RESUMEN DE ALGUNOS ELEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAL

1.- Cálculo de determinantes. Supongamos que queremos calcular :

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{(a)}{=} (-2)\cdot A_{11} + 0\cdot A_{12} + 0\cdot A_{13} + (-1)\cdot A_{14}$$

$$\overset{(b)}{=} (-2)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(c)}{=} (-2)\cdot(-1)^2\cdot 4 + (-1)\cdot(-1)^5\cdot(-4) = -8-4 = -12$$

donde :

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{(d)}{=} (-2)\cdot(-2)\cdot 0 + 0\cdot(-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot 0\cdot(-1) - \left[(-1)\cdot(-2)\cdot(-1) + 0\cdot 0\cdot 0 + (-2)\cdot(-1)\cdot(-1)\right] = 4$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \overset{(d)}{=} 0\cdot 0\cdot(-1) + (-2)\cdot(-2)\cdot(-1) + 0\cdot 0\cdot(-1) - \left[0\cdot 0\cdot(-1) + (-2)\cdot 0\cdot(-1) + 0\cdot(-2)\cdot(-1)\right] = -4$$ o

alternativamente, calculando el primer determinante de esta otra forma :

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{(e)}{=} \begin{vmatrix} -2 & 0 & (-1)\cdot 1 \\ 0 & -2 & (-1)\cdot 1 \\ -1 & -1 & (-1)\cdot 1 \end{vmatrix} \overset{(f)}{=} (-1)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{(g)}{=} (-1)\cdot\begin{vmatrix} -2+2\cdot 1 & 0 & 1 \\ 0+2\cdot 1 & -2 & 1 \\ -1+2\cdot 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

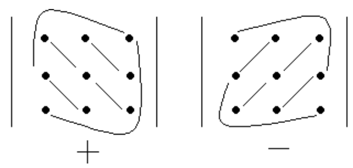
$$\overset{(a)}{=} (-1)\left[0\cdot A_{11} + 0\cdot A_{12} + 1\cdot A_{13}\right] \overset{(b)}{=} (-1)\cdot 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1\cdot(-1)^4\left[2\cdot(-1) - (-2)\cdot(-1)\right] = 4$$

(a) **Método de adjuntos** : "un determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila (/columna) por sus respectivos adjuntos". Se llama adjunto del elemento a_{ij}, y se representa por A_{ij} al determinante que resulta de la supresión de la fila i y columna j multiplicado por $(-1)^{i+j}$. En este caso hemos aplicado el resultado sobre la primera fila.

(b) Sustituyendo los adjuntos por su expresión.

(c) Calculando los determinantes resultantes 3×3 (ver más abajo).

(d) **Regla de Sarrus** : "$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$"



(e) **Método del pivote** : Consiste en modificar los elementos de una fila (/columna) haciendo operaciones con columnas (/filas) para que todos los elementos de la fila (/columna) salvo uno, que llamamos pivote, sean cero, y luego aplicar el método de adjuntos sobre dicha fila (/columna). Las operaciones se basan en dos propiedades :

- "Al multiplicar una columna (/fila) por un escalar, el determinante queda multiplicado por dicho escalar".
- "El valor del determinante no varía si a una columna (/fila) de un determinante se le suma otra columna multiplicada por un escalar."

En este caso, convertiremos en pivote el "-1" de la primera fila y cuarta columna.

(f) Aplicando la primera propiedad para obtener el pivote "1" operando con la columna cuarta.

(g) Aplicando la segunda propiedad para que el resto de los elementos de la primera fila sean cero.

2.- Determinar si un sistema de vectores es libre. Supongamos que queremos averiguar si los vectores de R^4: (1,-2,0,-1), (1,0,-2,-1) y (1,-1,-1,0) forman un sistema libre. Podemos aplicar la siguiente propiedad "un sistema de m vectores de R^n es libre si el rango de la matriz que se forma disponiendo los vectores en filas (/columnas) tiene rango m, esto es, podemos construir con esa matriz un matriz cuadrada m×m con determinante no nulo". En nuestro caso : n=4, m=3, la matriz es: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y el determinante de orden 3 : $\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ (ver arriba) ; por lo tanto el rango de la matriz es igual 3 (=m) y el sistema de vectores (1,-2,0,-1), (1,0,-2,-1) y (1,-1,-1,0) es libre (en otras palabras, los tres vectores son linealmente independientes).

3.- Cálculo de la inversa. Supongamos que queremos obtener la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Sabiendo que: "la inversa de una matriz A se obtiene a partir de la expresión :

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A)^t$, con |A|≠0, $\mathrm{Adj}(A) = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ la matriz adjunta de A y A_{ij} el adjunto del elemento a_{ij}", obtenemos A^{-1} de la siguiente manera :

(a) |A|=2·2·3+3·0·3+1·1·5–1·2·3–3·1·3–2·0·5=2≠0

(b) $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = 6,\ A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = -3,\ A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = -1,$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = -4,\ A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 3,\ A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = -1,$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -2,\ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1,\ A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1.$

(c) $Adj(A) = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, y $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -4 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -3/2 & 3/2 & 1/1 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$