Operadores que preservan ortogonalidad y aplicaciones ortogonalmente aditivas sobre C*-álgebras y JB*-triples

Antonio M. Peralta

UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

ugr Universidad de Granada

IV ENCUENTRO de ANÁLISIS FUNCIONAL y APLICACIONES
Salobreña, Abril 2008

Ortogonalidad en C*-álgebras abelianas

Ortogonalidad en C*-álgebras abelianas

El Teorema de Gelfand-Naimark (conmutativo) nos asegura que toda C*-álgebra abeliana unital es isomorfa, como C*-álgebra, al álgebra $C(\Omega)$ de todas las funciones continuas y $\mathbb{C}$-valuadas sobre un cierto espacio topológico compacto Hausdorff Ω.

Ortogonalidad en C*-álgebras abelianas

El Teorema de Gelfand-Naimark (conmutativo) nos asegura que toda C*-álgebra abeliana unital es isomorfa, como C*-álgebra, al álgebra $C(\Omega)$ de todas las funciones continuas y $\mathbb{C}$-valuadas sobre un cierto espacio topológico compacto Hausdorff Ω.

Sean f y g dos elementos en Ω. Diremos que f y g son *ortogonales* ($f \perp g$) si $fg = 0$.

Ortogonalidad en C*-álgebras abelianas

El Teorema de Gelfand-Naimark (conmutativo) nos asegura que toda C*-álgebra abeliana unital es isomorfa, como C*-álgebra, al álgebra $C(\Omega)$ de todas las funciones continuas y $\mathbb{C}$-valuadas sobre un cierto espacio topológico compacto Hausdorff Ω.

Sean f y g dos elementos en Ω. Diremos que f y g son *ortogonales* ($f \perp g$) si $fg = 0$.

Ortogonalidad en C*-álgebras abelianas

El Teorema de Gelfand-Naimark (conmutativo) nos asegura que toda C*-álgebra abeliana unital es isomorfa, como C*-álgebra, al álgebra $C(\Omega)$ de todas las funciones continuas y $\mathbb{C}$-valuadas sobre un cierto espacio topológico compacto Hausdorff Ω.

Sean f y g dos elementos en Ω. Diremos que f y g son *ortogonales* ($f \perp g$) si $fg = 0$.

Ortogonalidad en C*-álgebras

Ortogonalidad en C*-álgebras abelianas

El Teorema de Gelfand-Naimark (conmutativo) nos asegura que toda C*-álgebra abeliana unital es isomorfa, como C*-álgebra, al álgebra $C(\Omega)$ de todas las funciones continuas y $\mathbb{C}$-valuadas sobre un cierto espacio topológico compacto Hausdorff Ω.

Sean f y g dos elementos en Ω. Diremos que f y g son *ortogonales* ($f \perp g$) si $fg = 0$.

Ortogonalidad en C*-álgebras

La versión general del Teorema de Gelfand-Naimark nos asegura que toda C*-álgebra es isomorfa a una *-subálgebra cerrada del espacio $L(H)$ de los operadores acotados sobre un espacio de Hilbert complejo con el producto e involución usuales.

Ortogonalidad en C*-álgebras abelianas

El Teorema de Gelfand-Naimark (conmutativo) nos asegura que toda C*-álgebra abeliana unital es isomorfa, como C*-álgebra, al álgebra $C(\Omega)$ de todas las funciones continuas y $\mathbb{C}$-valuadas sobre un cierto espacio topológico compacto Hausdorff Ω.

Sean f y g dos elementos en Ω. Diremos que f y g son *ortogonales* ($f \perp g$) si $fg = 0$.

Ortogonalidad en C*-álgebras

La versión general del Teorema de Gelfand-Naimark nos asegura que toda C*-álgebra es isomorfa a una *-subálgebra cerrada del espacio $L(H)$ de los operadores acotados sobre un espacio de Hilbert complejo con el producto e involución usuales.

Dos elementos a, b en una C*-álgebra A son *ortogonales* ($a \perp b$) si $ab^* = 0 = b^*a$.

Ortogonalidad en C*-álgebras abelianas

El Teorema de Gelfand-Naimark (conmutativo) nos asegura que toda C*-álgebra abeliana unital es isomorfa, como C*-álgebra, al álgebra $C(\Omega)$ de todas las funciones continuas y $\mathbb{C}$-valuadas sobre un cierto espacio topológico compacto Hausdorff Ω.

Sean f y g dos elementos en Ω. Diremos que f y g son *ortogonales* ($f \perp g$) si $fg = 0$.

Ortogonalidad en C*-álgebras

La versión general del Teorema de Gelfand-Naimark nos asegura que toda C*-álgebra es isomorfa a una *-subálgebra cerrada del espacio $L(H)$ de los operadores acotados sobre un espacio de Hilbert complejo con el producto e involución usuales.

Dos elementos a, b en una C*-álgebra A son *ortogonales* ($a \perp b$) si $ab^* = 0 = b^*a$.

En una C*-álgebra A podemos considerar un *"producto ternario"* definido mediante la expresión

$$\{a,b,c\} := \frac{1}{2}(ab^*c + cb^*a) \quad a,b,c \in A.$$

En una C*-álgebra A podemos considerar un *"producto ternario"* definido mediante la expresión

$$\{a,b,c\} := \frac{1}{2}(ab^*c + cb^*a) \quad a,b,c \in A.$$

Observamos que cuando $a \perp b$ en A, entonces el operador

$$L(a,b) : A \to A$$

$$x \mapsto L(a,b)(x) := \{a,b,x\}$$

es cero.

En una C*-álgebra A podemos considerar un *"producto ternario"* definido mediante la expresión

$$\{a,b,c\} := \frac{1}{2}(ab^*c + cb^*a) \quad a,b,c \in A.$$

Observamos que cuando $a \perp b$ en A, entonces el operador

$$L(a,b) : A \to A$$

$$x \mapsto L(a,b)(x) := \{a,b,x\}$$

es cero.

En realidad se puede demostrar que

$$\boxed{a \perp b \Leftrightarrow L(a,b) = 0}.$$

En una C*-álgebra A podemos considerar un *"producto ternario"* definido mediante la expresión

$$\{a,b,c\} := \frac{1}{2}(ab^*c + cb^*a) \quad a,b,c \in A.$$

Observamos que cuando $a \perp b$ en A, entonces el operador

$$L(a,b) : A \to A$$

$$x \mapsto L(a,b)(x) := \{a,b,x\}$$

es cero.

En realidad se puede demostrar que

$$\boxed{a \perp b \Leftrightarrow L(a,b) = 0}.$$

El concepto de ortogonalidad en C*-álgebras está íntimamente ligado al producto triple.

En una C*-álgebra A podemos considerar un *"producto ternario"* definido mediante la expresión

$$\{a,b,c\} := \frac{1}{2}(ab^*c + cb^*a) \quad a,b,c \in A.$$

Observamos que cuando $a \perp b$ en A, entonces el operador

$$L(a,b) : A \to A$$

$$x \mapsto L(a,b)(x) := \{a,b,x\}$$

es cero.

En realidad se puede demostrar que

$$\boxed{a \perp b \Leftrightarrow L(a,b) = 0}.$$

El concepto de ortogonalidad en C*-álgebras está íntimamente ligado al producto triple.

El conjunto de los elementos *simétricos* ó *hermitianos* en una C*-álgebra A se denotará mediante el símbolo A_{sa}.

El conjunto de los elementos *simétricos* ó *hermitianos* en una C*-álgebra A se denotará mediante el símbolo A_{sa}.

Cuando partimos de dos elementos $a, b \in A$, es fácil ver que $a \perp b$ si y solo si $ab = 0$. Esta equivalencia ha dado lugar al estudio de operadores que preservan productos-cero.

El conjunto de los elementos *simétricos* ó *hermitianos* en una C*-álgebra A se denotará mediante el símbolo A_{sa}.

Cuando partimos de dos elementos $a, b \in A$, es fácil ver que $a \perp b$ si y solo si $ab = 0$. Esta equivalencia ha dado lugar al estudio de operadores que preservan productos-cero.

Sea $f : A \longrightarrow X$ una aplicación desde una C*-álgebra a un espacio de Banach (complejo).

Sea $f : A \to X$ una aplicación desde una C*-álgebra a un espacio de Banach (complejo).

Diremos que f es *ortogonalmente aditiva* (sobre A_{sa}) si para cualesquiera $a \perp b$ en A (en A_{sa}) tenemos que

$$f(a+b) = f(a) + f(b).$$

Sea $f : A \to X$ una aplicación desde una C*-álgebra a un espacio de Banach (complejo).

Diremos que f es *ortogonalmente aditiva* (sobre A_{sa}) si para cualesquiera $a \perp b$ en A (en A_{sa}) tenemos que

$$f(a+b) = f(a) + f(b).$$

Diremos que f es *aditiva sobre elementos de producto cero* (sobre A_{sa}) si para cualesquiera a, b en A (en A_{sa}) con $ab = 0 = ba$ se verifica que $f(a+b) = f(a) + f(b)$.

Sea $f : A \to X$ una aplicación desde una C*-álgebra a un espacio de Banach (complejo).

Diremos que f es *ortogonalmente aditiva* (sobre A_{sa}) si para cualesquiera $a \perp b$ en A (en A_{sa}) tenemos que

$$f(a+b) = f(a) + f(b).$$

Diremos que f es *aditiva sobre elementos de producto cero* (sobre A_{sa}) si para cualesquiera a, b en A (en A_{sa}) con $ab = 0 = ba$ se verifica que $f(a+b) = f(a) + f(b)$.

Las aplicaciones ortogonalmente aditivas estudiadas hasta el momento son los polinomios n-homogéneos.

Sea $f : A \to X$ una aplicación desde una C*-álgebra a un espacio de Banach (complejo).

Diremos que f es *ortogonalmente aditiva* (sobre A_{sa}) si para cualesquiera $a \perp b$ en A (en A_{sa}) tenemos que

$$f(a+b) = f(a) + f(b).$$

Diremos que f es *aditiva sobre elementos de producto cero* (sobre A_{sa}) si para cualesquiera a, b en A (en A_{sa}) con $ab = 0 = ba$ se verifica que $f(a+b) = f(a) + f(b)$.

Las aplicaciones ortogonalmente aditivas estudiadas hasta el momento son los polinomios n-homogéneos.
Recordamos que si X e Y son dos espacios de Banach y n es un natural cualquiera, entonces un *polinomio n-homogéneo* [continuo] de X en Y es una aplicación $P : X \to Y$ verificando que existe un operador n-lineal [continuo] (que podemos asumir simétrico) verificando que $P(x) = T(x, \ldots, x)$.

Sea $f : A \to X$ una aplicación desde una C*-álgebra a un espacio de Banach (complejo).

Diremos que f es *ortogonalmente aditiva* (sobre A_{sa}) si para cualesquiera $a \perp b$ en A (en A_{sa}) tenemos que

$$f(a+b) = f(a) + f(b).$$

Diremos que f es *aditiva sobre elementos de producto cero* (sobre A_{sa}) si para cualesquiera a, b en A (en A_{sa}) con $ab = 0 = ba$ se verifica que $f(a+b) = f(a) + f(b)$.

Las aplicaciones ortogonalmente aditivas estudiadas hasta el momento son los polinomios n-homogéneos.
Recordamos que si X e Y son dos espacios de Banach y n es un natural cualquiera, entonces un *polinomio n-homogéneo* [continuo] de X en Y es una aplicación $P : X \to Y$ verificando que existe un operador n-lineal [continuo] (que podemos asumir simétrico) verificando que $P(x) = T(x, \ldots, x)$.

Ejemplos:

Sea φ un funcional en el dual de una C*-álgebra A y sea $n \in \mathbb{N}$. La aplicación

$$P_\varphi : A \to \mathbb{C},\ x \mapsto \varphi(x^n)$$

es un polinomio n-homogéneo ortogonalmente aditivo sobre A_{sa} y aditivo sobre elementos de producto cero.

Ejemplos:

Sea φ un funcional en el dual de una C*-álgebra A y sea $n \in \mathbb{N}$. La aplicación

$$P_\varphi : A \to \mathbb{C}, \ x \mapsto \varphi(x^n)$$

es un polinomio n-homogéneo ortogonalmente aditivo sobre A_{sa} y aditivo sobre elementos de producto cero.
Si A es unital y abeliana entonces P_φ es ortogonalmente aditivo sobre A.

Ejemplos:

Sea φ un funcional en el dual de una C*-álgebra A y sea $n \in \mathbb{N}$. La aplicación

$$P_\varphi : A \to \mathbb{C}, \ x \mapsto \varphi(x^n)$$

es un polinomio n-homogéneo ortogonalmente aditivo sobre A_{sa} y aditivo sobre elementos de producto cero.

Si A es unital y abeliana entonces P_φ es ortogonalmente aditivo sobre A.

¿Existe otro tipo?

Caso Abeliano: [Pérez-Villanueva, J. Math. Anal. Appl.'2005] [Benyamini-Lassalle-G. Llavona, Bull. London M.S.'2006]

Caso Abeliano:
[Pérez-Villanueva, J. Math. Anal. Appl.'2005]
[Benyamini-Lassalle-G. Llavona, Bull. London M.S.'2006]

Para cada espacio compacto Haussdorff Ω y cada polinomio n-homogéneo continuo y ortogonalmente aditivo $P : C(K) \to \mathbb{C}$ existe una medida de Borel regular μ en Ω verificando que

$$P(f) = \int_{\Omega} f^n d\mu, \quad (f \in C(\Omega)).$$

(Teorema de representación de Riesz) existe ϕ en $C(\Omega)^*$ verificando que $P(f) = \phi(f^n)$, $(f \in C(\Omega))$.

Caso Abeliano: [Pérez-Villanueva, J. Math. Anal. Appl.'2005] [Benyamini-Lassalle-G. Llavona, Bull. London M.S.'2006]

Si Ω es un espacio topológico compacto Haussdorff y X es un espacio de Banach, entonces para cada polinomio n-homogéneo continuo y ortogonalmente aditivo $P : C(\Omega) \to X$ existe un operador

$$T : C(\Omega) \to X$$

verificando que $P(f) = T(f^n)$, $(f \in C(\Omega))$.

Polinomios ortogonalmente aditivos sobre C*-álgebras

Polinomios ortogonalmente aditivos sobre C*-álgebras

Polinomios ortogonalmente aditivos sobre C*-álgebras

Sea $P : A \to \mathbb{C}$ un polinomio n-homogéneo sobre una C*-álgebra.

Polinomios ortogonalmente aditivos sobre C*-álgebras

Sea $P : A \to \mathbb{C}$ un polinomio n-homogéneo sobre una C*-álgebra. Claramente

$$\boxed{P \text{ ortogonalmente aditivo}} \Rightarrow \boxed{P \text{ ortogonalmente aditivo sobre } A_{sa}}$$

Polinomios ortogonalmente aditivos sobre C*-álgebras

Sea $P : A \to \mathbb{C}$ un polinomio n-homogéneo sobre una C*-álgebra. Claramente

$$\boxed{P \text{ ortogonalmente aditivo}} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \not\Leftarrow \end{array} \boxed{P \text{ ortogonalmente aditivo sobre } A_{sa}}$$

Contraejemplo

Tomemos por ejemplo $P : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $P(x) := \varphi(x^2)$, donde φ es la traza en $M_2(\mathbb{C})$. Es claro que P es aditivo sobre elementos de producto cero. Sin embargo, los elementos $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ son ortogonales en $M_2(\mathbb{C})$, sin embargo, $P(x+y) = 0 \neq P(x) + P(y) = 2$.

[Palazuelos-Peralta-Villanueva, Quart. J. Math. Oxford'2008]

[Palazuelos-Peralta-Villanueva, Quart. J. Math. Oxford'2008]

Si $P, Q : A \to \mathbb{C}$ son dos polinomio n-homogéneos sobre una C*-álgebra tales que $P|_{A_{sa}} = Q|_{A_{sa}}$, entonces $P = Q$.

[Palazuelos-Peralta-Villanueva, Quart. J. Math. Oxford'2008]

Si $P, Q : A \to \mathbb{C}$ son dos polinomio n-homogéneos sobre una C*-álgebra tales que $P|_{A_{sa}} = Q|_{A_{sa}}$, entonces $P = Q$.
En particular, si existe un funcional $\varphi \in A^*$ verificando que

$$P(x) = \varphi(x^n), \text{ para todo } x \in A_{sa},$$

entonces

$$P(x) = \varphi(x^n), \quad x \in A$$

[Palazuelos-Peralta-Villanueva, Quart. J. Math. Oxford'2008]

Sea $P : A \to \mathbb{C}$ un polinomio n-homogéneo sobre una C*-álgebra. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) P es aditivo sobre elementos de producto cero.

(b) P es ortogonalmente aditivo sobre A_{sa}.

(c) Existe un funcional $\varphi \in A^*$ verificando que $P(x) = \varphi(x^n)$, para todo $x \in A$.

[Palazuelos-Peralta-Villanueva, Quart. J. Math. Oxford'2008]

Sea A una C*-álgebra, X un espacio de Banach y $P : A \to X$ un polinomio n-homogéneo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) P es aditivo sobre elementos de producto cero.

(b) P es ortogonalmente aditivo sobre A_{sa}.

(c) Existe un operador lineal continuo $T : A \to X$ verificando que $P(x) = T(x^n)$, para todo $x \in A$.

Operadores que preservan ortogonalidad

Supongamos que $T : A \rightarrow B$ es un operador (lineal y continuo) entre dos C*-álgebras.

Operadores que preservan ortogonalidad

Supongamos que $T : A \to B$ es un operador (lineal y continuo) entre dos C*-álgebras.

Diremos que T *preserva ortogonalidad* (en A_{sa}) si $T(a) \perp T(b)$ para todo $a \perp b$ en A (en A_{sa}).

Operadores que preservan ortogonalidad

Supongamos que $T : A \to B$ es un operador (lineal y continuo) entre dos C*-álgebras.
Diremos que T *preserva ortogonalidad* (en A_{sa}) si $T(a) \perp T(b)$ para todo $a \perp b$ en A (en A_{sa}).
Estos operadores han recibido también los nombres de *operadores de Lamperti* o *"disjointness-preserving operators"*.

Operadores que preservan ortogonalidad

Supongamos que $T : A \to B$ es un operador (lineal y continuo) entre dos C*-álgebras.
Diremos que T *preserva ortogonalidad* (en A_{sa}) si $T(a) \perp T(b)$ para todo $a \perp b$ en A (en A_{sa}).
Estos operadores han recibido también los nombres de *operadores de Lamperti* o *"disjointness-preserving operators"*.

Todo C*-homomorfismo preserva ortogonalidad.

Operadores que preservan ortogonalidad

Supongamos que $T : A \to B$ es un operador (lineal y continuo) entre dos C*-álgebras.
Diremos que T *preserva ortogonalidad* (en A_{sa}) si $T(a) \perp T(b)$ para todo $a \perp b$ en A (en A_{sa}).
Estos operadores han recibido también los nombres de *operadores de Lamperti* o *"disjointness-preserving operators"*.

Todo C*-homomorfismo preserva ortogonalidad.

Como $a \perp b$ si, y solo si, $L(a, b) = 0$, entonces todo triple homomorfismo también preserva ortogonalidad.

Operadores que preservan ortogonalidad

Supongamos que $T : A \to B$ es un operador (lineal y continuo) entre dos C*-álgebras.
Diremos que T *preserva ortogonalidad* (en A_{sa}) si $T(a) \perp T(b)$ para todo $a \perp b$ en A (en A_{sa}).
Estos operadores han recibido también los nombres de *operadores de Lamperti* o *"disjointness-preserving operators"*.

Todo C*-homomorfismo preserva ortogonalidad.

Como $a \perp b$ si, y solo si, $L(a, b) = 0$, entonces todo triple homomorfismo también preserva ortogonalidad.

Existen varios estudios sobre operadores que preservan ortogonalidad entre C*-álgebras. En el caso de operadores que preservan productos cero la lista es inmensamente más larga, pero eso es quizás tema para otra charla.

Operadores que preservan ortogonalidad

Supongamos que $T : A \to B$ es un operador (lineal y continuo) entre dos C*-álgebras.
Diremos que T *preserva ortogonalidad* (en A_{sa}) si $T(a) \perp T(b)$ para todo $a \perp b$ en A (en A_{sa}).
Estos operadores han recibido también los nombres de *operadores de Lamperti* o *"disjointness-preserving operators"*.

Todo C*-homomorfismo preserva ortogonalidad.

Como $a \perp b$ si, y solo si, $L(a,b) = 0$, entonces todo triple homomorfismo también preserva ortogonalidad.

Existen varios estudios sobre operadores que preservan ortogonalidad entre C*-álgebras. En el caso de operadores que preservan productos cero la lista es inmensamente más larga, pero eso es quizás tema para otra charla.
A pesar de todos estos estudios los operadores que preservan ortogonalidad entre C*-álgebras no estaban completamente descritos.

[Arendt, Indiana'1983]

Si $T : C(K_1) \to C(K_2)$ es un operador que preserva ortogonalidad entonces existe una función $h \in C(K_2)$ y una aplicación continua $\varphi : K_2 \to K_1$ verificando que

$$T(f)(t) = h(t) f(\varphi(t)),$$

para todo elemento $f \in C(K_1)$, $t \in K_2$.

[Arendt, Indiana'1983]

Si $T : C(K_1) \to C(K_2)$ es un operador que preserva ortogonalidad entonces existe una función $h \in C(K_2)$ y una aplicación continua $\varphi : K_2 \to K_1$ verificando que

$$T(f)(t) = h(t)f(\varphi(t)),$$

para todo elemento $f \in C(K_1)$, $t \in K_2$.

El trabajo de Arendt fue posteriormente extendido a operadores entre espacios $C_0(K)$ por Jarosz (Canadian Bull.'1999) y Jean-Wong (J. Math. Anal. Appl.'1996).

[Wolff, Arch. Math.'1994]

Sea $T : A \to B$ un operador simétrico $(T(a^*) = T(a)^*)$ entre dos C*-álgebras con A unital. Supongamos que T preserva ortogonalidad. Entonces, si h denota al elemento $T(1)$, se verifican:

[Wolff, Arch. Math.'1994]

Sea $T : A \to B$ un operador simétrico ($T(a^*) = T(a)^*$) entre dos C*-álgebras con A unital. Supongamos que T preserva ortogonalidad. Entonces, si h denota al elemento $T(1)$, se verifican:

a) $T(A) \subset \overline{h\{h\}'}$, donde $\{h\}'$ denota el conmutador de $\{h\}$.

[Wolff, Arch. Math.'1994]

Sea $T : A \to B$ un operador simétrico ($T(a^*) = T(a)^*$) entre dos C*-álgebras con A unital. Supongamos que T preserva ortogonalidad. Entonces, si h denota al elemento $T(1)$, se verifican:

a) $T(A) \subset \overline{h\{h\}'}$, donde $\{h\}'$ denota el conmutador de $\{h\}$.

b) Existe un *-homomorfismo de Jordan $S : A \to B^{**}$ verificando que $T(z) = hS(z)$, para todo $z \in A$.

[Wolff, Arch. Math.'1994]

Sea $T : A \to B$ un operador simétrico ($T(a^*) = T(a)^*$) entre dos C*-álgebras con A unital. Supongamos que T preserva ortogonalidad. Entonces, si h denota al elemento $T(1)$, se verifican:

a) $T(A) \subset \overline{h\{h\}'}$, donde $\{h\}'$ denota el conmutador de $\{h\}$.

b) Existe un *-homomorfismo de Jordan $S : A \to B^{**}$ verificando que $T(z) = hS(z)$, para todo $z \in A$.

En particular, todo operador que preserva ortogonalidad simétrico y unital entre dos C*-álgebras unitales es un *-homomorfismo de Jordan.

[Wolff, Arch. Math.'1994]

Sea $T : A \to B$ un operador simétrico ($T(a^*) = T(a)^*$) entre dos C*-álgebras con A unital. Supongamos que T preserva ortogonalidad. Entonces, si h denota al elemento $T(1)$, se verifican:

a) $T(A) \subset \overline{h\{h\}'}$, donde $\{h\}'$ denota el conmutador de $\{h\}$.

b) Existe un *-homomorfismo de Jordan $S : A \to B^{**}$ verificando que $T(z) = hS(z)$, para todo $z \in A$.

En particular, todo operador que preserva ortogonalidad simétrico y unital entre dos C*-álgebras unitales es un *-homomorfismo de Jordan.

Eliminando hipótesis de simetría y unitalidad tenemos:

[Wolff, Arch. Math.'1994]

Sea $T : A \to B$ un operador simétrico ($T(a^*) = T(a)^*$) entre dos C*-álgebras con A unital. Supongamos que T preserva ortogonalidad. Entonces, si h denota al elemento $T(1)$, se verifican:

a) $T(A) \subset \overline{h\{h\}'}$, donde $\{h\}'$ denota el conmutador de $\{h\}$.

b) Existe un *-homomorfismo de Jordan $S : A \to B^{**}$ verificando que $T(z) = hS(z)$, para todo $z \in A$.

En particular, todo operador que preserva ortogonalidad simétrico y unital entre dos C*-álgebras unitales es un *-homomorfismo de Jordan.

Eliminando hipótesis de simetría y unitalidad tenemos:

[Wong, Southeast Asian Bulletin of Mathematics'2005]

Un operador T entre dos C*-algebras es un triple homomorfismo $(T\{x,y,z\} = \{T(x), T(y), T(z)\})$ si, y solo si, T preserva ortogonalidad y $T^{**}(1) = h$ es una isometría partial (es decir, $hh^*h = \{h,h,h\} = h$ "tripotente".)

[Wong, Southeast Asian Bulletin of Mathematics'2005]

Un operador T entre dos C*-algebras es un triple homomorfismo ($T\{x,y,z\} = \{T(x), T(y), T(z)\}$) si, y solo si, T preserva ortogonalidad y $T^{**}(1) = h$ es una isometría partial (es decir, $hh^*h = \{h,h,h\} = h$ "tripotente".)

Para un elemento no necesariamente normal a en una C*-álgebra A, no disponemos de una resolución espectral del elemento obtenida en función de su espectro (No funciona la Teoría de Gelfand). Por tanto la teoría local como C*-álgebra está muy limitada en elementos no autoadjuntos.

[Wong, Southeast Asian Bulletin of Mathematics'2005]

Un operador T entre dos C*-algebras es un triple homomorfismo $(T\{x,y,z\} = \{T(x), T(y), T(z)\})$ si, y solo si, T preserva ortogonalidad y $T^{**}(1) = h$ es una isometría partial (es decir, $hh^*h = \{h,h,h\} = h$ "tripotente".)

Para un elemento no necesariamente normal a en una C*-álgebra A, no disponemos de una resolución espectral del elemento obtenida en función de su espectro (No funciona la Teoría de Gelfand). Por tanto la teoría local como C*-álgebra está muy limitada en elementos no autoadjuntos.

Sin embargo, A también disfruta de una estructura de JB*-triple, donde todo elemento admite una resolución espectral en términos de su espectro triple (concepto que no vamos a definir). Simplemente decir que el subespacio cerrado para el producto triple y para la norma generado por un elemento a cualquiera es isométricamente isomorfo un $C_0(L)$, para cierto espacio topológico localmente compacto Haussdorff L.

[Wong, Southeast Asian Bulletin of Mathematics'2005]

Un operador T entre dos C*-algebras es un triple homomorfismo ($T\{x,y,z\} = \{T(x), T(y), T(z)\}$) si, y solo si, T preserva ortogonalidad y $T^{**}(1) = h$ es una isometría partial (es decir, $hh^*h = \{h,h,h\} = h$ "tripotente".)

Para un elemento no necesariamente normal a en una C*-álgebra A, no disponemos de una resolución espectral del elemento obtenida en función de su espectro (No funciona la Teoría de Gelfand). Por tanto la teoría local como C*-álgebra está muy limitada en elementos no autoadjuntos.

Sin embargo, A también disfruta de una estructura de JB*-triple, donde todo elemento admite una resolución espectral en términos de su espectro triple (concepto que no vamos a definir). Simplemente decir que el subespacio cerrado para el producto triple y para la norma generado por un elemento a cualquiera es isométricamente isomorfo un $C_0(L)$, para cierto espacio topológico localmente compacto Haussdorff L.

Otros Ingredientes:

[Conexiones con los polinomios ortogonalmente aditivos]

Si $T : A \to B$ es un operador que preserva ortogonalidad entonces el polinomio

$$P : A \to B, \;\; P(x) := T(x)T(x^*)^*T(x)$$

es ortogonalmente aditivo en A_{sa}.

Otros Ingredientes:

[Conexiones con los polinomios ortogonalmente aditivos]

Si $T : A \to B$ es un operador que preserva ortogonalidad entonces el polinomio

$$P : A \to B, \;\; P(x) := T(x)T(x^*)^* T(x)$$

es ortogonalmente aditivo en A_{sa}.

Este hecho unido a un Teorema de Goldstein (Haagerup-Lautsen) para describir las formas ortogonales sobre una C*-álgebra arbitraria y la resolución del espectro triple asociada a todo elemento nos permiten obtener la siguiente descripción:

Otros Ingredientes:

[Conexiones con los polinomios ortogonalmente aditivos]

Si $T : A \to B$ es un operador que preserva ortogonalidad entonces el polinomio

$$P : A \to B, \;\; P(x) := T(x) T(x^*)^* T(x)$$

es ortogonalmente aditivo en A_{sa}.

Este hecho unido a un Teorema de Goldstein (Haagerup-Lautsen) para describir las formas ortogonales sobre una C*-álgebra arbitraria y la resolución del espectro triple asociada a todo elemento nos permiten obtener la siguiente descripción:

[Burgos-Fernández-Garcés-Martínez-Peralta, preprint'2007]

Sea $T : A \to B$ un operador que preserva ortogonalidad entres dos C*-álgebras y sea $h = T^{**}(1)$. Entonces se verifica:

[Burgos-Fernández-Garcés-Martínez-Peralta, preprint'2007]

Sea $T : A \to B$ un operador que preserva ortogonalidad entres dos C*-álgebras y sea $h = T^{**}(1)$. Entonces se verifica:

a) $h^* T(z) = T(z^*)^* h$, $hT(z^*)^* = T(z)h^*$,

[Burgos-Fernández-Garcés-Martínez-Peralta, preprint'2007]

Sea $T : A \to B$ un operador que preserva ortogonalidad entres dos C*-álgebras y sea $h = T^{**}(1)$. Entonces se verifica:

a) $h^* T(z) = T(z^*)^* h$, $hT(z^*)^* = T(z)h^*$,

b) $r(h)^* T(z) = T(z^*)^* r(h)$, y $r(h)T(z^*)^* = T(z)r(h)^*$,

para todo $z \in A$.

[Burgos-Fernández-Garcés-Martínez-Peralta, preprint'2007]

Sea $T : A \to B$ un operador que preserva ortogonalidad entres dos C*-álgebras y sea $h = T^{**}(1)$. Entonces se verifica:

a) $h^* T(z) = T(z^*)^* h$, $hT(z^*)^* = T(z)h^*$,

b) $r(h)^* T(z) = T(z^*)^* r(h)$, y $r(h) T(z^*)^* = T(z) r(h)^*$,

para todo $z \in A$.Además existe un homomorfismo triple $S : A \to B^{**}$ verificando que

$$T(z) = L(h, r(h))(S(z)) = \frac{1}{2}\left(hr(h)^* S(z) + S(z) r(h)^* h\right),$$

para todo $z \in A$.

El resultado anterior pone de manifiesto la relación tan estrecha que aparece entre la ortogonalidad y el producto triple en C*-álgebras.

El resultado anterior pone de manifiesto la relación tan estrecha que aparece entre la ortogonalidad y el producto triple en C*-álgebras.

[Burgos-Fernández-Garcés-Martínez-Peralta, preprint'2007]

Sea T un operador entre dos C*-álgebras, entonces T preserva ortogonalidad si, y solo si, T preserva productos triples cero (i.e., $\{T(x), T(y), T(z)\} = 0$ para todo $\{x, y, z\} = 0$).

El resultado anterior pone de manifiesto la relación tan estrecha que aparece entre la ortogonalidad y el producto triple en C*-álgebras.

[Burgos-Fernández-Garcés-Martínez-Peralta, preprint'2007]

Sea T un operador entre dos C*-álgebras, entonces T preserva ortogonalidad si, y solo si, T preserva productos triples cero (i.e., $\{T(x), T(y), T(z)\} = 0$ para todo $\{x, y, z\} = 0$).

El anterior resultado no es posible para operadores que preservan productos cero. Podemos tomar, por ejemplo $T : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$, $T(x) = ux$, donde $u = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Claramente T es un triple homomorfismo y por tanto preserva ortogonalidad, no obstante $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, verifican $xy = yx = 0$ y $T(x)T(y) \neq 0$.

Problemas Abiertos:

- Extensión de los anteriores resultados a operadores entre C*-álgebras y JB*-triples reales.

Problemas Abiertos:

- Extensión de los anteriores resultados a operadores entre C*-álgebras y JB*-triples reales.
- Generalización del Teorema de Goldstein al ambiente de las JB*-álgebras y los JB*-triples. Es decir, si A es una JB*-álgebra o un JB*-triple, ¿ como son las formas bilineales ortogonales $V : A \times A \to \mathbb{C}$? ¿Qué relación existe con las derivaciones de A en A^*?

Problemas Abiertos:

- Extensión de los anteriores resultados a operadores entre C*-álgebras y JB*-triples reales.
- Generalización del Teorema de Goldstein al ambiente de las JB*-álgebras y los JB*-triples. Es decir, si A es una JB*-álgebra o un JB*-triple, ¿ como son las formas bilineales ortogonales $V : A \times A \to \mathbb{C}$? ¿Qué relación existe con las derivaciones de A en A^*?
- Operadores que casi-preservan ortogonalidad.

Problemas Abiertos:

- Extensión de los anteriores resultados a operadores entre C*-álgebras y JB*-triples reales.
- Generalización del Teorema de Goldstein al ambiente de las JB*-álgebras y los JB*-triples. Es decir, si A es una JB*-álgebra o un JB*-triple, ¿ como son las formas bilineales ortogonales $V : A \times A \to \mathbb{C}$? ¿Qué relación existe con las derivaciones de A en A^*?
- Operadores que casi-preservan ortogonalidad.