EJERCICIO DE Programación No Lineal

Sea el siguiente programa matemático:

$$\text{Min } F(x,y) = x^2 + y^2 + 2x - 8y + 17$$

s.a:

$$x \geq -4$$

$$x^2 + y^2 \leq 8$$

$$2x - y = 2$$

$$y \geq 0$$

a) Plantear las condiciones de Kuhn-Tucker del programa.

b) Estudiar si el punto (2,2) que cumple las condiciones de K-T, es un punto regular.

c) Determinar sí la solución en un mínimo global del programa

---

a) **Plantear las condiciones de Kuhn-Tucker del programa.**

Programa en forma normalizada de minimo:

$$\text{Min } F(x,y) = x^2 + y^2 + 2x - 8y + 17$$

s.a:

$$x \geq -4$$

$$-x^2 - y^2 \geq -8$$

$$2x - y = 2$$

$$y \geq 0$$

Lagrangiana:

$L(x,y,\lambda,\mu,\chi) = x^2 + y^2 + 2x - 8y + 17 + \lambda\,[-4 - x] + \mu\,[-8 + x^2 + y^2] + \chi\,[2 - 2x + y]$

Con: $y \geq 0$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$

Condiciones de K-T:

Para x (variable no restringida):

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2 - \lambda + 2x\mu - 2\chi = 0$$

Para y (variable no negativa):

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - 8 + 2y\mu + \chi \geq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}\, y = \left[2y - 8 + 2y\mu + \chi\right] y = 0$$

$$y \geq 0$$

Para λ (variable no negativa por estar asociada a una restricción de desigualdad):

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -4 - x \leq 0$$

$$\lambda \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda \left[-4 - x \right] = 0$$

$$\lambda \geq 0$$

Para μ (variable no negativa por estar asociada a una restricción de desigualdad):

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = -8 + x^2 + y^2 \leq 0$$

$$\mu \frac{\partial L}{\partial \mu} = \mu \left[-8 + x^2 + y^2 \right] = 0$$

$$\mu \geq 0$$

Para χ (variable no restringida por estar asociada a una restricción de igualdad):

$$\frac{\partial L}{\partial \chi} = 2 - 2x + y = 0$$

Fichero GMS:

```
*PROBLEMA NO LINEAL
VARIABLES
X,Y,Z;
POSITIVE VARIABLES Y;
X.L=0.5;Y.L=0.5;
EQUATIONS
OBJ, R1, R2, R3;
OBJ.. Z =E= POWER(X,2) + POWER(Y,2) + 2*X - 8*Y +17;
R1.. X =G= -4;
R2.. POWER(X,2) + POWER(Y,2) =L= 8;
R3..  2*X - Y =E= 2 ;
MODEL NOLIN2 /ALL/;
SOLVE NOLIN2 USING NLP MINIMIZING Z;
```

Solución con GAMS.

```
                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- EQU OBJ           17.000    17.000    17.000     1.000
---- EQU R1            -4.000     2.000     +INF        .
---- EQU R2             -INF      8.000     8.000    -0.167
---- EQU R3             2.000     2.000     2.000     3.333

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- VAR X              -INF      2.000     +INF        .
---- VAR Y               .        2.000     +INF        .
---- VAR Z              -INF     13.000     +INF        .
```

El punto que verifica las condiciones es (2,2).

b) Estudiar si el punto (2,2) que cumple las condiciones de K-T, es un punto regular.

El punto (2,2) satura dos restricciones:

$$g_1 = -x^2 - y^2 = -8$$
$$g_2 = 2x - y = 2$$

Por tanto para que sea un punto regular, los gradientes de estas dos restricciones activas han de ser linealmente independientes:

$$\nabla g_1 = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}$$
$$\nabla g_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

En el punto (2,2), los gradientes son:

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

que son linealmente independientes.

c) Determinar sí la solución en un mínimo global del programa

Para clasificar el minimo como global, han se cumplirse las condiciones del Teorema Local global:

a) Función convexa, y
b) Conjunto de Oportunidades convexo.

Para determinar si la función $f(x,y)= x^2 + y^2 + 2x - 8y + 17$, es convexa estudiamos la forma cuadrática del hessiano:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Se trata de una forma cuadrática definida positiva, por tanto la función es convexa.

El conjunto de oportunidades:

$$S = \{ (x,y) \in R^2 / x \geq -4, x^2 + y^2 \leq 8, 2x - y = 2, y \geq 0 \}$$

De las restricciones:

Dos de ellas definen semiespacios (conjuntos convexos): $x \geq -4$, $y \geq 0$

Una define hiperplano (conjunto convexo): $2x - y = 2$

Otra define un conjunto de nivel inferior: $x^2 + y^2 \leq 8$. En este caso, para saber si ese conjunto de nivel es un conjunto convexo, la función que lo define tiene que se una función convexa. La función $g_1 = x^2 + y^2$, su hessiano es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Se trata de una forma cuadrática definida positiva, por tanto la función g_1 es una función convexa.

Por tanto el conjunto de oportunidades es la intersección de cuatro conjuntos convexos, por tanto es un conjunto convexo.

En definitiva, el punto (2,2) es un mínimo global del programa