Estabilidad e inestabilidad de operadores composición con peso

Jesús Araujo
www.araujo.tk
(en colaboración con Juan J. Font)

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación
Universidad de Cantabria

IV Encuentro de Análisis Funcional y Aplicaciones
2-5 de Abril, 2008
Salobreña

Notación

X, Y compactos y Hausdorff. $\mathrm{card}\, X, \mathrm{card}\, Y \geq 2$

Notación

X, Y compactos y Hausdorff. $\mathrm{card}\, X, \mathrm{card}\, Y \geq 2$

Notación

X, Y compactos y Hausdorff. $\operatorname{card} X, \operatorname{card} Y \geq 2$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Notación

X, Y compactos y Hausdorff. $\operatorname{card} X, \operatorname{card} Y \geq 2$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$C(X) := \{f : X \to \mathbb{K}, f \text{ es continua}\}$

Notación

X, Y compactos y Hausdorff. $\operatorname{card} X, \operatorname{card} Y \geq 2$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$C(X) := \{f : X \to \mathbb{K}, f \text{ es continua}\}$

En $C(X)$, consideramos la norma del supremo:

Notación

X, Y compactos y Hausdorff. $\operatorname{card} X, \operatorname{card} Y \geq 2$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$C(X) := \{f : X \to \mathbb{K}, f \text{ es continua}\}$

En $C(X)$, consideramos la norma del supremo:

$$\|f\|_\infty : \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

Composiciones con peso

Definición

$S : C(X) \longrightarrow C(Y)$ *es una* composición con peso *si*

$$(Sf)(y) = a(y) f(h(y))$$

Composiciones con peso

Definición

$S : C(X) \longrightarrow C(Y)$ *es una* composición con peso *si*

$$(Sf)(y) = a(y)f(h(y))$$

para cualesquiera $f \in C(X)$, $y \in Y$.

Composiciones con peso

Definición

$S : C(X) \longrightarrow C(Y)$ *es una* composición con peso *si existen*

- $a \in C(Y)$

$$(Sf)(y) = a(y) f(h(y))$$

para cualesquiera $f \in C(X)$, $y \in Y$.

Composiciones con peso

Definición

$S : C(X) \longrightarrow C(Y)$ *es una* composición con peso *si existen*

- $a \in C(Y)$
- $h : Y \longrightarrow X$

$$(Sf)(y) = a(y)f(h(y))$$

para cualesquiera $f \in C(X)$, $y \in Y$.

Composiciones con peso

Definición

$S : C(X) \longrightarrow C(Y)$ *es una* composición con peso *si existen*

- $a \in C(Y)$
- $h : Y \longrightarrow X$ *continua en* $\{y \in Y : a(y) \neq 0\}$

tales que

$$(Sf)(y) = a(y) f(h(y))$$

para cualesquiera $f \in C(X)$, $y \in Y$.

Composiciones con peso

Definición

$S : C(X) \longrightarrow C(Y)$ *es una* composición con peso *si existen*

- $a \in C(Y)$
- $h : Y \longrightarrow X$ *continua en* $\{y \in Y : a(y) \neq 0\}$

tales que

$$(Sf)(y) = a(y)f(h(y))$$

para cualesquiera $f \in C(X)$, $y \in Y$.

Aclaración

Por tanto, el conjunto cocero de los elementos de la imagen está bien determinado.

$$T : C(\{o, p\}) \longrightarrow C(\{O, P, Q\})$$

$$T : C(\{o, p\}) \longrightarrow C(\{O, P, Q\})$$

$$(Tf)(O) \quad = \quad 3f(o)$$

$$T : C(\{o, p\}) \longrightarrow C(\{O, P, Q\})$$

$$\begin{aligned} (Tf)(O) &= 3f(o) \\ (Tf)(P) &= 5f(p) \end{aligned}$$

Sí es composición con peso

$$T : C(\{o, p\}) \longrightarrow C(\{O, P, Q\})$$

$$\begin{aligned} (Tf)(O) &= 3f(o) \\ (Tf)(P) &= 5f(p) \\ (Tf)(Q) &= 0 \end{aligned}$$

Sí es composición con peso

$$T : C(\{o, p\}) \longrightarrow C(\{O, P, Q\})$$

$$\begin{aligned} (Tf)(O) &= 3f(o) \\ (Tf)(P) &= 5f(p) \\ (Tf)(Q) &= 2f(p) \end{aligned}$$

NO es composición con peso

$$T : C(\{o,p\}) \longrightarrow C(\{O,P,Q\})$$

$$\begin{aligned}(Tf)(O) &= 3f(o)\\ (Tf)(P) &= 5f(p)\\ (Tf)(Q) &= f(o)+2f(p)\end{aligned}$$

Aplicaciones separadoras

$T : C(X) \longrightarrow C(Y)$ lineal y continua

Aplicaciones separadoras

$T : C(X) \longrightarrow C(Y)$ lineal y continua

Definición

T *es* separadora *si*

$T : C(X) \longrightarrow C(Y)$ lineal y continua

Definición

T es separadora *si*

siempre que $f, g \in C(X)$ satisfagan $fg \equiv 0$.

Aplicaciones separadoras

$T : C(X) \longrightarrow C(Y)$ lineal y continua

Definición

T *es* separadora *si*

$$(Tf)(Tg) \equiv 0$$

siempre que $f, g \in C(X)$ satisfagan $fg \equiv 0$.

$T : C(X) \longrightarrow C(Y)$ lineal y continua

Definición

T es separadora si

$$(Tf)(Tg) \equiv 0$$

siempre que $f, g \in C(X)$ satisfagan $fg \equiv 0$.

separadora $\Longrightarrow$ composición con peso

Aplicaciones separadoras

$T : C(X) \longrightarrow C(Y)$ lineal y continua

Definición

T es separadora *si*

$$(Tf)(Tg) \equiv 0$$

siempre que $f, g \in C(X)$ satisfagan $fg \equiv 0$.

separadora $\Longrightarrow$ composición con peso

¿"casi separadora" $\Longrightarrow$ "casi composición con peso"?

Aplicaciones "casi separadoras"

$T : C(X) \longrightarrow C(Y)$ lineal y continua

Definición

T es separadora *si*

$$(Tf)(Tg) \equiv 0$$

siempre que $f, g \in C(X)$ satisfagan $fg \equiv 0$.

Aplicaciones "casi separadoras"

$T : C(X) \longrightarrow C(Y)$ lineal y continua

Definición

T es separadora *si*

$$(Tf)(Tg) \equiv 0$$

siempre que $f, g \in C(X)$ satisfagan $fg \equiv 0$.

Definición

Sea $\epsilon > 0$. T es ϵ-separadora *si*

Aplicaciones "casi separadoras"

$T : C(X) \longrightarrow C(Y)$ lineal y continua

Definición

T es separadora *si*

$$(Tf)(Tg) \equiv 0$$

siempre que $f, g \in C(X)$ satisfagan $fg \equiv 0$.

Definición

*Sea $\epsilon > 0$. T es ϵ-*separadora *si*

- *(opción 1)*

$$\|(Tf)(Tg)\|_\infty \leq \epsilon \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

$T : C(X) \longrightarrow C(Y)$ lineal y continua

Definición

T es separadora *si*

$$(Tf)(Tg) \equiv 0$$

siempre que $f, g \in C(X)$ satisfagan $fg \equiv 0$.

Definición

*Sea $\epsilon > 0$. T es ϵ-*separadora *si*

- *(opción 1)*

  $$\|(Tf)(Tg)\|_\infty \leq \epsilon \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

  siempre que $f, g \in C(X)$ satisfagan $fg \equiv 0$.

Aplicaciones "casi separadoras"

$T : C(X) \longrightarrow C(Y)$ lineal y continua

Definición

T es separadora *si*

$$(Tf)(Tg) \equiv 0$$

siempre que $f, g \in C(X)$ satisfagan $fg \equiv 0$.

Definición

Sea $\epsilon > 0$. T es ϵ-separadora *si*

- *(opción 1)*

  $$\|(Tf)(Tg)\|_\infty \leq \epsilon \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

  siempre que $f, g \in C(X)$ satisfagan $fg \equiv 0$.

- *(opción 2)*

  $$\|(Tf)(Tg)\|_\infty \leq \epsilon$$

Aplicaciones "casi separadoras"

$T : C(X) \longrightarrow C(Y)$ lineal y continua

Definición

T es separadora *si*

$$(Tf)(Tg) \equiv 0$$

siempre que $f, g \in C(X)$ satisfagan $fg \equiv 0$.

Definición

Sea $\epsilon > 0$. T es ϵ-separadora *si*

- *(opción 1)*

  $$\|(Tf)(Tg)\|_\infty \leq \epsilon \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

  siempre que $f, g \in C(X)$ satisfagan $fg \equiv 0$.

- *(opción 2)*

  $$\|(Tf)(Tg)\|_\infty \leq \epsilon$$

  siempre que $f, g \in C(X)$ satisfagan $fg \equiv 0$ y

Aplicaciones "casi separadoras"

$T : C(X) \longrightarrow C(Y)$ lineal y continua

Definición

T es separadora *si*

$$(Tf)(Tg) \equiv 0$$

siempre que $f, g \in C(X)$ satisfagan $fg \equiv 0$.

Definición

Sea $\epsilon > 0$. T es ϵ-separadora *si*

- *(opción 1)*

  $$\|(Tf)(Tg)\|_\infty \leq \epsilon \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

  siempre que $f, g \in C(X)$ satisfagan $fg \equiv 0$.

- *(opción 2)*

  $$\|(Tf)(Tg)\|_\infty \leq \epsilon$$

  siempre que $f, g \in C(X)$ satisfagan $fg \equiv 0$ y $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$.

Aplicaciones "casi separadoras"

Ambas definiciones son equivalentes

Ambas definiciones son equivalentes

Definición

Sea $\epsilon > 0$. *T es* ϵ-separadora *si*

Ambas definiciones son equivalentes

Definición

Sea $\epsilon > 0$*.* T *es* ϵ-separadora *si*

$$\|(Tf)(Tg)\|_\infty \leq \epsilon$$

siempre que $f, g \in C(X)$ *satisfagan* $fg \equiv 0$ *y* $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$*.*

Ambas definiciones son equivalentes

Definición

Sea $\epsilon > 0$. T *es* ϵ-separadora *si*

$$\|(Tf)(Tg)\|_\infty \leq \epsilon$$

siempre que $f, g \in C(X)$ *satisfagan* $fg \equiv 0$ *y* $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$.

$$T \neq 0,\ T \text{ es } \epsilon\text{-separadora}$$

si y sólo si

Aplicaciones "casi separadoras"

Ambas definiciones son equivalentes

Definición

Sea $\epsilon > 0$. *T es* ϵ-separadora *si*

$$\|(Tf)(Tg)\|_\infty \leq \epsilon$$

siempre que $f, g \in C(X)$ *satisfagan* $fg \equiv 0$ *y* $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$.

$$T \neq 0,\ T \text{ es } \epsilon\text{-separadora}$$

si y sólo si

$$\frac{T}{\|T\|} \text{ es } \frac{\epsilon}{\|T\|^2}\text{-separadora.}$$

Ambas definiciones son equivalentes

Definición

Sea $\epsilon > 0$. T *es* ϵ-separadora *si*

$$\|(Tf)(Tg)\|_\infty \leq \epsilon$$

siempre que $f, g \in C(X)$ *satisfagan* $fg \equiv 0$ *y* $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$.

$$T \neq 0,\ T \text{ es } \epsilon\text{-separadora}$$

si y sólo si

$$\frac{T}{\|T\|} \text{ es } \frac{\epsilon}{\|T\|^2}\text{-separadora.}$$

Consideramos SIEMPRE $T \in \epsilon -$ **SEP** con

Ambas definiciones son equivalentes

Definición

Sea $\epsilon > 0$*. T es* ϵ-separadora *si*

$$\|(Tf)(Tg)\|_\infty \leq \epsilon$$

siempre que $f, g \in C(X)$ satisfagan $fg \equiv 0$ y $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$.

$$T \neq 0, \ T \text{ es } \epsilon\text{-separadora}$$

si y sólo si

$$\frac{T}{\|T\|} \text{ es } \frac{\epsilon}{\|T\|^2}\text{-separadora.}$$

Consideramos SIEMPRE $T \in \epsilon-$ **SEP** con $\|T\| = 1$

Objetivos

ESTABILIDAD

Objetivos

ESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**.

Objetivos

ESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**. Encontrar **SUPER**(ϵ) tal que:

Objetivos

ESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**. Encontrar **SUPER**(ϵ) tal que:

- Si $T \in \epsilon -$ **SEP**,

ESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**. Encontrar **SUPER**(ϵ) tal que:

- Si $T \in \epsilon -$ **SEP**, entonces existe $S \in$ **ComPeso** tal que

Objetivos

ESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**. Encontrar **SUPER**(ϵ) tal que:

- Si $T \in \epsilon -$ **SEP**, entonces existe $S \in$ **ComPeso** tal que
$$\|T - S\| \leq \textbf{SUPER}(\epsilon).$$

ESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**. Encontrar **SUPER**(ϵ) tal que:

- Si $T \in \epsilon -$ **SEP**, entonces existe $S \in$ **ComPeso** tal que

$$\|T - S\| \leq \textbf{SUPER}(\epsilon).$$

$$\overline{B}(T, \textbf{SUPER}(\epsilon)) \cap \textbf{ComPeso} \neq \emptyset.$$

Objetivos

ESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**. Encontrar **SUPER**(ϵ) tal que:

- Si $T \in \epsilon -$ **SEP**, entonces existe $S \in$ **ComPeso** tal que

$$\|T - S\| \leq \textbf{SUPER}(\epsilon).$$

$$\overline{B}(T, \textbf{SUPER}(\epsilon)) \cap \textbf{ComPeso} \neq \emptyset.$$

INESTABILIDAD

Objetivos

ESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**. Encontrar **SUPER**(ϵ) tal que:

- Si $T \in \epsilon -$ **SEP**, entonces existe $S \in$ **ComPeso** tal que

$$\|T - S\| \leq \mathbf{SUPER}(\epsilon).$$

$$\overline{B}(T, \mathbf{SUPER}(\epsilon)) \cap \mathbf{ComPeso} \neq \emptyset.$$

INESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**.

Objetivos

ESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**. Encontrar **SUPER**(ϵ) tal que:

- Si $T \in \epsilon -$ **SEP**, entonces existe $S \in$ **ComPeso** tal que

$$\|T - S\| \leq \textbf{SUPER}(\epsilon).$$

$$\overline{B}(T, \textbf{SUPER}(\epsilon)) \cap \textbf{ComPeso} \neq \emptyset.$$

INESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**. Encontrar **INFER**(ϵ) tal que:

Objetivos

ESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**. Encontrar **SUPER**(ϵ) tal que:

- Si $T \in \epsilon -$ **SEP**, entonces existe $S \in$ **ComPeso** tal que

$$\|T - S\| \leq \textbf{SUPER}(\epsilon).$$

$$\overline{B}(T, \textbf{SUPER}(\epsilon)) \cap \textbf{ComPeso} \neq \emptyset.$$

INESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**. Encontrar **INFER**(ϵ) tal que:

- Existe $T \in \epsilon -$ **SEP** con

Objetivos

ESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**. Encontrar **SUPER**(ϵ) tal que:

- Si $T \in \epsilon -$ **SEP**, entonces existe $S \in$ **ComPeso** tal que

$$\|T - S\| \leq \textbf{SUPER}(\epsilon).$$

$$\overline{B}(T, \textbf{SUPER}(\epsilon)) \cap \textbf{ComPeso} \neq \emptyset.$$

INESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**. Encontrar **INFER**(ϵ) tal que:

- Existe $T \in \epsilon -$ **SEP** con

$$\|T - S\| \geq \textbf{INFER}(\epsilon) \text{ para todo } S \in \textbf{ComPeso}.$$

Objetivos

ESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**. Encontrar **SUPER**(ϵ) tal que:

- Si $T \in \epsilon -$ **SEP**, entonces existe $S \in$ **ComPeso** tal que

$$\|T - S\| \leq \mathbf{SUPER}(\epsilon).$$

$$\overline{B}(T, \mathbf{SUPER}(\epsilon)) \cap \mathbf{ComPeso} \neq \emptyset.$$

INESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**. Encontrar **INFER**(ϵ) tal que:

- Existe $T \in \epsilon -$ **SEP** con

$$\|T - S\| \geq \mathbf{INFER}(\epsilon) \text{ para todo } S \in \mathbf{ComPeso}.$$

$$B(T, \mathbf{INFER}(\epsilon)) \cap \mathbf{ComPeso} = \emptyset.$$

Objetivos

ESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**. Encontrar **SUPER**(ϵ) tal que:

- Si $T \in \epsilon -$ **SEP**, entonces existe $S \in$ **ComPeso** tal que

$$\|T - S\| \leq \textbf{SUPER}(\epsilon).$$

$$\overline{B}(T, \textbf{SUPER}(\epsilon)) \cap \textbf{ComPeso} \neq \emptyset.$$

INESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**. Encontrar **INFER**(ϵ) tal que:

- Existe $T \in \epsilon -$ **SEP** con

$$\|T - S\| \geq \textbf{INFER}(\epsilon) \text{ para todo } S \in \textbf{ComPeso}.$$

$$B(T, \textbf{INFER}(\epsilon)) \cap \textbf{ComPeso} = \emptyset.$$

OBJETIVOS: Encontrar **LOS MEJORES somewhere**

Objetivos

ESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**. Encontrar **SUPER**(ϵ) tal que:

- Si $T \in \epsilon -$ **SEP**, entonces existe $S \in$ **ComPeso** tal que

$$\|T - S\| \leq \textbf{SUPER}(\epsilon).$$

$$\overline{B}(T, \textbf{SUPER}(\epsilon)) \cap \textbf{ComPeso} \neq \emptyset.$$

INESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**. Encontrar **INFER**(ϵ) tal que:

- Existe $T \in \epsilon -$ **SEP** con

$$\|T - S\| \geq \textbf{INFER}(\epsilon) \text{ para todo } S \in \textbf{ComPeso}.$$

$$B(T, \textbf{INFER}(\epsilon)) \cap \textbf{ComPeso} = \emptyset.$$

OBJETIVOS: Encontrar **LOS MEJORES somewhere** y **LAS MEJORES** cotas **SUPER**(ϵ) y **INFER**(ϵ).

Estabilidad. Caso general

Teorema (Dolinar, 2002)

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = 20\sqrt{\epsilon}.$$

Estabilidad. Caso general

Teorema (Dolinar, 2002)

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = 20\sqrt{\epsilon}.$$

$\overline{B}(T, 1) \cap \textbf{ComPeso} \neq \emptyset$ **SIEMPRE cierto**

Estabilidad. Caso general

Teorema (Dolinar, 2002)

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = 20\sqrt{\epsilon}.$$

$\overline{B}(T,1) \cap \textbf{ComPeso} \neq \emptyset$ **SIEMPRE cierto**

Por definición, siempre

Estabilidad. Caso general

Teorema (Dolinar, 2002)

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = 20\sqrt{\epsilon}.$$

$$\overline{B}(T,1) \cap \textbf{ComPeso} \neq \emptyset \qquad \textbf{SIEMPRE cierto}$$

Por definición, siempre

$$\overline{B}(T, \textbf{SUPER}(\epsilon)) \cap \textbf{ComPeso} \neq \emptyset$$

Estabilidad. Caso general

Teorema (Dolinar, 2002)

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = 20\sqrt{\epsilon}.$$

$$\overline{B}(T,1) \cap \textbf{ComPeso} \neq \emptyset \qquad \textbf{SIEMPRE cierto}$$

Por definición, siempre

$$\overline{B}(T,\textbf{SUPER}(\epsilon)) \cap \textbf{ComPeso} \neq \emptyset$$

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = 20\sqrt{\epsilon} \Longleftrightarrow \overline{B}\left(T, 20\sqrt{\epsilon}\right) \cap \textbf{ComPeso} \neq \emptyset$$

Estabilidad. Caso general

Teorema (Dolinar, 2002)

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = 20\sqrt{\epsilon}.$$

$$\overline{B}(T, 1) \cap \textbf{ComPeso} \neq \emptyset \qquad \textbf{SIEMPRE cierto}$$

Por definición, siempre

$$\overline{B}(T, \textbf{SUPER}(\epsilon)) \cap \textbf{ComPeso} \neq \emptyset$$

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = 20\sqrt{\epsilon} \Longleftrightarrow \overline{B}\left(T, 20\sqrt{\epsilon}\right) \cap \textbf{ComPeso} \neq \emptyset$$

SÓLO TIENE VALOR SI $\qquad 20\sqrt{\epsilon} < 1$

Estabilidad. Caso general

Teorema (Dolinar, 2002)

somewhere $= (0, 1/400)$.

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = 20\sqrt{\epsilon}.$$

$$\overline{B}(T, 1) \cap \textbf{ComPeso} \neq \emptyset \qquad \textbf{SIEMPRE cierto}$$

Por definición, siempre

$$\overline{B}(T, \textbf{SUPER}(\epsilon)) \cap \textbf{ComPeso} \neq \emptyset$$

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = 20\sqrt{\epsilon} \Longleftrightarrow \overline{B}\left(T, 20\sqrt{\epsilon}\right) \cap \textbf{ComPeso} \neq \emptyset$$

SÓLO TIENE VALOR SI $\qquad 20\sqrt{\epsilon} < 1$

Estabilidad. Caso general

Teorema (Dolinar, 2002)

somewhere $= (0, 1/400)$.

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = 20\sqrt{\epsilon}.$$

$$\overline{B}(T, 1) \cap \textbf{ComPeso} \neq \emptyset \qquad \textbf{SIEMPRE cierto}$$

Por definición, siempre

$$\overline{B}(T, \textbf{SUPER}(\epsilon)) \cap \textbf{ComPeso} \neq \emptyset$$

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = 20\sqrt{\epsilon} \Longleftrightarrow \overline{B}\left(T, 20\sqrt{\epsilon}\right) \cap \textbf{ComPeso} \neq \emptyset$$

SÓLO TIENE VALOR SI $\qquad 20\sqrt{\epsilon} < 1$

¿Podemos decir algo más?

Estabilidad. Caso general

Estabilidad. Caso general

Fijamos $y \in Y$.

Estabilidad. Caso general

Fijamos $y \in Y$. Definimos ϕ

Estabilidad. Caso general

Fijamos $y \in Y$. Definimos ϕ

$$f \mapsto (Tf)(y)$$

Estabilidad. Caso general

Fijamos $y \in Y$. Definimos ϕ

$$f \mapsto (Tf)(y)$$

Estabilidad. Caso general

Fijamos $y \in Y$. Definimos ϕ

$$f \mapsto (Tf)(y)$$

- $\phi \in C(X)'$, $\|\phi\| \leq 1$,

Estabilidad. Caso general

Fijamos $y \in Y$. Definimos ϕ

$$f \mapsto (Tf)(y)$$

- $\phi \in C(X)'$, $\|\phi\| \leq 1$,
- $f, g \in C(X)$, $f \cdot g \equiv 0$, $\|f\|_\infty = 1$, $\|g\|_\infty = 1$,

Estabilidad. Caso general

Fijamos $y \in Y$. Definimos ϕ

$$f \mapsto (Tf)(y)$$

- $\phi \in C(X)'$, $\|\phi\| \leq 1$,
- $f, g \in C(X)$, $f \cdot g \equiv 0$, $\|f\|_\infty = 1$, $\|g\|_\infty = 1$,
- $s := \phi(f)$, $t := \phi(g)$,

Estabilidad. Caso general

Fijamos $y \in Y$. Definimos ϕ

$$f \mapsto (Tf)(y)$$

- $\phi \in C(X)'$, $\|\phi\| \leq 1$,
- $f, g \in C(X)$, $f \cdot g \equiv 0$, $\|f\|_\infty = 1$, $\|g\|_\infty = 1$,
- $s := \phi(f)$, $t := \phi(g)$,
- $|s| \leq 1$, $|t| \leq 1$,

Fijamos $y \in Y$. Definimos ϕ

$$f \mapsto (Tf)(y)$$

- $\phi \in C(X)'$, $\|\phi\| \leq 1$,
- $f, g \in C(X)$, $f \cdot g \equiv 0$, $\|f\|_\infty = 1$, $\|g\|_\infty = 1$,
- $s := \phi(f)$, $t := \phi(g)$,
- $|s| \leq 1$, $|t| \leq 1$,
- $\|f + \alpha g\|_\infty = 1 \ \forall \, |\alpha| = 1$

Estabilidad. Caso general

Fijamos $y \in Y$. Definimos ϕ

$$f \mapsto (Tf)(y)$$

- $\phi \in C(X)'$, $\|\phi\| \leq 1$,
- $f, g \in C(X)$, $f \cdot g \equiv 0$, $\|f\|_\infty = 1$, $\|g\|_\infty = 1$,
- $s := \phi(f)$, $t := \phi(g)$,
- $|s| \leq 1$, $|t| \leq 1$,
- $\|f + \alpha g\|_\infty = 1 \ \forall\, |\alpha| = 1 \Longrightarrow |s + \alpha t| \leq 1 \ \forall\, |\alpha| = 1$

Estabilidad. Caso general

Fijamos $y \in Y$. Definimos ϕ

$$f \mapsto (Tf)(y)$$

- $\phi \in C(X)'$, $\|\phi\| \leq 1$,
- $f, g \in C(X)$, $f \cdot g \equiv 0$, $\|f\|_\infty = 1$, $\|g\|_\infty = 1$,
- $s := \phi(f)$, $t := \phi(g)$,
- $|s| \leq 1$, $|t| \leq 1$,
- $\|f + \alpha g\|_\infty = 1 \ \forall \, |\alpha| = 1 \Longrightarrow |s + \alpha t| \leq 1 \ \forall \, |\alpha| = 1$
  $\Longrightarrow |s| + |t| \leq 1$,

Estabilidad. Caso general

Fijamos $y \in Y$. Definimos ϕ

$$f \mapsto (Tf)(y)$$

- $\phi \in C(X)'$, $\|\phi\| \leq 1$,
- $f, g \in C(X)$, $f \cdot g \equiv 0$, $\|f\|_\infty = 1$, $\|g\|_\infty = 1$,
- $s := \phi(f)$, $t := \phi(g)$,
- $|s| \leq 1$, $|t| \leq 1$,
- $\|f + \alpha g\|_\infty = 1 \ \forall\, |\alpha| = 1 \implies |s + \alpha t| \leq 1 \ \forall\, |\alpha| = 1$ $\implies |s| + |t| \leq 1$,
- $|st| \leq 1/4$

Estabilidad. Caso general

Fijamos $y \in Y$. Definimos ϕ

$$f \mapsto (Tf)(y)$$

- $\phi \in C(X)'$, $\|\phi\| \leq 1$,
- $f, g \in C(X)$, $f \cdot g \equiv 0$, $\|f\|_\infty = 1$, $\|g\|_\infty = 1$,
- $s := \phi(f)$, $t := \phi(g)$,
- $|s| \leq 1$, $|t| \leq 1$,
- $\|f + \alpha g\|_\infty = 1 \ \forall\, |\alpha| = 1 \Longrightarrow |s + \alpha t| \leq 1 \ \forall\, |\alpha| = 1$
  $\Longrightarrow |s| + |t| \leq 1$,
- $|st| \leq 1/4 \Longrightarrow |(Tf)(y)(Tg)(y)| \leq 1/4$

Estabilidad. Caso general

Fijamos $y \in Y$. Definimos ϕ

$$f \mapsto (Tf)(y)$$

- $\phi \in C(X)'$, $\|\phi\| \leq 1$,
- $f, g \in C(X)$, $f \cdot g \equiv 0$, $\|f\|_\infty = 1$, $\|g\|_\infty = 1$,
- $s := \phi(f)$, $t := \phi(g)$,
- $|s| \leq 1$, $|t| \leq 1$,
- $\|f + \alpha g\|_\infty = 1 \ \forall\, |\alpha| = 1 \implies |s + \alpha t| \leq 1 \ \forall\, |\alpha| = 1$ $\implies |s| + |t| \leq 1$,
- $|st| \leq 1/4 \implies |(Tf)(y)(Tg)(y)| \leq 1/4 \implies \|(Tf)(Tg)\|_\infty \leq 1/4$.

Estabilidad. Caso general

Fijamos $y \in Y$. Definimos ϕ

$$f \mapsto (Tf)(y)$$

- $\phi \in C(X)'$, $\|\phi\| \leq 1$,
- $f, g \in C(X)$, $f \cdot g \equiv 0$, $\|f\|_\infty = 1$, $\|g\|_\infty = 1$,
- $s := \phi(f)$, $t := \phi(g)$,
- $|s| \leq 1$, $|t| \leq 1$,
- $\|f + \alpha g\|_\infty = 1 \ \forall \, |\alpha| = 1 \Longrightarrow |s + \alpha t| \leq 1 \ \forall \, |\alpha| = 1$
  $\Longrightarrow |s| + |t| \leq 1$,
- $|st| \leq 1/4 \Longrightarrow |(Tf)(y)(Tg)(y)| \leq 1/4 \Longrightarrow \|(Tf)(Tg)\|_\infty \leq 1/4$.

Todo T es $1/4$ – **SEP**.

Estabilidad. Caso general

Fijamos $y \in Y$. Definimos ϕ

$$f \mapsto (Tf)(y)$$

- $\phi \in C(X)'$, $\|\phi\| \leq 1$,
- $f, g \in C(X)$, $f \cdot g \equiv 0$, $\|f\|_\infty = 1$, $\|g\|_\infty = 1$,
- $s := \phi(f)$, $t := \phi(g)$,
- $|s| \leq 1$, $|t| \leq 1$,
- $\|f + \alpha g\|_\infty = 1 \ \forall \, |\alpha| = 1 \implies |s + \alpha t| \leq 1 \ \forall \, |\alpha| = 1$
  $\implies |s| + |t| \leq 1$,
- $|st| \leq 1/4 \implies |(Tf)(y)(Tg)(y)| \leq 1/4 \implies \|(Tf)(Tg)\|_\infty \leq 1/4$.

Todo T es $1/4-$ **SEP.** $\epsilon \geq 1/4$ no proporciona información!!!!

somewhere, **somewhere** $\subset (0, 1/4)$

Un lema clave

Lema

Sea $0 < \epsilon < 1/4$.

Un lema clave

Lema

Sea $0 < \epsilon < 1/4$. *Sea* $\varphi \in \epsilon - \mathbf{SEP}\,(X, \mathbb{K})$ *positivo con* $\|\varphi\| = 1$.

Un lema clave

Lema

Sea $0 < \epsilon < 1/4$. *Sea* $\varphi \in \epsilon -$ **SEP** $(X, \mathbb{K})$ *positivo con* $\|\varphi\| = 1$. *Si* C *es un conjunto de Borel en* X,

Un lema clave

Lema

Sea $0 < \epsilon < 1/4$. *Sea* $\varphi \in \epsilon - \mathbf{SEP}\,(X, \mathbb{K})$ *positivo con* $\|\varphi\| = 1$. *Si* C *es un conjunto de Borel en* X, *entonces*

$$\lambda_\varphi(C) \notin \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4\epsilon}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 - 4\epsilon}}{2} \right).$$

Un lema clave

Lema

Sea $0 < \epsilon < 1/4$. *Sea* $\varphi \in \epsilon - \mathbf{SEP}(X, \mathbb{K})$ *positivo con* $\|\varphi\| = 1$. *Si* C *es un conjunto de Borel en* X*, entonces*

$$\lambda_\varphi(C) \notin \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4\epsilon}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 - 4\epsilon}}{2} \right).$$

Si $\epsilon < 2/9$,

Un lema clave

Lema

Sea $0 < \epsilon < 1/4$. *Sea* $\varphi \in \epsilon - \mathbf{SEP}(X, \mathbb{K})$ *positivo con* $\|\varphi\| = 1$. *Si* C *es un conjunto de Borel en* X, *entonces*

$$\lambda_\varphi(C) \notin \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4\epsilon}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 - 4\epsilon}}{2} \right).$$

Si $\epsilon < 2/9$,

existe un **ÚNICO** $x \in X$ con

Un lema clave

Lema

Sea $0 < \epsilon < 1/4$. *Sea* $\varphi \in \epsilon - \mathbf{SEP}\,(X, \mathbb{K})$ *positivo con* $\|\varphi\| = 1$. *Si* C *es un conjunto de Borel en* X, *entonces*

$$\lambda_\varphi(C) \notin \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4\epsilon}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 - 4\epsilon}}{2} \right).$$

Si $\epsilon < 2/9$,

existe un **ÚNICO** $x \in X$ con

$$\lambda_\varphi(\{x\}) > 1/2$$

Prueba

Si

$$\left(1-\sqrt{1-4\epsilon}\right)/2 < \lambda_{\varphi}(C) < \left(1+\sqrt{1-4\epsilon}\right)/2$$

Prueba

Si

$$\left(1-\sqrt{1-4\epsilon}\right)/2 < \lambda_\varphi(C) < \left(1+\sqrt{1-4\epsilon}\right)/2$$

entonces

$$\lambda_\varphi(C)(1-\lambda_\varphi(C)) > \epsilon$$

Prueba

Si

$$\left(1-\sqrt{1-4\epsilon}\right)/2 < \lambda_\varphi(C) < \left(1+\sqrt{1-4\epsilon}\right)/2$$

entonces

$$\lambda_\varphi(C)(1-\lambda_\varphi(C)) > \epsilon$$

Así

- Existen K_1 y K_2 compactos

Prueba

Si

$$\left(1-\sqrt{1-4\epsilon}\right)/2 < \lambda_{\varphi}(C) < \left(1+\sqrt{1-4\epsilon}\right)/2$$

entonces

$$\lambda_{\varphi}(C)(1-\lambda_{\varphi}(C)) > \epsilon$$

Así

- Existen K_1 y K_2 compactos
- $K_1 \subset C$,

Prueba

Si

$$\left(1-\sqrt{1-4\epsilon}\right)/2 < \lambda_\varphi(C) < \left(1+\sqrt{1-4\epsilon}\right)/2$$

entonces

$$\lambda_\varphi(C)(1-\lambda_\varphi(C)) > \epsilon$$

Así

- Existen K_1 y K_2 compactos
- $K_1 \subset C$,
- $K_2 \subset X \setminus C$,

Prueba

Si

$$\left(1-\sqrt{1-4\epsilon}\right)/2 < \lambda_\varphi(C) < \left(1+\sqrt{1-4\epsilon}\right)/2$$

entonces

$$\lambda_\varphi(C)(1-\lambda_\varphi(C)) > \epsilon$$

Así

- Existen K_1 y K_2 compactos
- $K_1 \subset C$,
- $K_2 \subset X \setminus C$,
- $\lambda_\varphi(K_1) > \lambda_\varphi(C) - \delta$

Prueba

Si

$$\left(1-\sqrt{1-4\epsilon}\right)/2 < \lambda_\varphi(C) < \left(1+\sqrt{1-4\epsilon}\right)/2$$

entonces

$$\lambda_\varphi(C)(1-\lambda_\varphi(C)) > \epsilon$$

Así

- Existen K_1 y K_2 compactos
- $K_1 \subset C$,
- $K_2 \subset X \setminus C$,
- $\lambda_\varphi(K_1) > \lambda_\varphi(C) - \delta$
- $\lambda_\varphi(K_2) > 1 - \lambda_\varphi(C) - \delta$

Prueba

Si

$$\left(1 - \sqrt{1 - 4\epsilon}\right)/2 < \lambda_\varphi(C) < \left(1 + \sqrt{1 - 4\epsilon}\right)/2$$

entonces

$$\lambda_\varphi(C)(1 - \lambda_\varphi(C)) > \epsilon$$

Así

- Existen K_1 y K_2 compactos
- $K_1 \subset C$,
- $K_2 \subset X \setminus C$,
- $\lambda_\varphi(K_1) > \lambda_\varphi(C) - \delta$
- $\lambda_\varphi(K_2) > 1 - \lambda_\varphi(C) - \delta$

de modo que

$$\lambda_\varphi(K_1)\lambda_\varphi(K_2) > \epsilon.$$

$$\lambda_\varphi(K_1)\lambda_\varphi(K_2) > \epsilon.$$

$$\lambda_\varphi(K_1)\lambda_\varphi(K_2) > \epsilon.$$

- Tomamos U, V abiertos disjuntos con

$$\lambda_\varphi(K_1)\lambda_\varphi(K_2) > \epsilon.$$

- Tomamos U, V abiertos disjuntos con
- $K_1 \subset U$ y $K_2 \subset V$

$$\lambda_\varphi(K_1)\lambda_\varphi(K_2) > \epsilon.$$

- Tomamos U, V abiertos disjuntos con
- $K_1 \subset U$ y $K_2 \subset V$
- Tomamos $f_1, f_2 \in C(X)$ con

$$\lambda_\varphi(K_1)\lambda_\varphi(K_2) > \epsilon.$$

- Tomamos U, V abiertos disjuntos con
- $K_1 \subset U$ y $K_2 \subset V$
- Tomamos $f_1, f_2 \in C(X)$ con
- $0 \leq f_1 \leq 1$, $0 \leq f_2 \leq 1$,

$$\lambda_\varphi(K_1)\lambda_\varphi(K_2) > \epsilon.$$

- Tomamos U, V abiertos disjuntos con
- $K_1 \subset U$ y $K_2 \subset V$
- Tomamos $f_1, f_2 \in C(X)$ con
- $0 \leq f_1 \leq 1$, $0 \leq f_2 \leq 1$,
- $f_1(K_1) \equiv 1$, $f_2(K_2) \equiv 1$

$$\lambda_\varphi(K_1)\lambda_\varphi(K_2) > \epsilon.$$

- Tomamos U, V abiertos disjuntos con
- $K_1 \subset U$ y $K_2 \subset V$
- Tomamos $f_1, f_2 \in C(X)$ con
- $0 \leq f_1 \leq 1$, $0 \leq f_2 \leq 1$,
- $f_1(K_1) \equiv 1$, $f_2(K_2) \equiv 1$
- $\mathrm{supp}(f_1) \subset U$, $\mathrm{supp}(f_2) \subset V$

$$\lambda_\varphi(K_1)\lambda_\varphi(K_2) > \epsilon.$$

- Tomamos U, V abiertos disjuntos con
- $K_1 \subset U$ y $K_2 \subset V$
- Tomamos $f_1, f_2 \in C(X)$ con
- $0 \leq f_1 \leq 1$, $0 \leq f_2 \leq 1$,
- $f_1(K_1) \equiv 1$, $f_2(K_2) \equiv 1$
- $\mathrm{supp}(f_1) \subset U$, $\mathrm{supp}(f_2) \subset V$

Obviamente

$$f_1 f_2 \equiv 0 \text{ y}$$

$$\lambda_\varphi(K_1)\lambda_\varphi(K_2) > \epsilon.$$

- Tomamos U, V abiertos disjuntos con
- $K_1 \subset U$ y $K_2 \subset V$
- Tomamos $f_1, f_2 \in C(X)$ con
- $0 \leq f_1 \leq 1$, $0 \leq f_2 \leq 1$,
- $f_1(K_1) \equiv 1$, $f_2(K_2) \equiv 1$
- $\mathrm{supp}(f_1) \subset U$, $\mathrm{supp}(f_2) \subset V$

Obviamente

$$f_1 f_2 \equiv 0 \text{ y}$$

$$\|f_1\|_\infty = \|f_2\|_\infty = 1$$

$$\varphi(f_1)\varphi(f_2) \leq \epsilon$$

$$\varphi(f_1)\varphi(f_2) \leq \epsilon$$

$$\lambda_\varphi(K_1)\lambda_\varphi(K_2) > \epsilon.$$

$$\varphi(f_1)\varphi(f_2) \leq \epsilon$$

$$\lambda_\varphi(K_1)\lambda_\varphi(K_2) > \epsilon.$$

$$\varphi(f_i) = \int_X f_i d\lambda_\varphi \geq \lambda_\varphi(K_i)$$

$$\varphi(f_1)\varphi(f_2) \leq \epsilon$$

$$\lambda_\varphi(K_1)\lambda_\varphi(K_2) > \epsilon.$$

$$\varphi(f_i) = \int_X f_i d\lambda_\varphi \geq \lambda_\varphi(K_i)$$

$$\varphi(f_1)\varphi(f_2) \geq \lambda_\varphi(K_1)\lambda_\varphi(K_2) > \epsilon$$

Estabilidad óptima

(Recordemos:) ESTABILIDAD

Estabilidad óptima

(Recordemos:) ESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**. Encontrar **SUPER**(ϵ) tal que:

- Si $T \in \epsilon -$ **SEP**,

$$\overline{B}(T, \mathbf{SUPER}(\epsilon)) \cap \mathbf{ComPeso} \neq \emptyset.$$

Estabilidad óptima

(Recordemos:) ESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**. Encontrar **SUPER**(ϵ) tal que:

- Si $T \in \epsilon -$ **SEP**,

$$\overline{B}(T, \textbf{SUPER}(\epsilon)) \cap \textbf{ComPeso} \neq \emptyset.$$

ESTABILIDAD ÓPTIMA = **EO** (se alcanza)

Estabilidad óptima

(Recordemos:) ESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**. Encontrar **SUPER**(ϵ) tal que:

- Si $T \in \epsilon -$ **SEP**,

$$\overline{B}(T, \mathbf{SUPER}(\epsilon)) \cap \mathbf{ComPeso} \neq \emptyset.$$

ESTABILIDAD ÓPTIMA = EO (se alcanza)

Se dará si existe $T \in \epsilon -$ **SEP** tal que

Estabilidad óptima

(Recordemos:) ESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**. Encontrar **SUPER**(ϵ) tal que:

- Si $T \in \epsilon -$ **SEP**,

$$\overline{B}(T, \mathbf{SUPER}(\epsilon)) \cap \mathbf{ComPeso} \neq \emptyset.$$

ESTABILIDAD ÓPTIMA = EO (se alcanza)

Se dará si existe $T \in \epsilon -$ **SEP** tal que

$$B(T, \mathbf{EO}) \cap \mathbf{ComPeso} = \emptyset.$$

Estabilidad. Caso general. Recordemos:

Teorema (Dolinar, 2002)

somewhere $= (0, 1/400)$.

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = 20\sqrt{\epsilon}.$$

Estabilidad. Caso general. Recordemos:

Teorema (Dolinar, 2002)

somewhere $= (0, 1/400)$.

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = 20\sqrt{\epsilon}.$$

$$\textbf{somewhere} \subset (0, 1/4)$$

Teorema (Caso general)

Estabilidad. Caso general.

Teorema (Dolinar, 2002)

somewhere $= (0, 1/400)$.

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = 20\sqrt{\epsilon}.$$

$$\textbf{somewhere} \subset (0, 1/4)$$

Teorema (Caso general)

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = \sqrt{\frac{17\epsilon}{2}}.$$

Estabilidad. Caso general.

Teorema (Dolinar, 2002)

somewhere $= (0, 1/400)$.

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = 20\sqrt{\epsilon}.$$

$$\textbf{somewhere} \subset (0, 1/4)$$

Teorema (Caso general)

somewhere $= (0, 2/17)$.

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = \sqrt{\frac{17\epsilon}{2}}.$$

Estabilidad. Caso general.

Teorema (Dolinar, 2002)

somewhere $= (0, 1/400)$.

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = 20\sqrt{\epsilon}.$$

$$\textbf{somewhere} \subset (0, 1/4)$$

Teorema (Caso general. ÓPTIMO)

somewhere $= (0, 2/17)$.

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = \sqrt{\frac{17\epsilon}{2}}.$$

Inestabilidad óptima

(Recordemos:) INESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**. Encontrar **INFER**(ϵ) tal que:

- Existe $T \in \epsilon -$ **SEP** con

$$B(T, \textbf{INFER}(\epsilon)) \cap \textbf{ComPeso} = \emptyset.$$

Inestabilidad óptima

(Recordemos:) INESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**. Encontrar **INFER**(ϵ) tal que:

- Existe $T \in \epsilon -$ **SEP** con

$$B(T, \mathbf{INFER}(\epsilon)) \cap \mathbf{ComPeso} = \emptyset.$$

INESTABILIDAD ÓPTIMA (tipo 1) = IO (se alcanza)

Se dará si para todo $T \in \epsilon -$ **SEP**

Inestabilidad óptima

(Recordemos:) INESTABILIDAD

Sea $\epsilon \in$ **somewhere**. Encontrar **INFER**(ϵ) tal que:

- Existe $T \in \epsilon -$ **SEP** con

$$B(T, \textbf{INFER}(\epsilon)) \cap \textbf{ComPeso} = \emptyset.$$

INESTABILIDAD ÓPTIMA (tipo 1) = IO (se alcanza)

Se dará si para todo $T \in \epsilon -$ **SEP**

$$\overline{B}(T, \textbf{IO}) \cap \textbf{ComPeso} \neq \emptyset.$$

Dos tipos de inestabilidad óptima

INESTABILIDAD ÓPTIMA (tipo 1) = IO (se alcanza)

Se dará si para todo $T \in \epsilon - \mathbf{SEP}$

$$\overline{B}(T, \mathbf{IO}) \cap \mathbf{ComPeso} \neq \emptyset.$$

Dos tipos de inestabilidad óptima

INESTABILIDAD ÓPTIMA (tipo 1) = **IO** (se alcanza)

Se dará si para todo $T \in \epsilon - \mathbf{SEP}$

$$\overline{B}(T, \mathbf{IO}) \cap \mathbf{ComPeso} \neq \emptyset.$$

INESTABILIDAD ÓPTIMA (tipo 2) = **IO** (no se alcanza)

Se dará si para todo $T \in \epsilon - \mathbf{SEP}$ y $t \in (0, 1)$

Dos tipos de inestabilidad óptima

INESTABILIDAD ÓPTIMA (tipo 1) = IO (se alcanza)

Se dará si para todo $T \in \epsilon - \mathbf{SEP}$

$$\overline{B}(T, \mathbf{IO}) \cap \mathbf{ComPeso} \neq \emptyset.$$

INESTABILIDAD ÓPTIMA (tipo 2) = IO (no se alcanza)

Se dará si para todo $T \in \epsilon - \mathbf{SEP}$ y $t \in (0, 1)$

$$B(T, t\,\mathbf{IO}) \cap \mathbf{ComPeso} = \emptyset.$$

Dos tipos de inestabilidad óptima

INESTABILIDAD ÓPTIMA (tipo 1) = IO (se alcanza)

Se dará si para todo $T \in \epsilon - \mathbf{SEP}$

$$\overline{B}(T, \mathbf{IO}) \cap \mathbf{ComPeso} \neq \emptyset.$$

INESTABILIDAD ÓPTIMA (tipo 2) = IO (no se alcanza)

Se dará si para todo $T \in \epsilon - \mathbf{SEP}$ y $t \in (0, 1)$

$$B(T, t\,\mathbf{IO}) \cap \mathbf{ComPeso} = \emptyset.$$

$$B(T, \mathbf{IO}) \cap \mathbf{ComPeso} \neq \emptyset.$$

Inestabilidad. X infinito

Teorema (X infinito)

somewhere $= (0, 1/4)$.

Inestabilidad. X infinito

Teorema (X infinito)

somewhere $= (0, 1/4)$.

$$\textbf{INFER}(\epsilon) = 2t\sqrt{\epsilon} \qquad \textit{para todo } t \in (0,1).$$

Inestabilidad. X infinito

Teorema (X infinito)

somewhere $= (0, 1/4)$.

$$\textbf{INFER}(\epsilon) = 2t\sqrt{\epsilon} \qquad \textit{para todo } t \in (0, 1).$$

- *Si X admite una medida de probabilidad de Borel regular sin átomos,*

Inestabilidad. X infinito

Teorema (X infinito)

somewhere $= (0, 1/4)$.

$$\textbf{INFER}(\epsilon) = 2t\sqrt{\epsilon} \qquad \textit{para todo } t \in (0,1).$$

- *Si X admite una medida de probabilidad de Borel regular sin átomos,*

$$\textbf{INFER}(\epsilon) = 2\sqrt{\epsilon}$$

Inestabilidad. X infinito

Teorema (X infinito)

somewhere $= (0, 1/4)$.

$$\mathbf{INFER}(\epsilon) = 2t\sqrt{\epsilon} \qquad \textit{para todo } t \in (0,1).$$

- *Si X admite una medida de probabilidad de Borel regular sin átomos,*

$$\mathbf{INFER}(\epsilon) = 2\sqrt{\epsilon}$$

Teorema (X infinito)

somewhere $= (0, 1/4)$

$$\mathbf{INFER}(\epsilon) = 2\sqrt{\epsilon}$$

Inestabilidad. X infinito

Teorema (X infinito)

somewhere $= (0, 1/4)$.

$$\textbf{INFER}(\epsilon) = 2t\sqrt{\epsilon} \qquad \textit{para todo } t \in (0,1).$$

- *Si X admite una medida de probabilidad de Borel regular sin átomos,*

$$\textbf{INFER}(\epsilon) = 2\sqrt{\epsilon}$$

Teorema (X infinito)

somewhere $= (0, 1/4)$

- *Y es la compactificación de Stone-Čech de un espacio discreto*

$$\textbf{INFER}(\epsilon) = 2\sqrt{\epsilon}$$

Inestabilidad. X infinito

Teorema (X infinito)

somewhere $= (0, 1/4)$.

$$\textbf{INFER}(\epsilon) = 2t\sqrt{\epsilon} \qquad \textit{para todo } t \in (0,1).$$

- *Si X admite una medida de probabilidad de Borel regular sin átomos,*

$$\textbf{INFER}(\epsilon) = 2\sqrt{\epsilon}$$

Teorema (X infinito. **ÓPTIMO**)

somewhere $= (0, 1/4) =$ **somewhere**

- *Y es la compactificación de Stone-Čech de un espacio discreto*

$$\textbf{INFER}(\epsilon) = 2\sqrt{\epsilon} = \textbf{SUPER}(\epsilon)$$

Inestabilidad. X infinito

Teorema (X infinito)

somewhere $= (0, 1/4)$.

$$\textbf{INFER}(\epsilon) = 2t\sqrt{\epsilon} \qquad \textit{para todo } t \in (0,1).$$

- *Si X admite una medida de probabilidad de Borel regular sin átomos,*

$$\textbf{INFER}(\epsilon) = 2\sqrt{\epsilon}$$

Teorema (X infinito. **ÓPTIMO**)

somewhere $= (0, 1/4) =$ **somewhere**

- *Y es la compactificación de Stone-Čech de un espacio discreto*

(Ambos tipos de **IO***)* $\textbf{INFER}(\epsilon) = 2\sqrt{\epsilon} = \textbf{SUPER}(\epsilon)$

Estabilidad e inestabilidad. Caso finito I

Para $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\omega_n := \frac{n^2 - 1}{4n^2}$$

Estabilidad e inestabilidad. Caso finito I

Para $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\omega_n := \frac{n^2 - 1}{4n^2}$$

X finito.

Estabilidad e inestabilidad. Caso finito I

Para $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\omega_n := \frac{n^2 - 1}{4n^2}$$

X finito.
Definimos $o'_X : (0, 1/4) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Estabilidad e inestabilidad. Caso finito I

Para $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\omega_n := \frac{n^2 - 1}{4n^2}$$

X finito.
Definimos $o'_X : (0, 1/4) \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$o'_X(\epsilon) := \begin{cases} 2\sqrt{\frac{(n-1)\epsilon}{n+1}} & \text{si } n := \operatorname{card} X \text{ es impar y } \epsilon \leq \omega_n \\ & \end{cases}$$

Estabilidad e inestabilidad. Caso finito I

Para $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\omega_n := \frac{n^2 - 1}{4n^2}$$

X finito.

Definimos $o'_X : (0, 1/4) \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$o'_X(\epsilon) := \begin{cases} 2\sqrt{\frac{(n-1)\epsilon}{n+1}} & \text{si } n := \operatorname{card} X \text{ es impar y } \epsilon \leq \omega_n \\ \frac{n-1}{n} & \text{si } n := \operatorname{card} X \text{ es impar y } \epsilon > \omega_n \end{cases}$$

Estabilidad e inestabilidad. Caso finito I

Para $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\omega_n := \frac{n^2 - 1}{4n^2}$$

X finito.
Definimos $o'_X : (0, 1/4) \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$o'_X(\epsilon) := \begin{cases} 2\sqrt{\frac{(n-1)\epsilon}{n+1}} & \text{si } n := \operatorname{card} X \text{ es impar y } \epsilon \leq \omega_n \\ \frac{n-1}{n} & \text{si } n := \operatorname{card} X \text{ es impar y } \epsilon > \omega_n \\ \frac{2(n-1)\sqrt{\epsilon}}{n} & \text{si } n := \operatorname{card} X \text{ es par} \end{cases}$$

Para $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\omega_n := \frac{n^2 - 1}{4n^2}$$

X finito.
Definimos $o'_X : (0, 1/4) \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$o'_X(\epsilon) := \begin{cases} 2\sqrt{\frac{(n-1)\epsilon}{n+1}} & \text{si } n := \operatorname{card} X \text{ es impar y } \epsilon \leq \omega_n \\ \frac{n-1}{n} & \text{si } n := \operatorname{card} X \text{ es impar y } \epsilon > \omega_n \\ \frac{2(n-1)\sqrt{\epsilon}}{n} & \text{si } n := \operatorname{card} X \text{ es par} \end{cases}$$

Teorema (X finito)

somewhere $= (0, 1/4)$.

Estabilidad e inestabilidad. Caso finito I

Para $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\omega_n := \frac{n^2 - 1}{4n^2}$$

X finito.
Definimos $o'_X : (0, 1/4) \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$o'_X(\epsilon) := \begin{cases} 2\sqrt{\frac{(n-1)\epsilon}{n+1}} & \text{si } n := \operatorname{card} X \text{ es impar y } \epsilon \leq \omega_n \\ \frac{n-1}{n} & \text{si } n := \operatorname{card} X \text{ es impar y } \epsilon > \omega_n \\ \frac{2(n-1)\sqrt{\epsilon}}{n} & \text{si } n := \operatorname{card} X \text{ es par} \end{cases}$$

Teorema (X finito)

somewhere $= (0, 1/4)$.

$$\textbf{INFER}(\epsilon) = o'_X(\epsilon)$$

Teorema (X finito)

somewhere $= (0, 1/4)$

$$\textbf{INFER}(\epsilon) = o'_X(\epsilon)$$

Estabilidad e inestabilidad. Caso finito II

Teorema (X finito)

somewhere $= (0, 1/4)$

- *Y es la compactificación de Stone-Čech de un espacio discreto*

$$\mathbf{INFER}(\epsilon) = o'_X(\epsilon)$$

Teorema (X finito. ÓPTIMO)

somewhere $= (0, 1/4) =$ **somewhere**

- *Y es la compactificación de Stone-Čech de un espacio discreto*

$$\textbf{INFER}(\epsilon) = o'_X(\epsilon) = \textbf{SUPER}(\epsilon)$$

Estabilidad e inestabilidad. Caso finito II

Teorema (X finito. ÓPTIMO)

somewhere $= (0, 1/4) =$ **somewhere**

- *Y es la compactificación de Stone-Čech de un espacio discreto*

$$\textbf{INFER}(\epsilon) = o'_X(\epsilon) = \textbf{SUPER}(\epsilon)$$

Teorema (X finito)

somewhere $= (0, 1/4)$.

Estabilidad e inestabilidad. Caso finito II

Teorema (X finito. **ÓPTIMO**)

somewhere $= (0, 1/4) =$ **somewhere**

- *Y es la compactificación de Stone-Čech de un espacio discreto*

$$\textbf{INFER}(\epsilon) = o'_X(\epsilon) = \textbf{SUPER}(\epsilon)$$

Teorema (X finito. **ÓPTIMO**)

somewhere $= (0, 1/4)$.

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = 2\sqrt{\epsilon}.$$

Estabilidad e inestabilidad. Caso finito II

Teorema (*X* finito. ÓPTIMO)

somewhere $= (0, 1/4) =$ **somewhere**

- *Y es la compactificación de Stone-Čech de un espacio discreto*

$$\textbf{INFER}(\epsilon) = o'_X(\epsilon) = \textbf{SUPER}(\epsilon)$$

Teorema (*X* finito. ÓPTIMO)

somewhere $= (0, 1/4)$.

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = 2\sqrt{\epsilon}.$$

Caso infinito más simple: $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Estabilidad e inestabilidad. Caso finito II

Teorema (X finito. ÓPTIMO)

somewhere $= (0, 1/4) =$ **somewhere**

- *Y es la compactificación de Stone-Čech de un espacio discreto*

$$\textbf{INFER}(\epsilon) = o'_X(\epsilon) = \textbf{SUPER}(\epsilon)$$

Teorema (X finito. ÓPTIMO)

somewhere $= (0, 1/4)$.

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = 2\sqrt{\epsilon}.$$

Caso infinito más simple: $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

somewhere $= (0, 1/8)$.

Estabilidad e inestabilidad. Caso finito II

Teorema (X finito. ÓPTIMO)

somewhere $= (0, 1/4) =$ **somewhere**

- *Y es la compactificación de Stone-Čech de un espacio discreto*

$$\textbf{INFER}(\epsilon) = o'_X(\epsilon) = \textbf{SUPER}(\epsilon)$$

Teorema (X finito. ÓPTIMO)

somewhere $= (0, 1/4)$.

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = 2\sqrt{\epsilon}.$$

Caso infinito más simple: $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

somewhere $= (0, 1/8)$. **INFER**$(\epsilon) = \sqrt{8\epsilon}$.

El caso de los funcionales lineales I

El caso de los funcionales lineales I

Coincide con el caso $\operatorname{card} Y = 1$.

El caso de los funcionales lineales I

Coincide con el caso $\operatorname{card} Y = 1$.

Recordemos:

$$\omega_n := \frac{n^2 - 1}{4n^2}$$

$o'_X : (0, 1/4) \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$o'_X(\epsilon) := \begin{cases} 2\sqrt{\frac{(n-1)\epsilon}{n+1}} & \text{si } n := \operatorname{card} X \text{ es impar y } \epsilon \le \omega_n \\ \frac{n-1}{n} & \text{si } n := \operatorname{card} X \text{ es impar y } \epsilon > \omega_n \\ \frac{2(n-1)\sqrt{\epsilon}}{n} & \text{si } n := \operatorname{card} X \text{ es par} \end{cases}$$

El caso de los funcionales lineales I

Coincide con el caso $\operatorname{card} Y = 1$.

Recordemos:

$$\omega_n := \frac{n^2 - 1}{4n^2}$$

$o'_X : (0, 1/4) \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$o'_X(\epsilon) := \begin{cases} 2\sqrt{\frac{(n-1)\epsilon}{n+1}} & \text{si } n := \operatorname{card} X \text{ es impar y } \epsilon \leq \omega_n \\ \frac{n-1}{n} & \text{si } n := \operatorname{card} X \text{ es impar y } \epsilon > \omega_n \\ \frac{2(n-1)\sqrt{\epsilon}}{n} & \text{si } n := \operatorname{card} X \text{ es par} \end{cases}$$

Definimos $o_X : (0, 1/4) \longrightarrow \mathbb{R}$:

El caso de los funcionales lineales I

Coincide con el caso $\mathrm{card}\, Y = 1$.

Recordemos:

$$\omega_n := \frac{n^2 - 1}{4n^2}$$

$o'_X : (0, 1/4) \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$o'_X(\epsilon) := \begin{cases} 2\sqrt{\frac{(n-1)\epsilon}{n+1}} & \text{si } n := \mathrm{card}\, X \text{ es impar y } \epsilon \leq \omega_n \\ \frac{n-1}{n} & \text{si } n := \mathrm{card}\, X \text{ es impar y } \epsilon > \omega_n \\ \frac{2(n-1)\sqrt{\epsilon}}{n} & \text{si } n := \mathrm{card}\, X \text{ es par} \end{cases}$$

Definimos $o_X : (0, 1/4) \longrightarrow \mathbb{R}$: Dados $n \in \mathbb{N}$ y $\epsilon \in [\omega_{2n-1}, \omega_{2n+1})$,

El caso de los funcionales lineales I

Coincide con el caso $\operatorname{card} Y = 1$.
Recordemos:

$$\omega_n := \frac{n^2 - 1}{4n^2}$$

$o'_X : (0, 1/4) \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$o'_X(\epsilon) := \begin{cases} 2\sqrt{\frac{(n-1)\epsilon}{n+1}} & \text{si } n := \operatorname{card} X \text{ es impar y } \epsilon \leq \omega_n \\ \frac{n-1}{n} & \text{si } n := \operatorname{card} X \text{ es impar y } \epsilon > \omega_n \\ \frac{2(n-1)\sqrt{\epsilon}}{n} & \text{si } n := \operatorname{card} X \text{ es par} \end{cases}$$

Definimos $o_X : (0, 1/4) \longrightarrow \mathbb{R}$: Dados $n \in \mathbb{N}$ y $\epsilon \in [\omega_{2n-1}, \omega_{2n+1})$,

$$o_X(\epsilon) := \begin{cases} \frac{2n-1-\sqrt{1-4\epsilon}}{2n} & \text{si } 2n \leq \operatorname{card} X \end{cases}$$

El caso de los funcionales lineales I

Coincide con el caso $\operatorname{card} Y = 1$.

Recordemos:

$$\omega_n := \frac{n^2 - 1}{4n^2}$$

$o'_X : (0, 1/4) \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$o'_X(\epsilon) := \begin{cases} 2\sqrt{\frac{(n-1)\epsilon}{n+1}} & \text{si } n := \operatorname{card} X \text{ es impar y } \epsilon \leq \omega_n \\ \frac{n-1}{n} & \text{si } n := \operatorname{card} X \text{ es impar y } \epsilon > \omega_n \\ \frac{2(n-1)\sqrt{\epsilon}}{n} & \text{si } n := \operatorname{card} X \text{ es par} \end{cases}$$

Definimos $o_X : (0, 1/4) \longrightarrow \mathbb{R}$: Dados $n \in \mathbb{N}$ y $\epsilon \in [\omega_{2n-1}, \omega_{2n+1})$,

$$o_X(\epsilon) := \begin{cases} \frac{2n-1-\sqrt{1-4\epsilon}}{2n} & \text{si } 2n \leq \operatorname{card} X \\ \frac{k-1-\sqrt{1-4\epsilon}}{k} & \text{si } k := \operatorname{card} X < 2n \text{ y } k \text{ es par} \end{cases}$$

El caso de los funcionales lineales I

Coincide con el caso $\operatorname{card} Y = 1$.

Recordemos:

$$\omega_n := \frac{n^2 - 1}{4n^2}$$

$o'_X : (0, 1/4) \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$o'_X(\epsilon) := \begin{cases} 2\sqrt{\frac{(n-1)\epsilon}{n+1}} & \text{si } n := \operatorname{card} X \text{ es impar y } \epsilon \leq \omega_n \\ \frac{n-1}{n} & \text{si } n := \operatorname{card} X \text{ es impar y } \epsilon > \omega_n \\ \frac{2(n-1)\sqrt{\epsilon}}{n} & \text{si } n := \operatorname{card} X \text{ es par} \end{cases}$$

Definimos $o_X : (0, 1/4) \longrightarrow \mathbb{R}$: Dados $n \in \mathbb{N}$ y $\epsilon \in [\omega_{2n-1}, \omega_{2n+1})$,

$$o_X(\epsilon) := \begin{cases} \frac{2n-1-\sqrt{1-4\epsilon}}{2n} & \text{si } 2n \leq \operatorname{card} X \\ \frac{k-1-\sqrt{1-4\epsilon}}{k} & \text{si } k := \operatorname{card} X < 2n \text{ y } k \text{ es par} \\ \frac{k-1}{k} & \text{si } k := \operatorname{card} X < 2n \text{ y } k \text{ es impar} \end{cases}$$

El caso de los funcionales lineales II

El caso de los funcionales lineales II

Teorema (Dolinar, 2002)

El caso de los funcionales lineales II

Teorema (Dolinar, 2002)

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = 3\sqrt{\epsilon}.$$

El caso de los funcionales lineales II

Teorema (Dolinar, 2002)

somewhere $= (0, 1/9)$.

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = 3\sqrt{\epsilon}.$$

El caso de los funcionales lineales II

Teorema (Dolinar, 2002)

somewhere $= (0, 1/9)$.

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = 3\sqrt{\epsilon}.$$

Teorema (Válido para cualquier X)

somewhere $= (0, 1/4) =$ **somewhere**.

El caso de los funcionales lineales II

Teorema (Dolinar, 2002)

somewhere $= (0, 1/9)$.

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = 3\sqrt{\epsilon}.$$

Teorema (Válido para cualquier X. ÓPTIMO)

somewhere $= (0, 1/4) =$ **somewhere**.

$$\textbf{SUPER}(\epsilon) = o_X(\epsilon) = \textbf{INFER}(\epsilon)$$

Conclusión:

Teorema (X infinito)

- **somewhere** $= (0, 2/17)$, **SUPER**$(\epsilon) = \sqrt{\frac{17\epsilon}{2}}$
- **somewhere** $= (0, 1/4)$, **INFER**$(\epsilon) = 2\sqrt{\epsilon}$

Conclusión:

Teorema (X infinito)

- **somewhere** $= (0, 2/17)$, **SUPER**$(\epsilon) = \sqrt{\frac{17\epsilon}{2}}$
- **somewhere** $= (0, 1/4)$, **INFER**$(\epsilon) = 2\sqrt{\epsilon}$

Teorema (X finito)

- **somewhere** $= (0, 1/4)$, **SUPER**$(\epsilon) = 2\sqrt{\epsilon}$
- **somewhere** $= (0, 1/4)$, **INFER**$(\epsilon) = o'_X(\epsilon)$

Conclusión:

Teorema (X infinito)

- **somewhere** $= (0, 2/17)$, **SUPER**$(\epsilon) = \sqrt{\frac{17\epsilon}{2}}$
- **somewhere** $= (0, 1/4)$, **INFER**$(\epsilon) = 2\sqrt{\epsilon}$

Teorema (X finito)

- **somewhere** $= (0, 1/4)$, **SUPER**$(\epsilon) = 2\sqrt{\epsilon}$
- **somewhere** $= (0, 1/4)$, **INFER**$(\epsilon) = o'_X(\epsilon)$

Teorema (Funcionales)

- **somewhere** $= (0, 1/4) =$ **somewhere**,

  SUPER$(\epsilon) = o_X(\epsilon) =$ **INFER**(ϵ)

Conclusión: **TODOS** los resultados son **LOS MEJORES POSIBLES**

Teorema (X infinito)

- **somewhere** $= (0, 2/17)$, **SUPER**$(\epsilon) = \sqrt{\frac{17\epsilon}{2}}$
- **somewhere** $= (0, 1/4)$, **INFER**$(\epsilon) = 2\sqrt{\epsilon}$

Teorema (X finito)

- **somewhere** $= (0, 1/4)$, **SUPER**$(\epsilon) = 2\sqrt{\epsilon}$
- **somewhere** $= (0, 1/4)$, **INFER**$(\epsilon) = o'_X(\epsilon)$

Teorema (Funcionales)

- **somewhere** $= (0, 1/4) =$ **somewhere**,

  SUPER$(\epsilon) = o_X(\epsilon) =$ **INFER**(ϵ)