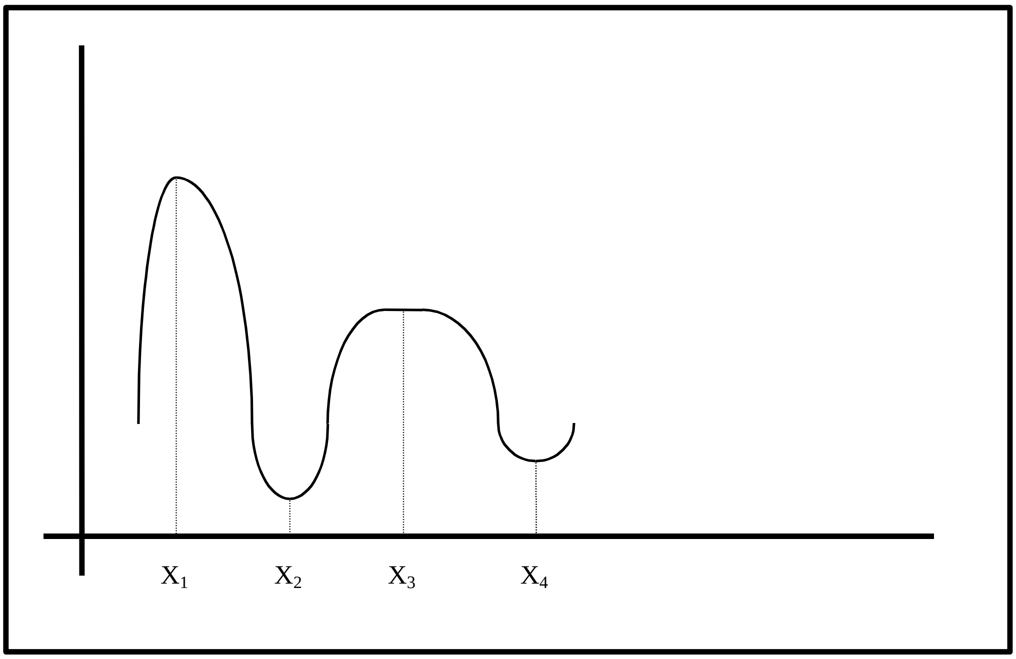
x^* es un mínimo global en S, si

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall\, x \in S$$

Mínimo global único o estricto:

x^* es un mínimo global estricto en S, si

$$f(x^*) < f(x) \quad \forall\, x \in S$$


X1
X2
X3
X4

TEOREMAS BASICOS DE OPTIMIZACION

Teorema de Weierstrass

Si el conjunto de oportunidades S es compacto (cerrado y acotado) y no vacío y la función objetivo es continua en S, entonces dicha función alcanza un máximo y un mínimo global en el interior o en la frontera de S.

Efectivamente, dada

$$f: D \subseteq R^n \to R$$

si D es compacto y f es continua en D, entonces f(D) también será un conjunto compacto y por tanto tendrá, por ser acotado, un extremo inferior que representamos por m y uno superior M y además por ser cerrado $m, M \in f(D)$, en consecuencia

$$\exists\ x_1, x_2 \in D \ / \ f(x_1)=m \ \text{ y } f(x_2)=M$$

de donde

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \qquad \forall x \in D$$

siendo entonces x_1 un mínimo global y x_2 un máximo global.

Teorema local-global

Sea $S \subseteq R^n$ un conjunto convexo convexo y no vacio, y sea $f: S \to R$. Considremos el siguiente problema:

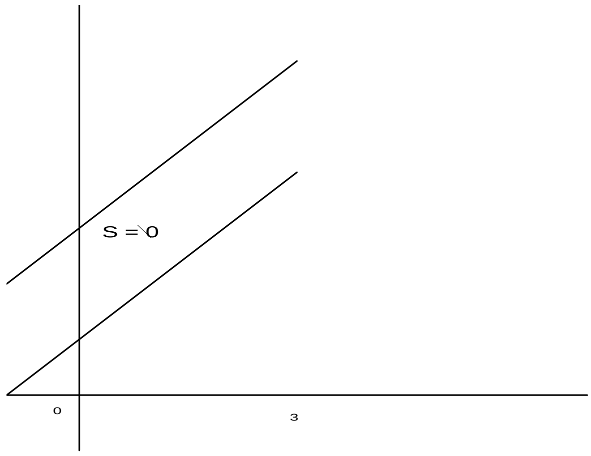
$$\begin{array}{ll} \text{Min} & F(x) \\ \text{s.a.} & x \in S \end{array}$$

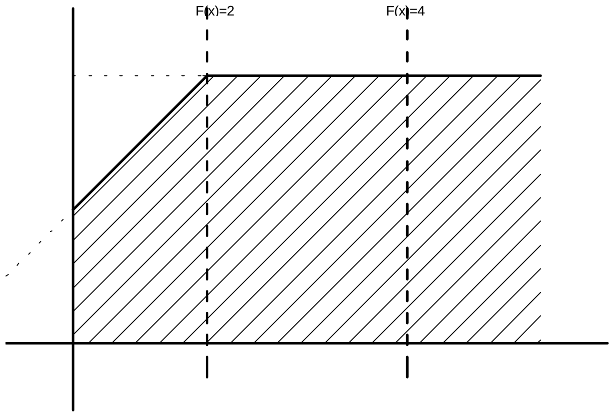
Si que $x^* \in S$ es un mínimo local del problema anterior, entonces:

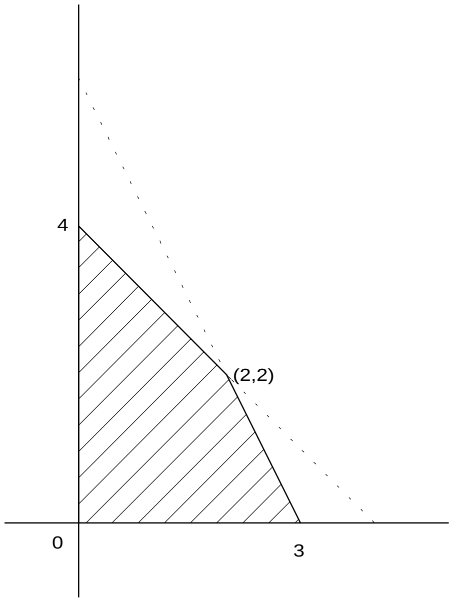
a) *Si f es un función convexa, entonces x^* es un minimo global del problema.*

b) *Si f es un función estrictamente convexa, entonces x^* es un minimo global estricto del problema.*

$$\text{Problemas}\begin{cases}\text{Infactibles}\\ \text{Factibles}\begin{cases}\text{Con optimo global (acotados)}\\ \text{Sin optimo global (no acotados)}\end{cases}\end{cases}$$






4
(2,2)
0
3

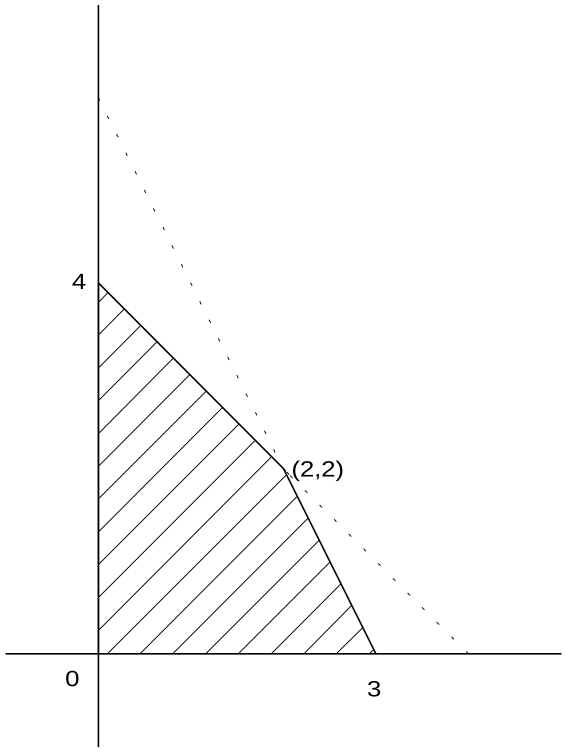
$$\text{Soluciones}\begin{cases}\text{Infactibles}\\[2ex] \text{Factibles} & \begin{cases}\text{Interiores}\\ \text{Frontera}\end{cases}\end{cases}$$

$\text{Max } F(x) = x_1 + 2\,x_2$

$\text{s.a: } x_1 + x_2 \leq 4$

$2\,x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$



CONJUNTOS CONVEXOS

CONCEPTOS PREVIOS.

Recta en R^n .

$$r = \{ x \in R^n / x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 ;\ x_1,x_2 \in R^n ;\ \lambda \in R \}$$

$$r = \{ x \in R^n / x = x_2 + \lambda (x_1 - x_2) ;\ x_1,x_2 \in R^n ;\ \lambda \in R \}$$

Semirecta en R^n.

$$S^+ r = \{ x \in R^n / x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 ;\ x_1,x_2 \in R^n ;\ \lambda \in R^+ \}$$

$$S^- r = \{ x \in R^n / x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 ;\ x_1,x_2 \in R^n ;\ \lambda \in R^- \}$$

Segmento lineal.

segmento lineal cerrado

$$[x_1,x_2] = \{ x \in R^n / x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 ;\ x_1,x_2 \in R^n ;\ \lambda \in [0,1] \}$$

abierto

abierto-cerrado

cerrado-abierto,

Combinación lineal *Un punto x se dice que es combinación lineal de n puntos, si x se puedes expresar de la siguiente forma:*

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad l_i$$

Combinación lineal positiva

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad l_i \qquad \mathbf{y} \qquad \lambda_i \geq 0$$

Combinación lineal convexa.

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad l_i \qquad \textbf{y} \qquad \lambda_i \geq 0 \qquad \textbf{y} \qquad \sum_{i=1}^{n} l_i = 1$$

Ejemplo:

Dado el conjunto de puntos S = {(0,0),(0,4),(4,0)}

Determinar si los puntos (1,1) y (4,4) se pueden expresar como combinación lineal convexa de dichos puntos.

CONJUNTOS CONVEXOS

Definición.

Un conjunto S es convexo si y solamente si cumple:

$$\forall\, x_1 , x_2 \in S \qquad \rightarrow \qquad \lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2 \in S,\ \lambda \in [0,1]$$

Ejemplo: *Comprobar si es convexo el siguiente conjunto:*

$$S = \{(x,y)\in R^2 \,/\, 2x+3y = 18\}$$

Envoltura convexa

Dado el conjunto de puntos

S= { (0,0), (0,3), (1,1), (3,0) }

Obtener su envoltura convexa.

PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS CONVEXOS.

Por definición:

a) El conjunto vacío (∅) es un conjunto convexo.

b) Los conjuntos formados por un único punto {a}, también son conjuntos convexos.

c) También es posible probar que el conjunto R^n es un conjunto convexo.

La intersección, finita o infinita, de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

La unión de conjuntos convexos, en general, no tiene porque ser un conjunto convexo.

La combinación lineal de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

$$\alpha S + \beta T = \{z \in R^n / z = \alpha x + \beta y ,\ x \in S,.\ y \in T,.\ \alpha,\beta \in R\}$$

Como casos particulares de combinaciones lineales convexas:

- *La suma de conjuntos convexos es un conjunto convexo*, para comprobarlo basta con hacer $\alpha = 1$ y $\beta = 1$.
- *La diferencia de conjuntos convexos es un conjunto convexo*, resultado de sustituir $\alpha = 1$ y $\beta = -1$.
- *El producto de un escalar por un conjunto convexo es un conjunto convexo*, es decir, hacer $\beta = 0$.

CONJUNTOS CONVEXOS NOTABLES.

Hiperplano.

Semiespacio.

semiespacio inferior

semiespacio superior.

Semiespacios *abiertos:*

Los semiespacios, tanto abiertos como cerrados, son conjuntos convexos.

Los hiperplanos son conjuntos convexos

Hiperplano de separación.

Teorema de separación.

Dados dos conjuntos S y T, subconjuntos de R^n. Si S y T son no vacíos, convexos y disjuntos, es decir $S \cap T = \emptyset$, entonces existe un hiperplano que separa a ambos conjuntos.

Hiperplano soporte (o de apoyo).

Poliedro. Politopo*:*

Punto extremo*.*

Arista.

Arista infinita.

FUNCIONES CONVEXAS

Función *convexa*.

Función *estrictamente convexa*.

Función *cóncava***.**

Función *estrictamente cóncava*

Propiedad

Si f(x) es una función convexa en S (convexo y no vacío), entonces la función [-f(x)] es una función cóncava en S.

Función f(x) = cos(x)

Función lineal o afin: F(x) = a x + b

$F(x) = x^2$

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONVEXAS.

Toda combinación lineal con coeficientes positivos de funciones convexas es una función convexa. (α f + β g)

Sea $S \subseteq R^n$ un conjunto convexo y no vacío, y sea $f: S \to R$ una función convexa. Entonces el ***conjunto de nivel inferior***

$\boldsymbol{S_\alpha = \{ x \in S / f(x) \le \alpha \}}$*, es un conjunto convexo.*

Si *f es un función cóncava el* ***conjunto de nivel superior***

$\boldsymbol{S^\alpha = \{x \in S / f(x) \ge \alpha\}}$*, es un conjunto convexo.*

CARACTERIZACIONES DE LAS FUNCIONES CONVEXAS.

a) Caracterización gráfica.

Grafo o gráfica de una función,

Epígrafo

Hipógrafo

Sea S Ì R^n un subconjunto convexo y no vacío, y sea f:S ® R Entonces f es convexa (cóncava) si y solamente si su epígrafo (hipografo) es un conjunto convexo.

b) Caracterización de funciones de clase C^1.

a) f es convexa en S sii se cumple:

$$f(x_1) - f(x_2) \geq (x_1 - x_2)^t \nabla f(x_2) \; ; \forall x_1 , x_2 \in S$$

b) f es estrictamente convexa en S sii se cumple:

$$f(x_1) - f(x_2) > (x_1 - x_2)^t \nabla f(x_2); \forall x_1 , x_2 \in S$$

c) f es cóncava en S sii se cumple:

$$f(x_1) - f(x_2) \leq (x_1 - x_2)^t \nabla f(x_2) \; ; \forall x_1 , x_2 \in S$$

d) f es estrictamente cóncava en S sii se cumple:

$$f(x_1) - f(x_2) < (x_1 - x_2)^t \nabla f(x_2) \; ; \forall x_1 , x_2 \in S$$

c) Caracterización de funciones de clase C^2.

Dada una función f: S Ì R^n ¾® R, donde S es un conjunto convexo y no vacío, y f' Î C^2(S)-función con segunda derivada continua en S -, entonces se cumple que:

a) f es convexa en S sii se cumple Hf(x) es semidefinida positiva en S.

b) f es cóncava en S sii se cumple que Hf(x) es semidefinida negativa en S.

c) f es estrictamente convexa solamente si Hf(x) es definida positiva en S.

d) f es estrictamente cóncava solamente si Hf(x) es definida negativa en S.

Teorema local-global

Sea $S \subseteq R^n$ un conjunto convexo convexo y no vacio, y sea f: $S \rightarrow R$. Considremos el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & F(x) \\ \text{s.a.} & x \in S \end{array}$$

Si que $x^* \in S$ es un mínimo local del problema anterior, entonces:

a) *Si f es un función convexa, entonces x^* es un minimo global del problema.*

b) *Si f es un función estrictamente convexa, entonces x^* es un minimo global estricto del problema.*