Polinomios ortogonalmente aditivos y aplicaciones.

Pablo Linares
conjuntamente con A. Ibort y J. G. Llavona.

Universidad Complutense

Salobreña, 3-5 Abril 2008

1. Polinomios ortogonalmente aditivos.
   - Introducción.
   - Resultados conocidos.

2. Aplicaciones.
   - Representación de retículos.
   - Teoría espectral.
   - Problema de momentos multilineal.

Introducción

Definición (Retículo de Banach)

Sean $(X,\leq)$ un espacio de Banach real y una relación de orden parcial. X es un retículo de Banach si:

(i) Si $x \leq y$ entonces $x + z \leq y + z$ para todos $x, y, z \in X$

(ii) $ax \geq 0$ para todo $x \geq 0$ y todo a real no negativo

(iii) Dados cualquier $x, y \in X$, existen la menor cota superior $x \vee y$ y la mayor cota inferior $x \wedge y$.

(iv) $\|x\| \leq \|y\|$ siempre que $|x| \leq |y|$, definiendo el valor absoluto $|x|$ como $|x| = x \vee (-x)$

Ejemplos

$C(K)$, L^P (orden puntual), ℓ_p (orden por coordenadas)

Definición (Polinomios ortogonalmente aditivos)

X retículo de Banach. $P \in \mathcal{P}(^m X)$ es un polinomio ortogonalmente aditivo si $P(x+y) = P(x) + P(y)$ siempre que $x, y \in X$ sean ortogonales (es decir $|x| \wedge |y| = 0$).

Denotaremos por $\mathcal{P}_o(^m X)$ al espacio de polinomios ortogonalmente aditivos.

Ejemplos

1. En $C([0,1])$, $P(f) = \int_0^1 f^n \mathrm{d}\mu$.
2. En ℓ_2, $P(x) = \|x\|^2 = (x,x) = \sum x_n^2$.

Resultados conocidos

Polinomios ortogonalmente aditivos en L^p y ℓ_p.

Sundaresan 1991

1. Sea $1 \leq p < \infty$. El espacio de polinomios ortogonalmente aditivos, n-homogéneos $\mathcal{P}_o({}^k\ell_p)$ es isométricamente isomorfo a $\ell_{p/p-k}$ para $1 \leq k < p < \infty$ y a ℓ_∞ para $p \leq k$.
2. Si $X = L^p[0,1]$ con la medida de Lebesgue μ y $1 \leq p < \infty$ tenemos tres casos:
    - $1 \leq k < p$: $P \in P_o({}^kX)$ si y sólo si existe un único $\xi \in L_{\frac{p}{p-k}}$ tal que $P(x) = \int_0^1 \xi x^k \mathrm{d}\mu$
    - $k = p$: $P \in P_o({}^kX)$ si y sólo si existe un único $\xi \in L_\infty$ tal que $P(x) = \int_0^1 \xi x^k \mathrm{d}\mu$
    - $k > p$: $P_o({}^kX) = \{0\}$

Polinomios ortogonalmente aditivos en $C(K)$.

Pérez-García, Villanueva 2005 y Carando, Lasalle, Zalduendo 2006.

Dado $P \in \mathcal{P}_o({}^n C(K))$, existe una medida de Borel regular μ sobre K tal que

$$P(f) = \int_K f^n \mathrm{d}\mu$$

para todo $f \in C(K)$.

Polinomios ortogonalmente aditivos en retículos de Banach.

Sea X un retículo de funciones en un conjunto o un retículo de clases de equivalencia de funciones medibles en un espacio de medida (Ω, Σ, μ).
Para $f \in X$, definimos: $f^\alpha(s) = |f(s)|^\alpha sign(f(s))$.

Definición (q-concavificación de X)

$$X_{(n)} = \{f^n : f \in X\} \text{ para } n > 1.$$

Consideramos en $X_{(n)}$ la cuasi-norma definida por $\|\|f\|\| = \|f^{1/n}\|^n$.

Observación

Si T es lineal y continua en $X_{(n)}$, entonces el polinomio $P(x) = T(x^n)$ es ortogonalmente aditivo.

Benyamini, Lasalle, Llavona 2006.

Sea X un retículo de Banach de funciones. Fijamos $n \in \mathbb{N}$. Entonces, la aplicación $T \mapsto \mathcal{P}_T$, dada por $\mathcal{P}_T(f) = T(f^n)$, es una isometría lineal de $(X_{(n)}, \|\!| \cdot |\!\|)^*$ sobre $\mathcal{P}_o({}^nX)$ el espacio de polinomios n-homogéneos ortogonalmente aditivos en X.

Observación

Los resultados también son válidos en el caso vectorial.

Ibort, L, Llavona

Sea $1 \leq p < \infty$. El espacio de polinomios ortogonalmente aditivos, n-homogéneos $\mathcal{P}_o({}^k\ell_p)$ es isométricamente isomorfo a ℓ_∞ para $1 \leq p \leq k$ y a $\ell_{p/p-k}$ para $k < p < \infty$.

Demostración.

- Definimos el tensor diagonal $D_{k,p}$ como el subespacio cerrado de $\widehat{\bigotimes}_{\pi,s,k}\ell_p$ generado por $e_n \otimes \cdots \otimes e_n$.
- $D_{k,p}$ es isométricamente isomorfo a $\ell_{p/k}$ si $k < p < \infty$ y a ℓ_1 si $1 \leq p \leq k$.
- $\mathcal{P}_o({}^k\ell_p)$ es isométricamente isomorfo a $D^*_{k,p}$.

$\square$

Polinomios ortogonalmente aditivos en C^*-álgebras

Palazuelos, Peralta y Villanueva 2008

Sea A una C^*-álgebra, $n \in \mathbb{N}$.
El operador

$$\phi : A^* \longrightarrow \mathcal{P}_o(^n A)$$

que hace corresponder a cada $\varphi \in A^*$ el polinomio $P_\varphi(x) = \varphi(x^n)$, define una biyección lineal bicontinua tal que

$$\|P_\varphi\| \leq \|\varphi\| \leq 2\|P_\varphi\|.$$

APLICACIONES

Teorema (Benyamini, Lasalle, Llavona 2006.)

Sea X un retículo de Banach de funciones. Fijamos $n \in \mathbb{N}$. Entonces, la aplicación $T \mapsto \mathcal{P}_T$, dada por $\mathcal{P}_T(f) = T(f^n)$, es una isometría lineal de $(X_{(n)}, \|\!| \cdot |\!\|)^*$ sobre $\mathcal{P}_o(^nX)$ el espacio de polinomios n-homogéneos ortogonalmente aditivos en X.

Espacios funcionales Köthe orden continuos

Definición

Un retículo de Banach X de clases de equivalencia de funciones medibles y localmente integrables en un espacio de medida (Ω, Σ, μ) completo y σ-finito es un espacio de funciones de Köthe si:

- Si $g \in X$ y si f es medible con $|f(x)| \leq |g(x)|$ casi todo x entonces, $f \in X$ y $\|f\| \leq \|g\|$.
- $\chi_E \in X$ para cada $E \in \Sigma$ con medida finita.

Definición

Un retículo de Banach X es orden continuo si todo conjunto descendiente $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ que verifique $\inf\{x_\alpha : \alpha \in A\} = 0$ cumple que $\lim_\alpha \|x_\alpha\| = 0$.

Una característica de los espacios Köthe orden continuos, es que su dual viene dado por integrales. Así, dada $\varphi \in X^*$, podemos encontrar ξ medible con $\xi f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ para toda $f \in X$, con

$$\varphi(f) = \int_\Omega f(\omega)\xi(\omega)\mathrm{d}\mu.$$

Corolario (Benyamini, Lasalle, Llavona 2006.)

Sea X un espacio funcional Köthe orden continuo sobre (Ω, Σ, μ). Entonces, todo polinomio m-homogéneo ortogonalmente aditivo $\mathcal{P} \in \mathcal{P}(^m X)$ se puede representar como

$$\mathcal{P}(f) = \int_\Omega f^m \xi \mathrm{d}\mu$$

para cierta $\xi \in \Omega$ medible que verifique que $f\xi \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ para toda $f \in X$.

Observación

El corolario anterior no incluye el caso $C(K)$. Éste se puede obtener a partir del teorema de representación de Riesz, ya que si $X = C(K)$, $X_{(n)} = X$ y para $P \in \mathcal{P}_o(^nX)$ existe $L \in X^*$ tal que $P(x) = L(x^n)$. Concluimos así que existe una medida de Borel regular μ tal que

$$P(f) = \int_K f^n \mathrm{d}\mu.$$

para $f \in C(K)$.

Representación de retículos

Teorema (Kakutani)

Un espacio L^p-abstracto es orden isométrico a un espacio $L^p(\mu)$ sobre cierto espacio de medida (Ω, Σ, μ).

Definición

Sea $1 \leq p < \infty$. Un retículo de Banach X es un espacio L^p-abstracto si $\|x + y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$ siempre que $x \wedge y = 0$.

Observación

Sea H un espacio de Hilbert. El polinomio $P(x) = \|x\|^2$ es ortogonalmente aditivo.
En efecto, como $P(x+y) = P(x) + 2(x, y) + P(y)$, P es ortogonalmente aditivo si $(x, y) = 0$ para $|x| \wedge |y| = 0$ es decir, si cualquier par de elementos disjuntos son ortogonales.
Si $|x| \wedge |y| = 0$, $|x + y| = |x - y|$ así

$$(x, y) = 1/4(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = 0$$

En particular, el teorema de Kakutani nos garantiza que todo espacio de Hilbert es orden isométrico a un cierto $L^2(\mu)$.

Teorema

Sea H un espacio de Hilbert real separable. Supongamos que H es retículo de Banach con un orden $\leq$. Entonces, H es orden isométrico a $L^2(\mu)$ para cierta medida μ.

Teorema

Sea H un espacio de Hilbert real separable. Supongamos que H es retículo de Banach con un orden $\leq$. Entonces, H es orden isométrico a $L^2(\mu)$ para cierta medida μ.

Demostración. Ibort, L, Llavona

- [LT]: Un retículo de Banach separable es orden isométrico a un espacio de Köthe si y sólo si es σ-orden completo.
- [LT]: Todo espacio reflexivo es orden completo.
- Sea X espacio de Köthe sobre un espacio de medida $(\Omega, \Sigma, \tilde{\mu})$ orden isométrico a H.
- Por 1.a.7 de [LT] X es orden continuo.
- $\|\cdot\|_X^2$ es un polinomio ortogonalmente aditivo. Así

$$\|f\|_X^2 = \int f^2 \xi \mathrm{d}\tilde{\mu}$$

- $X = L^2(\mu)$ para $\mathrm{d}\mu = \xi \mathrm{d}\tilde{\mu}$.

Teoría espectral

Teorema

Sea T un operador autoadjunto y acotado en un Hilbert separable H. Existe un isomorfismo isométrico $U : H \longrightarrow L^2(\Omega, \mu)$ y un operador multiplicación $\tilde{T}$ tal que $T = U\tilde{T}U^{-1}$.

Teorema

Sea T un operador autoadjunto y acotado en un Hilbert separable H. Existe un isomorfismo isométrico $U : H \longrightarrow L^2(\Omega, \mu)$ y un operador multiplicación $\tilde{T}$ tal que $T = U^{-1}\tilde{T}U$.

Demostración. Ibort, L, Llavona. Caso de operadores con espectro discreto.

- Sea $\{e_n\}$ base ortonormal de H formada por autovalores de T.
- El polinomio $P(f) = (Tf, f)$ es ortogonalmente aditivo.
- Sea U la orden isometría que existe entre H y un cierto X espacio de funciones de Köthe sobre cierto espacio de medida (Ω, Σ, μ). Como antes $X = L^2(\mu)$.
- $\tilde{P}(f) = P(U^{-1}f)$ es ortogonalmente aditivo en $L^2(\mu)$ así
$$\tilde{P}(f) = \int f^2 \xi \mathrm{d}\mu = (\tilde{T}f, f)_2$$
- $P(f) = \tilde{P}(Uf) = (\tilde{T}Uf, Uf)_2 = (U^{-1}\tilde{T}Uf, f)$ y $T = U^{-1}\tilde{T}U$.

Problema de momentos multilineal

Teorema (Ibort, L, Llavona)

Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y $\mu_{k_1,\ldots k_n}$ una sucesión de multimomentos acotada.
Existe una medida finita μ en K tal que

$$\mu_{k_1,\ldots k_n} = \int_K t^{k_1+\ldots+k_n} d\mu(t)$$

si y sólo si la sucesión $\mu_{k_1,\ldots k_n}$ es Hänkel.

Y. Benayamini, S. Lassalle y J.G. Llavona, *Homogeneous orthogonally-additive polynomials on banach lattices.*, Bull. London Math. Soc. **38** (2006), 459-469.

D. Carando, S. Lassalle y I. Zalduendo, *Orthogonally additive polynomials over $C(K)$ are measures—a short proof*. Integral Equations Operator Theory 56 (2006), no. 4, 597–602.

A. Ibort, P. Linares y J. G. Llavona. On the multilinear Hausdorff problem of moments. Preprint.

A. Ibort, P. Linares y, J.G. Llavona, *On the representation of orthogonally additive polynomials in ℓ_p.* Preprint.

A. Ibort, P. Linares y J.G. Llavona, *Spectral Theory and Orthogonally Additive Polynomials.* Preprint.

- S. Kakutani, *Concrete Representation of Abstract (L)-Spaces and the Mean Ergodic Theorem*. The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 42, No. 2. (Apr., 1941), pp. 523-537.
- J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II*. Springer 1977.
- C. Palazuelos, A. M. Peralta e I. Villanueva *rthogonally additive polynomials on C*-Algebras*. Q. J. Math, doi:10.1093/qmath/ham042
- D. Pérez-García y I. Villanueva, *Orthogonally additive polynomials on spaces of continuous functions*. J. Math. Anal. Appl. 306 (2005), no. 1, 97–105.
- K. Sundaresan, *Geometry of spaces of homogeneous polynomials on Banach lattices*. Applied geometry and discrete Mathematics 571-586, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., 4, Amer. Math. Soc., Prov., RI, 1991.