Módulo de Bishop-Phelps-Bollobás en espacios de Banach

Soledad Moreno Pulido
Fernando Rambla Barreno

Universidad de Cádiz
Grupo de investigación FQM-257

Abril 2011

Contenido

Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás

Sea $\prod_X = \{(x, f) \in S_X \times S_{X^*} : f(x) = 1\}$.

Teorema (Bishop-Phelps-Bollobás)

Sea X espacio de Banach y $0 < \varepsilon < 1$. Si $(z, h) \in S_X \times S_{X^*}$ y $|1 - h(z)| < \frac{\varepsilon^2}{4}$, existe $(y, g) \in \prod_X$ tal que $\|g - h\| < \varepsilon$ y $\|y - z\| < \varepsilon$.

Corolario (Bishop-Phelps)

El conjunto de aplicaciones que alcanzan la norma es denso en S_{X^*}.

Este corolario tiene importantes aplicaciones (por ejemplo para rangos numéricos).

Módulo de Bishop-Phelps-Bollobás

Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definición

Sea X espacio de Banach y $0 < \varepsilon \leq 1/2$. Definimos

$$C_X(\varepsilon) = \sup\{\delta \in \mathbb{R} : \text{ si } (z,h) \in S_X \times S_{X^*} \text{ y } h(z) > 1-\delta, \text{ existe } (y,g) \in \prod_X \text{ tal que } \|g-h\| < \varepsilon \text{ y } \|y-z\| < \varepsilon\}$$

que llamaremos **módulo de Bishop-Phelps-Bollobás de** X.

Propiedades de $C_X(\varepsilon)$

Proposición

Sea $0 < \varepsilon \leq 1/2$ y X espacio de Banach.

1. $\frac{\varepsilon^2}{4} \leq C_X(\varepsilon) \leq 2\varepsilon$, *si* $\dim(X) \geq 2$.
2. *Si X es reflexivo,* $C_X(\varepsilon) = C_{X^*}(\varepsilon)$.
3. $C_X(\varepsilon) = 1 - \inf A_\varepsilon$, *donde*

$$A_\varepsilon = \{\mu > 0 : \text{ si } (z,h) \in S_X \times S_{X^*} \text{ y } h(z) \geq \mu, \text{ existe } (y,g) \in \prod_X \text{ tal que } \|g-h\| < \varepsilon \text{ y } \|y-z\| < \varepsilon\}$$

Nota

A_ε es un intervalo de números positivos del tipo $(\alpha, +\infty)$ o $[\alpha, +\infty)$, con $\alpha > 0$.

CÁLCULO DE $C_X(\varepsilon)$ EN ESPACIOS DE BANACH

TEOREMA

Sea $0 < \varepsilon \leq 1/2$.

1. $C_{\mathbb{R}^n_1}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2}$, *si* $n \geq 2$.
2. $C_{\mathbb{R}^n_\infty}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2}$, *si* $n \geq 2$.
3. $C_{\mathbb{R}^n_2}(\varepsilon) = 2\varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^4}{2}$, *si* $n \geq 2$.
4. $C_{\ell_2}(\varepsilon) = 2\varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^4}{2}$.
5. $C_{\ell_1}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2}$.

CÁLCULO DE $C_X(\varepsilon)$ EN $\mathcal{C}(K)$, K COMPACTO NO PERFECTO

TEOREMA

Sea K un espacio compacto no perfecto con al menos dos puntos y sea $X = \mathcal{C}(K)$. Entonces, para cualquier $\varepsilon \in (0, 1/2]$, $C_X(\varepsilon) = \varepsilon^2/2$.

DEMOSTRACIÓN

- $A_\varepsilon = \{\mu > 0 :$ si $(z, h) \in S_X \times S_{X^*}$ y $h(z) \geq \mu,$ existe $(y, g) \in \prod_X$ tal que $\|g - h\| < \varepsilon$ y $\|z - y\| < \varepsilon\}$
- $C_X(\varepsilon) = 1 - \inf A_\varepsilon$.
- $\prod_{\mathcal{C}(K)} = \{(x, f) \in S_{\mathcal{C}(K)} \times S_{\mathcal{C}(K)^*} : f(x) = 1\}$

CÁLCULO DE $C_X(\varepsilon)$ EN $\mathcal{C}(K)$, K COMPACTO NO PERFECTO

Primera mitad

Sea $0 < \varepsilon \leq 1/2$.

Veamos que si $\mu \in A_\varepsilon$, entonces $\mu > 1 - \dfrac{\varepsilon^2}{2}$ $\left(\text{ínf } A_\varepsilon \geq 1 - \dfrac{\varepsilon^2}{2}\right)$.

Para ello basta ver que $\mu = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \notin A_\varepsilon$.

- t_0 punto aislado en K, $s \in K \setminus \{t_0\}$
- Tomamos $h = (1 - \frac{\varepsilon}{2})\delta_{t_0} + \frac{\varepsilon}{2}\delta_s$ y $z \in \mathcal{C}(K)$ definida por:

$$z(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t = t_0 \\ 1 - \varepsilon & si \quad t \in K \setminus \{t_0\} \end{cases}$$

- $h(z) = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} = \mu$.

CÁLCULO DE $C_X(\varepsilon)$ EN $\mathcal{C}(K)$, K COMPACTO NO PERFECTO

Dado $(y, g) \in \prod_{\mathcal{C}(K)}$, si $\|y - z\| < \varepsilon$:

- $y(K \setminus \{t_0\}) \subseteq [a, b] \subseteq (1 - 2\varepsilon, 1)$ para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$.
- $y(t_0) = 1$.

Existe una red $(g_i)_{i \in I} \subseteq \mathrm{co}(\mathrm{ex}(B_{X^*})) \subseteq B_{X^*}$ tal que $g_i \xrightarrow{w^*} g$.

Podemos asumir que para todo $i \in I$:

- Existe $k_i \in \mathbb{N}$ y un conjunto $\{\alpha_{n,i} : n \in \{0, \dots, k_i\}\} \subseteq [-1, 1]$, $\sum_{n=0}^{k_i} |\alpha_{n,i}| \leq 1$.
- Existen puntos distintos $t_{0,i} = t_0, t_{1,i}, \dots, t_{k_i,i} \in K$.

tales que $g_i = \sum_{n=0}^{k_i} \alpha_{n,i}\delta_{t_{n,i}}$, $\|g_i\| = \sum_{n=0}^{k_i} |\alpha_{n,i}| \leq 1$.

Cálculo de $C_X(\varepsilon)$ en $\mathcal{C}(K)$, K compacto no perfecto

Sea $\delta \in (0, 1-b)$. Como $g_i(y) \to g(y) = 1$, existe $i_0 \in I$ tal que si $i \geq i_0$, entonces

$$b < 1-\delta \leq g_i(y) = \sum_{n=0}^{k_i} \alpha_{n,i} y(t_{n,i}) \leq \alpha_{0,i} + \sum_{n=1}^{k_i} |\alpha_{n,i}| b \leq \alpha_{0,i} + b - b|\alpha_{0,i}|,$$

esto implica que $\alpha_{0,i} > 0$ y

$$1 \geq \alpha_{0,i} \geq \frac{1-\delta-b}{1-b}$$

y por tanto, $\lim_{i \in I} \alpha_{0,i} = 1$.

CÁLCULO DE $C_X(\varepsilon)$ EN $\mathcal{C}(K)$, K COMPACTO NO PERFECTO

Consideremos $u \in B_{\mathcal{C}(K)}$ tal que $u(t_0) = -1, u(s) = 1$.

Tenemos que $h(u) = -1 + \varepsilon$ y además:

$$g(u) - h(u) = \lim_{i \in I} g_i(u) - h(u) = \lim_{i \in I} \left(-\alpha_{0,i} + \sum_{n=1}^{k_i} \alpha_{n,i} u(t_{n,i}) \right) + 1 - \varepsilon \leq$$

$$\leq \limsup_{i \in I} \left(-\alpha_{0,i} + \sum_{n=1}^{k_i} |\alpha_{n,i}| \right) + 1 - \varepsilon = \limsup_{i \in I} (-\alpha_{0,i} + \|g_i\| - \alpha_{0,i}) + 1 - \varepsilon \leq$$

$$\leq -\varepsilon$$

luego $\|g - h\| \geq \varepsilon$ y así, $\mu \notin A_\varepsilon$.

CÁLCULO DE $C_X(\varepsilon)$ EN $\mathcal{C}(K)$, K COMPACTO NO PERFECTO

Segunda mitad

Veamos que si $\mu > 1 - \dfrac{\varepsilon^2}{2}$, entonces $\mu \in A_\varepsilon$ $\left(\text{ínf}\, A_\varepsilon \leq 1 - \dfrac{\varepsilon^2}{2}\right)$.

Sea $(z, h) \in S_{\mathcal{C}(K)} \times S_{\mathcal{C}(K)^*}$ con $h(z) \geq \mu > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$.

Supongamos que

- $h = \sum_{n=0}^{k} \alpha_n \delta_{t_n}$ para algún $k \in \mathbb{N}$.
- $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in [-1, 1]$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{k} |\alpha_n| = 1$.
- Distintos $t_0, \ldots, t_k \in K$.

CÁLCULO DE $C_X(\varepsilon)$ EN $\mathcal{C}(K)$, K COMPACTO NO PERFECTO

Vamos a construir $y \in \mathcal{C}(K)$ y $g = \sum_{n=0}^{k} \beta_n \delta_{t_n}$ tales que:

- $y \in S_{\mathcal{C}(K)}$.
- $\|g\| = \sum_{n=0}^{k} |\beta_n| = 1$.
- $g(y) = \sum_{n=0}^{k} \beta_n y(t_n) = 1$.
- $|y(t) - z(t)| < \varepsilon$ para todo $t \in K$.
- $\|g - h\| = \sum_{n=0}^{k} |\beta_n - \alpha_n| < \varepsilon$.

CÁLCULO DE $C_X(\varepsilon)$ EN $\mathcal{C}(K)$, K COMPACTO NO PERFECTO

Tomamos:

$$y_n = \begin{cases} 1 & si \quad z(t_n) > 1-\varepsilon \\ -1 & si \quad z(t_n) < \varepsilon - 1 \\ z(t_n) & si \quad z(t_n) \in [\varepsilon-1, 1-\varepsilon] \end{cases}$$

$$\beta_n = \begin{cases} 0 & si \quad n \in C = \{n \in \{0,\dots,k\} : |z(t_n)| \leq 1-\varepsilon\} \\ \alpha_n & si \quad n \in H^c \setminus C \\ \frac{-S\cdot \operatorname{sgn}(\alpha_n)}{\#(H\setminus C)} & si \quad n \in H \setminus C \end{cases}$$

donde $H = \{n \in \{0,\dots,k\} : \alpha_n z(t_n) \leq 0\}$, $S = \sum_{n\in H\cup C} |\alpha_n|$

CÁLCULO DE $C_X(\varepsilon)$ EN $\mathcal{C}(K)$, K COMPACTO NO PERFECTO

- $\|g\| = \sum_{n=0}^{k} |\beta_n| = 1$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{k} |\beta_n| &= \sum_{n\in C} |\beta_n| + \sum_{n\in H^c\setminus C} |\beta_n| + \sum_{n\in H\setminus C} |\beta_n| \\
&= 0 + \sum_{n\in H^c\setminus C} |\alpha_n| + \sum_{n\in H\setminus C} \frac{S}{\#(H\setminus C)} \\
&= \sum_{n\in H^c\setminus C} |\alpha_n| + \sum_{n\in H\cup C} |\alpha_n| = 1.
\end{aligned}
$$

Cálculo de $C_X(\varepsilon)$ en $\mathcal{C}(K)$, K compacto no perfecto

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{k} \beta_n y_n = 1.$

  Si $\beta_n \neq 0$, entonces $n \notin C$ y

$$\operatorname{sgn}(\beta_n) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\alpha_n) = \operatorname{sgn}(z(t_n)) & si \quad n \in H^c \\ -\operatorname{sgn}(\alpha_n) = \operatorname{sgn}(z(t_n)) & si \quad n \in H \end{cases}$$

  con lo cual $\beta_n y_n = \beta_n \operatorname{sgn}(z(t_n)) = |\beta_n|$, si $n = 0, \ldots, k$ y será

$$\sum_{n=0}^{k} \beta_n y_n = \sum_{n=0}^{k} |\beta_n| = 1.$$

CÁLCULO DE $C_X(\varepsilon)$ EN $\mathcal{C}(K)$, K COMPACTO NO PERFECTO

- $|y_n - z(t_n)| < \varepsilon$ para todo $n \in \{0, \dots k\}$.
  - Si $z(t_n) \in [\varepsilon - 1, 1 - \varepsilon]$,

$$|y_n - z(t_n)| = |z(t_n) - z(t_n)| = 0 < \varepsilon$$

  - Si $z(t_n) > 1 - \varepsilon$, $0 < 1 - z(t_n) < \varepsilon$,

$$|1 - z(t_n)| = |y_n - z(t_n)| < \varepsilon$$

  - Si $z(t_n) < \varepsilon - 1$, $0 < 1 + z(t_n) < \varepsilon$,

$$|-1 - z(t_n)| = |y_n - z(t_n)| < \varepsilon$$

Cálculo de $C_X(\varepsilon)$ en $\mathcal{C}(K)$, K compacto no perfecto

- $\|g-h\| = \sum_{n=0}^{k} |\beta_n - \alpha_n| < \varepsilon$.

$$\|g-h\| = \sum_{n=0}^{k} |\beta_n - \alpha_n| = \sum_{n\in C} |\alpha_n| + \sum_{n\in H\setminus C} (|\alpha_n| + |\beta_n|) =$$

$$2 - \sum_{n\in H^c\setminus C} |\alpha_n| - \sum_{n\in H^c\cup C} |\beta_n| = 2 - \sum_{n\in H^c\setminus C} |\alpha_n| - \sum_{n\in H^c\setminus C} |\alpha_n| = 2 \sum_{n\in H\cup C} |\alpha_n|$$

$$\Rightarrow \|g-h\| = 2S.$$

Veamos que $2S < \varepsilon$.

Cálculo de $C_X(\varepsilon)$ en $\mathcal{C}(K)$, K compacto no perfecto

$$2S < \frac{2}{\varepsilon}\left(\varepsilon \sum_{n\in C} |\alpha_n| + \sum_{n\in H}(1+|z(t_n)|)|\alpha_n|\right) =$$

$$= \frac{2}{\varepsilon}\left(1 - \left(\sum_{n\in C} |\alpha_n|(1-\varepsilon) + \left(1 - \sum_{n\in C}|\alpha_n| - \sum_{n\in H}|\alpha_n|\right) - \sum_{n\in H}|\alpha_n z(t_n)|\right)\right) =$$

$$\leq \frac{2}{\varepsilon}\left(1 - \left(\sum_{n\in C}\alpha_n z(t_n) + \sum_{n\in H^c\setminus C}\alpha_n z(t_n) + \sum_{n\in H}\alpha_n z(t_n)\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{\varepsilon}\left(1 - \sum_{n=0}^{k}\alpha_n z(t_n)\right) < \frac{2}{\varepsilon}\left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)\right) = \varepsilon$$

luego $S < \frac{\varepsilon}{2}$.

Cálculo de $C_X(\varepsilon)$ en $\mathcal{C}(K)$, K compacto no perfecto

En resumen, dado $(z,h) \in S_{\mathcal{C}(K)} \times S_{\mathcal{C}(K)^*}$ con $h(z) \geq \mu > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$, $h = \sum_{n=0}^{k} \alpha_n \delta_{t_n}$ y $\sum_{n=0}^{k} |\alpha_n| = 1$, existen

- $g = \sum_{n=0}^{k} \beta_n \delta_{t_n}$ con
  - $\|g - h\| < \varepsilon$.
  - $\|g\| = 1$
- Ciertos valores $y_0, \ldots, y_k$ de modo que
  - $\sum_{n=0}^{k} \beta_n y_n = 1$
  - $\text{máx}_{n=0,\ldots,k} |y_n| = 1$
  - $|y_n - z(t_n)| < \varepsilon$ para todo $n = 0, \ldots, k$.

CÁLCULO DE $C_X(\varepsilon)$ EN $\mathcal{C}(K)$, K COMPACTO NO PERFECTO

Tenemos que $F = \{t_0, \ldots, t_k\}$ es cerrado en K y sea

$$\begin{aligned} a : F &\longrightarrow [-m, m] \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon) \\ t_n &\mapsto \qquad y_n - z(t_n) \end{aligned}$$

Existe $\widetilde{a} : K \to [-m, m] \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$ continua con

- $\widetilde{a} \in \varepsilon B_{\mathcal{C}(K)}$.
- $\widetilde{a}|_F = a$.

Tomamos ahora $y = \min\{\max\{-1, \widetilde{a} + z\}, 1\}$. Será:

- $g(y) = \sum_{n=0}^{k} \beta_n y(t_n) = \sum_{n=0}^{k} \beta_n y_n = 1$ (ya que $y(t_n) = y_n$).
- $\|y\| = 1$.
- $\|y - z\| < \varepsilon$.

CÁLCULO DE $C_X(\varepsilon)$ EN $\mathcal{C}(K)$, K COMPACTO NO PERFECTO

Por último, dado $(z, h) \in S_{\mathcal{C}(K)} \times S_{\mathcal{C}(K)^*}$ con $h(z) \geq \mu > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$:

- Existe una red $(h_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{L}(\mathrm{ex}(B_{X^*})) \cap S_{X^*}$ tal que $h_i \xrightarrow{w^*} h$.
- En particular, $h_i(z) \to h(z) > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$, luego existe $i \geq i_0$ tal que $h_i(z) > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$.
- Para estas h_i, $i \geq i_0$, por el procedimiento anterior, construimos $(y, g_i) \in \prod_X$ tales que $\|y - z\| < \varepsilon$ y $\|g_i - h_i\| < \varepsilon$.
- Para g_i, existe una subred $(g_{i_j})_j \xrightarrow{w^*}$ cierto $g \in B_{X^*}$.
- $g - h = w^* \operatorname{lím}_j (g_{i_j} - h_{i_j}) \Rightarrow \|g - h\| \leq w^* \operatorname{lím\,inf}_j \|g_{i_j} - h_{i_j}\| < \varepsilon$.
- $g_{i_j}(y) = 1$ para todo j, luego $g(y) = 1$ (límite w^*).
- $\|g\| = 1$.

Cálculo de $C_X(\varepsilon)$ en $\mathcal{C}(K)$, K compacto no perfecto

Concluimos que $C_{\mathcal{C}(K)}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2}$ $\square$

Nota

- En la Segunda mitad de la demostración anterior no hemos hecho uso de que t_0 sea punto aislado.
- Para todo K compacto, si $\mu > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$, entonces $\mu \in A_\varepsilon$. Esto implica que $\inf A_\varepsilon \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$, de donde

$$C_{\mathcal{C}(K)}(\varepsilon) \geq \frac{\varepsilon^2}{2}$$

Cálculo de $C_X(\varepsilon)$ en $X = \ell_\infty$ y $X = c$

Corolario

Sea $0 < \varepsilon \leq 1/2$

- $C_c(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2}$*, ya que* $c = \mathcal{C}(\widehat{\mathbb{N}})$.
- $C_{\ell_\infty}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2}$*, ya que* $\ell_\infty = \mathcal{C}(\beta\mathbb{N})$.

Estabilidad de $C_X(\varepsilon)$

Teorema

Sea $0 < \varepsilon \leq 1/2$. Si X, Y son espacios de Banach isomorfos tales que C_X y C_Y son continuas en ε entonces dado $\gamma > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(X, Y) < \delta$ entonces $|C_X(\varepsilon) - C_Y(\varepsilon)| < \gamma$.

En otras palabras, $C_\bullet(\varepsilon)$ es uniformemente continua para la distancia de Banach-Mazur.

PREGUNTAS

PREGUNTAS

1. Dado $0 < \varepsilon \leq 1/2$ y X espacio de Banach, ¿$C_X(\varepsilon)$ es continua en ε?
2. ¿Qué ocurre en $\mathcal{C}(K)$, K compacto?
3. ¿Cuál es el valor de la constante en ℓ_p, $p \in (1, +\infty)$, $p \neq 2$?
4. ¿Es cierto que $C_X(\varepsilon) = C_{X^*}(\varepsilon)$ para todo espacio de Banach X?
5. ¿Es posible cambiar en el Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás $\frac{\varepsilon^2}{4}$ por $\frac{\varepsilon^2}{2}$?

Referencias

- E. Bishop, R. R. Phelps, *A proof that every Banach space is subreflexive*, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), 97 – 98.
- B. Bollobás, *An extension to the theorem of Bishop and Phelps*, Bull. London Math. Soc. 2 (1970), 181 – 182.
- F. F. Bonsall, J. Duncan, *Numerical Ranges II*, London Math. Soc. Lecture Notes Ser., 10, Cambridge Univ. Press, (1973).
- M. Martín, J. Merí, R. Payá, *On the intrinsic and the spatial numerical range*, J. Math. Anal. Appl. 318 (2006), no. 1, 175 – 189.