“Integrales Singulares y teoria de pesos: tres problemas abiertos”

Carlos Pérez

Universidad del Pais Vasco, BCAM e Ikerbasque

XIII Encuentro de la Red de Análisis Funcional

Cáceres

11-Marzo-2017

Las transformadas

Las transformadas

La transformada de Hilbert

Las transformadas

La transformada de Hilbert

$$Hf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y}\,dy$$

Las transformadas

La transformada de Hilbert

$$Hf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y}\, dy$$

Las transformadas de Riesz

Las transformadas

La transformada de Hilbert

$$Hf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y}\,dy$$

Las transformadas de Riesz

$$R_jf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}}\,f(y)\,dy$$

para $j = 1, \cdots, n$

Otros ejemplos

Otros ejemplos

La transformada de Ahlfors-Beurling

Otros ejemplos

La transformada de Ahlfors-Beurling

$$Bf(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^2}\, d\omega$$

Otros ejemplos

La transformada de Ahlfors-Beurling

$$Bf(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^2}\, d\omega$$

Teor'a general: los **Operadores de Calderón-Zygmund**

Otros ejemplos

La transformada de Ahlfors-Beurling

$$Bf(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^2}\, d\omega$$

Teor’a general: los **Operadores de Calderón-Zygmund**

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)\, f(y)\, dy$$

Otros ejemplos

La transformada de Ahlfors-Beurling

$$Bf(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^2}\, d\omega$$

Teor'a general: los **Operadores de Calderón-Zygmund**

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)\, f(y)\, dy$$

Se asume la condición de Hölder-Lipschitz en el nucleo K.

El operador maximal

El operador maximal

La función maximal de the **Hardy–Littlewood**

El operador maximal

La función maximal de the **Hardy–Littlewood**

$$Mf(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy$$

El operador maximal

La función maximal de the **Hardy–Littlewood**

$$Mf(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy$$

$$\approx \sup_{r>o} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)|\, dy$$

El operador maximal

La función maximal de the **Hardy–Littlewood**

$$Mf(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\,dy$$

$$\approx \sup_{r>o} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)|\,dy$$

Resultados clasicos:

El operador maximal

La función maximal de the **Hardy–Littlewood**

$$Mf(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy$$

$$\approx \sup_{r>o} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)|\, dy$$

Resultados clasicos: $M : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p \leq \infty$

y

El operador maximal

La función maximal de the **Hardy–Littlewood**

$$Mf(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy$$

$$\approx \sup_{r>o} \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} |f(y)|\,dy$$

Resultados clasicos: $M : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p \leq \infty$

y $M : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$

El operador maximal

La función maximal de the **Hardy–Littlewood**

$$Mf(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy$$

$$\approx \sup_{r>o} \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} |f(y)|\,dy$$

Resultados clasicos: $M : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p \leq \infty$

y $M : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$

Lo mismo pasa con los operadores de Calderón-Zygmund:

$$T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p < \infty$$

y

El operador maximal

La función maximal de the **Hardy–Littlewood**

$$Mf(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy$$

$$\approx \sup_{r>o} \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} |f(y)|\,dy$$

Resultados clasicos: $M : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p \leq \infty$

y $M : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$

Lo mismo pasa con los operadores de Calderón-Zygmund:

$$T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p < \infty$$

y $T : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$

Por qué los pesos?

Por qué los pesos?

C. Fefferman and E.M. Stein (1971)

Por qué los pesos?

C. Fefferman and E.M. Stein (1971)

Teorema

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, Mw(x)dx \qquad w \geq 0.$$

Por qué los pesos?

C. Fefferman and E.M. Stein (1971)

Teorema

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, Mw(x)dx \qquad w \geq 0.$$

- Es una especie de substituto de la dualidad para M.

Por qué los pesos?

C. Fefferman and E.M. Stein (1971)

Teorema

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, Mw(x)dx \qquad w \geq 0.$$

- Es una especie de substituto de la dualidad para M.
- Una de las consecuencias más importantes:

Por qué los pesos?

C. Fefferman and E.M. Stein (1971)

Teorema

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, Mw(x)dx \qquad w \geq 0.$$

- Es una especie de substituto de la dualidad para M.
- Una de las consecuencias más importantes:

Extensión vectorial del teorema L^p maximal.

Por qué los pesos?

C. Fefferman and E.M. Stein (1971)

Teorema

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, Mw(x)dx \qquad w \geq 0.$$

- Es una especie de substituto de la dualidad para M.
- Una de las consecuencias más importantes:

Extensión vectorial del teorema L^p maximal.

Teorema Si $1 < p, q < \infty$, entonces

$$\left\| \Big(\sum_j (Mf_j)^q \Big)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \left\| \Big(\sum_j |f_j|^q \Big)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

La condicion A_p de Muckenhoupt

B. Muckenhoupt (1971)

La condicion A_p de Muckenhoupt

B. Muckenhoupt (1971)

Teorema

Sea $1 < p < \infty$, entonces

$$M : L^p(w) \to L^p(w) \quad \Longleftrightarrow \quad w \in A_p$$

La condicion A_p de Muckenhoupt

B. Muckenhoupt (1971)

Teorema

Sea $1 < p < \infty$, entonces

$$M : L^p(w) \to L^p(w) \quad \Longleftrightarrow \quad w \in A_p$$

$$\boxed{[w]_{A_p} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{\frac{-1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1} < \infty}$$

La condicion A_p de Muckenhoupt

B. Muckenhoupt (1971)

Teorema

Sea $1 < p < \infty$, entonces

$$M : L^p(w) \to L^p(w) \quad \Longleftrightarrow \quad w \in A_p$$

$$\boxed{[w]_{A_p} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \, dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{\frac{-1}{p-1}} \, dx \right)^{p-1} < \infty}$$

Teorema

$$M : L^1(w) \to L^{1,\infty}(w) \quad \Longleftrightarrow \quad w \in A_1$$

La condicion A_p de Muckenhoupt

B. Muckenhoupt (1971)

Teorema

Sea $1 < p < \infty$, entonces

$$M : L^p(w) \to L^p(w) \quad \Longleftrightarrow \quad w \in A_p$$

$$\boxed{[w]_{A_p} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{\frac{-1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1} < \infty}$$

Teorema

$$M : L^1(w) \to L^{1,\infty}(w) \quad \Longleftrightarrow \quad w \in A_1$$

$$\boxed{Mw(x) \leq [w]_{A_1}\, w(x)}$$

Control de la normas

Control de la normas

Teorema S. Buckley ($\approx$ 1991)

Control de la normas

Teorema S. Buckley ($\approx$ 1991)

Sea $1 < p < \infty$ y sea $w \in A_p$, entonces

$$\boxed{\|M\|_{L^p(w)} \leq c_n \, p' \, [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}}$$

Control de la normas

Teorema S. Buckley ($\approx$ 1991)

Sea $1 < p < \infty$ y sea $w \in A_p$, entonces

$$\boxed{\|M\|_{L^p(w)} \leq c_n\, p'\, [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}}$$

Además, el exponente es óptimo: $\frac{1}{p-1}$ no puede ser sustituido por $\frac{1}{p-1} - \epsilon$

Control de la normas

Teorema S. Buckley ($\approx$ 1991)

Sea $1 < p < \infty$ y sea $w \in A_p$, entonces

$$\boxed{\|M\|_{L^p(w)} \leq c_n\, p'\, [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}}$$

Además, el exponente es óptimo: $\frac{1}{p-1}$ no puede ser sustituido por $\frac{1}{p-1} - \epsilon$

- Comparar con la versión débil:

Control de la normas

Teorema S. Buckley ($\approx$ 1991)

Sea $1 < p < \infty$ y sea $w \in A_p$, entonces

$$\boxed{\|M\|_{L^p(w)} \leq c_n\, p'\, [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}}$$

Además, el exponente es óptimo: $\frac{1}{p-1}$ no puede ser sustituido por $\frac{1}{p-1} - \epsilon$

• Comparar con la versión débil:

$$\boxed{\|M\|_{L^1(w)\to L^{1,\infty}(w)} \approx [w]_{A_1}}$$

Las condiciones A_1 y A_∞

Las condiciones A_1 y A_∞

- $$u, v \in A_1 \quad \Rightarrow$$

Las condiciones A_1 y A_∞

- $$u, v \in A_1 \quad \Rightarrow \quad w = u\, v^{1-p} \in A_p$$

Las condiciones A_1 y A_∞

- $u, v \in A_1 \quad \Rightarrow \quad w = u\,v^{1-p} \in A_p$
- Las clases A_p son crecientes:

Las condiciones A_1 y A_∞

- $$u, v \in A_1 \quad \Rightarrow \quad w = u\, v^{1-p} \in A_p$$
- Las clases A_p son crecientes:

$$1 \leq p \leq q < \infty \quad \Rightarrow \quad A_p \subset A_q$$

Las condiciones A_1 y A_∞

- $$u, v \in A_1 \quad \Rightarrow \quad w = u\, v^{1-p} \in A_p$$
- Las clases A_p son crecientes:

$$1 \leq p \leq q < \infty \quad \Rightarrow \quad A_p \subset A_q$$

- Es natural definir

Las condiciones A_1 y A_∞

- $$u, v \in A_1 \quad \Rightarrow \quad w = u\, v^{1-p} \in A_p$$
- Las clases A_p son crecientes:

$$1 \leq p \leq q < \infty \quad \Rightarrow \quad A_p \subset A_q$$

- Es natural definir

$$A_\infty = \cup_{p\geq 1} A_p$$

Las condiciones A_1 y A_∞

- $$u, v \in A_1 \quad \Rightarrow \quad w = u\, v^{1-p} \in A_p$$
- Las clases A_p son crecientes:

$$1 \leq p \leq q < \infty \quad \Rightarrow \quad A_p \subset A_q$$

- Es natural definir

$$A_\infty = \cup_{p\geq 1} A_p$$

que se llama la clase A_∞ de pesos.

Las condiciones A_1 y A_∞

- $$u, v \in A_1 \quad \Rightarrow \quad w = u\, v^{1-p} \in A_p$$

- Las clases A_p son crecientes:

$$1 \leq p \leq q < \infty \quad \Rightarrow \quad A_p \subset A_q$$

- Es natural definir

$$A_\infty = \cup_{p \geq 1} A_p$$

que se llama la clase A_∞ de pesos.

- La buena es la siguiente:

Las condiciones A_1 y A_∞

- $$u, v \in A_1 \quad \Rightarrow \quad w = u\, v^{1-p} \in A_p$$

- Las clases A_p son crecientes:

$$1 \leq p \leq q < \infty \quad \Rightarrow \quad A_p \subset A_q$$

- Es natural definir

$$A_\infty = \cup_{p\geq 1} A_p$$

que se llama la clase A_∞ de pesos.

- La buena es la siguiente:

$$\boxed{[w]_{A_\infty} = \sup_Q \frac{1}{w(Q)} \int_Q M(w\chi_Q)\, dx}$$

La teoria A_1: Primer problema

La teoria A_1: Primer problema

Teorema (**C.P., A. Lerner & S. Ombrosi** $\approx$ **2009)**

Sea $w \in A_1$.

a) Sea $1 < p < \infty$. Entonces

$$\boxed{\|T\|_{L^p(w)} \leq c\, pp' \, [w]_{A_1}}$$

La teoria A_1: Primer problema

Teorema (**C.P., A. Lerner & S. Ombrosi** $\approx$ **2009)**

Sea $w \in A_1$.

a) Sea $1 < p < \infty$. Entonces

$$\boxed{\|T\|_{L^p(w)} \leq c\, pp' \, [w]_{A_1}}$$

b)

$$\boxed{\|T\|_{L^1(w) \to L^{1,\infty}(w)} \leq c\, [w]_{A_1} \log(e + [w]_{A_1})}$$

La teoria A_1: Primer problema

Teorema (**C.P., A. Lerner & S. Ombrosi** $\approx$ **2009)**

Sea $w \in A_1$.

a) Sea $1 < p < \infty$. Entonces

$$\boxed{\|T\|_{L^p(w)} \leq c\, pp'\, [w]_{A_1}}$$

b)

$$\boxed{\|T\|_{L^1(w)\to L^{1,\infty}(w)} \leq c\,[w]_{A_1} \log(e + [w]_{A_1})}$$

- Pensabamos que el resultado correcto era lineal, pero es falso.

La teoria A_1: Primer problema

Teorema (**C.P., A. Lerner & S. Ombrosi** $\approx$ **2009)**

Sea $w \in A_1$.

a) Sea $1 < p < \infty$. Entonces

$$\boxed{\|T\|_{L^p(w)} \leq c\, pp' \, [w]_{A_1}}$$

b)

$$\boxed{\|T\|_{L^1(w)\to L^{1,\infty}(w)} \leq c\, [w]_{A_1} \log(e + [w]_{A_1})}$$

- Pensabamos que el resultado correcto era lineal, pero es falso.
- Nazarov-Reznikov-Vasuniyn-Volberg:

La teoria A_1: Primer problema

Teorema (**C.P., A. Lerner & S. Ombrosi** $\approx$ **2009)**

Sea $w \in A_1$.

a) Sea $1 < p < \infty$. Entonces

$$\boxed{\|T\|_{L^p(w)} \leq c\, pp' \, [w]_{A_1}}$$

b)

$$\boxed{\|T\|_{L^1(w)\to L^{1,\infty}(w)} \leq c\,[w]_{A_1} \,\log(e+[w]_{A_1})}$$

- Pensabamos que el resultado correcto era lineal, pero es falso.
- Nazarov-Reznikov-Vasuniyn-Volberg:

$$\|T\|_{L^1(w)\to L^{1,\infty}(w)} \leq c\,[w]_{A_1} \,\log(e+[w]_{A_1})^{\beta}$$

La teoria A_1: Primer problema

Teorema (**C.P., A. Lerner & S. Ombrosi** $\approx$ **2009)**

Sea $w \in A_1$.

a) Sea $1 < p < \infty$. Entonces

$$\boxed{\|T\|_{L^p(w)} \leq c\, pp'\, [w]_{A_1}}$$

b)

$$\boxed{\|T\|_{L^1(w)\to L^{1,\infty}(w)} \leq c\, [w]_{A_1} \log(e + [w]_{A_1})}$$

- Pensabamos que el resultado correcto era lineal, pero es falso.
- Nazarov-Reznikov-Vasuniyn-Volberg:

$$\|T\|_{L^1(w)\to L^{1,\infty}(w)} \leq c\, [w]_{A_1} \log(e + [w]_{A_1})^{\beta}$$

con $\beta \approx 1/3$ is **falso**.

La teoria A_1: Primer problema

Teorema (**C.P., A. Lerner & S. Ombrosi** $\approx$ **2009)**

Sea $w \in A_1$.

a) Sea $1 < p < \infty$. Entonces

$$\boxed{\|T\|_{L^p(w)} \leq c\, pp' \, [w]_{A_1}}$$

b)

$$\boxed{\|T\|_{L^1(w) \to L^{1,\infty}(w)} \leq c\, [w]_{A_1} \log(e + [w]_{A_1})}$$

• Pensabamos que el resultado correcto era lineal, pero es falso.

• Nazarov-Reznikov-Vasuniyn-Volberg:

$$\|T\|_{L^1(w) \to L^{1,\infty}(w)} \leq c\, [w]_{A_1} \log(e + [w]_{A_1})^{\beta}$$

con $\beta \approx 1/3$ is **falso**.

Conjetura

El resultado es falso para $\beta = 1 - \epsilon$

El teorema de Hunt-Muckenhoupt-Wheeden (1973)

El teorema de Hunt-Muckenhoupt-Wheeden (1973)

Teorema Sea $1 < p < \infty$, entonces

$$H : L^p(w) \to L^p(w) \quad \Longleftrightarrow \quad w \in A_p$$

El teorema de Hunt-Muckenhoupt-Wheeden (1973)

Teorema Sea $1 < p < \infty$, entonces

$$H : L^p(w) \to L^p(w) \quad \Longleftrightarrow \quad w \in A_p$$

Este resultado fue mejorado muy notablemente:

El teorema de Hunt-Muckenhoupt-Wheeden (1973)

Teorema Sea $1 < p < \infty$, entonces

$$H : L^p(w) \to L^p(w) \quad \Longleftrightarrow \quad w \in A_p$$

Este resultado fue mejorado muy notablemente:

Teorema R. Coifman y C. Fefferman ($\approx$ 1974)
Sea T un operador de Calderón-Zygmund. Supongamos $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty$. Entonces existe una constante c tal que

El teorema de Hunt-Muckenhoupt-Wheeden (1973)

Teorema Sea $1 < p < \infty$, entonces

$$H : L^p(w) \to L^p(w) \quad \Longleftrightarrow \quad w \in A_p$$

Este resultado fue mejorado muy notablemente:

Teorema R. Coifman y C. Fefferman ($\approx$ 1974)
Sea T un operador de Calderón-Zygmund. Supongamos $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty$. Entonces existe una constante c tal que

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \leq c\,\|Mf\|_{L^p(w)}$$

La teoria A_2 para las Integrales Singulares

La teoria A_2 para las Integrales Singulares

Teorema

$$\boxed{\|T\|_{L^2(w)} \leq c_T \, [w]_{A_2}}$$

La teoria A_2 para las Integrales Singulares

Teorema

$$\boxed{\|T\|_{L^2(w)} \leq c_T\,[w]_{A_2}}$$

- Transformada de Ahlfors-Beurling

La teoria A_2 para las Integrales Singulares

Teorema

$$\boxed{\|T\|_{L^2(w)} \leq c_T\, [w]_{A_2}}$$

- Transformada de Ahlfors-Beurling
- Transformada de Hilbert. Transformadas de Riesz.

La teoria A_2 para las Integrales Singulares

Teorema

$$\boxed{\|T\|_{L^2(w)} \leq c_T \, [w]_{A_2}}$$

- Transformada de Ahlfors-Beurling
- Transformada de Hilbert. Transformadas de Riesz.
- Operadores con núcleo suave

La teoria A_2 para las Integrales Singulares

Teorema

$$\boxed{\|T\|_{L^2(w)} \leq c_T\, [w]_{A_2}}$$

- Transformada de Ahlfors-Beurling
- Transformada de Hilbert. Transformadas de Riesz.
- Operadores con núcleo suave
- Operadores con núcleo satisfaciendo la condición de Hölder-Lipschitz.

La teoria A_2 para las Integrales Singulares

Teorema

$$\boxed{\|T\|_{L^2(w)} \leq c_T \, [w]_{A_2}}$$

- Transformada de Ahlfors-Beurling
- Transformada de Hilbert. Transformadas de Riesz.
- Operadores con núcleo suave
- Operadores con núcleo satisfaciendo la condición de Hölder-Lipschitz.

Y usando el teorema de extrapolación de Rubio de Francia se tiene

La teoria A_2 para las Integrales Singulares

Teorema

$$\boxed{\|T\|_{L^2(w)} \le c_T\,[w]_{A_2}}$$

- Transformada de Ahlfors-Beurling
- Transformada de Hilbert. Transformadas de Riesz.
- Operadores con núcleo suave
- Operadores con núcleo satisfaciendo la condición de Hölder-Lipschitz.

Y usando el teorema de extrapolación de Rubio de Francia se tiene

Corolario

$$\|T\|_{L^p(w)} \le c_{p,T}\,[w]_{A_p}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}} \qquad 1 < p < \infty$$

Integrales singulares sin regularidad: segundo problema

Integrales singulares sin regularidad: segundo problema

$$T_\Omega f(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x')}{|x|^n} f(x-y)\,dy$$

Integrales singulares sin regularidad: segundo problema

$$T_\Omega f(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x')}{|x|^n} f(x-y)\,dy$$

donde

Integrales singulares sin regularidad: segundo problema

$$T_\Omega f(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x')}{|x|^n} f(x-y)\,dy$$

donde $\Omega \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ & $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega = 0.$

Integrales singulares sin regularidad: segundo problema

$$T_\Omega f(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x')}{|x|^n} f(x-y)\,dy$$

donde $\Omega \in L^1(\mathbb{S}^{n-1}) \quad \& \quad \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega = 0.$

Calderón-Zygmund (método de rotaciones), M. Christ, Duoandikoetxea-Rubio de Francia, D. Watson, A. Seeger.

Integrales singulares sin regularidad: segundo problema

$$T_\Omega f(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x')}{|x|^n} f(x-y)dy$$

donde $\Omega \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ & $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega = 0.$

Calderón-Zygmund (método de rotaciones), M. Christ, Duoandikoetxea-Rubio de Francia, D. Watson, A. Seeger.

Teorema (T. Hytönen, L. Roncal, O. Tapiola) Si $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$

$$\boxed{\|T_\Omega\|_{L^2(w)} \leq c_T\,[w]_{A_2}^2}$$

Integrales singulares sin regularidad: segundo problema

$$T_\Omega f(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x')}{|x|^n} f(x-y)\,dy$$

donde $\Omega \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ & $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega = 0.$

Calderón-Zygmund (método de rotaciones), M. Christ, Duoandikoetxea-Rubio de Francia, D. Watson, A. Seeger.

Teorema (T. Hytönen, L. Roncal, O. Tapiola) Si $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$

$$\boxed{\|T_\Omega\|_{L^2(w)} \leq c_T\, [w]_{A_2}^2}$$

Conjetura **el exponente es uno**

Integrales singulares sin regularidad: segundo problema

$$T_\Omega f(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x')}{|x|^n} f(x-y)\,dy$$

donde $\Omega \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ & $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega = 0.$

Calderón-Zygmund (método de rotaciones), M. Christ, Duoandikoetxea-Rubio de Francia, D. Watson, A. Seeger.

Teorema (T. Hytönen, L. Roncal, O. Tapiola) Si $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$

$$\boxed{\|T_\Omega\|_{L^2(w)} \leq c_T\, [w]^2_{A_2}}$$

Conjetura **el exponente es uno**

Teorema (**K. Li, L. Roncal, C.P., I. Rivera-Rios,**) Si $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ y $p \in (1,\infty)$

$$\boxed{\|T_\Omega\|_{L^p(w)} \leq c\, pp'\, [w]_{A_1}}$$

Problema de sawyer: extensiones del teorema maximal

Problema de sawyer: extensiones del teorema maximal

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_n [w]_{A_1} \|f\|_{L^1(w)}$$

Problema de sawyer: extensiones del teorema maximal

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_n [w]_{A_1} \|f\|_{L^1(w)}$$

Teorema (K. Li, S. Ombrosi, C. P.)

Supongamos que $w \in A_1$ y $v \in A_\infty$. Entonces, existe una constante c tal que

$$\boxed{\left\|\frac{M(fv)}{v}\right\|_{L^{1,\infty}(wv)} \leq c\|f\|_{L^1(wv)}}$$

Problema de sawyer: extensiones del teorema maximal

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_n[w]_{A_1}\|f\|_{L^1(w)}$$

Teorema (K. Li, S. Ombrosi, C. P.)

Supongamos que $w \in A_1$ y $v \in A_\infty$. Entonces, existe una constante c tal que

$$\boxed{\left\|\frac{M(fv)}{v}\right\|_{L^{1,\infty}(wv)} \leq c\|f\|_{L^1(wv)}}$$

• Trabajo previo con D. Cruz-Uribe, JM. Martell donde resolvimos conjeturas de Sawyer y de Muckenhoupt-Wheeden.

Los casos eran $w \in A_1$, con $v \in A_1$ ó $vw \in A_\infty$

Problema de sawyer: extensiones del teorema maximal

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_n[w]_{A_1}\|f\|_{L^1(w)}$$

Teorema (K. Li, S. Ombrosi, C. P.)
Supongamos que $w \in A_1$ y $v \in A_\infty$. Entonces, existe una constante c tal que

$$\boxed{\left\|\frac{M(fv)}{v}\right\|_{L^{1,\infty}(wv)} \leq c\|f\|_{L^1(wv)}}$$

• Trabajo previo con D. Cruz-Uribe, JM. Martell donde resolvimos conjeturas de Sawyer y de Muckenhoupt-Wheeden.
Los casos eran $w \in A_1$, con $v \in A_1$ ó $vw \in A_\infty$

• Con $v = \frac{1}{|x|^{nr}}$, $r > 1$, y $w = 1$.

Consecuencias y Tercer problema

Consecuencias y Tercer problema

Vamos a suponer que T es un operador de Calderón-Zygmund o

Consecuencias y Tercer problema

Vamos a suponer que T es un operador de Calderón-Zygmund o

una integral singular rough T_Ω con $\Omega \in L^\infty$.

Consecuencias y Tercer problema

Vamos a suponer que T es un operador de Calderón-Zygmund o

una integral singular rough T_Ω con $\Omega \in L^\infty$.

Teorema (K. Li, S. Ombrosi, C. P.)

Sean w y v como antes. Entonces se tiene

$$\boxed{\left\|\frac{T(fv)}{v}\right\|_{L^{1,\infty}(wv)} \leq c\|f\|_{L^1(wv)}}$$

Tercer problema

Tercer problema

Conjetura Sea v un peso tal que

$$\left\| \frac{M(fv)}{v} \right\|_{L^{1,\infty}(v)} \leq c_v \|f\|_{L^1(v)}.$$

Tercer problema

Conjetura Sea v un peso tal que

$$\left\|\frac{M(fv)}{v}\right\|_{L^{1,\infty}(v)} \leq c_v \|f\|_{L^1(v)}.$$

Entonces, si $w \in A_1$,

$$\left\|\frac{M(fv)}{v}\right\|_{L^{1,\infty}(wv)} \leq c_{w,v} \|f\|_{L^1(wv)}$$

MUCHAS GRACIAS