Espacios de Funciones puntualmente Lipschitz sobre Espacios Métricos

Estibalitz Durand Cartagena
Jesús Ángel Jaramillo Aguado
UCM

3 de abril de 2008

Espacios de funciones D^∞

Espacios D^∞

Definición

Sea (X,d) un espacio métrico y $f : X \to \mathbb{R}$. Se define

$$\operatorname{Lip} f(x) = \limsup_{\substack{y\to x\\ y\neq x}} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}$$

para cada $x \in X$.

Espacios D^∞

Definición

Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \to \mathbb{R}$. Se define

$$\operatorname{Lip} f(x) = \limsup_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}$$

para cada $x \in X$.

- $D(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : \|\operatorname{Lip} f\|_\infty < \infty\}$
- $D^\infty(X) = D(X) \cap L^\infty(X)$

Espacios D^∞

Definición

Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \to \mathbb{R}$. Se define

$$\operatorname{Lip} f(x) = \limsup_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}$$

para cada $x \in X$.

- $D(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : \|\operatorname{Lip} f\|_\infty < \infty\}$
- $D^\infty(X) = D(X) \cap L^\infty(X)$

$$\boxed{\mathrm{LIP}(X) \subset D(X) \subset C(X)}$$

Algunas interpretaciones del Lip

- Si $f \in C^1(\Omega)$, $\Omega \overset{\text{ab}}{\subset} \mathbb{R}^n$ (o de una variedad Riemanniana) , entonces

$$\operatorname{Lip} f(x) = |\nabla f(x)| \quad \forall x \in \Omega.$$

Algunas interpretaciones del Lip

- Si $f \in C^1(\Omega)$, $\Omega \overset{\text{ab}}{\subset} \mathbb{R}^n$ (o de una variedad Riemanniana) , entonces
$$\operatorname{Lip} f(x) = |\nabla f(x)| \quad \forall x \in \Omega.$$
- Si $f \in C^1_H(\Omega)$, $\Omega \overset{\text{ab}}{\subset} \mathbb{H}$, entonces
$$\operatorname{Lip} f(x) = |\nabla_H f(x)| \quad \forall x \in \Omega,$$
donde $\nabla_H f$ denota el gradiente horizontal de f.

Algunas interpretaciones del Lip

- Si $f \in C^1(\Omega)$, $\Omega \overset{\text{ab}}{\subset} \mathbb{R}^n$ (o de una variedad Riemanniana) , entonces
$$\operatorname{Lip} f(x) = |\nabla f(x)| \quad \forall x \in \Omega.$$
- Si $f \in C^1_H(\Omega)$, $\Omega \overset{\text{ab}}{\subset} \mathbb{H}$, entonces
$$\operatorname{Lip} f(x) = |\nabla_H f(x)| \quad \forall x \in \Omega,$$
donde $\nabla_H f$ denota el gradiente horizontal de f.
- Si (X, d, μ) admite una estructura diferenciable medible $\{(X_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}_\alpha$, entonces si $f \in \mathrm{LIP}(X)$,
$$\operatorname{Lip} f(x) = |d^\alpha f(x)| \quad \text{en } \mu- \text{ ctp},$$
donde $|d^\alpha f|$ denota la diferencial de Cheeger.

$LIP^\infty(X)$ vs D^∞(X)

Espacios de longitud

Definición

Sea (X, d) un espacio métrico. Una *curva* en un espacio métrico es una función continua $\gamma : [a, b] \to X$ donde $[a, b] \subset X$. Se define

$$\ell(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \right\}$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Una curva es *rectificable* si $\ell(\gamma) < \infty$. Se dice que (X, d) es un *espacio de longitud* si

$$d(x, y) = \inf \ell(\gamma),$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las curvas rectificables $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$ que unen x con y, donde $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$.

Espacios casi-convexos

Definición

Un espacio métrico (X, d) *es* casi-convexo *si* $\exists\, K > 0$ *constante tal que* $\forall\, x, y \in X$, $\exists\, \gamma$ *camino en* X *que une* x *con* y *tal que*

$$\ell(\gamma) \leq K d(x, y).$$

Espacios de casi-longitud

Definición

Un espacio (X, d) es de *casi-longitud* si cumple las siguientes propiedades:

(1) $\forall x, y \in X$ y $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ $\varepsilon-$cadena que une x e y, es decir, $\exists$ sucesión finita de puntos $z_1 = x, z_2, \ldots, z_\ell = y$ tales que $d(z_i, z_{i+1}) < \varepsilon \; \forall i = 1, 2, \ldots, \ell - 1$.

(2) $\exists\, K > 0$ constante (que sólo depende de X) tal que

$$(\ell - 1)\varepsilon \leq K(d(x, y) + \varepsilon).$$

Espacios de casi-longitud

Definición

Un espacio (X, d) es de *casi-longitud* si cumple las siguientes propiedades:

(1) $\forall x, y \in X$ y $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ $\varepsilon-$cadena que une x e y, es decir, $\exists$ sucesión finita de puntos $z_1 = x, z_2, \ldots, z_\ell = y$ tales que $d(z_i, z_{i+1}) < \varepsilon$ $\forall i = 1, 2, \ldots, \ell - 1$.

(2) $\exists\, K > 0$ constante (que sólo depende de X) tal que

$$(\ell - 1)\varepsilon \leq K(d(x, y) + \varepsilon).$$

Espacios de casi-longitud

Lema (Semmes, 2002)

Sea (X, d) un espacio métrico. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\exists\, K$ *tal que* $\forall\, \varepsilon > 0$ *y* $\forall\, f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *se cumple que:*

$$|f(x) - f(y)| \leq K(d(x,y) + \varepsilon) \sup_{z \in X} D_\varepsilon f(z), \quad \forall x, y \in X$$

$$D_\varepsilon f(z) = \frac{1}{\varepsilon} \sup\{|f(y) - f(z)| : y \in X, d(z,y) \leq \varepsilon\}.$$

($\simeq$ Teorema de Valor Medio)

(b) *X es un espacio de "casi-longitud".*

Espacios de casi-longitud

Lema

Sea (X, d) un espacio métrico que satisface la condición de casi-longitud. Entonces

$$\mathrm{LIP}(X) = D(X).$$

Espacios de casi-longitud

Lema

Sea (X, d) un espacio métrico que satisface la condición de casi-longitud. Entonces

$$\mathrm{LIP}(X) = D(X).$$

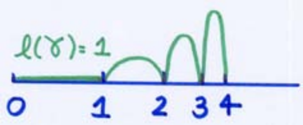
Pregunta

En general:

$$\mathrm{LIP}(X) \overset{??}{=} D(X)$$

Ejemplo 1

$$X = [0, \infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n-1, n] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$



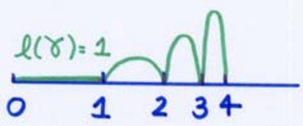
La distancia entre dos nodos consecutivos n y $n+1$ tiende a 0 cuando $n \to \infty$.

(X, d) es Localmente Isométrico a (X, d_e)

Pero $d(x, y) \ll d_e(x, y)$ $\forall x, y \in X$ suficientemente alejados.

Ejemplo 1

$$X = [0, \infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n-1, n] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$



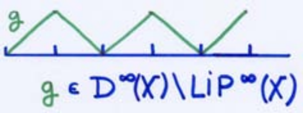
La distancia entre dos nodos consecutivos n y $n+1$ tiende a 0 cuando $n \to \infty$.

(X, d) es LOCALMENTE ISOMÉTRICO a (X, d_e)

PERO $d(x, y) \ll d_e(x, y)$ $\forall x, y \in X$ suficientemente alejados.

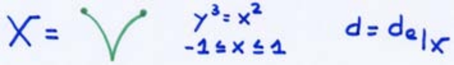
Sea ahora $g : X \to \mathbb{R}$ la función que viene dada por:

$$g(x) = \begin{cases} 2k - x & \text{si } x \in I_{2k}, \\ x - 2k & \text{si } x \in I_{2k+1}. \end{cases}$$



X no es un espacio de casi-longitud. FALLA EN LAS DISTANCIAS LARGAS.

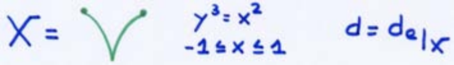
Ejemplo 2



$$g(x,y)=\begin{cases} y & \text{si } x\geq 0,\\ -y & \text{si } x\leq 0.\end{cases}$$

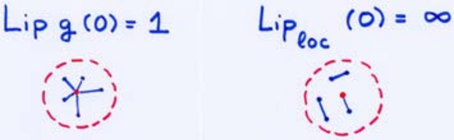
$$g\in D^\infty(X)\setminus \mathrm{LIP}^\infty(X)$$

Ejemplo 2



$$g(x,y) = \begin{cases} y & \text{si } x \geq 0, \\ -y & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \qquad g \in D^\infty(X) \setminus \mathrm{LIP}^\infty(X)$$

¿Qué ocurre en el origen?



FALLA LOCALMENTE

Definición (Espacio localmente radialmente casi-convexo)

Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que X es *localmente radialmente casi-convexo* si $\forall\, x \in X$, $\exists\, U^x$ entorno de x y una constante $K_x > 0$ tal que $\forall\, y \in U^x$ $\exists$ una curva rectificable γ en U^x que conecta x con y que cumple que $\ell(\gamma) \leq K_x d(x, y)$.

Observación

Los ejemplos 1 y 2 son espacios localmente radialmente casi-convexos.

D^∞ como espacio de Banach

Teorema

Sea (X, d) un espacio métrico localmente radialmente casi-convexo. Consideramos en $D^\infty(X)$ la norma

$$\|\cdot\|_{D^\infty} = \max\{\|\cdot\|_\infty, \|\operatorname{Lip}(\cdot)\|_\infty\}.$$

Entonces el par $(D^\infty(X), \|\cdot\|_{D^\infty})$ es un espacio de Banach.

D^∞ como espacio de Banach

Teorema

Sea (X, d) un espacio métrico localmente radialmente casi-convexo. Consideramos en $D^\infty(X)$ la norma

$$\|\cdot\|_{D^\infty} = \max\{\|\cdot\|_\infty, \|\operatorname{Lip}(\cdot)\|_\infty\}.$$

Entonces el par $(D^\infty(X), \|\cdot\|_{D^\infty})$ es un espacio de Banach.

Corolario

Sea (X, d) un espacio métrico localmente radialmente casi-convexo. Entonces

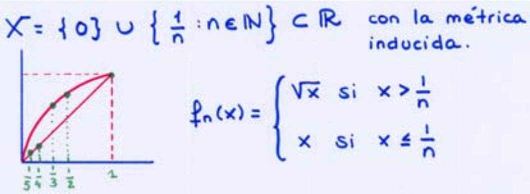
$$\mathrm{LIP}(X) = D(X) \iff X \text{ es de casi-longitud.}$$

D^∞ no es siempre Banach

$X = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$ con la métrica inducida.

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x > \frac{1}{n} \\ x & \text{si } x \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

D^∞ no es siempre Banach



$$\operatorname{Lip} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

D^∞ no es siempre Banach

$X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ con la métrica inducida.

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x > \frac{1}{n} \\ x & \text{si } x \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\operatorname{Lip} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- $\{f_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy en $(D^\infty(X), \|\cdot\|_{D^\infty})$
- $\{f_n\}_n \to f = \sqrt{x}$ PERO $f \notin D^\infty(X)$, pues $\operatorname{Lip}(f)(0) = \infty$.

Teorema de Banach-Stone

Teorema (Banach 1932 y Stone 1937)

Sean K y L espacios compactos. Entonces, $C(K)$ es isométrico a $C(L)$, si y sólo si, K y L son homeomorfos.

Definiciones

Definición

Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos. Dada una función $f : X \to Y$ definimos

$$\operatorname{Lip} f(x) = \limsup_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)}$$

para cada $x \in X$.

Definiciones

Definición

Sean (X, d_X) *y* (Y, d_Y) *espacios métricos. Dada una función* $f : X \to Y$ *definimos*

$$\operatorname{Lip} f(x) = \limsup_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)}$$

para cada $x \in X$.

Consideremos además el siguientes espacio de funciones:

$$D(X, Y) = \{f : X \longrightarrow Y : \ \|\operatorname{Lip} f\|_\infty < +\infty\}.$$

Definiciones

Definición

Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos. Dada una función $f : X \to Y$ definimos

$$\operatorname{Lip} f(x) = \limsup_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)}$$

para cada $x \in X$.

Consideremos además el siguientes espacio de funciones:

$$D(X, Y) = \{f : X \longrightarrow Y : \ \|\operatorname{Lip} f\|_\infty < +\infty\}.$$

Un *$D-$homeomorfismo* es una aplicación biyectiva tal que $f \in D(X, Y)$ y $f^{-1} \in D(Y, X)$.

Propiedades algebraicas

- $D(X)$ es un RETÍCULO VECTORIAL UNITARIO.

Propiedades algebraicas

- $D(X)$ es un RETÍCULO VECTORIAL UNITARIO.
- $D^\infty(X)$ es una $\mathbb{R}-$ÁLGEBRA.

Propiedades algebraicas

- $D(X)$ es un RETÍCULO VECTORIAL UNITARIO.
- $D^\infty(X)$ es una $\mathbb{R}-$ÁLGEBRA.

  Tenemos *Regla de Leibniz* para funciones D^∞:
  Si $f, g \in D^\infty(X)$, entones

$$\| \operatorname{Lip}(f \cdot g)\|_\infty \leq \| \operatorname{Lip} f\|_\infty \, \|g\|_\infty + \| \operatorname{Lip} g\|_\infty \, \|f\|_\infty.$$

Teorema

[Banach-Stone] Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos localmente radialmente casi-convexos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) X es D-homeomorfo a Y.

(b) $D^\infty(X)$ es isomorfo a $D^\infty(Y)$ como retículos vectoriales unitarios.

(c) $D^\infty(X)$ es isomorfo a $D^\infty(Y)$ como álgebras unitarias.

Demostración

Observación

Los ejemplos 1 y 2 son espacios localmente radialmente casi-convexos.

Ingredientes de la prueba

- $(D^{\infty}(X), \|\cdot\|_{D^{\infty}})$ es un espacio de Banach.

Ingredientes de la prueba

- $(D^\infty(X), \|\cdot\|_{D^\infty})$ es un espacio de Banach.

Lema

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios métricos y sea $h : X \to Y$. Supongamos que $f \circ h \in D^\infty(X)$ para cada $f \in D^\infty(Y)$. Entonces $h \in D(X, Y)$.

Ingredientes de la prueba

- $(D^\infty(X), \|\cdot\|_{D^\infty})$ es un espacio de Banach.

Lema

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios métricos y sea $h : X \to Y$. Supongamos que $f \circ h \in D^\infty(X)$ para cada $f \in D^\infty(Y)$. Entonces $h \in D(X, Y)$.

Lema

Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $\mathcal{L} \subset C(X)$ un retículo vectorial unitario que separa puntos y cerrados. Entonces $\varphi \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$ tiene una base de entornos numerable en $\mathcal{H}(\mathcal{L})$ si y sólo si $\varphi \in X$.

Ingredientes de la prueba

- $(D^\infty(X), \|\cdot\|_{D^\infty})$ es un espacio de Banach.

Lema

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios métricos y sea $h : X \to Y$. Supongamos que $f \circ h \in D^\infty(X)$ para cada $f \in D^\infty(Y)$. Entonces $h \in D(X, Y)$.

Lema

Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $\mathcal{L} \subset C(X)$ un retículo vectorial unitario que separa puntos y cerrados. Entonces $\varphi \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$ tiene una base de entornos numerable en $\mathcal{H}(\mathcal{L})$ si y sólo si $\varphi \in X$.

- $D^\infty(X)$ es cerrado para la inversa.

D-isometrías

D-isometrías

Definición

Sean (X, d_X) *y* (Y, d_Y) *espacios métricos. Se dice que* X *e* Y *son* $D-$isométricos *si existe una biyección* $h : X \longrightarrow Y$ *tal que* $\|\operatorname{Lip} h\|_{\infty} = \|\operatorname{Lip} h^{-1}\|_{\infty} = 1.$

D-isometrías

Definición

Sean (X, d_X) *y* (Y, d_Y) *espacios métricos. Se dice que* X *e* Y *son* $D-$isométricos *si existe una biyección* $h : X \longrightarrow Y$ *tal que* $\|\operatorname{Lip} h\|_\infty = \|\operatorname{Lip} h^{-1}\|_\infty = 1$.

Corolario

Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos localmente radialmente casi-convexos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) X es D-isométrico a Y.

(b) $D^\infty(X)$ es isomorfo a $D^\infty(Y)$ como retículos vectoriales unitarios (o como álgebras) a través de una isometría para las normas D^∞.

D-isometrías

Definición

Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos. Se dice que X e Y son $D-$isométricos si existe una biyección $h : X \longrightarrow Y$ tal que $\|\operatorname{Lip} h\|_\infty = \|\operatorname{Lip} h^{-1}\|_\infty = 1$.

Corolario

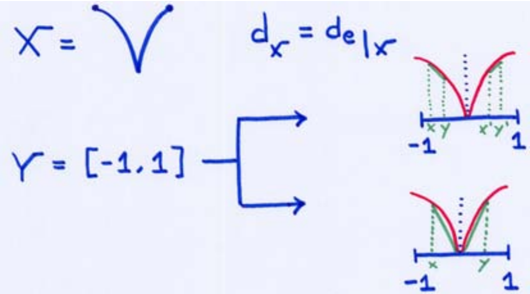
Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos localmente radialmente casi-convexos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) X es D-isométrico a Y.

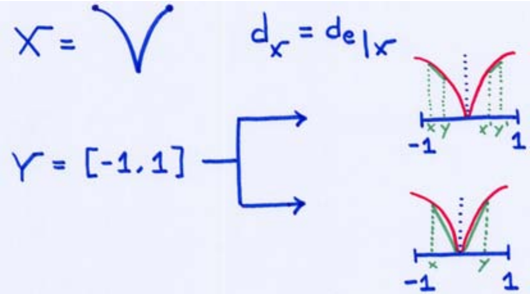
(b) $D^\infty(X)$ es isomorfo a $D^\infty(Y)$ como retículos vectoriales unitarios (o como álgebras) a través de una isometría para las normas D^∞.

Localmente Isométrico $\Rightarrow$ D-isométrico

D-isométrico $\neq$ Localmente Isométrico



D-isométrico $\neq$ Localmente Isométrico



(X, d_X) es $D-$ISOMÉTRICO a (Y, d_Y)

PERO

X no es LOCALMENTE ISOMÉTRICO a Y.

Espacios de Sobolev en Espacios Métricos de Medida

Espacios $M^{1,p}$

Sea (X, d, μ) espacio métrico de medida y $\mu(B) > 0, \forall B \subset X$.

Espacios $M^{1,p}$

Sea (X, d, μ) espacio métrico de medida y $\mu(B) > 0$, $\forall B \subset X$.

Definición (Hajslaz, 1996)

Sea $1 \leq p \leq \infty$.

$$\widetilde{M}^{1,p}(X,d,\mu) = \{f \in L^p(X) : \exists\, 0 \leq g \in L^p(X) \\ |f(x) - f(y)| \leq d(x,y)(g(x)+g(y)) \quad \mu - \text{c.t.p.}\}$$

$M^{1,p}(X,d,\mu)$ es el espacio cociente correspondiente a la identificación:

$$u \sim v : \; u, v \in \widetilde{M}^{1,p}(X,d,\mu) \iff u = v \quad \mu - \text{ c.t.p.}$$

Espacios $M^{1,p}$

Sea (X, d, μ) espacio métrico de medida y $\mu(B) > 0$, $\forall B \subset X$.

Definición (Hajslaz, 1996)

Sea $1 \leq p \leq \infty$.

$$\begin{aligned}\widetilde{M}^{1,p}(X, d, \mu) = \{f \in L^p(X) : \exists\, 0 \leq g \in L^p(X) \\ |f(x) - f(y)| \leq d(x, y)(g(x) + g(y)) \quad \mu - \text{c.t.p.}\}\end{aligned}$$

$M^{1,p}(X, d, \mu)$ es el espacio cociente correspondiente a la identificación:

$$u \sim v : \ u, v \in \widetilde{M}^{1,p}(X, d, \mu) \iff u = v \quad \mu - \text{ c.t.p.}$$

Si $p = \infty \implies M^{1,\infty}(X) = \mathrm{LIP}^{\infty}(X)$

Gradientes superiores

Definición (Puramente métrica)

Una función de Borel no negativa $g : X \to [0, \infty]$ se dice que es un *gradiente superior* de $f : X \to \mathbb{R}$ si para toda curva rectificable $\gamma : [0, \ell] \to X$, parametrizada por la longitud de arco t, tenemos que

$$|f(\gamma(\ell)) - f(\gamma(0))| \leq \int_0^\ell g(\gamma(t))dt.$$

Gradientes superiores

Definición (Puramente métrica)

Una función de Borel no negativa $g : X \to [0, \infty]$ se dice que es un *gradiente superior* de $f : X \to \mathbb{R}$ si para toda curva rectificable $\gamma : [0, \ell] \to X$, parametrizada por la longitud de arco t, tenemos que

$$|f(\gamma(\ell)) - f(\gamma(0))| \leq \int_0^\ell g(\gamma(t))dt.$$

Observación

Si g es un gradiente superior de f y $\widetilde{g} = g$, $\mu-$c.t.p., es otra función Borel no negativa, entonces puede ocurrir que $\widetilde{g}$ no sea un gradiente superior para f.

Módulo de una familia de curvas

Definición

Sea $\Gamma \subset \Upsilon = \{\text{curvas rectificables no constantes de } X\}$ y $1 \leq p \leq \infty$.

$$\mathrm{Mod}_p(\Gamma) = \begin{cases} \inf_\rho \int_X \rho^p \, d\mu, & \text{si } p < \infty \\ \inf_\rho \|\rho\|_\infty, & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las funciones Borel no negativas ρ que cumplen $\int_\gamma \rho \geq 1$ para toda $\gamma \in \Gamma$. Si una propiedad es cierta para toda $\gamma \in \Upsilon \backslash \Gamma$, con $\mathrm{Mod}_p \Gamma = 0$, diremos que la propiedad se cumple en *$p-$c.t. curva*.

Gradiente superior débil

Definición

*Una función Borel no negativa g de X es un $p-$*gradiente superior débil *de f, si*

$$|f(\gamma(0)) - f(\gamma(\ell))| \leq \int_{\gamma} g$$

en $p-$c.t. curva $\gamma \in \Upsilon$.

Espacios Newtonianos

Definición (Shamungalingam, 2000)

Sea $1 \leq p \leq \infty$

$$\widetilde{N}^{1,p}(X,d,\mu) = \{f \in L^p : \exists\ p- \text{ gradiente superior débil en } L^p\}$$

$$\|u\|_{\widetilde{N}^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \inf_g \|g\|_{L^p},$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los $p-$gradientes superiores débiles g de f.
$N^{1,p}(X,d,\mu)$ es el espacio cociente correspondiente a la identificación:

$$u \sim v : \ u, v \in \widetilde{N}^{1,p}(X,d,\mu) \iff \|u-v\|_{\widetilde{N}^{1,p}} = 0$$

Lema

Si $f \in D(X)$ entonces $\mathrm{Lip}(f)$ es un gradiente superior de f.

Lema

Si $f \in D(X)$ entonces $\mathrm{Lip}(f)$ es un gradiente superior de f.

Demostración.

Sea $\gamma : [0, \ell] \to X$ una curva rectificable parametrizada por la longitud de arco que conecta x con y (tal γ es $1-$Lipschitz). La función $f \circ \gamma \in D([0, \ell])$ y por el teorema de Stepanov Enunciado es diferenciable en c.t.p. Deducimos que

$$|f(x) - f(y)| \leq \left| \int_0^\ell (f \circ \gamma)'(t) dt \right| \leq \int_0^\ell \mathrm{Lip}(f(\gamma(t)))\, dt.$$

Nótese que $|(f \circ \gamma)'(t)| = \mathrm{Lip}\, f((\gamma(t)))$ en cada punto de $[0, \ell]$ donde $(f \circ \gamma)$ es diferenciable. $\square$

$$\mathrm{LIP}^\infty(X) = M^{1,\infty}(X) \subset D^\infty(X) \subset N^{1,\infty}(X).$$

Espacios $p-$Poincaré doblantes

Definición

Sea (X, d, μ) un espacio métrico de medida. Diremos que μ es doblante *si todas las bolas tienen medida finita y positiva y $\exists\, C > 0$ constante tal que $\mu(B(x, 2r)) \leq C\mu(B(x, r))$ $\forall\, x \in X$ y $r > 0$.*

Espacios $p-$Poincaré doblantes

Definición

Sea (X, d, μ) un espacio métrico de medida. Diremos que μ es doblante *si todas las bolas tienen medida finita y positiva y $\exists\, C > 0$ constante tal que $\mu(B(x, 2r)) \leq C\mu(B(x, r))\ \forall\, x \in X$ y $r > 0$.*

Definición

Sea $1 \leq p < \infty$. (X, d, μ) admite una *p-desigualdad de Poincaré débil* si $\exists\, C > 0$ y $\lambda \geq 1$ tal que $\forall\, u : X \to \mathbb{R}$ función medible Borel y $\forall\, g : X \to [0, \infty]$ gradiente superior de u, el par (u, g) satisface la desigualdad

$$\fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|\, d\mu \leq Cr\Big(\fint_{B(x,\lambda r)} g^p d\mu\Big)^{1/p}$$

$\forall\, B(x, r) \subset X$.

Teorema

Sea (X, d) un espacio métrico localmente compacto con medida doblante μ. Supongamos que X admite una p-desigualdad de Poincaré débil para algún $1 \leq p < \infty$ y sea $\rho \in L^\infty(X)$ tal que $0 \leq \rho$. Entonces, $\exists\, F \subset X$ con $\mu(F) = 0$ y $\exists\, K = K(X, \|\rho\|_\infty) > 0$ una constante tal que $\forall\, x, y \in X \setminus F$, $\exists\, \gamma$ curva rectificable tal que

$$\int_\gamma \rho < +\infty \;\text{ y }\; \ell(\gamma) \leq Kd(x, y).$$

Corolario 1

Sea (X, d) un espacio métrico localmente compacto con medida doblante μ. Supongamos que X admite una p-desigualdad de Poincaré débil para algún $1 \leq p < \infty$. Entonces

$$N^{1,\infty}(X) = \mathrm{LIP}^{\infty}(X).$$

Corolario 1

Sea (X,d) un espacio métrico localmente compacto con medida doblante μ. Supongamos que X admite una p-desigualdad de Poincaré débil para algún $1 \leq p < \infty$. Entonces

$$N^{1,\infty}(X) = \mathrm{LIP}^\infty(X).$$

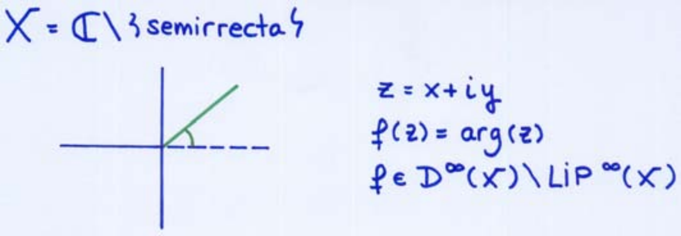
Corolario 2

Sea (X,d) un espacio métrico y sea μ una medida de Borel. Supongamos que $\forall\, \rho \in L^\infty(X)$, $0 \leq \rho$, $\exists K > 0$ constante tal que $\forall\, x \in X$, $\exists\, U^x$ entorno de x tal que $\forall\, y \in U^x$ $\exists\, \gamma$ curva rectificable tal que $\int_\gamma \rho < +\infty$ y $\ell(\gamma) \leq Kd(x,y)$. Entonces

$$N^{1,\infty}(X) = D^\infty(X).$$

$$¿\,\mathrm{LIP}^{\infty}(X) = M^{1,\infty}(X) \subsetneq D^{\infty}(X) = N^{1,\infty}(X)?$$

$$¿\,\mathrm{LIP}^\infty(X) = M^{1,\infty}(X) \subsetneq D^\infty(X) = N^{1,\infty}(X)?$$

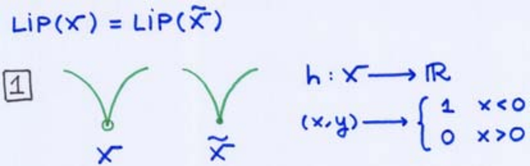


Referencias

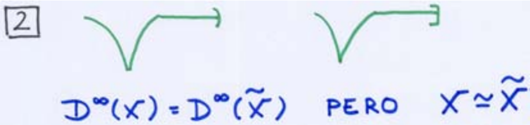
- Z. M. Balogh, K. Rogovin, T. Zürcher: The Stepanov Differentiability Theorem in Metric Measure Spaces. *J. Geom. Anal.* **14** No. 3, (2004), 405–422.
- J. Cheeger: Differentiability of Lipschitz Functions on metric measure spaces. *Geom. Funct. Anal.* **9** (1999), 428–517.
- M. I. Garrido, J. A. Jaramillo: Homomorphism on Function Lattices. *Monatshefte für mathematik.* **141**(2) (2004), 127–146.
- P. Hajlasz: Sobolev spaces on metric-measure spaces. *Contemp. Math.* Volume **338** (2003), 173–218.
- E. Järvenpää, M. Järvenpää, N. Shanmugalingam K. Rogovin, and S. Rogovin: Measurability of equivalence classes and MEC$_p$-property in metric spaces. Preprint 2008.
- S. Semmes: Some Novel Types of Fractal Geometry. Oxford Science Publications (2001).

¡¡MUCHAS GRACIAS POR SU ATENCIÓN!!

Caso NO completo



No podemos extender h de manera continua.



Demostración del teorema

(1) $\Rightarrow$ (2)

Lemma

$$X \xrightarrow{h} Y \qquad \qquad D^*(Y) \xrightarrow{T} D^*(X)$$

$$h \in D(X,Y) \quad \Longrightarrow \quad f \longrightarrow f\circ h$$

$$h^{-1} \in D(Y,X)$$

isomorphism of unital vector lattices

Demostración del teorema

(2)$\Rightarrow$(1)

Assume that $T: D^*(X) \longrightarrow D^*(Y)$ is an isomorphism of unital vector lattices.

Define $h: \mathcal{H}(D^*(Y)) \longrightarrow \mathcal{H}(D^*(X))$

h homeomorphism $\Leftarrow$
- h bijection ✓
- h closed ✓
- h continuos (*)

$h(\varphi) = \varphi \circ T \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}(D^*(Y))$

Demostración del teorema

$$(*)\quad \begin{tikzcd}
Y \arrow[r, hook] \arrow[d, "T(f)"'] & \mathcal{H}(D^*(Y)) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "T(\hat{f})"'] \arrow[dr, dashed, "\hat{f}\circ h"'] & \mathcal{H}(D^*(X)) \arrow[d, "\hat{f}"] & X \arrow[l, hook'] \arrow[d, "f"] \\
\mathbb{R} & \mathbb{R} & \mathbb{R} & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Demostración del teorema

Lema: $\alpha \subset C(X)$ unital vector lattice
$\mathcal{H}(\alpha)$ is a realcompactificacion
of X and $\forall f \in \alpha$ can be extended
to the continuos function $\hat{f} \in \mathcal{H}(\alpha)$
given by $\hat{f}(\varphi) = \varphi(f)$ $\forall \varphi \in \mathcal{H}(\alpha)$.

Demostración del teorema

h continuos $\Longleftrightarrow$ $\hat{f} \circ h$ continuos

$$\hat{f} \circ h = \hat{T}(f) \rightsquigarrow \text{continuos by construction}$$

Demostración del teorema

Lemma

(X, d) complete metric space and $\mathcal{A} \subset C(X)$ be a uniformly separating unital vector lattice. Then $\xi \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ has a countable neighbourhood basis in $\mathcal{H}(\mathcal{A}) \iff \xi \in X$

Demostración del teorema

$\zeta \in \mathcal{Y} \Leftrightarrow \zeta \in \mathcal{H}(D^{+}(\mathcal{Y}))$ has a c.n.b in $\mathcal{H}(D^{+}(\mathcal{Y}))$

h homeomorphism $\Rightarrow h(\zeta) \in \mathcal{H}(D^{+}(\mathcal{X}))$ has a c.n.b in $\mathcal{H}(D^{+}(\mathcal{X}))$

$\Leftrightarrow h(\zeta) \in \mathcal{X} \quad \longrightarrow \quad \boxed{h(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}}$

$\zeta \in \mathcal{X} \Rightarrow h^{-1}(\zeta) \in \mathcal{Y}$

Volver

Teorema de Stepanov

Teorema (Stepanov)

Sean $\Omega \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n$ *y* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$*. Entonces* f *es diferenciable en casi todo punto del conjunto*

$$\{x \in \Omega : \mathrm{Lip}\, f(x) < \infty\}$$

◂ Volver