Hiperciclicidad y caos de operadores

Alberto Conejero
Félix Martínez
Alfredo Peris (IP)
Macarena Trujillo

Departamento Matemática Aplicada
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada
Universidad Politécnica de Valencia

IV Encuentro Análisis Funcional y Aplicaciones
3 – 5 abril 2008 Salobreña

Teorema (G. D. Birkhoff, 1929)

Existe una función entera $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que, para cualquier función entera $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, existe una sucesión $(z_k)_k$ en $\mathbb{C}$ tal que

$$\lim_k f(z + z_k) = g(z) \text{ uniformemente en conjuntos compactos de } \mathbb{C}.$$

En términos de dinámica

- $\mathcal{H}(\mathbb{C}) := \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \,;\; f \text{ es entera}\}$, consideramos $(\mathcal{H}(\mathbb{C}), \tau_0)$.
- Consideramos la aplicación (lineal y continua)

$$T_1 : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C}), \quad f(z) \mapsto f(z+1)$$

- Entonces existe $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que su *órbita* bajo la función T_1

$$\mathrm{Orb}(T_1, f) := \{f, T_1 f, T_1^2 f, \dots\}$$

es densa en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Contexto de trabajo y definiciones básicas

- Desde ahora X será un espacio de Fréchet separable y $T : X \to X$ un operador (aplicación lineal y continua)
- Dado $x \in X$, su órbita bajo el operador T se define como

$$\mathrm{Orb}(T, x) := \{x, Tx, T^2x, \dots\}.$$

- El operador $T : X \to X$ se dice que es hipercíclico si existe un vector $x \in X$ tal que $\overline{\mathrm{Orb}(T, x)} = X$. A dicho vector x se le llama vector hipercíclico de T.

Kitai, Gethner, Godefroy, Shapiro y Herrero establecen las bases de la teoría

Rolewicz, 1969

No existen operadores hipercíclicos definidos en espacios de dimensión finita

Teorema de transitividad de Birkhoff, 1920

Equivalen

a) T es hipercíclico
b) T es topológicamente transitivo

Para todo $U, V \subset X$ abiertos y no vacíos
existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$

El operador "desplazamiento hacia atrás" (backward shift)

Consideramos $B : l_p \to l_p$ definido como

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

Si $|\lambda| > 1$ entonces λB es hipercíclico en l_p (Rolewicz, 1969)

Todo espacio de Fréchet separable de dimensión infinita admite operador hipercíclico

- Caso Banach (Ansari y Bernal)
- Caso Fréchet (Bonet-Peris)

(usan un resultado de Salas sobre perturbaciones de la identidad por operadores shift ponderados $I + B_w$)

Caos

Una aplicación continua $f : M \to M$ en un espacio métrico (M, d) es caótica (en el sentido Devaney) si

1. f es topológicamente transitiva
2. El conjunto

$$\begin{aligned} \mathrm{Per}(f) :&= \{\text{puntos periódicos de } f\} \\ &= \{x \in M;\ f^n x = x \text{ para algún } n\} \end{aligned}$$

   es denso en M

Los ejemplos citados anteriormente, T_1 y λB, son caóticos

Sea $B(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$ y $P(z)$ un polinomio complejo.
Consideramos $P(B) : l_p \to l_p$
Condiciones en los coeficientes de $P(z)$ para que $P(B)$ sea caótico

Motivaciones

- ¿Es suficiente que P posea un coeficiente a_i con $|a_i| > 1$ y $P(0) = 0$ (R. Aron)?
- Todo operador en derivadas $P(D)$ que no sea un múltiplo de la identidad es caótico en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ (Godefroy-Shapiro) ¿Caos de $P(D)$ en algunos espacios de Banach de funciones analíticas?

Teorema

Sea $P(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i z^i$, si $\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)^{1/2} > 1$ entonces $P(B)$ es caótico en l_p

Caos de $P(D)$ en espacios de Hilbert de funciones enteras

Sea $\gamma(z)$ una función entera de comparación admisible, i.e.,

$$\gamma_i > 0 \ \forall i \in \mathbb{N}_0 \text{ y } \{i\gamma_i/\gamma_{i-1}\}_{i\geq 1} \text{ es decreciente}$$

Consideramos el espacio de Hilbert

$$E^2(\gamma) := \left\{ g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{g}(i) z^i \text{ tales que } \|g\|_{2,\gamma}^2 := \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i^{-2} \left|\hat{g}(i)\right|^2 < \infty \right\}$$

$E^2(\gamma)$ es isométrico a $l_2(\{\gamma_i^{-1}\}_i)$

(Hiperciclicidad — Chan-Shapiro)

$$P(B) : l_p \to l_p$$
$$\Downarrow$$
$$P(B_w) : l_p \to l_p$$
$$\Downarrow$$
$$P(B_v) : l_p((a_i)_i) \to l_p((a_i)_i)$$
$$\Downarrow$$
$$P(D) : E^2(\gamma) \to E^2(\gamma)$$

$$B_w(x_1, x_2, x_3, \dots) = (w_2 x_2, w_3 x_3, w_4 x_4, \dots)$$

Definición

Sea X un espacio de Banach complejo y $T : X \to X$ un operador. Un vector $x \in X \setminus \{0\}$ se dice que es n-periódico si $T^n x = x$ y $T^m x \neq x$ para cada $1 \leq m < n$. Se dice que $n \in \mathbb{N}$ es periodo de T si T admite un vector n-periódico. Denotaremos

$$\mathcal{P}(T) := \{n \in \mathbb{N} \text{ tales que } n \text{ es un periodo de } T\}$$

Teorema

$A \subset \mathbb{N}$ es un conjunto de periodos de un operador en un espacio de Hilbert si y sólo si A contiene los m.c.m. de todos los pares de elementos de A. Si, además, A es infinito existe un operador caótico $T : X \to X$ tal que $\mathcal{P}(T) = A$.

Aplicaciones “linealizables y conjugación topológica”

- $f : X \to X$ continua es “linealizable” si es topológicamente conjugada a un operador $T : Y \to Y$
- Todo espacio de Banach separable es homeomorfo a l_2 (teorema de Anderson-Kadec)

Teorema

Sea X espacio de Banach separable y $A \subset \mathbb{N}$ infinito. Existe $f : X \to X$ aplicación caótica “linealizable” tal que $\mathcal{P}(f) = A$ si y sólo si A contiene los m.c.m. de todos los pares de elementos de A.

C_0- semigrupos hipercíclicos y caóticos

Un C_0**-semigrupo** $\mathcal{T} := \{T_t : X \to X;\ t \geq 0\}$ es una familia uniparamétrica de operadores tal que $T_0 = I$, $T_t \circ T_s = T_{t+s}$, y $\lim_{t \to s} T_t x = T_s x$ para cada $x \in X$.

La órbita de x es $\mathrm{Orb}(\mathcal{T}, x) := \{T_t x;\ t \geq 0\}$.
El semigrupo es hipercíclico si tiene una órbita densa y, es caótico si es hipercíclico y el conjunto de puntos periódicos es denso en X

$$\mathrm{Per}(\mathcal{T}) := \{x \in X \ \ T_t x = x \text{ para algún } t > 0\}$$

Comportamiento asintótico de soluciones del problema abstracto de Cauchy $x'(t) = Ax$, $x(0) = x_0 \in X$, donde A es un operador cerrado (no acotado) en X que genera el semigrupo de soluciones

Lasota, Desch, Schappacher, Webb

Caso discreto (Ansari)

Si $T : X \to X$ es hipercíclico, entonces T^n es hipercíclico para todo $n \in \mathbb{N}$

Caso continuo (Conejero-Müller-Peris)

Si $\mathcal{T} := \{T_t : X \to X;\ t \geq 0\}$ es un C_0-semigrupo hipercíclico, entonces T_t es hipercíclico para todo $t > 0$

Bayart-Bermúdez

Existen C_0-semigrupos caóticos tales que ningún T_t, $t > 0$ es caótico

$$P : X \to X$$

es un polinomio d-homogéneo si

$$\exists\, A : X \times \overset{(d)}{\cdots} \times X \to X \text{ multilineal y continua t.q.}$$
$$P(x) = A(x, \ldots, x)$$

$$Q = \sum_{k=0}^{d} P_k \text{ donde } P_k \text{ es un polinomio } k\text{-homogéneo}$$

(operadores lineales on polinomios 1-homogéneos)

¿Todo espacio de Fréchet separable de dimensión infinita admite un polinomio hipercíclico de grado $d > 1$?

Motivación

- No existen polinomios homogéneos hipercíclicos de grado $d > 1$ en ningún espacio de Banach (Bernardes)
- ¿No homogéneos en el caso Banach? ¿Homogéneos en espacios de Fréchet? (Aron)
- ¿Todo espacio de Banach separable de dimensión infinita admite un operador hipercíclico?

Peris da ejemplos afirmativos y relaciona la dinámica de polinomios en espacios de Banach con la dinámica compleja de polinomios en $\mathbb{C}$ (conjuntos de Julia)

Teorema

Todo espacio de Fréchet (complejo) separable de dimensión infinita admite un polinomio hipercíclico de grado $d > 1$

Usamos el resultado de Salas sobre hipercilicicdad de $I + B_w$

Estudiamos el caos de polinomios concretos definidos en espacios generales de sucesiones (esp. de Köthe)

Pregunta

¿Todo espacio de Fréchet separable de dimensión infinita admite un polinomio caótico de grado $d > 1$?
Respuesta negativa para operadores (Bonet-MG-Peris)