PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA

Programación lineal: hipótesis de perfecta divisibilidad

Así pues decimos que un problema es de **programación lineal entera**, cuando prescindiendo de las condiciones de integridad, el problema resultante es un problema de programación lineal.

CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS LINEALES ENTEROS.

Atendiendo al tipo de variables:

Enteros puros*:* son aquellos en que todas las variables únicamente pueden tomar valores enteros. también se distinguen dentro de estos los problemas *totalmente enteros* como aquellos en que tanto las variables como todos los coeficientes que intervienen en el problema han de ser enteros.

Mixtos*:* son aquellos en los que hay al mismo tiempo variables continuas y variables que sólo pueden tomar valores enteros.

Binarios*:* las variables sólo pueden tomar los valores cero o uno.

Atendiendo al criterio del tipo de problema:

Directo: Si el problema de decisión involucra variables enteras.

Codificado: Cuando se trata de un problema que contiene además de aspectos cuantitativos, alguna consideración de tipo cualitativos, y por ello para tratar este tipo de aspectos se requiere el uso de variable enteras o binarias.

Transformado: Cuando el problema no incluye variables enteras, pero para ser tratado analíticamente requiere el uso de variable enteras “artificiales”.

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

Aunque en un principio pueda parecer que los problemas lineales enteros son más fáciles de resolver que los continuos, dado que el número de soluciones factibles a analizar, cuando el conjunto de oportunidades está acotado, es finito, éste número suele ser lo suficientemente grande (en un problema binario con n variables el número de soluciones factibles a estudiar es 2^n) como para que resulte imposible su comparación.

COMPLEJIDAD

VARIABLES	SOLUCIONES	INCREMENTO
1	2	
2	4	2
4	16	12
5	32	16
10	1.024	992
15	32.768	31.744
20	1.048.576	1.015.808
25	33.554.432	32.505.856
50	1,1259E+15	1,1259E+15
100	1,2677E+30	1,2677E+30
200	1,6069E+60	1,6069E+60
500	3,2734E+150	3,2734E+150
1000	1,0715E+301	1,0715E+301

ORDENADOR CON 1,000,000,000,000 DE OPERACIONES POR SEGUNDO

		1E+12	
1 SEGUNDO	1	1E+12	
1 MINUTO	60	6E+13	
1 HORA	60	3,6E+15	
1 DÍA	24	8,64E+16	
1 MES	30	2,592E+18	
1 AÑO	12	3,1104E+19	
1 SIGLO	100	3,1104E+21	
100 SIGLOS	100	3,1104E+23	
1000 SIGLOS	10	3,1104E+24	
MILLON DE SIGLOS	1000	3,1104E+27	
100 MILLONES SIGLOS	100	3,1104E+29	1,2675E+30
1000 MILLONES SIGLOS	10	3,1104E+30	

Problema con 100 variables	1,2677E+30	**408 Millones de siglos**

Así pues, la mayoría de los métodos de resolución comienzan su ejecución con la resolución del problema lineal asociado (en adelante ***PLA***) consistente en eliminar las condiciones de integridad, obteniéndose en consecuencia un problema de programación lineal que puede ser resuelto mediante el algoritmo del simplex.

La resolución del PLA en primer lugar, tiene una ventaja y es que si la solución a dicho problema verifica las condiciones de integridad de las variables, esta será la solución al problema entero, con lo cual no será necesario aplicar ninguna técnica especial para resolverlo.

Si la solución al PLA no verifica las condiciones de integridad , lo que ocurre la mayoría de las veces, entonces habrá que utilizar algún método que nos permita resolver el problema entero. Algo que no debemos hacer, es caer en la tentación de redondear la solución obtenida al PLA a valores enteros y tomarla como válida, pues si bien esto puede ser aceptable en aquellos problemas en el que los valores de las variables son muy grandes y en consecuencia el error puede ser mínimo, en general nos puede generar dos graves `problemas que son:

a) La solución obtenida por redondeo no es la óptima e incluso puede ser muy diferente de ella, como ocurre con el siguiente problema

$$\begin{aligned} \text{Max } F(X) &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a.} \quad 2x_1 + \ x_2 &\leq 2 \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 6 \\ x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \ \ & x_1, x_2 \in \{0,1\} \end{aligned}$$

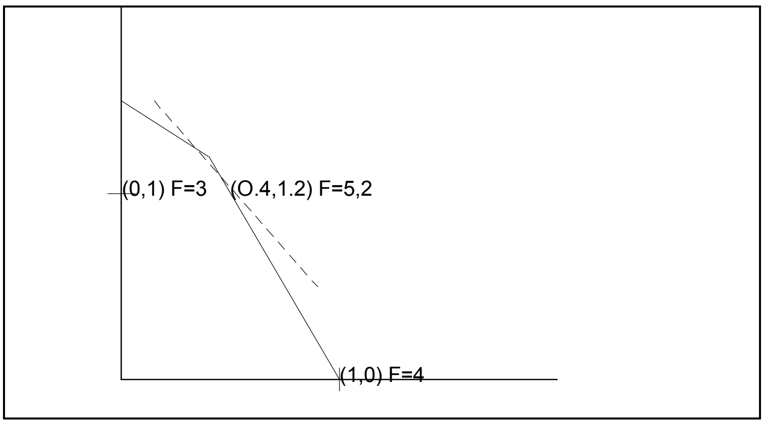
$$\begin{aligned} \text{Max } F(X) &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a.} \quad 2x_1 + \ x_2 &\leq 2 \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 6 \\ 1 \geq x_1 \geq 0 \ , & \ 1 \geq x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

se obtiene como solución

$$x_1 = 0{,}4 \ , \ x_2 = 1{,}2 \ \text{ y } F(X) = 5{,}2.$$

Redondeo: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $F(X) = 3$,

Solución optima: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $F(X) = 4$



b)

$$\text{Max } F(X) = 8x_1 + 10x_2$$

$$\text{s.a.} \quad 4x_1 + 6x_2 \leq 24$$

$$8x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,\ x_1, x_2 \in Z^+$$

resolviendo el PLA asociado

$$\text{Max } F(X) = 8x_1 + 10x_2$$

$$\text{s.a.} \quad 4x_1 + 6x_2 \leq 24$$

$$8x_1 + 3x_2 \leq 24$$

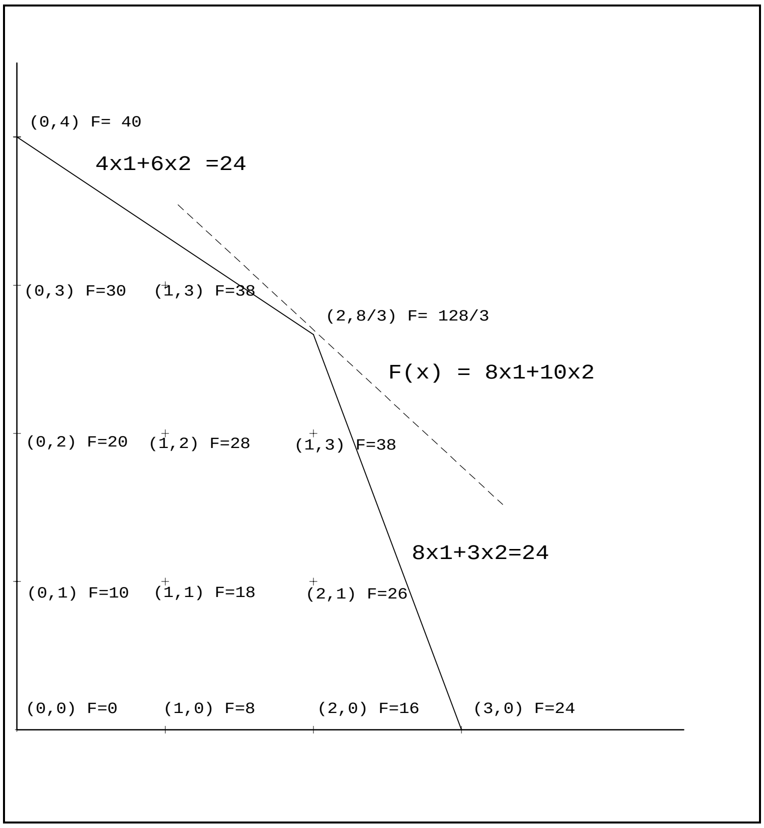
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Solución $x_1=2, x_2=8/3, F(X)= 128/3$

Redondeo al punto $x_1=2, x_2=3$, infactible

Redondeo al punto $x_1=2, x_2=2$ $F(X)=36$

Solución optima: $x_1=0, x_2=4$, $F(X)=40$.



Así pues si queremos obtener la solución óptima al problema entero, necesariamente habremos de utilizar algún método de resolución para problemas enteros.

Unicamente se trataran los dos métodos, que consideramos más representativos y además pioneros en la resolución de problemas enteros, como son los *métodos de corte* (*algoritmo fraccional de Gomory)* y el de *ramificación y acotación (Branch and Bound).*

MÉTODO DE RAMIFICACIÓN Y ACOTACIÓN (Branch and Bound).

El método de ramificación y acotación, más conocido por su nombre en inglés Branch and Bound, recibe su nombre precisamente por las dos técnicas en las que basa su desarrollo, que son la ramificación y la acotación.

El método de ramificación y acotación comienza por resolver el PLA, de modo que si la solución al PLA verifica las condiciones de integridad, entonces también es la solución al problema entero, en caso contrario se comienza con la ramificación del problema.

La ***ramificación*** consiste en dividir cada problema en dos nuevos subproblemas, obtenidos mediante la imposición de restricciones excluyentes que dividen el conjunto de oportunidades del problema original en dos partes, pero eliminando en ambas partes la solución no entera del problema original.

Cuando en la solución al PLA una variable que ha de ser entera x_i toma el valor x_{bi} no entero, entonces se generan a partir de dicho valor dos restricciones $x_i \leq [x_{bi}]$ y $x_i \geq [x_{bi}]+1$ (siendo $[x_{bi}]$ la parte entera por defecto de x_{bi}), que añadidas cada uno por separado al problema original, da lugar a dos nuevos subproblemas. Vamos a explicar este proceso a traves de un ejemplo particular:

Consideremos el siguiente problema

$$\text{Max } F(x) = 4x_1 + 5x_2 \qquad \textbf{(1)}$$
$$\text{s.a.} \quad 2x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_2 \leq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteras}$$

la solución al PLA, prescindiendo de la condición de que las variables han de ser enteras es

$$x_1 = 1{,}5,\ x_2 = 5 \text{ y } F(x) = 31$$

como dicha solución no verifica las condiciones de integridad se elige la variable x_1 que no es entera y a partir de ella se generan dos restricciones

$$x_1 \leq 1 \qquad \text{y} \qquad x_1 \geq 2$$

que añadidas cada una de ellas al problema original dan lugar a dos nuevos subproblemas que serían los siguientes:

$$\text{Max } F(x) = 4x_1 + 5x_2 \qquad \textbf{(1.1)}$$
$$\text{s.a.} \quad 2x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_2 \leq 5$$
$$\mathbf{x_1 \leq 1}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Max } F(x) = 4x_1 + 5x_2 \qquad \textbf{(1.2)}$$
$$\text{s.a.} \quad 2x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_2 \leq 5$$
$$\mathbf{x_1 \geq 2}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

de este modo se han eliminado todas las posibles soluciones no enteras del conjunto de oportunidades tales que $1 < x_1 < 2$.

El proceso se repite con cada uno de los dos subproblemas obtenidos, los cuales darán lugar a otros dos subproblemas cada uno de ellos y así sucesivamente hasta que en todos los subproblemas tengan solución entera o infactible.

Utilizando únicamente la ramificación, el número de subproblemas a resolver crece exponencialmente, por este motivo para evitar el tener que resolver todos los subproblemas , la ramificación se combina con la acotación.

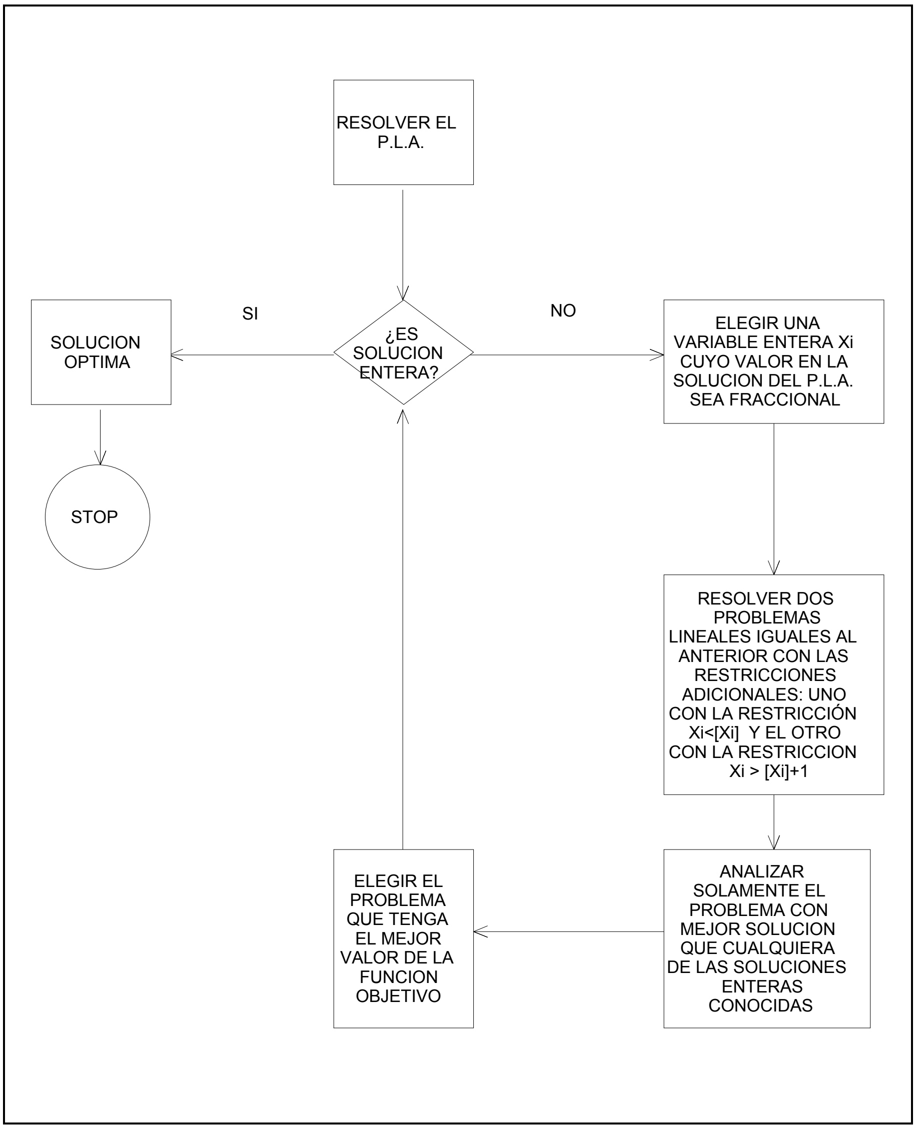
La ***acotación*** se basa en el hecho de que dado que los conjuntos de oportunidades del subproblema 1.1. (S_{11}) y del subproblema 1.2 (S_{12}) son a su vez subconjuntos del conjunto de oportunidades del problema 1 (S_1) la solución óptima de los dos subproblemas siempre será inferior (problema de máximo o superior para problemas de mínimo) que la solución óptima del problema 1 por ser los conjuntos de elección menores.

Así pues, el proceso de acotación consiste, para problemas de máximo, en tomar como cota inferior aquella solución entera con mayor valor de la función objetivo obtenida y dado que cualquier otro subproblema con solución no entera sabemos que al ramificarlo nos dará como resultado valores de la función objetivo menores o iguales, nos permite descartar como subproblemas a ramificar todos aquellos que tengan como solución óptima un valor de la función inferior a la cota establecida.

De este modo se reduce el número de subproblemas a ramificar y por lo tanto el tiempo necesario para la resolución de los problemas enteros.

El proceso a seguir en la resolución de problemas enteros mediante el método de ramificación y acotación se resume en el siguiente esquema algorítmico:

Esquema del algoritmo de ramificación y acotación.



Ejemplo

$$\text{Max } F(X) = 8x_1 + 10x_2$$
$$\text{s.a.} \quad 4x_1 + 6x_2 \leq 24$$
$$8x_1 + 3x_2 \leq 24$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,\ x_1, x_2 \in Z^+$$

Resolviendo en primer lugar el PLA, es decir

$$\text{Max } F(X) = 8x_1 + 10x_2$$
$$\text{s.a.} \quad 4x_1 + 6x_2 \leq 24$$
$$8x_1 + 3x_2 \leq 24$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

se obtiene la solución $x_1 = 2$, $x_2 = 8/3$, $f(x) = 128/3$, dado que ésta solución no es entera se ramifica a partir de la variable x_2 del siguiente modo

subproblema 1

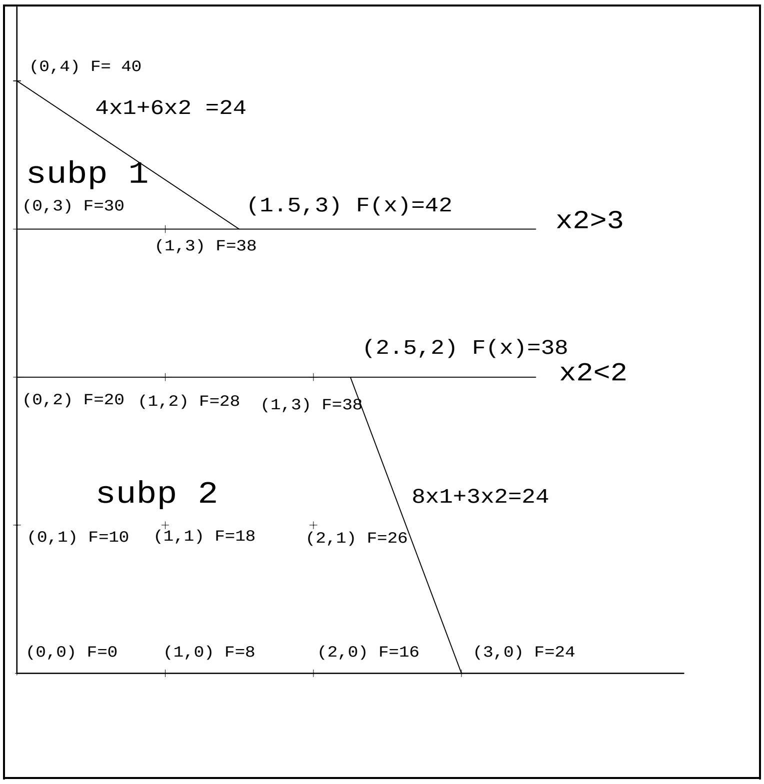
$$\text{Max } F(X) = 8x_1 + 10x_2$$
$$\text{s.a.} \quad 4x_1 + 6x_2 \leq 24$$
$$8x_1 + 3x_2 \leq 24$$
$$\mathbf{x_2 \geq 3}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

solución $x_1=1{,}5$, $x_2=3$, $F(x)=42$

subproblema 2

$$\text{Max } F(X) = 8x_1 + 10x_2$$
$$\text{s.a.} \quad 4x_1 + 6x_2 \leq 24$$
$$8x_1 + 3x_2 \leq 24$$
$$\mathbf{x_2 \leq 2}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

solución $x_1=2{,}5$, $x_2=2$, $F(x)=38$


(0,4) F= 40
4x1+6x2 =24
subp 1
(0,3) F=30
(1.5,3) F(x)=42
x2>3
(1,3) F=38
(2.5,2) F(x)=38
x2<2
(0,2) F=20
(1,2) F=28
(1,3) F=38
subp 2
8x1+3x2=24
(0,1) F=10
(1,1) F=18
(2,1) F=26
(0,0) F=0
(1,0) F=8
(2,0) F=16
(3,0) F=24

como la solución del subproblema 1, tiene el mayor valor de la función objetivo y no es entera ramificaremos este subproblema a partir de la variable x_1, del siguiente modo:

subproblema 1.1

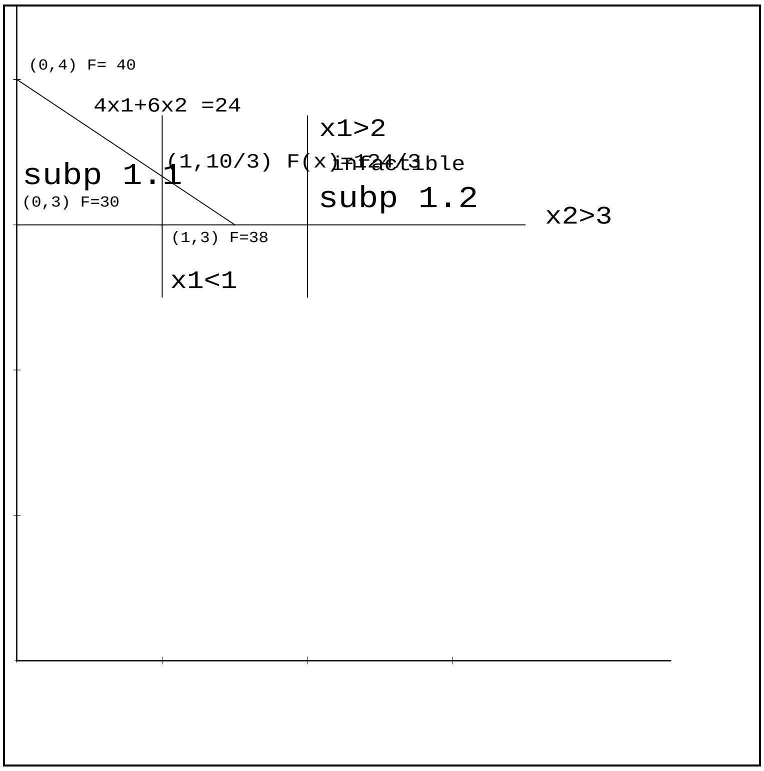
$$\begin{aligned} \text{Max } F(X) &= 8x_1 + 10x_2 \\ \text{s.a.} \quad 4x_1 + 6x_2 &\leq 24 \\ 8x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ x_2 &\geq 3 \\ \mathbf{x_1} &\leq \mathbf{1} \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

solución $x_1=1$, $x_2=10/3$, $F(x)=124/3$

subproblema 1.2

$$\begin{aligned} \text{Max } F(X) &= 8x_1 + 10x_2 \\ \text{s.a.} \quad 4x_1 + 6x_2 &\leq 24 \\ 8x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ x_2 &\geq 3 \\ \mathbf{x_1} &\geq \mathbf{2} \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

solución **infactible.**


(0,4) F= 40
4x1+6x2 =24
x1>2
(1,10/3) F(x)=124/3
infactible
subp 1.1
subp 1.2
(0,3) F=30
x2>3
(1,3) F=38
x1<1

dado que de todos los subproblemas todavía no ramificados (subproblemas 2, 1.1 y 1.2) el que tiene una mayor solución factible no entera es el subproblema 1.1, ramificaremos este subproblema a partir de la variable x_2, es decir

subproblema 1.1.1

$$\begin{aligned} \text{Max } F(X) &= 8x_1 + 10x_2 \\ \text{s.a.} \quad 4x_1 + 6x_2 &\leq 24 \\ 8x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ x_2 &\geq 3 \\ x_1 &\leq 1 \\ \mathbf{x_2} &\mathbf{\leq 3} \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

solución $x_1=1$, $x_2=3$, $F(x)=38$

subproblema 1.1.2

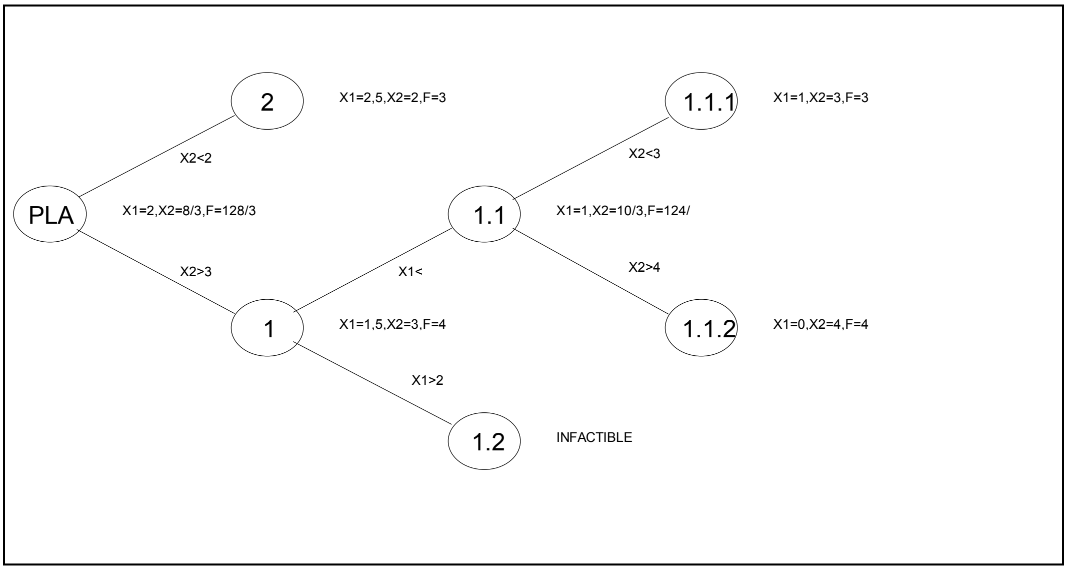
$$\begin{aligned} \text{Max } F(X) &= 8x_1 + 10x_2 \\ \text{s.a.} \quad 4x_1 + 6x_2 &\leq 24 \\ 8x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ x_2 &\geq 3 \\ x_1 &\leq 1 \\ \mathbf{x_2} &\mathbf{\geq 4} \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

solución $x_1=0$, $x_2=4$, $F(x)=40$

Dado que ya conocemos una solución entera $x_1=0$, $x_2=4$, $F(x)=40$, ésta solución actuará como cota inferior y solamente deberán ser ramificados aquellos subproblemas con soluciones factible no enteras que tengan un valor para la función objetivo que 40. Como el único subproblema por ramificar es el subproblema 2 y la función objetivo vale 38, el proceso se dá por terminado, siendo por tanto la solución óptima al problema entero

$$\mathbf{x_1 = 0,\ x_2 = 4,\ F(x) = 40}$$

el arbol del problema resuelto es el siguiente:



2
X1=2,5,X2=2,F=3
1.1.1
X1=1,X2=3,F=3
X2<2
X2<3
PLA
X1=2,X2=8/3,F=128/3
1.1
X1=1,X2=10/3,F=124/
X2>3
X1<
X2>4
1
X1=1,5,X2=3,F=4
1.1.2
X1=0,X2=4,F=4
X1>2
1.2
INFACTIBLE