EJERCICIO DE DUALIDAD

Del ejemplo 7.2 del Cuaderno de Prácticas, tenemos el siguiente problema lineal:

$$\text{Max } Z = 100000\ T + 50000\ C$$

s.a.:

$$20\ T + 10\ C \leq 2000$$

$$0.02\ T + 0.03\ C \leq 1$$

$$T \geq 0,\ C \geq 0.$$

En el cuaderno de prácticas tenemos la solución mediante GAMS, pero lo que nos proponemos es

- Obtener la tabla optima del algoritmo del simples (conocidas las variables básicas de la solución)
- Plantear el programa dual asociado
- Obtener la tabla óptima del programa dual a partir de la solución del programa primal.

Obtener la tabla optima del algoritmo del simples (conocidas las variables básicas de la solución)

La solución según el fichero LST de GAMS consiste en producir T =50 y la primera restricción es inactiva (S1 = 1000). Por tanto, las variables básicas serán: T y S1.

El problema original, para convertir las restricciones de desigualdades en igualdades debemos introducir las variables de holgura (S1 y S2), por tanto, queda:

$$20\ T + 10\ C + S1 = 2000$$

$$0.02\ T + 0.03\ C + S2 = 1$$

La base está formado por los vectores asociados a las variables básicas:

$B = \begin{pmatrix} 20 & 1 \\ 0.02 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz inversa será: $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 50 \\ 1 & -1000 \end{pmatrix}$

A partir del conocimiento de la base B y su inversa ya podemos reconstruir todos los elementos de la tabla:

Variables básicas: $\quad x_B = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} 0 & 50 \\ 1 & -1000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2000 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 1000 \end{pmatrix}$

Coeficientes de la tabla del simplex: B^{-1} A =

$$\begin{pmatrix} 0 & 50 \\ 1 & -1000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 10 & 1 & 0 \\ 0.02 & 0.03 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 0 & 50 \\ 0 & -20 & 1 & -1000 \end{pmatrix}$$

Por tanto ya tenemos todos los elementos para reconstruir la tabla del simplex, que será:

		100000	50000	0	0	
		T	**C**	**S1**	**S2**	
100000	**T**	1	1.5	0	50	50
0	**S1**	0	-20	1	-1000	1000
	Z_i	100000	150000	0	5000000	
	W_i	*0*	*-100000*	*0*	*-5000000*	**5000000**

Plantear el programa dual asociado

El programa dual del problema original:

$$\text{Max } Z = 100000\, T + 50000\, C$$

s.a.:

$$20\, T + 10\, C \leq 2000$$

$$0.02\, T + 0.03\, C \leq 1$$

$$T \geq 0,\ C \geq 0.$$

Será:

$$\text{Min } G = 2000\, \lambda 1 + \lambda 2$$

s.a.:

$$20\, \lambda 1 + 0.02\, \lambda 2 \geq 100000$$

$$10\, \lambda 1 + 0.03\, \lambda 2 \geq 50000$$

$$\lambda 1 \geq 0,\ \lambda 2 \geq 0.$$

Como puede comprobarse se trata de un dual simétrico.

Obtener la tabla óptima del programa dual a partir de la solución del programa primal.

En este problema, para convertir las desigualdades en igualdades podemos introducir las variables de holgura, pero no es necesario introducir las variables artificiales dado que no vamos a comenzar las iteraciones del algoritmo del simplex.
Con lo que tenemos:

$$20\,\lambda 1 + 0.02\,\lambda 2 - D1 = 100000$$

$$10\,\lambda 1 + 0.03\,\lambda 2 - D2 = 50000$$

A partir del conocimiento de las relaciones entre las variables de ambos problemas, que son:

T	D1
C	D2
S1	$\lambda 1$
S2	$\lambda 2$

Por tanto, las variables no básicas del problema primas son: C y S2, con lo que las variables básicas del programa dual serán: $\lambda 2$ y D2.

La base está formado por los vectores asociados a las variables básicas:

$$B = \begin{pmatrix} 0.02 & 0 \\ 0.03 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{la matriz inversa será: } B^{-1} = \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 1.5 & -1 \end{pmatrix}$$

A partir del conocimiento de la base B y su inversa ya podemos reconstruir todos los elementos de la tabla:

Variables básicas: $\lambda_B = B^{-1}\, c = \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 1.5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100000 \\ 50000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5000000 \\ 100000 \end{pmatrix}$

Coeficientes de la tabla del simplex: $B^{-1}\, A' =$

$$\begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 1.5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 0.02 & -1 & 0 \\ 10 & 0.03 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 & 1 & -50 & 0 \\ 20 & 0 & -1.5 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso para poder usar la tabla del simplex, deberemos pasar de un problema de Mínimo a uno de Máximo:

$$\text{Min } G = -\text{ Max } [-G]$$

Con lo que : $\text{Max } [-G] = -2000\, \lambda 1 - \lambda 2$

La tabla del simplex será:

		-2000	-1	0	0	
		λ1	**λ2**	**D1**	**D2**	
-1	**λ2**	1000	1	-50	0	5000000
0	**D2**	20	0	-1.5	1	100000
	Z_i	-1000	-1	50	0	
	W_i	*-1000*	*0*	*-50*	*0*	**-5000000**

Como puede comprobarse, el valor de la función objetivo será:

Max [-G] = -5000000

Min G = - Max [-G]= - 5000000 = 5000000 = Z(x).

Así como las relaciones entre las dos soluciones:

$$\mathbf{T} = -W_{D1} = -(-50) = \mathbf{50}$$

$$\mathbf{C} = -W_{D2} = -(0) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{S1} = -W_{\lambda 1} = -(-1000) = \mathbf{1000}$$

$$\mathbf{S2} = -W_{\lambda 2} = -(0) = \mathbf{0}$$

Como era de esperar.

```
*DUAL DEL EJERCICO 7.2
VARIABLES
L1, L2, G;
POSITIVE VARIABLES L1, L2;
EQUATIONS
OBJ, R1, R2;
OBJ..     G=E= 2000*L1 + L2;
R1..      20*L1 + 0.02*L2 =G= 100000;
R2..      10*L1 + 0.03*L2 =G= 50000;
MODEL DUAL72 /ALL/;
SOLVE DUAL72 USING LP MINIMIZING G;
```

```
EXIT -- OPTIMAL SOLUTION FOUND.

                       LOWER          LEVEL          UPPER
MARGINAL

---- EQU OBJ             .          .          .        1.000
---- EQU R1         1.0000E+5 1.0000E+5     +INF      50.000
---- EQU R2         50000.000 1.5000E+5     +INF         .

                       LOWER          LEVEL          UPPER
MARGINAL

---- VAR L1              .          .       +INF    1000.000
---- VAR L2              .    5.0000E+6     +INF         .
---- VAR G            -INF    5.0000E+6     +INF         .
```