Algunos Problemas Abiertos en Teoría de Interpolación

Fernando Cobos

Universidad Complutense de Madrid

Encuentros de la Red Análisis Funcional

Cáceres, Marzo 2017

$$\boxed{\mathbf{1960} \,:\, B^s_{p,q}\,,\, H^s_p\,,\, BMO\,,\, \ldots}$$

$$\uparrow$$

$$\boxed{\text{Teoría de Interpolación}}$$

$$\boxed{\mathbf{1960} \, : \, B^s_{p,q} \, , \, H^s_p \, , \, BMO \, , \, \ldots}$$

$$\uparrow$$

$$\boxed{\text{Teoría de Interpolación}}$$

• $(U,\mu),(V,\nu)$ espacios de medida σ-finitos.

Teorema de Riesz-Thorin.- Supongamos que $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ y sea T un operador lineal que envía continuamente

$$L_{p_0}(U) \longrightarrow L_{q_0}(V) \quad \text{con norma} \quad M_0 \, , \text{ y}$$

$$L_{p_1}(U) \longrightarrow L_{q_1}(V) \quad \text{con norma} \quad M_1 \, .$$

Tomemos cualquier $0 < \theta < 1$ y pongamos $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1 \, , 1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$. Entonces T envía continuamente

$$L_p(U) \longrightarrow L_q(V) \quad \text{con norma} \quad M \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \, .$$

▷ Marcel Riesz (1926); G.O. Thorin (1938)

- Operadores integrales. Compacidad.

▷ L.V. Kantorovich, Uspei Mat. Nauk (N.S.) 7 (1956) 3-29.

• Operadores integrales. Compacidad.

▷ L.V. Kantorovich, Uspei Mat. Nauk (N.S.) 7 (1956) 3-29.

Teorema de Krasnosel´skii.- Supongamos que $1 \leq p_0, p_1, q_1 \leq \infty$, $1 \leq q_0 < \infty$ y sea T un operador lineal tal que

$$T : L_{p_0}(U) \longrightarrow L_{q_0}(V) \quad \text{es compacto y} \quad T : L_{p_1}(U) \longrightarrow L_{q_1}(V) \quad \text{es acotado}\,.$$

Entonces

$$T : L_p(U) \longrightarrow L_q(V) \quad \text{es también compacto}$$

si para algún $0 < \theta < 1$, se tiene $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ y $1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$.

• Operadores integrales. Compacidad.

▷ L.V. Kantorovich, Uspei Mat. Nauk (N.S.) 7 (1956) 3-29.

Teorema de Krasnosel´skii.- Supongamos que $1 \leq p_0, p_1, q_1 \leq \infty$, $1 \leq q_0 < \infty$ y sea T un operador lineal tal que

$$T : L_{p_0}(U) \longrightarrow L_{q_0}(V) \quad \text{es compacto y} \quad T : L_{p_1}(U) \longrightarrow L_{q_1}(V) \quad \text{es acotado}\,.$$

Entonces

$$T : L_p(U) \longrightarrow L_q(V) \quad \text{es también compacto}$$

si para algún $0 < \theta < 1$, se tiene $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ y $1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$.

Para $1 < p < \infty$ el espacio L_p-débil $L_{p,\infty}$ se define por

$$L_{p,\infty} = \Big\{ f : \|f\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} \Big\{ t^{(1/p)-1} \int_0^t f^*(s)ds \Big\} < \infty \Big\}. \quad \text{Se tiene } L_p \hookrightarrow L_{p,\infty}.$$

$$f^*(t) = \inf\{\delta > 0 : \mu\{x \in U : |f(x)| > \delta\} \leq t\}\,, \quad 0 < t < \infty\,.$$

Teorema de Marcinkiewicz.- Sean $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$ con $1 < q_0 \neq q_1 < \infty$, y sea T un operador lineal que envía

$$L_{p_0}(U) \longrightarrow L_{q_0,\infty}(V) \text{ con norma } M_0 \quad \text{y} \quad L_{p_1}(U) \longrightarrow L_{q_1,\infty}(V) \text{ con norma } M_1 \,.$$

Tomemos $0 < \theta < 1$ y pongamos $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, $1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$. Si $p \leq q$, entonces T envía continuamente

$$L_p(U) \longrightarrow L_q(V) \quad \text{con norma} \quad M \leq C M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \,.$$

▷ Marcinkiewicz (1939). Zygmund (1956).

Teorema de Marcinkiewicz.- Sean $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$ con $1 < q_0 \neq q_1 < \infty$, y sea T un operador lineal que envía

$$L_{p_0}(U) \longrightarrow L_{q_0,\infty}(V) \text{ con norma } M_0 \quad \text{y} \quad L_{p_1}(U) \longrightarrow L_{q_1,\infty}(V) \text{ con norma } M_1\,.$$

Tomemos $0 < \theta < 1$ y pongamos $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, $1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$. Si $p \leq q$, entonces T envía continuamente

$$L_p(U) \longrightarrow L_q(V) \quad \text{con norma} \quad M \leq C M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}\,.$$

▷ Marcinkiewicz (1939). Zygmund (1956).

- J.L. Lions, Peetre, Gagliardo, A. Calderón, Aronszajn, S.G. Krein, Triebel, ...

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\text{Teoría abstracta de interpolación}} \arrow[dl, <->] \arrow[dr, <->] & \\
\boxed{\text{Riesz-Thorin}} \arrow[d] & & \boxed{\text{Marcinkiewicz}} \arrow[d] \\
{[\cdot,\cdot]_\theta} & & (\cdot,\cdot)_{\theta,q}
\end{tikzcd}$$

Par compatible.- (A_0, A_1), A_j espacios de Banach y $A_j \hookrightarrow \mathcal{A}$, $j = 0, 1$.

$$A_0 + A_1 = \{a \in \mathcal{A} : a = a_0 + a_1, a_j \in A_j\}\ ,\ A_0 \cap A_1 = \{a \in \mathcal{A} : a \in A_0, a \in A_1\}$$

Par compatible.- (A_0, A_1), A_j espacios de Banach y $A_j \hookrightarrow \mathcal{A}$, $j = 0, 1$.

$$A_0 + A_1 = \{a \in \mathcal{A} : a = a_0 + a_1, a_j \in A_j\} \ , \ A_0 \cap A_1 = \{a \in \mathcal{A} : a \in A_0, a \in A_1\}$$

El método complejo require considerar el espacio $\mathcal{F}$ de todas las funciones f de la banda cerrada $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Re} z \leq 1\}$ en $A_0 + A_1$ tales que

- f es acotada y continua sobre S , analítica en el interior de S, y
- las funciones $t \longrightarrow f(j + it)\,(j = 0, 1)$ son continuas de $\mathbb{R}$ en A_j y tienden a cero cuando $|t| \to \infty$.

$$\|f\|_{\mathcal{F}} = \max\{\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(it)\|_{A_0} \ \ , \ \ \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(1 + it)\|_{A_1}\}\,.$$

Par compatible.- (A_0, A_1), A_j espacios de Banach y $A_j \hookrightarrow \mathcal{A}$, $j = 0, 1$.

$$A_0 + A_1 = \{a \in \mathcal{A} : a = a_0 + a_1, a_j \in A_j\}\ ,\ A_0 \cap A_1 = \{a \in \mathcal{A} : a \in A_0, a \in A_1\}$$

El método complejo require considerar el espacio $\mathcal{F}$ de todas las funciones f de la banda cerrada $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Re} z \leq 1\}$ en $A_0 + A_1$ tales que

- f es acotada y continua sobre S , analítica en el interior de S, y
- las funciones $t \longrightarrow f(j + it)\ (j = 0, 1)$ son continuas de $\mathbb{R}$ en A_j y tienden a cero cuando $|t| \to \infty$.

$$\|f\|_{\mathcal{F}} = \max\{\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(it)\|_{A_0}\ \ ,\ \ \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(1 + it)\|_{A_1}\}\,.$$

Para $0 < \theta < 1$, el *espacio de interpolación complejo* $[A_0, A_1]_\theta$ consiste de todos los $a \in A_0 + A_1$ tales que $a = f(\theta)$ para algún $f \in \mathcal{F}$.

$$\|a\|_{[\theta]} = \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}} : f(\theta) = a\,,\ f \in \mathcal{F}\}\,.$$

▷ A.P. Calderón, Studia Math. 24 (1964) 113-190.

El método real admite diversas definiciones equivalentes.

K-funcional de Peetre

$$K(t,a) = \inf\{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1} \ : a = a_0 + a_1,\ a_j \in A_j\},\ t > 0\,,\ a \in A_0 + A_1$$

El método real admite diversas definiciones equivalentes.

K-funcional de Peetre

$$K(t,a) = \inf\{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1} \; : a = a_0 + a_1,\, a_j \in A_j\},\, t > 0\,,\, a \in A_0 + A_1$$

Para $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$, el *espacio de interpolación real* $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ consiste de todos los $a \in A_0 + A_1$ que tienen una norma finita

$$\|a\|_{\theta,q} = \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} K(t,a) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} .$$

▷ J.L. Lions and J. Peetre, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 19 (1964) 5-68.

El método real admite diversas definiciones equivalentes.

K-funcional de Peetre

$$K(t,a) = \inf\{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1} \ : a = a_0 + a_1,\, a_j \in A_j\},\, t > 0\,,\, a \in A_0 + A_1$$

Para $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$, el *espacio de interpolación real* $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ consiste de todos los $a \in A_0 + A_1$ que tienen una norma finita

$$\|a\|_{\theta,q} = \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} K(t,a) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} .$$

▷ J.L. Lions and J. Peetre, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 19 (1964) 5-68.

▷ J. Bergh and J. Löfström, Springer, 1976. ▷ H. Triebel, North-Holland, 1978.

El método real admite diversas definiciones equivalentes.

K-funcional de Peetre

$$K(t,a) = \inf\{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1} \ : a = a_0 + a_1,\ a_j \in A_j\},\ t > 0\,,\ a \in A_0 + A_1$$

Para $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$, el *espacio de interpolación real* $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ consiste de todos los $a \in A_0 + A_1$ que tienen una norma finita

$$\|a\|_{\theta,q} = \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} K(t,a)\right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} .$$

▷ J.L. Lions and J. Peetre, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 19 (1964) 5-68.

▷ J. Bergh and J. Löfström, Springer, 1976. ▷ H. Triebel, North-Holland, 1978.

$[L_1(U), L_\infty(U)]_\theta = L_p(U)\,,\ 1/p = 1 - \theta\,.\quad (L_1(U), L_\infty(U))_{\theta,q} = L_{p,q}(U)\,.$

El método real admite diversas definiciones equivalentes.

K-funcional de Peetre

$$K(t,a) = \inf\{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1} \; : a = a_0 + a_1,\, a_j \in A_j\},\, t > 0\,,\, a \in A_0 + A_1$$

Para $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$, el *espacio de interpolación real* $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ consiste de todos los $a \in A_0 + A_1$ que tienen una norma finita

$$\|a\|_{\theta,q} = \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} K(t,a) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} .$$

▷ J.L. Lions and J. Peetre, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 19 (1964) 5-68.

▷ J. Bergh and J. Löfström, Springer, 1976. ▷ H. Triebel, North-Holland, 1978.

$[L_1(U), L_\infty(U)]_\theta = L_p(U)\,,\ 1/p = 1 - \theta\,.\quad (L_1(U), L_\infty(U))_{\theta,q} = L_{p,q}(U)\,.$

$$[W_p^{k_0}, W_p^{k_1}]_\theta = H_p^s \quad , \quad (W_p^{k_0}, W_p^{k_1})_{\theta,q} = B_{p,q}^s\,.$$

Aquí $1 < p < \infty\,,\ k_0, k_1 \in \mathbb{N}\,,\ k_0 \neq k_1\,,\ 1 \leq q \leq \infty\,,\ 0 < \theta < 1\,,\ s = (1-\theta)k_0 + \theta k_1$.

Teorema de interpolación.- Sea $0 < \theta < 1, 1 \leq q \leq \infty$ y sea $\mathfrak{F}$ el método real $(\cdot,\cdot)_{\theta,q}$ o el método complejo $[\cdot,\cdot]_\theta$. Cualquiera que sean los pares compatibles de espacios de Banach $(A_0, A_1), (B_0, B_1)$ y el operador lineal T de $A_0 + A_1$ en $B_0 + B_1$ tal que $T : A_j \longrightarrow B_j$ es acotado para $j = 0, 1$, se tiene que la restricción de T a $\mathfrak{F}(A_0, A_1)$ es un operador acotado $T : \mathfrak{F}(A_0, A_1) \longrightarrow \mathfrak{F}(B_0, B_1)$ con norma

$$\|T\|_{\mathfrak{F}(A_0,A_1),\mathfrak{F}(B_0,B_1)} \leq \|T\|_{A_0,B_0}^{1-\theta} \|T\|_{A_1,B_1}^{\theta} \, .$$

Teorema de interpolación.- Sea $0 < \theta < 1, 1 \leq q \leq \infty$ y sea $\mathfrak{F}$ el método real $(\cdot,\cdot)_{\theta,q}$ o el método complejo $[\cdot,\cdot]_\theta$. Cualquiera que sean los pares compatibles de espacios de Banach $(A_0, A_1), (B_0, B_1)$ y el operador lineal T de $A_0 + A_1$ en $B_0 + B_1$ tal que $T : A_j \longrightarrow B_j$ es acotado para $j = 0, 1$, se tiene que la restricción de T a $\mathfrak{F}(A_0, A_1)$ es un operador acotado $T : \mathfrak{F}(A_0, A_1) \longrightarrow \mathfrak{F}(B_0, B_1)$ con norma

$$\|T\|_{\mathfrak{F}(A_0,A_1),\mathfrak{F}(B_0,B_1)} \leq \|T\|^{1-\theta}_{A_0,B_0} \|T\|^{\theta}_{A_1,B_1} .$$

Teorema de Lions-Peetre.- Sean $(A_0, A_1), (B_0, B_1)$ pares compatibles de espacios de Banach, sean A, B espacios de Banach y sea T un operador lineal. Supongamos que $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$ y sea $\mathfrak{F} = (\cdot,\cdot)_{\theta,q}$ ó $[\cdot,\cdot]_\theta$.

(a) Si $T \in \mathcal{L}(A, B_0 \cap B_1)$ con $T : A \longrightarrow B_0$ compacto, entonces $T : A \longrightarrow \mathfrak{F}(B_0, B_1)$ es compacto.

(b) Si $T \in \mathcal{L}(A_0 + A_1, B)$ con $T : A_0 \longrightarrow B$ compacto, entonces $T : \mathfrak{F}(A_0, A_1) \longrightarrow B$ es compacto.

Teorema de interpolación.- Sea $0 < \theta < 1, 1 \leq q \leq \infty$ y sea $\mathfrak{F}$ el método real $(\cdot,\cdot)_{\theta,q}$ o el método complejo $[\cdot,\cdot]_\theta$. Cualquiera que sean los pares compatibles de espacios de Banach $(A_0, A_1), (B_0, B_1)$ y el operador lineal T de $A_0 + A_1$ en $B_0 + B_1$ tal que $T : A_j \longrightarrow B_j$ es acotado para $j = 0, 1$, se tiene que la restricción de T a $\mathfrak{F}(A_0, A_1)$ es un operador acotado $T : \mathfrak{F}(A_0, A_1) \longrightarrow \mathfrak{F}(B_0, B_1)$ con norma

$$\|T\|_{\mathfrak{F}(A_0,A_1),\mathfrak{F}(B_0,B_1)} \leq \|T\|_{A_0,B_0}^{1-\theta} \|T\|_{A_1,B_1}^{\theta} .$$

Teorema de Lions-Peetre.- Sean $(A_0, A_1), (B_0, B_1)$ pares compatibles de espacios de Banach, sean A, B espacios de Banach y sea T un operador lineal. Supongamos que $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$ y sea $\mathfrak{F} = (\cdot,\cdot)_{\theta,q}$ ó $[\cdot,\cdot]_\theta$.

(a) Si $T \in \mathcal{L}(A, B_0 \cap B_1)$ con $T : A \longrightarrow B_0$ compacto, entonces $T : A \longrightarrow \mathfrak{F}(B_0, B_1)$ es compacto.

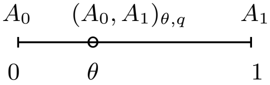
(b) Si $T \in \mathcal{L}(A_0 + A_1, B)$ con $T : A_0 \longrightarrow B$ compacto, entonces $T : \mathfrak{F}(A_0, A_1) \longrightarrow B$ es compacto.

▷ M. Cwikel, Duke Math. J. 65 (1992) 333-343.

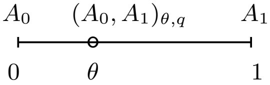
▷ F. Cobos, T. Kühn, T. Schonbek, J. Funct. Anal. 106 (1992) 274-313.

Teorema.- Sea $0 < \theta < 1, 1 \leq q \leq \infty$, sean $(A_0, A_1), (B_0, B_1)$ pares compatibles de espacios de Banach y sea T un operador lineal de $A_0 + A_1$ en $B_0 + B_1$ tal que $T : A_j \longrightarrow B_j$ es acotado para $j = 0, 1$ y alguna de estas restricciones es compacta. Entonces el operador $T : (A_0, A_1)_{\theta,q} \longrightarrow (B_0, B_1)_{\theta,q}$ es compacto.

Teorema.- Sea $0 < \theta < 1, 1 \leq q \leq \infty$, sean $(A_0, A_1), (B_0, B_1)$ pares compatibles de espacios de Banach y sea T un operador lineal de $A_0 + A_1$ en $B_0 + B_1$ tal que $T : A_j \longrightarrow B_j$ es acotado para $j = 0, 1$ y alguna de estas restricciones es compacta. Entonces el operador $T : (A_0, A_1)_{\theta,q} \longrightarrow (B_0, B_1)_{\theta,q}$ es compacto.



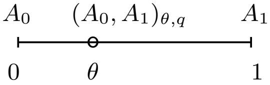
Teorema.- Sea $0 < \theta < 1, 1 \leq q \leq \infty$, sean $(A_0, A_1), (B_0, B_1)$ pares compatibles de espacios de Banach y sea T un operador lineal de $A_0 + A_1$ en $B_0 + B_1$ tal que $T : A_j \longrightarrow B_j$ es acotado para $j = 0, 1$ y alguna de estas restricciones es compacta. Entonces el operador $T : (A_0, A_1)_{\theta,q} \longrightarrow (B_0, B_1)_{\theta,q}$ es compacto.



$\theta = 0, 1$: Modificar la definición o insertar un peso logarítmico.

$\triangleright$ F. Cobos, L.M. Fernández-Cabrera, T. Kühn, T. Ullrich, J. Funct. Anal. 256 (2009) 2321-2366.

Teorema.- Sea $0 < \theta < 1, 1 \leq q \leq \infty$, sean $(A_0, A_1), (B_0, B_1)$ pares compatibles de espacios de Banach y sea T un operador lineal de $A_0 + A_1$ en $B_0 + B_1$ tal que $T : A_j \longrightarrow B_j$ es acotado para $j = 0, 1$ y alguna de estas restricciones es compacta. Entonces el operador $T : (A_0, A_1)_{\theta,q} \longrightarrow (B_0, B_1)_{\theta,q}$ es compacto.



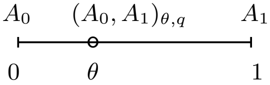
$\theta = 0, 1$: Modificar la definición o insertar un peso logarítmico.

▷ F. Cobos, L.M. Fernández-Cabrera, T. Kühn, T. Ullrich, J. Funct. Anal. 256 (2009) 2321-2366.

▷ F. Cobos, A. Segurado, J. Funct. Anal. 268 (2015) 2906-2945.

▷ F. Cobos, O. Domínguez, H. Triebel, J. Funct. Anal. 270 (2016) 4386-4425.

Teorema.- Sea $0 < \theta < 1, 1 \leq q \leq \infty$, sean $(A_0, A_1), (B_0, B_1)$ pares compatibles de espacios de Banach y sea T un operador lineal de $A_0 + A_1$ en $B_0 + B_1$ tal que $T : A_j \longrightarrow B_j$ es acotado para $j = 0, 1$ y alguna de estas restricciones es compacta. Entonces el operador $T : (A_0, A_1)_{\theta,q} \longrightarrow (B_0, B_1)_{\theta,q}$ es compacto.



$\theta = 0, 1$: Modificar la definición o insertar un peso logarítmico.

▷ F. Cobos, L.M. Fernández-Cabrera, T. Kühn, T. Ullrich, J. Funct. Anal. 256 (2009) 2321-2366.

▷ F. Cobos, A. Segurado, J. Funct. Anal. 268 (2015) 2906-2945.

▷ F. Cobos, O. Domínguez, H. Triebel, J. Funct. Anal. 270 (2016) 4386-4425.

Problema.- Probar o dar un contraejemplo para un resultado de esta generalidad en el caso del método complejo.

Cwikel, Kalton, Krugljak, Mastylo, Janson, Kühn, Schonbek, Fernández-Cabrera, Martínez, Cobos, ...

Teorema.- Sea $0 < \theta < 1$, sean $(A_0, A_1), (B_0, B_1)$ pares compatibles de espacios de Banach y sea T un operador lineal de $A_0 + A_1$ en $B_0 + B_1$. Supongamos que $T : A_0 \longrightarrow B_0$ es compacto y $T : A_1 \longrightarrow B_1$ es acotado. Entonces el operador $T : [A_0, A_1]_\theta \longrightarrow [B_0, B_1]_\theta$ es compacto supuesto que se cumple alguna de las cinco condiciones que siguen:

(a) A_0 tiene la propiedad UMD.

(b) A_0 es reflexivo y viene dado por $A_0 = [W, A_1]_\alpha$ para algún espacio de Banach W y algún $0 < \alpha < 1$.

(c) A_0 y A_1 son retículos de Banach de funciones medibles sobre un mismo espacio de medida.

(d) B_0 viene dado por $B_0 = [Z, B_1]_\delta$ para algún espacio de Banach Z y algún $0 < \delta < 1$.

(e) B_0 y B_1 son retículos de Banach de funciones medibles sobre un mismo espacio de medida cumpliendo que ambos tienen la propiedad de Fatou o que alguno de ellos tiene norma absolutamente continua.

Teorema.- Sea $0 < \theta < 1$, sean $(A_0, A_1), (B_0, B_1)$ pares compatibles de espacios de Banach y sea T un operador lineal de $A_0 + A_1$ en $B_0 + B_1$. Supongamos que $T : A_0 \longrightarrow B_0$ es compacto y $T : A_1 \longrightarrow B_1$ es acotado. Entonces el operador $T : [A_0, A_1]_\theta \longrightarrow [B_0, B_1]_\theta$ es compacto supuesto que se cumple alguna de las cinco condiciones que siguen:

(a) A_0 tiene la propiedad UMD.

(b) A_0 es reflexivo y viene dado por $A_0 = [W, A_1]_\alpha$ para algún espacio de Banach W y algún $0 < \alpha < 1$.

(c) A_0 y A_1 son retículos de Banach de funciones medibles sobre un mismo espacio de medida.

(d) B_0 viene dado por $B_0 = [Z, B_1]_\delta$ para algún espacio de Banach Z y algún $0 < \delta < 1$.

(e) B_0 y B_1 son retículos de Banach de funciones medibles sobre un mismo espacio de medida cumpliendo que ambos tienen la propiedad de Fatou o que alguno de ellos tiene norma absolutamente continua.

$\triangleright$ M. Cwikel, N. Krugljak, M. Mastylo, Illinois J. Math. 40 (1996) 353-364.

$\triangleright$ T. Schonbek, Indiana U. Math. J. 49 (2000) 1229-1245.

$\triangleright$ F. Cobos, L.M. Fernández-Cabrera, A. Martínez, Math. Nachr. 263-264 (2004) 67-82.

• La *medida de no compacidad* $\beta(T) = \beta(T : A \longrightarrow B)$ de un operador $T \in \mathcal{L}(A, B)$ se define como el ínfimo de los $\varepsilon > 0$ para los que existe un conjunto finito $V = V(\varepsilon) \subseteq B$ such that

$$T(U_A) \subseteq \bigcup_{b \in V} \{b + \varepsilon U_B\} .$$

$\beta(T) = 0$ si y solo si T es compacto.

• La *medida de no compacidad* $\beta(T) = \beta(T : A \longrightarrow B)$ de un operador $T \in \mathcal{L}(A, B)$ se define como el ínfimo de los $\varepsilon > 0$ para los que existe un conjunto finito $V = V(\varepsilon) \subseteq B$ such that

$$T(U_A) \subseteq \bigcup_{b \in V} \{b + \varepsilon U_B\}.$$

$\beta(T) = 0$ si y solo si T es compacto.

• El n-ésimo *número de entropía* del operador $T \in \mathcal{L}(A, B)$ se define por

$$\begin{aligned} e_n(T) &= e_n(T : A \longrightarrow B) \\ &= \inf\{\varepsilon > 0 : T(U_A) \text{ se puede recubrir por } 2^{n-1} \text{ bolas de radio } \varepsilon \text{ en } B\} \end{aligned}$$

$e_1(T) = \|T\|_{A,B} \geq e_2(T) \geq \cdots \geq 0 \quad$ y $\quad \beta(T) = \lim_{n\to\infty} e_n(T)$.

• La *medida de no compacidad* $\beta(T) = \beta(T : A \longrightarrow B)$ de un operador $T \in \mathcal{L}(A, B)$ se define como el ínfimo de los $\varepsilon > 0$ para los que existe un conjunto finito $V = V(\varepsilon) \subseteq B$ such that

$$T(U_A) \subseteq \bigcup_{b \in V} \{b + \varepsilon U_B\}.$$

$\beta(T) = 0$ si y solo si T es compacto.

• El n-ésimo *número de entropía* del operador $T \in \mathcal{L}(A, B)$ se define por

$$\begin{aligned} e_n(T) &= e_n(T : A \longrightarrow B) \\ &= \inf\{\varepsilon > 0 : T(U_A) \text{ se puede recubrir por } 2^{n-1} \text{ bolas de radio } \varepsilon \text{ en } B\} \end{aligned}$$

$e_1(T) = \|T\|_{A,B} \geq e_2(T) \geq \cdots \geq 0$ y $\beta(T) = \lim_{n\to\infty} e_n(T)$.

• Si $T \in \mathcal{L}(A, A)$ es compacto y $|\lambda_1(T)| \geq |\lambda_2(T)| \geq \cdots \geq 0$ son sus autovalores, entonces

$$|\lambda_n(T)| \leq \sqrt{2} e_n(T) \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

▷ B. Carl, H. Triebel, Math. Ann. 251 (1980) 129-133.

▷ D.E. Edmunds and H. Triebel, Cambridge Univ. Press, 1996.

▷ D.E. Edmunds and H. Triebel, Cambridge Univ. Press, 1996.

▷ A. Pietsch, North-Holland, 1980.

Teorema.- Sean $(A_0, A_1), (B_0, B_1)$ pares compatibles de espacios de Banach, sean A, B espacios de Banach y sea T un operador lineal. Supongamos que $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$ y sea $\mathfrak{F} = (\cdot,\cdot)_{\theta,q}$ ó $[\cdot,\cdot]_\theta$.

(a) Si $T \in \mathcal{L}(A, B_0 \cap B_1)$, entonces
$e_{n+m-1}(T : A \longrightarrow \mathfrak{F}(B_0, B_1)) \leq 2e_n(T : A \longrightarrow B_0)^{1-\theta} e_m(T : A \longrightarrow B_1)^\theta$.

(b) Si $T \in \mathcal{L}(A_0 + A_1, B)$, entonces
$e_{n+m-1}(T : \mathfrak{F}(A_0, A_1) \longrightarrow B) \leq 2e_n(T : A_0 \longrightarrow B)^{1-\theta} e_m(T : A_1 \longrightarrow B)^\theta$.

▷ D.E. Edmunds and H. Triebel, Cambridge Univ. Press, 1996.

▷ A. Pietsch, North-Holland, 1980.

Teorema.- Sean $(A_0, A_1), (B_0, B_1)$ pares compatibles de espacios de Banach, sean A, B espacios de Banach y sea T un operador lineal. Supongamos que $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$ y sea $\mathfrak{F} = (\cdot,\cdot)_{\theta,q}$ ó $[\cdot,\cdot]_\theta$.

(a) Si $T \in \mathcal{L}(A, B_0 \cap B_1)$, entonces
$e_{n+m-1}(T : A \longrightarrow \mathfrak{F}(B_0, B_1)) \leq 2e_n(T : A \longrightarrow B_0)^{1-\theta} e_m(T : A \longrightarrow B_1)^\theta$.

(b) Si $T \in \mathcal{L}(A_0 + A_1, B)$, entonces
$e_{n+m-1}(T : \mathfrak{F}(A_0, A_1) \longrightarrow B) \leq 2e_n(T : A_0 \longrightarrow B)^{1-\theta} e_m(T : A_1 \longrightarrow B)^\theta$.

(A) Si $T \in \mathcal{L}(A, B_0 \cap B_1)$, entonces
$\beta(T : A \longrightarrow \mathfrak{F}(B_0, B_1)) \leq 2\beta(T : A \longrightarrow B_0)^{1-\theta} \beta(T : A \longrightarrow B_1)^\theta$.

(B) Si $T \in \mathcal{L}(A_0 + A_1, B)$, entonces
$\beta(T : \mathfrak{F}(A_0, A_1) \longrightarrow B) \leq 2\beta(T : A_0 \longrightarrow B)^{1-\theta} \beta(T : A_1 \longrightarrow B)^\theta$.

$\triangleright$ D.E. Edmunds and H. Triebel, Cambridge Univ. Press, 1996.

$\triangleright$ A. Pietsch, North-Holland, 1980.

Teorema.- Sean $(A_0, A_1), (B_0, B_1)$ pares compatibles de espacios de Banach, sean A, B espacios de Banach y sea T un operador lineal. Supongamos que $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$ y sea $\mathfrak{F} = (\cdot, \cdot)_{\theta,q}$ ó $[\cdot, \cdot]_\theta$.

(a) Si $T \in \mathcal{L}(A, B_0 \cap B_1)$, entonces
$$e_{n+m-1}(T : A \longrightarrow \mathfrak{F}(B_0, B_1)) \leq 2e_n(T : A \longrightarrow B_0)^{1-\theta} e_m(T : A \longrightarrow B_1)^\theta \ .$$

(b) Si $T \in \mathcal{L}(A_0 + A_1, B)$, entonces
$$e_{n+m-1}(T : \mathfrak{F}(A_0, A_1) \longrightarrow B) \leq 2e_n(T : A_0 \longrightarrow B)^{1-\theta} e_m(T : A_1 \longrightarrow B)^\theta \ .$$

(A) Si $T \in \mathcal{L}(A, B_0 \cap B_1)$, entonces
$$\beta(T : A \longrightarrow \mathfrak{F}(B_0, B_1)) \leq 2\beta(T : A \longrightarrow B_0)^{1-\theta} \beta(T : A \longrightarrow B_1)^\theta \ .$$

(B) Si $T \in \mathcal{L}(A_0 + A_1, B)$, entonces
$$\beta(T : \mathfrak{F}(A_0, A_1) \longrightarrow B) \leq 2\beta(T : A_0 \longrightarrow B)^{1-\theta} \beta(T : A_1 \longrightarrow B)^\theta \ .$$

$\triangleright$ F. Cobos, P. Fernández-Martínez, A. Martínez, Studia Math. 135 (1999) 25-38.

Teorema.- Sean (A_0, A_1), (B_0, B_1) pares compatibles de espacios de Banach y sea T un operador lineal de $A_0 + A_1$ en $B_0 + B_1$ tal que $T \in \mathcal{L}(A_j, B_j)$ para $j = 0, 1$. Si $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$, se tiene

$$\beta(T : (A_0, A_1)_{\theta,q} \longrightarrow (B_0 B_1)_{\theta,q}) \leq C\beta(T_{A_0,B_0})^{1-\theta}\beta(T_{A_1,B_1})^{\theta}$$

donde C sólo depende de θ.

Teorema.- Sean (A_0, A_1), (B_0, B_1) pares compatibles de espacios de Banach y sea T un operador lineal de $A_0 + A_1$ en $B_0 + B_1$ tal que $T \in \mathcal{L}(A_j, B_j)$ para $j = 0, 1$. Si $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$, se tiene

$$\beta(T : (A_0, A_1)_{\theta,q} \longrightarrow (B_0 B_1)_{\theta,q}) \leq C\beta(T_{A_0,B_0})^{1-\theta}\beta(T_{A_1,B_1})^{\theta}$$

donde C sólo depende de θ.

- Si $A_0 \neq A_1$ y $B_0 \neq B_1$ en general

$$e_{n+m-1}(T : (A_0, A_1)_{\theta,q} \longrightarrow (B_0 B_1)_{\theta,q}) \nleq C e_n(T_{A_0,B_0})^{1-\theta} e_m(T_{A_1,B_1})^{\theta}.$$

▷ D.E. Edmunds and Yu. Netrusov, Math. Ann. 351 (2011) 963-977.

▷ D.E. Edmunds and Yu. Netrusov, Math. Nachr. 286 (2013) 614-630.

Teorema.- Sean (A_0, A_1), (B_0, B_1) pares compatibles de espacios de Banach y sea T un operador lineal de $A_0 + A_1$ en $B_0 + B_1$ tal que $T \in \mathcal{L}(A_j, B_j)$ para $j = 0, 1$. Si $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$, se tiene

$$\beta(T : (A_0, A_1)_{\theta,q} \longrightarrow (B_0 B_1)_{\theta,q}) \leq C \beta(T_{A_0,B_0})^{1-\theta} \beta(T_{A_1,B_1})^{\theta}$$

donde C sólo depende de θ.

- Si $A_0 \neq A_1$ y $B_0 \neq B_1$ en general

$$e_{n+m-1}(T : (A_0, A_1)_{\theta,q} \longrightarrow (B_0 B_1)_{\theta,q}) \not\leq C e_n(T_{A_0,B_0})^{1-\theta} e_m(T_{A_1,B_1})^{\theta}.$$

▷ D.E. Edmunds and Yu. Netrusov, Math. Ann. 351 (2011) 963-977.

▷ D.E. Edmunds and Yu. Netrusov, Math. Nachr. 286 (2013) 614-630.

Problema.- Describir el comportamiento de los números de entropía de un operador interpolado.

• Sean A, B, E espacios de Banach y sea $T : A \times B \longrightarrow E$ un operador bilineal. Se dice que T es *compacto* si $T(U_A \times U_B)$ es precompacto en E.

• Sean A, B, E espacios de Banach y sea $T : A \times B \longrightarrow E$ un operador bilineal. Se dice que T es *compacto* si $T(U_A \times U_B)$ es precompacto en E.

• Los operadores bilineales compactos aparecen naturalmente en Análisis Armónico.

$\triangleright$ A. Bényi, R.H. Torres, Proc. Amer. Math. Soc. 141 (2013) 3609-3621.

• Sean A, B, E espacios de Banach y sea $T : A \times B \longrightarrow E$ un operador bilineal. Se dice que T es *compacto* si $T(U_A \times U_B)$ es precompacto en E.

• Los operadores bilineales compactos aparecen naturalmente en Análisis Armónico.

$\triangleright$ A. Bényi, R.H. Torres, Proc. Amer. Math. Soc. 141 (2013) 3609-3621.

$\triangleright$ A. Bényi, T. Oh, J. Fourier Anal. Appl. 20 (2014) 282-300.

$\triangleright$ G. Hu, Taiwanese J. Math. 18 (2014) 661-675.

$\triangleright$ A. Bényi, W. Damián, K. Moen, R.H. Torres, Michigan Math. J. 64 (2015) 39-51.

• Sean A, B, E espacios de Banach y sea $T : A \times B \longrightarrow E$ un operador bilineal. Se dice que T es *compacto* si $T(U_A \times U_B)$ es precompacto en E.

• Los operadores bilineales compactos aparecen naturalmente en Análisis Armónico.

▷ A. Bényi, R.H. Torres, Proc. Amer. Math. Soc. 141 (2013) 3609-3621.

▷ A. Bényi, T. Oh, J. Fourier Anal. Appl. 20 (2014) 282-300.

▷ G. Hu, Taiwanese J. Math. 18 (2014) 661-675.

▷ A. Bényi, W. Damián, K. Moen, R.H. Torres, Michigan Math. J. 64 (2015) 39-51.

• Comportamiento por interpolación de operadores bilineales compactos.

• Sean A, B, E espacios de Banach y sea $T : A \times B \longrightarrow E$ un operador bilineal. Se dice que T es *compacto* si $T(U_A \times U_B)$ es precompacto en E.

• Los operadores bilineales compactos aparecen naturalmente en Análisis Armónico.

$\triangleright$ A. Bényi, R.H. Torres, Proc. Amer. Math. Soc. 141 (2013) 3609-3621.

$\triangleright$ A. Bényi, T. Oh, J. Fourier Anal. Appl. 20 (2014) 282-300.

$\triangleright$ G. Hu, Taiwanese J. Math. 18 (2014) 661-675.

$\triangleright$ A. Bényi, W. Damián, K. Moen, R.H. Torres, Michigan Math. J. 64 (2015) 39-51.

• Comportamiento por interpolación de operadores bilineales compactos.

• Método complejo [suponiendo una cierta condición de aproximación en el par imagen].

$\triangleright$ A.P. Calderón, Studia Math. 24 (1964) 113-190.

- Método real.

▷ D.L. Fernandez, E.B. da Silva, Nonlinear Anal. 73 (2010) 526-537.

▷ L.M. Fernández-Cabrera, A. Martínez, Math. Nachr. (2017) DOI 10.1002/mana.201600203.

- Método real.

▷ D.L. Fernandez, E.B. da Silva, Nonlinear Anal. 73 (2010) 526-537.

▷ L.M. Fernández-Cabrera, A. Martínez, Math. Nachr. (2017) DOI 10.1002/mana.201600203.

Teorema.- Sean $(A_0, A_1), (B_0, B_1)$ pares compatibles de espacios de Banach y sea E un espacio de Banach. Supongamos que $T : (A_0 + A_1) \times (B_0 + B_1) \longrightarrow E$ es un operador bilineal acotado tal que $T : A_j \times B_j \longrightarrow E$ es compacto para $j = 0$ ó 1. Entonces para todo $0 < \theta, \eta < 1$ y $1 \leq q, r \leq \infty$, si $\mathfrak{F} = (\cdot, \cdot)_{\theta,q}$ ó $[\cdot, \cdot]_\theta$ y $\mathfrak{G} = (\cdot, \cdot)_{\eta,r}$ ó $[\cdot, \cdot]_\eta$ se tiene que

$$T : \mathfrak{F}(A_0, A_1) \times \mathfrak{G}(B_0, B_1) \longrightarrow E \quad \text{es compacto.}$$

• Método real.

▷ D.L. Fernandez, E.B. da Silva, Nonlinear Anal. 73 (2010) 526-537.

▷ L.M. Fernández-Cabrera, A. Martínez, Math. Nachr. (2017) DOI 10.1002/mana.201600203.

Teorema.- Sean $(A_0, A_1), (B_0, B_1)$ pares compatibles de espacios de Banach y sea E un espacio de Banach. Supongamos que $T : (A_0 + A_1) \times (B_0 + B_1) \longrightarrow E$ es un operador bilineal acotado tal que $T : A_j \times B_j \longrightarrow E$ es compacto para $j = 0$ ó 1. Entonces para todo $0 < \theta, \eta < 1$ y $1 \leq q, r \leq \infty$, si $\mathfrak{F} = (\cdot,\cdot)_{\theta,q}$ ó $[\cdot,\cdot]_\theta$ y $\mathfrak{G} = (\cdot,\cdot)_{\eta,r}$ ó $[\cdot,\cdot]_\eta$ se tiene que

$$T : \mathfrak{F}(A_0, A_1) \times \mathfrak{G}(B_0, B_1) \longrightarrow E \quad \text{es compacto.}$$

Teorema.- Sean A, B espacios de Banach y (E_0, E_1) un par compatible de espacios de Banach. Supongamos que $T : A \times B \longrightarrow E_0 \cap E_1$ es un operador bilineal acotado tal que $T : A \times B \longrightarrow E_j$ es compacto para $j = 0$ ó 1. Entonces para todo $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$, si $\mathfrak{F} = (\cdot,\cdot)_{\theta,q}$ ó $[\cdot,\cdot]_\theta$ se tiene que

$$T : A \times B \longrightarrow \mathfrak{F}(E_0, E_1) \quad \text{es compacto.}$$

▷ L.M. Fernández-Cabrera, A. Martínez, preprint, 2016.

Teorema.- Sean $(A_0, A_1), (B_0, B_1), (E_0, E_1)$ pares compatibles de espacios de Banach. Supongamos que $T : (A_0 + A_1) \times (B_0 + B_1) \longrightarrow E_0 + E_1$ es un operador bilineal acotado tal que $T : A_j \times B_j \longrightarrow E_j$ es compacto para $j = 0$ ó 1, siendo la otra restricción acotada. Si $0 < \theta < 1$ y $1 \leq p, q, r \leq \infty$ con $1/p + 1/q = 1 + 1/r$, entonces

$$T : (A_0, A_1)_{\theta,p} \times (B_0, B_1)_{\theta,q} \longrightarrow (E_0, E_1)_{\theta,r} \quad \text{es compacto.}$$

▷ L.M. Fernández-Cabrera, A. Martínez, preprint, 2016.

Teorema.- Sean $(A_0, A_1), (B_0, B_1), (E_0, E_1)$ pares compatibles de espacios de Banach. Supongamos que $T : (A_0 + A_1) \times (B_0 + B_1) \longrightarrow E_0 + E_1$ es un operador bilineal acotado tal que $T : A_j \times B_j \longrightarrow E_j$ es compacto para $j = 0$ ó 1, siendo la otra restricción acotada. Si $0 < \theta < 1$ y $1 \leq p, q, r \leq \infty$ con $1/p + 1/q = 1 + 1/r$, entonces

$$T : (A_0, A_1)_{\theta,p} \times (B_0, B_1)_{\theta,q} \longrightarrow (E_0, E_1)_{\theta,r} \quad \text{es compacto.}$$

Problema.- Resultado similar para el método complejo.

▷ L.M. Fernández-Cabrera, A. Martínez, preprint, 2016.

Teorema.- Sean $(A_0, A_1), (B_0, B_1), (E_0, E_1)$ pares compatibles de espacios de Banach. Supongamos que $T : (A_0 + A_1) \times (B_0 + B_1) \longrightarrow E_0 + E_1$ es un operador bilineal acotado tal que $T : A_j \times B_j \longrightarrow E_j$ es compacto para $j = 0$ ó 1, siendo la otra restricción acotada. Si $0 < \theta < 1$ y $1 \leq p, q, r \leq \infty$ con $1/p + 1/q = 1 + 1/r$, entonces

$$T : (A_0, A_1)_{\theta,p} \times (B_0, B_1)_{\theta,q} \longrightarrow (E_0, E_1)_{\theta,r} \quad \text{es compacto.}$$

Problema.- Resultado similar para el método complejo.

- Supongamos sólo que $T : (A_0 \cap A_1) \times (B_0 \cap B_1) \longrightarrow E_0 \cap E_1$ es bilineal y que

$$\|T(a,b)\|_{E_j} \leq M_j \|a\|_{A_j} \|b\|_{B_j} \, , \; a \in A_0 \cap A_1 \, , \; b \in B_0 \cap B_1 \, , \; j = 0, 1. \qquad (1)$$

▷ L.M. Fernández-Cabrera, A. Martínez, preprint, 2016.

Teorema.- Sean $(A_0, A_1), (B_0, B_1), (E_0, E_1)$ pares compatibles de espacios de Banach. Supongamos que $T : (A_0 + A_1) \times (B_0 + B_1) \longrightarrow E_0 + E_1$ es un operador bilineal acotado tal que $T : A_j \times B_j \longrightarrow E_j$ es compacto para $j = 0$ ó 1, siendo la otra restricción acotada. Si $0 < \theta < 1$ y $1 \le p, q, r \le \infty$ con $1/p + 1/q = 1 + 1/r$, entonces

$$T : (A_0, A_1)_{\theta,p} \times (B_0, B_1)_{\theta,q} \longrightarrow (E_0, E_1)_{\theta,r} \quad \text{es compacto.}$$

Problema.- Resultado similar para el método complejo.

• Supongamos sólo que $T : (A_0 \cap A_1) \times (B_0 \cap B_1) \longrightarrow E_0 \cap E_1$ es bilineal y que

$$\|T(a,b)\|_{E_j} \le M_j \|a\|_{A_j} \|b\|_{B_j} \, , \, a \in A_0 \cap A_1 \, , \, b \in B_0 \cap B_1 \, , \, j = 0, 1. \qquad (1)$$

• El operador T se puede extender de forma única a un operador bilineal acotado $T_j : A_j^\circ \times B_j^\circ \longrightarrow E_j$. Diremos que $T : A_j^\circ \times B_j^\circ \longrightarrow E_j$ es compacto si T_j lo es.

Teorema.- Sean $(A_0, A_1), (B_0, B_1), (E_0, E_1)$ pares compatibles de espacios de Banach. Sea T un operador bilineal que satisface (1) y tal que $T : A_0^\circ \times B_0^\circ \longrightarrow E_0$ es compacto. Sea $0 < \theta < 1, 1 \leq p, q < \infty$ y $1/r = 1/p + 1/q - 1$, entonces T se puede extender de forma única a un operador conpacto

$$T : (A_0, A_1)_{\theta,p} \times (B_0, B_1)_{\theta,q} \longrightarrow (E_0, E_1)_{\theta,r}$$

si el par (E_0, E_1) satisface la siguiente condición:
Para todo conjunto compacto $K \subset E_0$ existe una familia de operadores $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{L}(E_0 + E_1, E_0 \cap E_1)$ y una constante $C > 0$ tales que

(a) $P_\lambda : E_0 + E_1 \longrightarrow E_0 \cap E_1$ es compacto, $\lambda \in \Lambda$.

(b) $\|P_\lambda\|_{E_j,E_j} \leq C, \quad j = 0, 1, \quad \lambda \in \Lambda.$

(c) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\|x - P_{\lambda_0} x\|_{E_0} \leq \varepsilon$ para todo $x \in K$.

Teorema.- Sean $(A_0, A_1), (B_0, B_1), (E_0, E_1)$ pares compatibles de espacios de Banach. Sea T un operador bilineal que satisface (1) y tal que $T : A_0^\circ \times B_0^\circ \longrightarrow E_0$ es compacto. Sea $0 < \theta < 1, 1 \leq p, q < \infty$ y $1/r = 1/p + 1/q - 1$, entonces T se puede extender de forma única a un operador conpacto

$$T : (A_0, A_1)_{\theta,p} \times (B_0, B_1)_{\theta,q} \longrightarrow (E_0, E_1)_{\theta,r}$$

si el par (E_0, E_1) satisface la siguiente condición:
Para todo conjunto compacto $K \subset E_0$ existe una familia de operadores $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{L}(E_0 + E_1, E_0 \cap E_1)$ y una constante $C > 0$ tales que

(a) $P_\lambda : E_0 + E_1 \longrightarrow E_0 \cap E_1$ es compacto, $\lambda \in \Lambda$.

(b) $\|P_\lambda\|_{E_j, E_j} \leq C, \quad j = 0, 1, \quad \lambda \in \Lambda$.

(c) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\|x - P_{\lambda_0} x\|_{E_0} \leq \varepsilon$ para todo $x \in K$.

• Si E_0 y E_1 son espacios de interpolación respecto a $(L_1(U), L_\infty(U))$ y las funciones simples son densas en E_0, entonces (E_0, E_1) satisface la condición de aproximación.

Teorema.- Sean $(A_0, A_1), (B_0, B_1), (E_0, E_1)$ pares compatibles de espacios de Banach. Sea T un operador bilineal que satisface (1) y tal que $T : A_0^\circ \times B_0^\circ \longrightarrow E_0$ es compacto. Sea $0 < \theta < 1, 1 \leq p, q < \infty$ y $1/r = 1/p + 1/q - 1$, entonces T se puede extender de forma única a un operador conpacto

$$T : (A_0, A_1)_{\theta,p} \times (B_0, B_1)_{\theta,q} \longrightarrow (E_0, E_1)_{\theta,r}$$

si el par (E_0, E_1) satisface la siguiente condición:
Para todo conjunto compacto $K \subset E_0$ existe una familia de operadores $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{L}(E_0 + E_1, E_0 \cap E_1)$ y una constante $C > 0$ tales que

(a) $P_\lambda : E_0 + E_1 \longrightarrow E_0 \cap E_1$ es compacto, $\lambda \in \Lambda$.

(b) $\|P_\lambda\|_{E_j,E_j} \leq C, \quad j = 0, 1, \quad \lambda \in \Lambda.$

(c) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\|x - P_{\lambda_0} x\|_{E_0} \leq \varepsilon$ para todo $x \in K$.

• Si E_0 y E_1 son espacios de interpolación respecto a $(L_1(U), L_\infty(U))$ y las funciones simples son densas en E_0, entonces (E_0, E_1) satisface la condición de aproximación.

Problema.- Se cumple el teorema sin la condición de aproximación en (E_0, E_1)?