Algunas ideas sobre Teoría de Interpolación

Fernando Cobos

Universidad Complutense de Madrid

Abril, 2008

$\triangleright$ W.J. Davis, T. Figiel, W.B. Johnson and A. Pelczyński, J. Funct. Anal. **17** (1974) 311-327.

$\triangleright$ W.J. Davis, T. Figiel, W.B. Johnson and A. Pelczyński, J. Funct. Anal. **17** (1974) 311-327.

TEOREMA. Sean E, F espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ un operador debilmente compacto. Entonces existe un espacio de Banach reflexivo W y operadores lineales y acotados $R \in \mathcal{L}(E, W)$ y $S \in \mathcal{L}(W, F)$ tales que T se factoriza a través de W mediante los operadores R y S

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "R"'] & & F \\
& W \arrow[ur, "S"'] &
\end{tikzcd}$$

▷ W.J. Davis, T. Figiel, W.B. Johnson and A. Pelczyński, J. Funct. Anal. **17** (1974) 311-327.

TEOREMA. Sean E, F espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ un operador debilmente compacto. Entonces existe un espacio de Banach reflexivo W y operadores lineales y acotados $R \in \mathcal{L}(E, W)$ y $S \in \mathcal{L}(W, F)$ tales que T se factoriza a través de W mediante los operadores R y S

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "R"'] & & F \\ & W \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración .- Consideremos el $Ker(T)$ y el espacio de Banach cociente $X = E/Ker(T)$. Los operadores

$$Q : E \to X = E/Ker(T) \quad , \quad j : X \to F$$

son lineales y acotados. Aquí $j([x]) = Tx$. Además j es una inyección.

Pongamos

$$A_0 = j(Q(E)) = \{Tx : x \in E\}$$

con

$$\|Tx\|_{A_0} = \|[x]\|_X = \inf\{\|y\|_E : Tx = Ty\}$$

y sea $A_1 = F$.

Pongamos

$$A_0 = j(Q(E)) = \{Tx : x \in E\}$$

con

$$\|Tx\|_{A_0} = \|[x]\|_X = \mathsf{inf}\{\|y\|_E : Tx = Ty\}$$

y sea $A_1 = F$.
Se tiene

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "jQ"'] & F \\
A_0 \arrow[r, "I_{A_0}"'] & A_1 \arrow[u, "I_{A_1}"']
\end{tikzcd}$$

Pongamos

$$A_0 = j(Q(E)) = \{Tx : x \in E\}$$

con

$$\|Tx\|_{A_0} = \|[x]\|_X = \inf\{\|y\|_E : Tx = Ty\}$$

y sea $A_1 = F$.
Se tiene

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "jQ"'] & F \\
A_0 \arrow[r, "I_{A_0}"'] & A_1 \arrow[u, "I_{A_1}"']
\end{tikzcd}$$

Con $A_0 \hookrightarrow A_1$ siendo debilmente compacta.

Pongamos

$$A_0 = j(Q(E)) = \{Tx : x \in E\}$$

con

$$\|Tx\|_{A_0} = \|[x]\|_X = \inf\{\|y\|_E : Tx = Ty\}$$

y sea $A_1 = F$.
Se tiene

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "jQ"'] & F \\ A_0 \arrow[r, "I_{A_0}"'] & A_1 \arrow[u, "I_{A_1}"'] \end{tikzcd}$$

Con $A_0 \hookrightarrow A_1$ siendo debilmente compacta.

Solo necesitamos encontrar W reflexivo tal que

$$A_0 \hookrightarrow W \hookrightarrow A_1$$

Par compatible de espacios de Banach .- (B_0, B_1), B_j espacios de Banach, $B_j \hookrightarrow \mathcal{A}$, $j = 0, 1$.

Par compatible de espacios de Banach .- (B_0, B_1), B_j espacios de Banach, $B_j \hookrightarrow \mathcal{A}$, $j = 0, 1$.

$$B_0 + B_1 = \{x \in \mathcal{A} : x = x_0 + x_1, x_j \in B_j\}\ ,\ B_0 \cap B_1 = \{x \in \mathcal{A} : x \in B_0, x \in B_1\}$$

$$\|x\|_{B_0+B_1} = \inf\{\|x_0\|_{B_0} + \|x_1\|_{B_1} : x = x_0 + x_1, x_j \in B_j\}$$

$$\|x\|_{B_0 \cap B_1} = \max\{\|x\|_{B_0}, \|x\|_{B_1}\}$$

Par compatible de espacios de Banach .- (B_0, B_1), B_j espacios de Banach, $B_j \hookrightarrow \mathcal{A}$, $j = 0, 1$.

$$B_0 + B_1 = \{x \in \mathcal{A} : x = x_0 + x_1, x_j \in B_j\}\ ,\ B_0 \cap B_1 = \{x \in \mathcal{A} : x \in B_0, x \in B_1\}$$

$$\|x\|_{B_0+B_1} = \inf\{\|x_0\|_{B_0} + \|x_1\|_{B_1} : x = x_0 + x_1, x_j \in B_j\}$$

$$\|x\|_{B_0\cap B_1} = \max\{\|x\|_{B_0}, \|x\|_{B_1}\}$$

Un método de interpolación $\mathfrak{F}$ asocia a cada par compatible (B_0, B_1) un espacio intermedio

$$B_0 \cap B_1 \hookrightarrow \mathfrak{F}(B_0, B_1) \hookrightarrow B_0 + B_1$$

Par compatible de espacios de Banach .- (B_0, B_1), B_j espacios de Banach, $B_j \hookrightarrow \mathcal{A}$, $j = 0, 1$.

$$B_0 + B_1 = \{x \in \mathcal{A} : x = x_0 + x_1, x_j \in B_j\} \ , \ B_0 \cap B_1 = \{x \in \mathcal{A} : x \in B_0, x \in B_1\}$$

$$\|x\|_{B_0+B_1} = \inf\{\|x_0\|_{B_0} + \|x_1\|_{B_1} : x = x_0 + x_1, x_j \in B_j\}$$

$$\|x\|_{B_0 \cap B_1} = \max\{\|x\|_{B_0}, \|x\|_{B_1}\}$$

Un método de interpolación $\mathfrak{F}$ asocia a cada par compatible (B_0, B_1) un espacio intermedio

$$B_0 \cap B_1 \hookrightarrow \mathfrak{F}(B_0, B_1) \hookrightarrow B_0 + B_1$$

En el caso DFJP, como $A_0 \hookrightarrow A_1$, es $A_0 + A_1 = A_1$ y $A_0 \cap A_1 = A_0$ luego

$$A_0 \hookrightarrow \mathfrak{F}(A_0, A_1) \hookrightarrow A_1$$

METODO COMPLEJO

▷ A.P. Calderón, Studia Math. **24** (1964) 113-190.

METODO COMPLEJO

▷ A.P. Calderón, Studia Math. **24** (1964) 113-190.

Para cada $0 < \theta < 1$ se define $B_\theta = [B_0, B_1]_\theta$ como el espacio de los $f(\theta)$ donde

$$f : D = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq Re(z) \leq 1\} \to B_0 + B_1$$

tales que

METODO COMPLEJO

▷ A.P. Calderón, Studia Math. **24** (1964) 113-190.

Para cada $0 < \theta < 1$ se define $B_\theta = [B_0, B_1]_\theta$ como el espacio de los $f(\theta)$ donde

$$f : D = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq Re(z) \leq 1\} \to B_0 + B_1$$

tales que
• f es acotada y continua en D y analítica en el interior de D,
• las funciones $t \to f(j + it)$ $(j = 0, 1)$ son continuas de $\mathbb{R}$ en B_j y tienden a 0 cuando $|t| \to \infty$.

METODO COMPLEJO

$\triangleright$ A.P. Calderón, Studia Math. **24** (1964) 113-190.

Para cada $0 < \theta < 1$ se define $B_\theta = [B_0, B_1]_\theta$ como el espacio de los $f(\theta)$ donde

$$f : D = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq Re(z) \leq 1\} \to B_0 + B_1$$

tales que
• f es acotada y continua en D y analítica en el interior de D,
• las funciones $t \to f(j + it)$ $(j = 0, 1)$ son continuas de $\mathbb{R}$ en B_j y tienden a 0 cuando $|t| \to \infty$.

La norma en B_θ es

$$\|x\|_\theta = \inf\{\|f\| : f(\theta) = x\}$$

donde

$$\|f\| = \max_{j=0,1}\{\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(j + it)\|_{B_j}\}.$$

Teorema. Sean $(B_0, B_1), (G_0, G_1)$ pares compatibles de espacios de Banach y sea $T : B_0 + B_1 \longrightarrow G_0 + G_1$ un operador lineal tal que $T : B_j \longrightarrow G_j$ es acotado con norma M_j para $j = 0, 1$. Entonces, para cada $0 < \theta < 1$, T define un operador lineal acotado de $B_\theta = [B_0, B_1]_\theta$ en $G_\theta = [G_0, G_1]_\theta$ con norma $M \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$.

Teorema. Sean $(B_0, B_1), (G_0, G_1)$ pares compatibles de espacios de Banach y sea $T : B_0 + B_1 \longrightarrow G_0 + G_1$ un operador lineal tal que $T : B_j \longrightarrow G_j$ es acotado con norma M_j para $j = 0, 1$. Entonces, para cada $0 < \theta < 1$, T define un operador lineal acotado de $B_\theta = [B_0, B_1]_\theta$ en $G_\theta = [G_0, G_1]_\theta$ con norma $M \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$.

- $[B_{\theta_0}, B_{\theta_1}]_\eta = B_\theta$ para $\theta = (1 - \eta)\theta_0 + \eta\theta_1$.

Teorema. Sean $(B_0, B_1), (G_0, G_1)$ pares compatibles de espacios de Banach y sea $T : B_0 + B_1 \longrightarrow G_0 + G_1$ un operador lineal tal que $T : B_j \longrightarrow G_j$ es acotado con norma M_j para $j = 0, 1$. Entonces, para cada $0 < \theta < 1$, T define un operador lineal acotado de $B_\theta = [B_0, B_1]_\theta$ en $G_\theta = [G_0, G_1]_\theta$ con norma $M \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$.

• $[B_{\theta_0}, B_{\theta_1}]_\eta = B_\theta$ para $\theta = (1 - \eta)\theta_0 + \eta\theta_1$.

• Si (Ω, μ) es un espacio de medida σ-finito
$[L_1, L_\infty]_\theta = L_p$ para $1/p = 1 - \theta$.

Teorema. Sean $(B_0, B_1), (G_0, G_1)$ pares compatibles de espacios de Banach y sea $T : B_0 + B_1 \longrightarrow G_0 + G_1$ un operador lineal tal que $T : B_j \longrightarrow G_j$ es acotado con norma M_j para $j = 0, 1$. Entonces, para cada $0 < \theta < 1$, T define un operador lineal acotado de $B_\theta = [B_0, B_1]_\theta$ en $G_\theta = [G_0, G_1]_\theta$ con norma $M \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$.

• $[B_{\theta_0}, B_{\theta_1}]_\eta = B_\theta$ para $\theta = (1 - \eta)\theta_0 + \eta\theta_1$.

• Si (Ω, μ) es un espacio de medida σ-finito
$[L_1, L_\infty]_\theta = L_p$ para $1/p = 1 - \theta$.

Teorema de Riesz-Thorin. Sean $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ y sea T un operador lineal tal que $T : L_{p_j}(\Omega) \longrightarrow L_{q_j}(\Gamma)$ con norma M_j para $j = 0, 1$. Entonces, para $0 < \theta < 1$, si ponemos $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1, 1/q = (1 - \theta)/q_0 + \theta/q_1$ se tiene que $T : L_p(\Omega) \longrightarrow L_q(\Gamma)$ es acotado con norma $M \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$.

Teorema de Hausdorff-Young. Sea $2 \leq p \leq \infty, 1/p + 1/p' = 1$ y sea $f \in L_{p'}([0, 2\pi])$. Entonces los coeficientes de Fourier $(\hat{f}(m))_{m\in\mathbb{Z}}$ de f pertenecen a ℓ_p con

$$(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(m)|^p)^{1/p} \leq (\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^{p'} dx)^{1/p'}.$$

Teorema de Hausdorff-Young. Sea $2 \leq p \leq \infty, 1/p + 1/p' = 1$ y sea $f \in L_{p'}([0, 2\pi])$. Entonces los coeficientes de Fourier $(\hat{f}(m))_{m \in \mathbb{Z}}$ de f pertenecen a ℓ_p con

$$(\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(m)|^p)^{1/p} \leq (\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^{p'} dx)^{1/p'}.$$

Demostración .- Sea $T(f) = (\hat{f}(m))_{m \in \mathbb{Z}}$ donde

$$\hat{f}(m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx.$$

Teorema de Hausdorff-Young. Sea $2 \leq p \leq \infty, 1/p + 1/p' = 1$ y sea $f \in L_{p'}([0, 2\pi])$. Entonces los coeficientes de Fourier $(\hat{f}(m))_{m\in\mathbb{Z}}$ de f pertenecen a ℓ_p con

$$(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(m)|^p)^{1/p} \leq (\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^{p'} dx)^{1/p'}.$$

Demostración .- Sea $T(f) = (\hat{f}(m))_{m\in\mathbb{Z}}$ donde

$$\hat{f}(m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx.$$

- $T : L_1([0, 2\pi]) \longrightarrow \ell_\infty$ con norma $M_0 \leq \frac{1}{2\pi}$.

Teorema de Hausdorff-Young. Sea $2 \leq p \leq \infty, 1/p + 1/p' = 1$ y sea $f \in L_{p'}([0, 2\pi])$. Entonces los coeficientes de Fourier $(\hat{f}(m))_{m\in\mathbb{Z}}$ de f pertenecen a ℓ_p con

$$(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(m)|^p)^{1/p} \leq (\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^{p'} dx)^{1/p'}.$$

Demostración .- Sea $T(f) = (\hat{f}(m))_{m\in\mathbb{Z}}$ donde

$$\hat{f}(m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx.$$

- $T : L_1([0, 2\pi]) \longrightarrow \ell_\infty$ con norma $M_0 \leq \frac{1}{2\pi}$.
- $T : L_2([0, 2\pi]) \longrightarrow \ell_2$ con norma $M_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Teorema de Hausdorff-Young. Sea $2 \leq p \leq \infty, 1/p + 1/p' = 1$ y sea $f \in L_{p'}([0, 2\pi])$. Entonces los coeficientes de Fourier $(\hat{f}(m))_{m\in\mathbb{Z}}$ de f pertenecen a ℓ_p con

$$(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(m)|^p)^{1/p} \leq (\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^{p'} dx)^{1/p'}.$$

Demostración .- Sea $T(f) = (\hat{f}(m))_{m\in\mathbb{Z}}$ donde

$$\hat{f}(m) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-imx} dx.$$

- $T : L_1([0, 2\pi]) \longrightarrow \ell_\infty$ con norma $M_0 \leq \frac{1}{2\pi}$.
- $T : L_2([0, 2\pi]) \longrightarrow \ell_2$ con norma $M_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Sea $0 < \theta < 1$ tal que $1/p' = (1 - \theta) + \theta/2$. Asi $1/p = \theta/2$ y el teorema de Riesz-Thorin da que

Teorema de Hausdorff-Young. Sea $2 \leq p \leq \infty, 1/p + 1/p' = 1$ y sea $f \in L_{p'}([0, 2\pi])$. Entonces los coeficientes de Fourier $(\hat{f}(m))_{m \in \mathbb{Z}}$ de f pertenecen a ℓ_p con

$$(\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(m)|^p)^{1/p} \leq (\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^{p'} dx)^{1/p'}.$$

Demostración .- Sea $T(f) = (\hat{f}(m))_{m \in \mathbb{Z}}$ donde

$$\hat{f}(m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx.$$

- $T : L_1([0, 2\pi]) \longrightarrow \ell_\infty$ con norma $M_0 \leq \frac{1}{2\pi}$.
- $T : L_2([0, 2\pi]) \longrightarrow \ell_2$ con norma $M_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Sea $0 < \theta < 1$ tal que $1/p' = (1 - \theta) + \theta/2$. Asi $1/p = \theta/2$ y el teorema de Riesz-Thorin da que

$T : L_{p'}([0, 2\pi]) \longrightarrow \ell_p$ con norma $M \leq (\frac{1}{2\pi})^{1-\theta} (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^\theta = (\frac{1}{2\pi})^{1/p'}$.

• Puede ocurrir que $[A_0, A_1]_\theta$ no sea reflexivo aunque $A_0 \hookrightarrow A_1$ sea debilmente compacta.

• Puede ocurrir que $[A_0, A_1]_\theta$ no sea reflexivo aunque $A_0 \hookrightarrow A_1$ sea debilmente compacta.

Trabajando sobre (Ω, μ), se definen los espacios de funciones de Lorentz $L_{p,q}$ para $1 < p < \infty$ y $1 \le q \le \infty$ como

$$L_{p,q} = \Big\{ f : \|f\|_{p,q} = \Big(\int_0^\infty (t^{1/p} f^{**}(t))^q \frac{dt}{t} \Big)^{1/q} < \infty \Big\}.$$

• Puede ocurrir que $[A_0, A_1]_\theta$ no sea reflexivo aunque $A_0 \hookrightarrow A_1$ sea debilmente compacta.

Trabajando sobre (Ω, μ), se definen los espacios de funciones de Lorentz $L_{p,q}$ para $1 < p < \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$ como

$$L_{p,q} = \Big\{ f : \|f\|_{p,q} = \Big(\int_0^\infty (t^{1/p} f^{**}(t))^q \frac{dt}{t} \Big)^{1/q} < \infty \Big\}.$$

Aqui

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds$$

y f^* es la reordenada decreciente de la f

$$f^*(s) = \inf\{t > 0 : \mu\{x : |f(x)| > t\} \leq s\}.$$

• Puede ocurrir que $[A_0, A_1]_\theta$ no sea reflexivo aunque $A_0 \hookrightarrow A_1$ sea debilmente compacta.

Trabajando sobre (Ω, μ), se definen los espacios de funciones de Lorentz $L_{p,q}$ para $1 < p < \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$ como

$$L_{p,q} = \Big\{ f : \|f\|_{p,q} = \Big(\int_0^\infty (t^{1/p} f^{**}(t))^q \frac{dt}{t} \Big)^{1/q} < \infty \Big\}.$$

Aqui

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds$$

y f^* es la reordenada decreciente de la f

$$f^*(s) = \inf\{t > 0 : \mu\{x : |f(x)| > t\} \leq s\}.$$

Se tiene $L_{p,1} \hookrightarrow L_{p,p} = L_p \hookrightarrow L_{p,\infty}$

• Puede ocurrir que $[A_0, A_1]_\theta$ no sea reflexivo aunque $A_0 \hookrightarrow A_1$ sea debilmente compacta.

Trabajando sobre (Ω, μ), se definen los espacios de funciones de Lorentz $L_{p,q}$ para $1 < p < \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$ como

$$L_{p,q} = \Big\{ f : \|f\|_{p,q} = \Big(\int_0^\infty (t^{1/p} f^{**}(t))^q \frac{dt}{t} \Big)^{1/q} < \infty \Big\}.$$

Aqui

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds$$

y f^* es la reordenada decreciente de la f

$$f^*(s) = \inf\{t > 0 : \mu\{x : |f(x)| > t\} \leq s\}.$$

Se tiene $L_{p,1} \hookrightarrow L_{p,p} = L_p \hookrightarrow L_{p,\infty}$

▷ L. Maligranda, Acta Appl. Math. **27** (1992) 79-89.

- $\Omega = [0,1]$ y para $1 < r < \infty$ pongamos $L^0_{r,\infty}$ para denotar el cierre L_∞ en $L_{r,\infty}$.

$$(L^0_{r,\infty})^{**} = L_{r,\infty}$$

- $\Omega = [0,1]$ y para $1 < r < \infty$ pongamos $L^0_{r,\infty}$ para denotar el cierre L_∞ en $L_{r,\infty}$.

$$(L^0_{r,\infty})^{**} = L_{r,\infty}$$

Tomemos $1 < p < r < q < \infty$ y sea $0 < \theta < 1$ tal que $1/r = (1-\theta)/q + \theta/p$. Se tiene

$$L^0_{q,\infty} \hookrightarrow L_r \hookrightarrow L^0_{p,\infty}$$

• $\Omega = [0,1]$ y para $1 < r < \infty$ pongamos $L^0_{r,\infty}$ para denotar el cierre L_∞ en $L_{r,\infty}$.

$$(L^0_{r,\infty})^{**} = L_{r,\infty}$$

Tomemos $1 < p < r < q < \infty$ y sea $0 < \theta < 1$ tal que $1/r = (1-\theta)/q + \theta/p$. Se tiene

$$L^0_{q,\infty} \hookrightarrow L_r \hookrightarrow L^0_{p,\infty}$$

Pero

$$(L^0_{q,\infty}, L^0_{p,\infty})_{[\theta]} = L^0_{r,\infty}$$

que no es un espacio reflexivo.

METODO REAL

▷ J.L. Lions and J. Peetre, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **19** (1964) 5-68.

METODO REAL

$\triangleright$ J.L. Lions and J. Peetre, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **19** (1964) 5-68.

Sea (B_0, B_1) un par compatible de espacios de Banach. Para $x \in B_0 + B_1$ y $t > 0$ el K-funcional se define por

$$K(t,x) = \inf\{\|x_0\|_{B_0} + t\|x_1\|_{B_1} \; : x = x_0 + x_1,\, x_j \in B_j\}, \quad t > 0.$$

METODO REAL

$\triangleright$ J.L. Lions and J. Peetre, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **19** (1964) 5-68.

Sea (B_0, B_1) un par compatible de espacios de Banach. Para $x \in B_0 + B_1$ y $t > 0$ el K-funcional se define por

$$K(t,x) = \inf\{\|x_0\|_{B_0} + t\|x_1\|_{B_1} \ : x = x_0 + x_1,\, x_j \in B_j\}, \quad t > 0.$$

Para $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$

$$(B_0, B_1)_{\theta,q} = \left\{ x \in B_0 + B_1 : \|x\|_{\theta,q} = \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} K(t,x) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}$$

METODO REAL

▷ J.L. Lions and J. Peetre, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **19** (1964) 5-68.

Sea (B_0, B_1) un par compatible de espacios de Banach. Para $x \in B_0 + B_1$ y $t > 0$ el

K-funcional se define por

$$K(t,x) = \inf\{\|x_0\|_{B_0} + t\|x_1\|_{B_1} \, : x = x_0 + x_1, \, x_j \in B_j\}, \quad t > 0.$$

Para $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$

$$(B_0, B_1)_{\theta,q} = \left\{ x \in B_0 + B_1 : \|x\|_{\theta,q} = \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} K(t,x) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}$$

Teorema. Sean $(B_0, B_1), (G_0, G_1)$ pares compatibles de espacios de Banach y sea $T : B_0 + B_1 \longrightarrow G_0 + G_1$ un operador lineal tal que $T : B_j \longrightarrow G_j$ es acotado con norma M_j para $j = 0, 1$. Entonces, para cada $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$, T define un operador lineal acotado de $B_{\theta,q} = (B_0, B_1)_{\theta,q}$ en $G_{\theta,q} = (G_0, G_1)_{\theta,q}$ con norma $M \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$.

METODO REAL

▷ J.L. Lions and J. Peetre, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **19** (1964) 5-68.

Sea (B_0, B_1) un par compatible de espacios de Banach. Para $x \in B_0 + B_1$ y $t > 0$ el K-funcional se define por

$$K(t,x) = \inf\{\|x_0\|_{B_0} + t\|x_1\|_{B_1} : x = x_0 + x_1,\, x_j \in B_j\}, \quad t > 0.$$

Para $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$

$$(B_0, B_1)_{\theta,q} = \left\{ x \in B_0 + B_1 : \|x\|_{\theta,q} = \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} K(t,x) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}$$

Teorema. Sean $(B_0, B_1), (G_0, G_1)$ pares compatibles de espacios de Banach y sea $T : B_0 + B_1 \longrightarrow G_0 + G_1$ un operador lineal tal que $T : B_j \longrightarrow G_j$ es acotado con norma M_j para $j = 0, 1$. Entonces, para cada $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$, T define un operador lineal acotado de $B_{\theta,q} = (B_0, B_1)_{\theta,q}$ en $G_{\theta,q} = (G_0, G_1)_{\theta,q}$ con norma $M \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$.

- $(B_{\theta_0,q_0}, B_{\theta_1,q_1})_{\eta,q} = B_{\theta,q}$ para $\theta = (1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1$.

- Trabajando sobre (Ω, μ) se tiene

$$(L_1, L_\infty)_{\theta,q} = L_{p,q}\,,\ \frac{1}{p} = 1 - \theta\,,\ 1 \leq q \leq \infty.$$

De hecho el K- funcional para el par (L_1, L_∞) es

$$K(t,f) = \int_0^t f^*(s)ds.$$

- Trabajando sobre (Ω, μ) se tiene

$$(L_1, L_\infty)_{\theta,q} = L_{p,q}\,,\ \frac{1}{p} = 1-\theta\,,\ 1 \leq q \leq \infty.$$

De hecho el K- funcional para el par (L_1, L_∞) es

$$K(t,f) = \int_0^t f^*(s)ds.$$

La fórmula de reiteracion da para $1 \leq p_0 \neq p_1 \leq \infty, 1 \leq q_0, q_1, q \leq \infty, 0 < \theta < 1$ y $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ que

$$(L_{p_0,q_0}, L_{p_1,q_1})_{\theta,q} = L_{p,q}$$

- Trabajando sobre (Ω, μ) se tiene

$$(L_1, L_\infty)_{\theta,q} = L_{p,q}\,,\ \frac{1}{p} = 1 - \theta\,,\ 1 \leq q \leq \infty.$$

De hecho el K- funcional para el par (L_1, L_∞) es

$$K(t,f) = \int_0^t f^*(s)ds.$$

La fórmula de reiteracion da para $1 \leq p_0 \neq p_1 \leq \infty, 1 \leq q_0, q_1, q \leq \infty, 0 < \theta < 1$ y $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ que

$$(L_{p_0,q_0}, L_{p_1,q_1})_{\theta,q} = L_{p,q}$$

$$(\ell_{p_0,q_0}, \ell_{p_1,q_1})_{\theta,q} = \ell_{p,q}$$

$$\ell_{p,q} = \Big\{(\xi_m) \in c_0 : \|(\xi_m)\|_{p,q} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{p}-1}\sum_{j=1}^{n}|\xi_j^*|)^q n^{-1}\Big)^{1/q} < \infty\Big\}$$

• Trabajando sobre (Ω, μ) se tiene

$$(L_1, L_\infty)_{\theta,q} = L_{p,q}\,,\ \frac{1}{p} = 1 - \theta\,,\ 1 \leq q \leq \infty.$$

De hecho el K- funcional para el par (L_1, L_∞) es

$$K(t,f) = \int_0^t f^*(s)ds.$$

La fórmula de reiteracion da para $1 \leq p_0 \neq p_1 \leq \infty, 1 \leq q_0, q_1, q \leq \infty, 0 < \theta < 1$ y $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ que

$$(L_{p_0,q_0}, L_{p_1,q_1})_{\theta,q} = L_{p,q}$$

$$(\ell_{p_0,q_0}, \ell_{p_1,q_1})_{\theta,q} = \ell_{p,q}$$

$$\ell_{p,q} = \Big\{(\xi_m) \in c_0 : \|(\xi_m)\|_{p,q} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{p}-1}\sum_{j=1}^{n}|\xi_j^*|)^q n^{-1}\Big)^{1/q} < \infty\Big\}$$

$$|\xi_1^*| \geq |\xi_2^*| \geq \cdots\ \ ,\ \ \ell_{p,p} = \ell_p.$$

Si $p < r$ se tiene $\ell_{p,q} \subsetneqq \ell_{r,s}$ y si $q < s$ se tiene $\ell_{p,q} \subsetneqq \ell_{p,s}$.

Si $p < r$ se tiene $\ell_{p,q} \subsetneqq \ell_{r,s}$ y si $q < s$ se tiene $\ell_{p,q} \subsetneqq \ell_{p,s}$.

Si $2 < p < \infty$ tenemos $\ell_{p,p'} \subsetneqq \ell_{p,p} = \ell_p$.

Si $p < r$ se tiene $\ell_{p,q} \subsetneqq \ell_{r,s}$ y si $q < s$ se tiene $\ell_{p,q} \subsetneqq \ell_{p,s}$.

Si $2 < p < \infty$ tenemos $\ell_{p,p'} \subsetneqq \ell_{p,p} = \ell_p$.

Teorema de Paley. Sea $2 \leq p < \infty, 1/p + 1/p' = 1$ y sea $f \in L_{p'}([0, 2\pi])$. Entonces los coeficientes de Fourier $(\hat{f}(m))_{m\in\mathbb{Z}}$ de f pertenecen a $\ell_{p,p'}$ con $\|(\hat{f}(m))\|_{p,p'} \leq c_p \|f\|_{p'}$ donde la constante c_p sólo depende de p.

Si $p < r$ se tiene $\ell_{p,q} \subsetneqq \ell_{r,s}$ y si $q < s$ se tiene $\ell_{p,q} \subsetneqq \ell_{p,s}$.

Si $2 < p < \infty$ tenemos $\ell_{p,p'} \subsetneqq \ell_{p,p} = \ell_p$.

Teorema de Paley. Sea $2 \leq p < \infty, 1/p + 1/p' = 1$ y sea $f \in L_{p'}([0, 2\pi])$. Entonces los coeficientes de Fourier $(\hat{f}(m))_{m\in\mathbb{Z}}$ de f pertenecen a $\ell_{p,p'}$ con $\|(\hat{f}(m))\|_{p,p'} \leq c_p\|f\|_{p'}$ donde la constante c_p sólo depende de p.

Demostración .- Sabemos que $T(f) = (\hat{f}(m))_{m\in\mathbb{Z}}$ satisface
- $T : L_1([0, 2\pi]) \longrightarrow \ell_\infty$
- $T : L_2([0, 2\pi]) \longrightarrow \ell_2$

Si $p < r$ se tiene $\ell_{p,q} \subsetneq \ell_{r,s}$ y si $q < s$ se tiene $\ell_{p,q} \subsetneq \ell_{p,s}$.

Si $2 < p < \infty$ tenemos $\ell_{p,p'} \subsetneq \ell_{p,p} = \ell_p$.

Teorema de Paley. Sea $2 \leq p < \infty, 1/p + 1/p' = 1$ y sea $f \in L_{p'}([0, 2\pi])$. Entonces los coeficientes de Fourier $(\hat{f}(m))_{m\in\mathbb{Z}}$ de f pertenecen a $\ell_{p,p'}$ con $\|(\hat{f}(m))\|_{p,p'} \leq c_p \|f\|_{p'}$ donde la constante c_p sólo depende de p.

Demostración .- Sabemos que $T(f) = (\hat{f}(m))_{m\in\mathbb{Z}}$ satisface
• $T : L_1([0, 2\pi]) \longrightarrow \ell_\infty$
• $T : L_2([0, 2\pi]) \longrightarrow \ell_2$

Sea $0 < \theta < 1$ tal que $1/p' = (1 - \theta) + \theta/2$. Interpolando por el método real tenemos

Si $p < r$ se tiene $\ell_{p,q} \subsetneqq \ell_{r,s}$ y si $q < s$ se tiene $\ell_{p,q} \subsetneqq \ell_{p,s}$.

Si $2 < p < \infty$ tenemos $\ell_{p,p'} \subsetneqq \ell_{p,p} = \ell_p$.

Teorema de Paley. Sea $2 \leq p < \infty, 1/p + 1/p' = 1$ y sea $f \in L_{p'}([0, 2\pi])$. Entonces los coeficientes de Fourier $(\hat{f}(m))_{m\in\mathbb{Z}}$ de f pertenecen a $\ell_{p,p'}$ con $\|(\hat{f}(m))\|_{p,p'} \leq c_p \|f\|_{p'}$ donde la constante c_p sólo depende de p.

Demostración .- Sabemos que $T(f) = (\hat{f}(m))_{m\in\mathbb{Z}}$ satisface
- $T : L_1([0, 2\pi]) \longrightarrow \ell_\infty$
- $T : L_2([0, 2\pi]) \longrightarrow \ell_2$

Sea $0 < \theta < 1$ tal que $1/p' = (1 - \theta) + \theta/2$. Interpolando por el método real tenemos

$$T : (L_1, L_2)_{\theta,p'} = L_{p'} \longrightarrow (\ell_\infty, \ell_2)_{\theta,p'} = \ell_{p,p'}$$

Si $p < r$ se tiene $\ell_{p,q} \subsetneqq \ell_{r,s}$ y si $q < s$ se tiene $\ell_{p,q} \subsetneqq \ell_{p,s}$.

Si $2 < p < \infty$ tenemos $\ell_{p,p'} \subsetneqq \ell_{p,p} = \ell_p$.

Teorema de Paley. Sea $2 \leq p < \infty, 1/p + 1/p' = 1$ y sea $f \in L_{p'}([0, 2\pi])$. Entonces los coeficientes de Fourier $(\hat{f}(m))_{m\in\mathbb{Z}}$ de f pertenecen a $\ell_{p,p'}$ con $\|(\hat{f}(m))\|_{p,p'} \leq c_p \|f\|_{p'}$ donde la constante c_p sólo depende de p.

Demostración .- Sabemos que $T(f) = (\hat{f}(m))_{m\in\mathbb{Z}}$ satisface
- $T : L_1([0, 2\pi]) \longrightarrow \ell_\infty$
- $T : L_2([0, 2\pi]) \longrightarrow \ell_2$

Sea $0 < \theta < 1$ tal que $1/p' = (1 - \theta) + \theta/2$. Interpolando por el método real tenemos

$$T : (L_1, L_2)_{\theta,p'} = L_{p'} \longrightarrow (\ell_\infty, \ell_2)_{\theta,p'} = \ell_{p,p'}$$

Teorema de Marcinkiewicz. Sean $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ con $q_0 \neq q_1$ y sea T un operador lineal tal que $T : L_{p_j}(\Omega) \longrightarrow L_{q_j,\infty}(\Gamma)$ con norma M_j para $j = 0, 1$. Sea $0 < \theta < 1$ y pongamos $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1, 1/q = (1 - \theta)/q_0 + \theta/q_1$. Si $p \leq q$ se tiene que $T : L_p(\Omega) \longrightarrow L_q(\Gamma)$ es acotado con norma $M \leq cM_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$.

- ▷ B. Beauzamy, Lect. Notes in Math. **666**, 1978.

$\triangleright$ B. Beauzamy, Lect. Notes in Math. **666**, 1978.

Si $1 < q < \infty$ y la inclusión $B_0 \cap B_1 \hookrightarrow B_0 + B_1$ es debilmente compacta, entonces $(B_0, B_1)_{\theta,q}$ es reflexivo.

$\triangleright$ B. Beauzamy, Lect. Notes in Math. **666**, 1978.

Si $1 < q < \infty$ y la inclusión $B_0 \cap B_1 \hookrightarrow B_0 + B_1$ es debilmente compacta, entonces $(B_0, B_1)_{\theta,q}$ es reflexivo.

$$W = (A_0, A_1)_{\theta,2}$$

$\triangleright$ B. Beauzamy, Lect. Notes in Math. **666**, 1978.

Si $1 < q < \infty$ y la inclusión $B_0 \cap B_1 \hookrightarrow B_0 + B_1$ es debilmente compacta, entonces $(B_0, B_1)_{\theta,q}$ es reflexivo.

$$W = (A_0, A_1)_{\theta,2}$$

$\triangleright$ S. Heinrich, J. Funct. Anal. **35** (1980) 397-411.

Propiedades de interpolación de ideales de operadores

Propiedades de interpolación de ideales de operadores

▷ F. Cobos, A. Manzano, A. Martínez, *Interpolation theory and measures related to operator ideals*, Quart. J. Math. **50** (1999) 401-416.

▷ F. Cobos, A. Manzano, A. Martínez,P. Matos *On interpolation of strictly singular operators, strictly co-singular operators and related operator ideals*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **130A** (2000) 971-989.

▷ F. Cobos, T. Signes, *On a result of Peetre about interpolation of operator spaces*, Publ. Mat. **44** (2000) 457-481.

▷ F. Cobos,L.M. Fernández-Cabrera, A. Manzano, A. Martínez, *Real interpolation and closed operator ideals*, J. Math. Pures Appl. **83** (2004) 417-432.

▷ F. Cobos,L.M. Fernández-Cabrera, A. Manzano, A. Martínez, *On interpolation of Asplund operators*, Math. Z. **250** (2005) 267-277.

▷ L.M. Fernández-Cabrera, A. Martínez, *Interpolation of ideal measures by abstract K and J spaces*, Acta Math. Sinica (English Series) **23** (2007) 1357-1374.

Interpolación de operadores compactos y de la medida de no compacidad

Interpolación de operadores compactos y de la medida de no compacidad

▷ F. Cobos, D.L. Fernandez, *On interpolation of compact operators*, Ark. Mat. **27** (1989) 211-217.

▷ F. Cobos, J. Peetre, *Interpolation of compactness using Aronzajn-Gagliardo functors*, Israel J. Math. **68** (1989) 220-240.

▷ F. Cobos, D.E. Edmunds, A.J.B. Potter*Real interpolation and compact linear operators*, J. Funct. Anal. **88** (1990) 351-365.

▷ F. Cobos, J. Peetre, *Interpolation of compact operators: The multidimensional case*, Proc. London Math. Soc. **63** (1991) 371-400.

▷ F. Cobos, T. Kühn and T. Schonbek, *One-sided compactness results for Aronszajn-Gagliardo functors*, J. Funct. Anal. **106** (1992) 274-313.

▷ F. Cobos, P. Fernández-Martínez, A. Martínez, *Interpolation of the measure of non-compactness by the real method*, Studia Math. **135** (1999) 25-38.

▷ F. Cobos, L.M. Fernández-Cabrera, A. Martínez, *Complex interpolation, minimal methods and compact operators*, Math. Nachr. **263-264** (2004) 67-82.

▷ F. Cobos, L.M. Fernández-Cabrera, A. Martínez, *Compact operators between K- and J-spaces*, Studia Math. **166** (2005) 199-220.

▷ F. Cobos, L.M. Fernández-Cabrera, A. Martínez, *Abstract K and J spaces and measure of non-compactness*, Math. Nachr. **280** (2007) 1698-1708.

▷ L.M. Fernández-Cabrera, A. Martínez, *Interpolation methods defined by means of polygons and compact operators*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **50** (2007) 653-671.

Interpolación de álgebras de Banach

Interpolación de álgebras de Banach

▷ F. Cobos,L.M. Fernández-Cabrera, A. Martínez, *On interpolation of Banach algebras and factorization of weakly compact operators* , Bull. Sci. math. **130** (2006) 637-645.

▷ F. Cobos,L.M. Fernández-Cabrera, *On the relationship between interpolation of Banach algebras and interpolation of bilinear operators* , Canad. Math. Bull. (to appear).

▷ F. Cobos,L.M. Fernández-Cabrera, *Factoring weakly compact homomorphisms, interpolation of Banach algebras and multilinear interpolation* , Banach Center Publ. (to appear).

Interpolación de álgebras de Banach

▷ F. Cobos,L.M. Fernández-Cabrera, A. Martínez, *On interpolation of Banach algebras and factorization of weakly compact operators* , Bull. Sci. math. **130** (2006) 637-645.

▷ F. Cobos,L.M. Fernández-Cabrera, *On the relationship between interpolation of Banach algebras and interpolation of bilinear operators* , Canad. Math. Bull. (to appear).

▷ F. Cobos,L.M. Fernández-Cabrera, *Factoring weakly compact homomorphisms, interpolation of Banach algebras and multilinear interpolation* , Banach Center Publ. (to appear).

Interpolación y espacios de funciones

Interpolación de álgebras de Banach

▷ F. Cobos,L.M. Fernández-Cabrera, A. Martínez, *On interpolation of Banach algebras and factorization of weakly compact operators* , Bull. Sci. math. **130** (2006) 637-645.

▷ F. Cobos,L.M. Fernández-Cabrera, *On the relationship between interpolation of Banach algebras and interpolation of bilinear operators* , Canad. Math. Bull. (to appear).

▷ F. Cobos,L.M. Fernández-Cabrera, *Factoring weakly compact homomorphisms, interpolation of Banach algebras and multilinear interpolation* , Banach Center Publ. (to appear).

Interpolación y espacios de funciones

▷ F. Cobos, E. Pustylnik, *On strictly singular and strictly cosingular embeddings between Banach lattices of functions*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **133** (2002) 183-190.

▷ L.M. Fernández-Cabrera, *Inclusion indices of function spaces and applications*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **136** (2004) 665-674.

▷ F. Cobos,L.M. Fernández-Cabrera, H. Triebel, *Abstract and concrete logarithmic interpolation spaces*, J. London Math. Soc. **70** (2004) 231-243.

▷ F. Cobos,L.M. Fernández-Cabrera, A. Manzano, A. Martínez, *Logarithmic interpolation spaces between quasi-Banach spaces* , Z. Anal. Anwendungen **26** (2007) 65-86.

Espacios de formas multilineales sobre espacios de Hilbert

Espacios de formas multilineales sobre espacios de Hilbert

▷ F. Cobos, T. Kühn, J. Peetre, *Schatten-von Neumann classes of multilinear forms*, Duke Math. J. **65** (1992) 121-156.

Espacios de formas multilineales sobre espacios de Hilbert

▷ F. Cobos, T. Kühn, J. Peetre, *Schatten-von Neumann classes of multilinear forms*, Duke Math. J. **65** (1992) 121-156.

▷ F. Cobos, T. Kühn, J. Peetre, *On S_p-classes of trilinear forms* , J. London Math. Soc. **59** (1999) 1003-1022.

▷ F. Cobos, T. Kühn, J. Peetre, *Extreme points of the complex binary trilinear forms*, Studia Math. **138** (2000) 81-92.

▷ F. Cobos, T. Kühn, J. Peetre, *Multilinear forms of Hilbert type and some other distinguished forms*, Integr. Equ. Oper. Theory **56** (2006) 57-70.

Comportamiento asintótico de los números de entropía

Comportamiento asintótico de los números de entropía

Para $T \in \mathcal{L}(E, F)$ se define el el k-ésimo número de entropía (diádico) $e_k(T)$ de T como el ínfimo de todos los $\varepsilon > 0$ tales que existen $y_1, \ldots, y_q \in Y$ con $q \leq 2^{k-1}$ tales que

$$T(U_E) \subseteqq \bigcup_{j=1}^{q} (y_j + \varepsilon U_F)$$

donde U_E, U_F son las bolas unidad cerradas de E y F, respectivamente.

Comportamiento asintótico de los números de entropía

Para $T \in \mathcal{L}(E, F)$ se define el el k-ésimo número de entropía (diádico) $e_k(T)$ de T como el ínfimo de todos los $\varepsilon > 0$ tales que existen $y_1, \ldots, y_q \in Y$ con $q \leq 2^{k-1}$ tales que

$$T(U_E) \subseteqq \bigcup_{j=1}^{q} (y_j + \varepsilon U_F)$$

donde U_E, U_F son las bolas unidad cerradas de E y F, respectivamente.

- T es compacto si y solo si $lim_{k \to \infty} e_k(T) = 0$.

Comportamiento asintótico de los números de entropía

Para $T \in \mathcal{L}(E, F)$ se define el el k-ésimo número de entropía (diádico) $e_k(T)$ de T como el ínfimo de todos los $\varepsilon > 0$ tales que existen $y_1, \ldots, y_q \in Y$ con $q \leq 2^{k-1}$ tales que

$$T(U_E) \subseteqq \bigcup_{j=1}^{q} (y_j + \varepsilon U_F)$$

donde U_E, U_F son las bolas unidad cerradas de E y F, respectivamente.

- T es compacto si y solo si $lim_{k \to \infty} e_k(T) = 0$.

Si E es un espacio cuasi-Banach complejo y $T \in \mathcal{L}(E, E)$ es un operador compacto, se denota por $(\lambda_k(T))$ la sucesión de los autovalores de T, repetidos de acuerdo a su multiplicidad y ordenados de forma decreciente de acuerdo a sus módulos.

Comportamiento asintótico de los números de entropía

Para $T \in \mathcal{L}(E, F)$ se define el el k-ésimo número de entropía (diádico) $e_k(T)$ de T como el ínfimo de todos los $\varepsilon > 0$ tales que existen $y_1, \ldots, y_q \in Y$ con $q \leq 2^{k-1}$ tales que

$$T(U_E) \subseteqq \bigcup_{j=1}^{q} (y_j + \varepsilon U_F)$$

donde U_E, U_F son las bolas unidad cerradas de E y F, respectivamente.

- T es compacto si y solo si $lim_{k \to \infty} e_k(T) = 0$.

Si E es un espacio cuasi-Banach complejo y $T \in \mathcal{L}(E, E)$ es un operador compacto, se denota por $(\lambda_k(T))$ la sucesión de los autovalores de T, repetidos de acuerdo a su multiplicidad y ordenados de forma decreciente de acuerdo a sus módulos.

- $|\lambda_k(T)| \leq \sqrt{2} e_k(T)$, para cada $k \in \mathbb{N}$

Comportamiento asintótico de los números de entropía

Para $T \in \mathcal{L}(E, F)$ se define el el k-ésimo número de entropía (diádico) $e_k(T)$ de T como el ínfimo de todos los $\varepsilon > 0$ tales que existen $y_1, \ldots, y_q \in Y$ con $q \leq 2^{k-1}$ tales que

$$T(U_E) \subseteq \bigcup_{j=1}^{q} (y_j + \varepsilon U_F)$$

donde U_E, U_F son las bolas unidad cerradas de E y F, respectivamente.

- T es compacto si y solo si $lim_{k\to\infty} e_k(T) = 0$.

Si E es un espacio cuasi-Banach complejo y $T \in \mathcal{L}(E, E)$ es un operador compacto, se denota por $(\lambda_k(T))$ la sucesión de los autovalores de T, repetidos de acuerdo a su multiplicidad y ordenados de forma decreciente de acuerdo a sus módulos.

- $|\lambda_k(T)| \leq \sqrt{2} e_k(T)$, para cada $k \in \mathbb{N}$

Decaimiento de los números de entropía de inclusiones entre espacios de funciones.

▷ F. Cobos, T. Kühn, *Entropy numbers of embeddings of Besov spaces in generalized Lipschitz spaces*, J. Approx. Theory **112** (2001) 73-92.

▷ F. Cobos, T. Kühn, T. Schonbek, *Compact embeddings of Brézis-Wainger type*, Rev. Mat. Iberoamericana **22** (2006) 305-322.

▷ T. Kühn, H.-G. Leopold, W. Sickel, L. Skrzypczak, *Entropy numbers of embeddings of weighted Besov spaces*, Contr. Approx. **23** (2006) 61-77.

▷ F. Cobos, T. Kühn, *Approximation and entropy numbers in Besov spaces of generalized smoothness*, J. Approx. Theory (to appear).