

# PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA

## MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

Redondeo: *DESACONSEJABLE*:

- *Por producir “malas” soluciones*
- *Por producir soluciones infactibles*

## Ejemplo

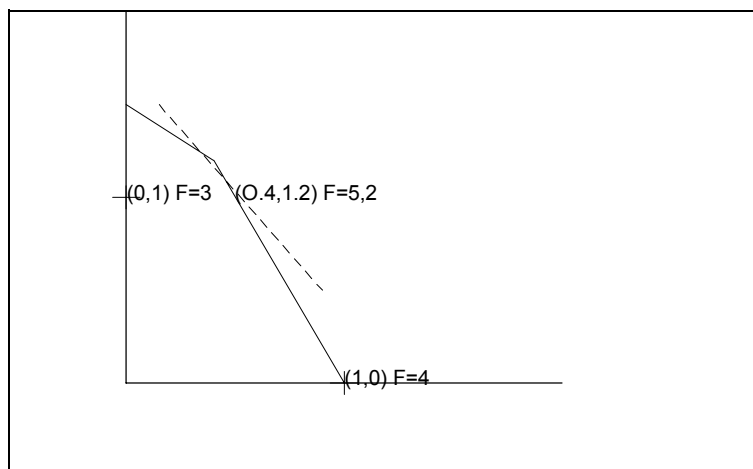
$$\begin{aligned} \text{Max } F(X) &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a. } 2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad x_1, x_2 &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

## PLA

$$\begin{aligned} \text{Max } F(X) &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a. } 2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 6 \\ 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

Solución

$$x_1 = 0,4, x_2 = 1,2 \text{ y } F(X) = 5,2.$$



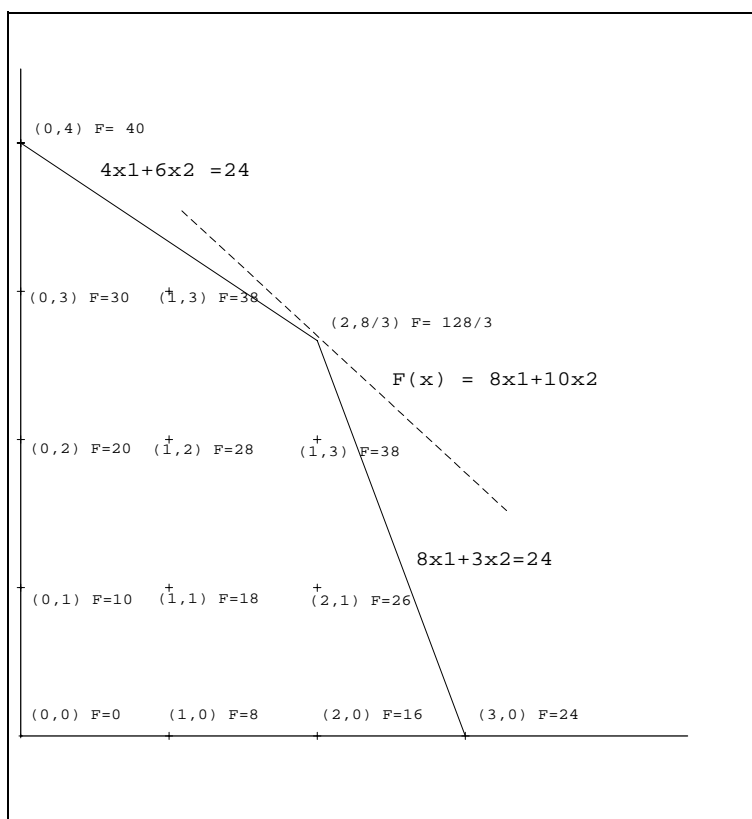
\* Redondeo  $\rightarrow$  Infactible

$$\begin{aligned} \text{Max } F(X) &= 8x_1 + 10x_2 \\ \text{s.a. } 4x_1 + 6x_2 &\leq 24 \\ 8x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

**PLA**

$$\begin{aligned} \text{Max } F(X) &= 8x_1 + 10x_2 \\ \text{s.a. } 4x_1 + 6x_2 &\leq 24 \\ 8x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Solución:  $x_1=2, x_2=8/3, F(X)=128/3$  Redondeo:  $x_1=2, x_2=3$



Metodos generales:

-Enumeración

-Algebraicos

Enumeración: Identificar todas las soluciones del problema.

Algebraicos: Determinar la envoltura convexa.

Enumeración total: Variables binarias:

Variables	Numero de Soluciones
1	2
2	4
3	8
n	$2^n$
Si $n = 100$	$2^{100}$ <b>1,26765E+30</b>

Ordenador capaz de analizar 100 millones de operaciones por segundo. Cuanto tiempo tardará?

Unos pocos segundos

Unos pocos minutos

Un par de horas

Una mañana

Dos dias

Tres semanas

Cuatro meses.

Solución:

**4,075522763 billones de siglos**

# MÉTODO DE RAMIFICACIÓN Y ACOTACIÓN (Branch and Bound).

Pasos:

Ramificación:	Variables
Acotación:	Valor de la función objetivo

A partir de la solución del PLA:

La **ramificación** consiste en dividir cada problema en dos nuevos subproblemas, obtenidos mediante la imposición de restricciones excluyentes que dividen el conjunto de oportunidades del problema original en dos partes, pero eliminando en ambas partes la solución no entera del problema original.

Si  $x_{bi}$  no entero, entonces se generan a partir de dicho valor dos restricciones  $x_i \leq [x_{bi}]$  y  $x_i \geq [x_{bi}]+1$  (siendo  $[x_{bi}]$  la parte entera por defecto de  $x_{bi}$ ), que añadidas cada uno por separado al problema original, da lugar a dos nuevos subproblemas.

Por ejemplo la variable  $x_1$  tiene que ser entera, pero en la solución anterior (PLA u otro), la variable vale:  $x_1 = 6.8$ . Esta solución no es válida, ya que no es admisible un valor fraccional, por tanto se introduzcan las siguientes restricciones:  $x_1 \leq 6$  y  $x_1 \geq 7$ , de forma que se ha eliminado una porción del conjunto donde no hay soluciones enteras, pero se mantienen las enteras:

Así se prosigue con todas las variables hasta que sean enteras.

Si al proceso de ramificación no se mejora de alguna forma, llegaríamos a analizar TODAS las soluciones enteras (**Enumeración Total**). Por eso, se añade la fase de Acotación, esta tiene que ver con el valor de la función objetivo.

A medida que se va ramificando se obtienen soluciones enteras y otras que no lo son.

No podemos asegurar que la primera solución entera obtenida sea la solución óptima, sino que es necesario comprobar si existen otras soluciones enteras o no.

El análisis del PLA: **Ramificación** se realiza siempre a partir de aquel problema que tiene el mejor valor de la función objetivo, y siempre que exista alguna solución (no entera) con un valor de la función objetivo

Ejemplo: (Maximización)

\* Solucion del PLA: FO: 5487,33 (Solución no entera)

### **Primera Ramificación:**

Problema 1: FO: 5340, 75 (solución no entera)

Problema 2: FO: 5425.10 (solución no entera).

### **Segunda Ramificación:**

A partir del problema 2, por tener un mejor valor de la función objetivo:

Problema 21: FO: 5405, 30 (solución no entera)

Problema 22: FO: Infactible.

Como no hay solución entera hemos de seguir ramificando: Por donde?. Problema 22 tiene mejor valor que problema 1.

### **Tercera ramificación:**

A partir del problema 21

Problema 211:FO = 5350 (solución entera)

Problema 212 F= = 5385.25 (solución no entera).

**La solución del problema 211 (5350) es la optima?**

NO, ya que ramificando por el problema 212 se podrían encontrar mejores soluciones. Pero lo que es seguro que a partir del Problema 1: FO: 5340, 75 no vamos a encontrar ninguna solución entera mejor que la que hemos encontrado, por tanto ese valor de 5350 es la COTA a partir de la cual no analizaremos ningún problema que tenga un valor de FO menor o igual.

#### **Cuarta Ramificación:**

Problema 2121: FO = 2360 (solución entera)

Problema 2122 FO = 2366.25 (solución no entera).

Que hacer: a) La cota ha mejorado, ahora no analizaremos ninguna solución con un valor de FO menor o igual que 2360. Pero aun no podemos afirmar que la solución del problema 2121 sea la optima, hemos de seguir ramificando:

#### **Quinta Ramificación:**

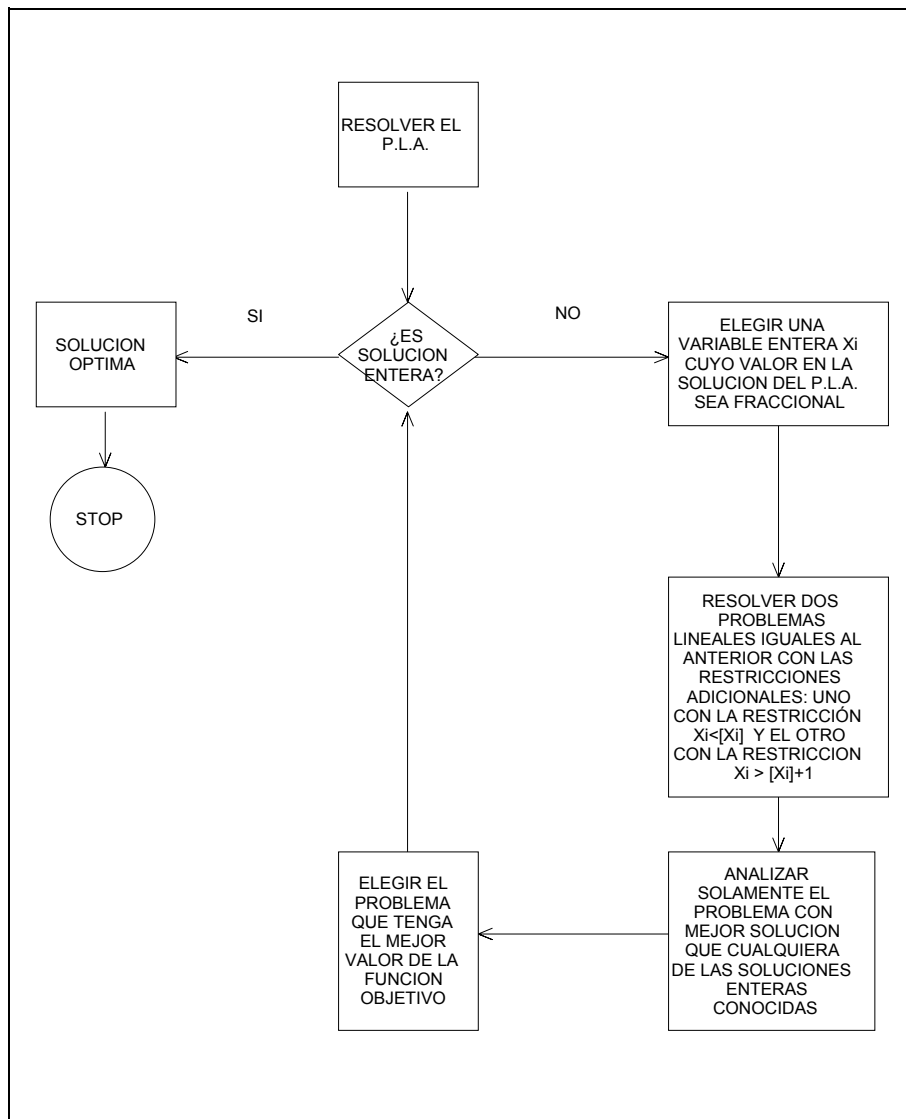
Problema 21221: FO = 2355 (solución entera)

Problema 21222 FO = 2358.75 (solución no entera).

Hemos de ramificar el problema 21222?: NO, ya que tenemos una solución entera 2360 mejor que cualquier valor de una función objetivo de un problema no ramificado.



## Esquema del algoritmo de ramificación y acotación.



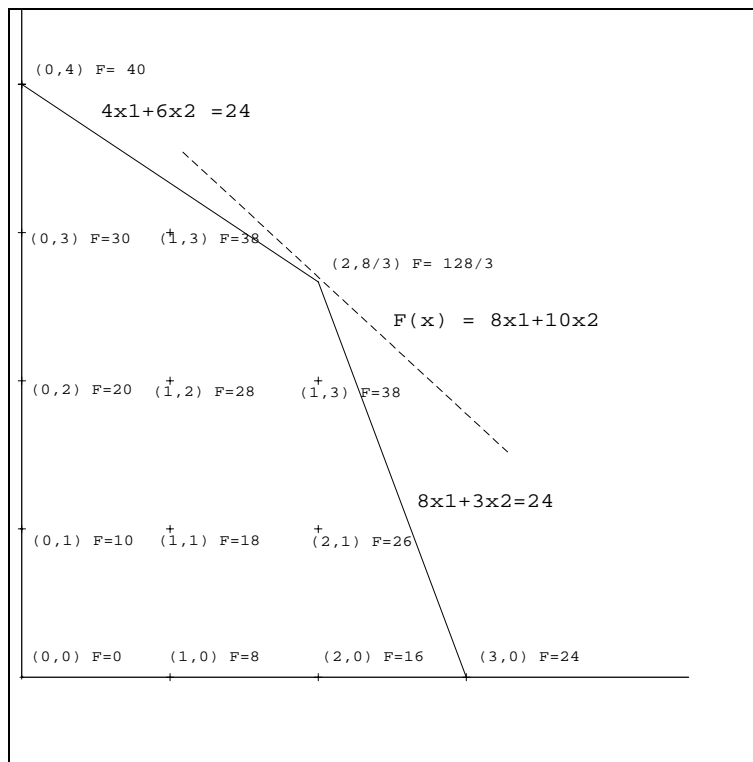
Ejemplo

$$\begin{aligned} \text{Max } F(X) &= 8x_1 + 10x_2 \\ \text{s.a. } 4x_1 + 6x_2 &\leq 24 \\ 8x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

Resolviendo en primer lugar el PLA, es decir

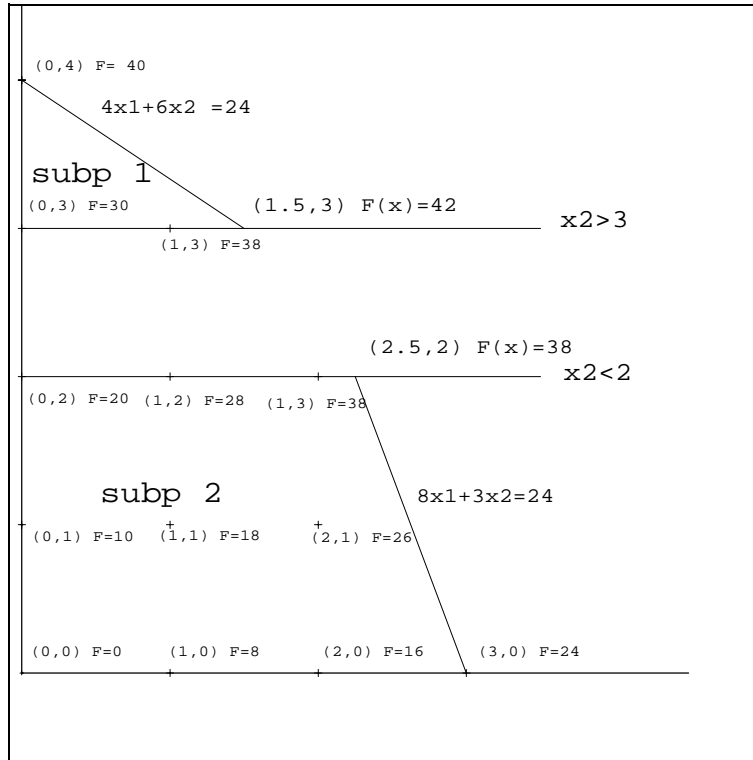
$$\begin{aligned} \text{Max } F(X) &= 8x_1 + 10x_2 \\ \text{s.a. } 4x_1 + 6x_2 &\leq 24 \\ 8x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = 2, x_2 = 8/3, f(x) = 128/3$$



## Primera Ramificación:

**Solución:  $x_1 = 2, x_2 = 8/3, f(x) = 128/3$**



### *subproblema 1*

$$\text{Max } F(X) = 8x_1 + 10x_2$$

$$\text{s.a. } 4x_1 + 6x_2 \leq 24$$

$$8x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$x_2 \geq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

solución  $x_1=1,5, x_2=3, F(x)=42$

### *subproblema 2*

$$\text{Max } F(X) = 8x_1 + 10x_2$$

$$\text{s.a. } 4x_1 + 6x_2 \leq 24$$

$$8x_1 + 3x_2 \leq 24$$

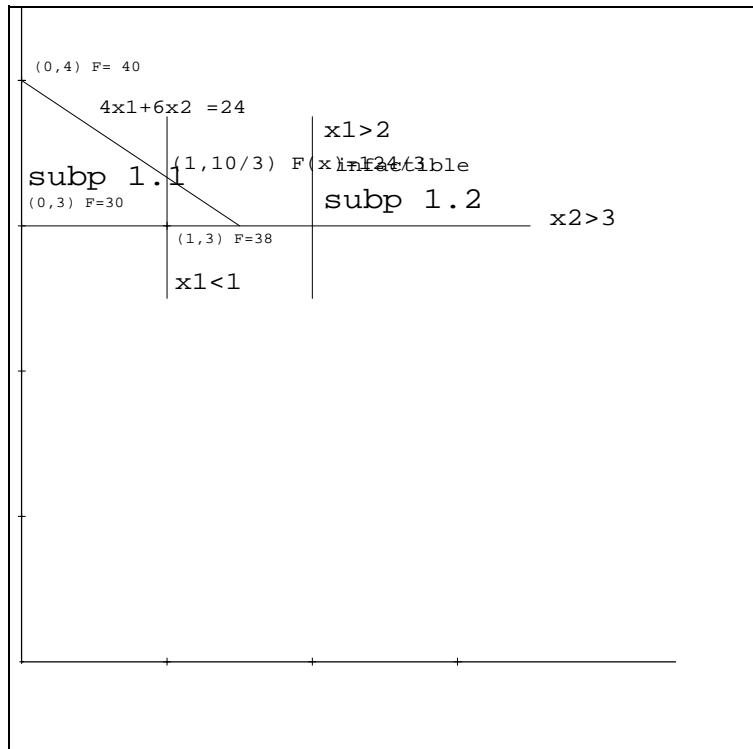
$$x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

solución  $x_1=2,5, x_2=2, F(x)=38$

Segunda ramificación:

Solución anterior mejor:  $x_1=1,5, x_2=3, F(x)=42$



*subproblema 1.1*

*subproblema 1.2*

$$\text{Max } F(X) = 8x_1 + 10x_2$$

$$\text{Max } F(X) = 8x_1 + 10x_2$$

$$\text{s.a. } 4x_1 + 6x_2 \leq 24$$

$$\text{s.a. } 4x_1 + 6x_2 \leq 24$$

$$8x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$8x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$x_2 \geq 3$$

$$x_2 \geq 3$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_1 \geq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

solución  $x_1=1, x_2=10/3, F(x)=124/3$

solución **infactible.**

### Tercera ramificación

Solución anterior mejor:  $x_1=1, x_2=10/3, F(x)=124/3$

#### *subproblema 1.1.1*

$$\text{Max } F(X) = 8x_1 + 10x_2$$

$$\text{s.a. } 4x_1 + 6x_2 \leq 24$$

$$8x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$x_2 \geq 3$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

solución  $x_1=1, x_2=3, F(x)=38$

#### *subproblema 1.1.2*

$$\text{Max } F(X) = 8x_1 + 10x_2$$

$$\text{s.a. } 4x_1 + 6x_2 \leq 24$$

$$8x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$x_2 \geq 3$$

$$x_1 \geq 2$$

$$x_2 \geq 4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

solución  $x_1=0, x_2=4, F(x)=40$

**Solución OPTIMA  $x_1 = 0, x_2 = 4, F(x) = 40$**

