Teoría de Extrapolación

María J. Carro (Universidad de Barcelona)

Salobreña, Granada, 2008

Motivación

Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ y sea

$$S_n f(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{2\pi i k\theta}$$

con

$$\hat{f}(k) = \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-2\pi i k\theta} d\theta$$

los coeficientes de Fourier de f.

La pregunta que dio origen al Análisis Armónico o de Fourier (en 1800) fue estudiar cuando era cierto que

$$\boxed{S_n f(\theta) \longrightarrow f(\theta)}$$

en casi todo punto.

Enseguida se supo que la respuesta era falsa en $L^1(\mathbb{T})$ (Kolmogorof) y no fue hasta 1966 en que L. Carleson probó la convergencia si la función era de $L^2(\mathbb{T})$. Posteriormente Hunt probó que bastaba con que $f \in L^p(\mathbb{T})$ con $p > 1$.

Es bien conocido que para estudiar la convergencia en casi todo punto de una sucesión de operadores lo que hay que estudiar son acotaciones del operador maximal asociado

$$\boxed{\text{Acotación del operador maximal} \implies \text{Convergencia en casi todo punto}}$$

En nuestro caso sería el operador maximal de Carleson,

$$Sf(\theta) = \sup_n |S_n f(\theta)|.$$

Carleson and Hunt probaron que, para todo $p > 1$,

$$S : L^p(\mathbb{T}) \longrightarrow L^p(\mathbb{T})$$

es acotado.

De hecho, probaron que para todo conjunto medible $E \subset \mathbb{T}$

$$\boxed{(S\chi_E)^*(t) \lesssim \frac{1}{p-1}\left(\frac{|E|}{t}\right)^{1/p}}$$

Usando la noción de espacio de Lorentz, probaron que

$$S : L^{p,1} \longrightarrow L^{p,\infty}$$

con constante $1/(p-1)$.

Es decir, probaron una desigualdad de tipo débil-restringido y usando interpolación probaron la acotación en L^p. Es más, probaron que

$$S : L^p(\mathbb{T}) \longrightarrow L^p(\mathbb{T})$$

es acotado con constante $\frac{1}{(p-1)^2}$.

Teoría de Extrapolación

En 1951, Yano probó el siguiente resultado:

Teorema Sea T un operador sublineal tal que

$$\boxed{T : L^p(\mu) \longrightarrow L^p(\mu), \qquad \frac{1}{(p-1)^m},}$$

con μ una **medida finita**. Entonces

$$\boxed{T : L(\log L)^m(\mu) \longrightarrow L^1(\mu).}$$

Observación: De hecho, si

$$\boxed{T : L^p(\mu) \longrightarrow L^p(\nu), \qquad \frac{1}{(p-1)^m},}$$

con μ y ν medidas σ-finitas, entonces

$$\boxed{T : L(\log L)^m(\mu) \longrightarrow L^1_{loc}(\nu).}$$

En consecuencia:

$$\boxed{S_n f(\theta) \longrightarrow f(\theta)}$$

en casi todo punto, para toda función $f \in L(\log L)^2(\mathbb{T})$. Observar que si $p > 1$,

$$L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T}) \subset .... \subset L(\log L)^m(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T}).$$

Pregunta abierta

Que clase de acotación podemos obtener si

$$\boxed{T : L^{p,1}(\mu) \longrightarrow L^{p,\infty}(\nu), \qquad \frac{1}{p-1}?}$$

Sobre la Hipótesis K^* de Hardy, Littlewood y Hooley

Sea $r_k(l)$ el número de veces que el entero l se puede representar como suma de k sumandos de la forma

$$l = n_1^k + n_2^k + \cdots + n_k^k,$$

con $n_j \in \mathbb{N}$.

La Hipótesis K^* de Hardy, Littlewood y Hooley conjetura que, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{l=1}^{N} r_k(l)^2 = O(N^{1+\varepsilon}), \qquad N \to \infty.$$

Resultados conocidos:

1) El resultado es cierto para $k = 2$ y está abierto para $k > 2$.

2) C. Hooley, 1986, Acta Math.

$$\sum_{l=1}^{N} r_3(l)^2 = O(N^{\frac{20}{19}+\varepsilon}), \qquad N \to \infty.$$

3) C. Hooley, 1997, Lecture Notes 237, demuestra que la conjetura es cierta en $k = 3$ si la Hipótesis de Riemann es cierta para ciertas L-funciones de Hasse-Weil.

Teorema 1 *(Stein-Wainger 2000)*

Sea

$$m_{\lambda,k}(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n^k \theta}}{n^\lambda}.$$

Entonces, la Hipótesis K^* *es cierta si y sólo si* $m_{\lambda,k} \in L^{2k}$, *para todo* $\lambda > 1/2$.

Demostración: Supongamos que la Hipótesis K^* es cierta.

Sea $S_y(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^k (y-2i\theta)}$ con $y \in (0,1]$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 S_y(\theta) \frac{dy}{y^{1-\lambda/k}} &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi i n^k \theta} \int_0^1 e^{-\pi n^k y} \frac{dy}{y^{1-\lambda/k}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi i n^k \theta} \frac{k}{n^\lambda} \int_0^n e^{-\pi z^k} \frac{dz}{z^{1-\lambda}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi i n^k \theta} \left(\frac{C}{n^\lambda} - k \frac{\int_n^\infty e^{-\pi z^k} \frac{dz}{z^{1-\lambda}}}{n^\lambda} \right),
\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$m_{\lambda,k}(\theta) = C \int_0^1 S_y(\theta) \frac{dy}{y^{1-\lambda/k}} + O(1).$$

Entonces,

$$||m_{\lambda,k}||_{L^{2k}} \lesssim 1 + \int_0^1 ||S_y||_{L^{2k}} \frac{dy}{y^{1-\lambda/k}}.$$

Ahora bien,

$$S_y(\theta)^k = \sum_{n_1,n_2,\cdots,n_k} e^{-\pi(y-2i\theta)(n_1^k+n_2^k+\cdots+n_k^k)} = \sum_{l=1}^{\infty} r_k(l)e^{-\pi(y-2i\theta)l},$$

y, por tanto,

$$||S_y||_{L^{2k}} = ||S_y^k||_{L^2}^{1/k} = \left(\sum_{l=1}^{\infty} r_k(l)^2 e^{-2\pi yl}\right)^{1/2k}.$$

Como

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{\infty} r_k(l)^2 e^{-2\pi yl} &= (1-e^{-2\pi y})\sum_{l=1}^{\infty} r_k(l)^2 \sum_{j=l}^{\infty} e^{-2\pi yj} \\
&= (1-e^{-2\pi y})\sum_{j=1}^{\infty} e^{-2\pi yj} \sum_{l=1}^{j} r_k(l)^2 \\
&\lesssim (1-e^{-2\pi y})\sum_{j=1}^{\infty} e^{-2\pi yj} j^{1+\varepsilon} \lesssim \frac{1-e^{-2\pi y}}{y}\frac{1}{y^{1+\varepsilon}} \lesssim \frac{1}{y^{1+\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$||S_y||_{L^{2k}} \lesssim \frac{1}{y^{\frac{1+\varepsilon}{2k}}},$$

y como $\lambda > 1/2$, podemos concluir

$$||m_{\lambda,k}||_{L^{2k}} \lesssim 1 + \int_0^1 \frac{1}{y^{\frac{1+\varepsilon}{2k}+1-\frac{\lambda}{k}}} dy < \infty.$$

Recíprocamente, supongamos que $m_{\lambda,k} \in L^{2k}$, para todo $\lambda > 1/2$, entonces

$$m_{\lambda,k}(\theta)^k = \sum_{n_1,n_2,\cdots,n_k} \frac{e^{2\pi i(n_1^k+n_2^k+\cdots+n_k^k)\theta}}{n_1^\lambda n_2^\lambda \cdots n_k^\lambda} = \sum_{l=1}^{\infty} C_l e^{2\pi i l\theta} \in L^2,$$

con

$$C_l = \sum_{n_1^k+n_2^k+\cdots+n_k^k=l} \frac{1}{n_1^\lambda n_2^\lambda \cdots n_k^\lambda}.$$

Como $n_j^k \leq l$, $n_1^\lambda n_2^\lambda \cdots n_k^\lambda \leq l^\lambda$, tenemos que $C_l \geq \frac{r_k(l)}{l^\lambda}$ y, puesto que, $(C_l)_l \in \ell^2$, tenemos que, para todo $\lambda > 1/2$,

$$\frac{1}{N^{2\lambda}} \sum_{l=1}^{N} r_k(l)^2 \leq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{r_k(l)^2}{l^{2\lambda}} < \infty,$$

es decir, la hipótesis K^* sería cierta.

Operadores Discretos

La función $m_{\lambda,k}$ aparece en otros contextos.

En el año 1987, J. Bourgain empezó a estudiar problemas de convergencia ergódica en subconjuntos aritméticos.

Nosotros estamos interesado en el caso de operadores fraccionarios pues es la conexión con la Hypótesis K^*.

$$I_\lambda a(n) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{n-m^k}}{m^\lambda},$$

Observación fundamental:

$$\sum_n \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{n-m^k}}{m^\lambda} \right) e^{2\pi i n\theta} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m^k}}{m^\lambda} \right) \left(\sum_n a_n e^{2\pi i n\theta} \right)$$
$$= m_{\lambda,k}(\theta) \left(\sum_n a_n e^{2\pi i n\theta} \right);$$

es decir, la función $m_{\lambda,k}$ es el multiplicador del operador I_λ.

Se trata de estudiar acotación del tipo

$$I_\lambda : \ell^p \to \ell^q$$

El caso $k = 2$ está totalmente resuelto en una sucesión de trabajos de Stein-Wainger y D. Oberlin:

Teorema 2 *Si* $q > 1/\lambda$, $p < 1/(1-\lambda)$ *y* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1-\lambda}{2}$, *entonces*

$$I_\lambda : \ell^p \to \ell^q.$$

Estudio del operador fraccional discreto: la técnica INT-EXT

Sea

$$I_\lambda a(n) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{n-m^k}}{m^\lambda}$$

y definamos la familia analítica de operadores

$$(I_{\lambda+k})_z a(n) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{n-m^k}}{m^{\lambda+k}} e^{-\alpha z m^k},$$

con $\alpha > 0$ y $0 \leq Re(z) \leq 1$.

Si $z = it$,

$$(I_{\lambda+k})_{it} a(n) = e^{-\alpha itn} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{n-m^k}}{m^{\lambda+k}} e^{\alpha it(n-m^k)} = e^{-\alpha itn}(I_{\lambda+k})b(n)$$

con $b(n) = a(n)e^{\alpha itn}$.

Como el núcleo $\frac{1}{m^{\lambda+k}} \in \ell^1$ para todo $\lambda > 1-k$, tenemos que

$$(I_{\lambda+k})_{it} : \ell^p \longrightarrow \ell^p,$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$ y todo $\lambda > 1-k$.

Análogamente,

$$(I_{\lambda+k})_{1+it} : \ell^p \longrightarrow \ell^p,$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$ y todo $\lambda > 1-k$. Entonces, usando el teorema de interpolación analítica para la derivada

$$(I_{\lambda+k})'_{1/2} : \ell^p \longrightarrow \ell^p, \tag{1}$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$ y todo $\lambda > 1-k$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}(I_{\lambda+k})'_{1/2}a(n) &= -\alpha \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{n-m^k}}{m^\lambda} e^{\frac{-\alpha m^k}{2}} = -\alpha e^{\frac{-\alpha n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{n-m^k}}{m^\lambda} e^{\frac{\alpha(n-m^k)}{2}} \\ &= -\alpha e^{\frac{-\alpha n}{2}} I_\lambda b(n),\end{aligned}$$

con $b(n) = a(n)e^{\frac{\alpha n}{2}}$, y por tanto, deducimos de (**??**), que

$$I_\lambda : \ell^p(e^{-\alpha m^k}) \to \ell^p(e^{-\alpha m^k})$$
con constante $1/\alpha$, cualquiera que sea $\lambda > 1 - k$.

De esta forma hemos puesto el problema de la convergencia de la Serie de Fourier y el problema de la Hipótesis K* en el mismo contexto. Observar que
$$\ell^p(e^{-\alpha m^k}) = (\ell^p, \ell^p(e^{m^k}))_\alpha$$
y por tanto la estimación anterior se escribe
$$I_\lambda : (\ell^p, \ell^p(e^{m^k}))_\alpha \to (\ell^p, \ell^p(e^{m^k}))_\alpha$$
con constante $1/\alpha$.

De la misma manera
$$L^{p,1} = (L^1, L^\infty)_{1/p',1}, \qquad L^{p,\infty} = (L^{1,\infty}, L^\infty)_{1/p',\infty}$$
y así la estimación de Carleson-Hunt
$$S : L^{p,1} \longrightarrow L^{p,\infty}$$

con constante $C/(p-1)$ se reescribe

$$S : ((L^1, L^\infty)_{\theta,1} \longrightarrow (L^{1,\infty}, L^\infty)_{\theta,\infty}$$

con constante C/θ.

En definitiva, ambos problemas se incluyen dentro de la llamada teoría de Extrapolación abstracta: Qué podemos decir de un operador T tal que

$$T : (A_0, A_1)_\theta \longrightarrow (B_0, B_1)_\theta$$

con constante $1/\theta^m$?

El caso en que los espacios son de Banach está bastante estudiado pero hay muchas cuestiones abiertas en el caso quasi-Banach.

Resultados conseguidos

Teorema

Si

$$T : L^{p,1} \longrightarrow L^{p,\infty}$$

con constante $1/(p-1)$, entonces

$$T : L \log L \log \log \log L \longrightarrow L^1 + L^\infty$$

Teorema

La función

$$M_{\lambda,k}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t |m_{\lambda,k}(s)| ds \in L^{2k}$$