Desigualdades funcionales y convergencia de procesos de difusión

Dirigido por el Prof. J. L. Vázquez

J. Becerra[1] F.J. Carmona[2] M.C. Molero[2] P. Palacios[3] A. Torregrosa[4]

[1]Universidad de Extremadura

[2]Universidad de Sevilla

[3]Universidad de Zaragoza

[4]Universidad Complutense de Madrid

Escuela-Taller de la Red de Análisis Funcional, Cáceres 2017

Introducción

En primer lugar trabajaremos en torno al problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t &= \Delta_x u, \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{cases}$$

donde $u : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$.

Introducción

En primer lugar trabajaremos en torno al problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rl} u_t & = \Delta_x u, \\ u(x,0) & = u_0(x) \end{array} \right.$$

donde $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Resolveremos en primer lugar la ecuación, haciendo uso de la **transformada de Fourier**:

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N), \qquad \mathcal{F}u(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} u(x) e^{-ix\xi} dx,$$

que es un operador lineal y continuo. Denotaremos $\mathcal{F}u = \hat{u}$.

Solución fundamental de la ecuación del calor

Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación del calor obtenemos:

$$\hat{u}_t = -|\xi|^2 \hat{u}, \qquad \hat{u}(\xi, t) = \hat{u_0}(\xi)\, e^{-\xi^2 t}$$

Para encontrar la solución original, deberemos aplicar la inversa de la transformada, y teniendo en cuenta que $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$:

$$u(x, t) = u_0(x) * G_t(x)$$

donde $G_t(x) := \mathcal{F}^{-1}(e^{-\xi^2 t}) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-x^2/4t}$ es el núcleo de la ecuación del calor. Así,

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}}\, dy.$$

Probaremos varios resultados de convergencia según distintas hipótesis sobre el dato inicial:

- $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$
- $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ con momento de orden 1 finito
- $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ con momento de orden 1 signado nulo y momento de orden 2 finito

Probaremos varios resultados de convergencia según distintas hipótesis sobre el dato inicial:

- $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$
- $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ con momento de orden 1 finito
- $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ con momento de orden 1 signado nulo y momento de orden 2 finito

Además, nos plantearemos la convergencia en $L^2(\mathbb{R}^N)$ de u mediante el método de las entropías, empleando renormalización y la desigualdad de Poincaré Gaussiana.

La ecuación del calor fraccionaria

Definición

Se define el **Laplaciano fraccionario** de $u : \mathbb{R}^N \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ a una función $(-\Delta)^s u$ definida mediante la transformada de Fourier,

$$\widehat{(-\Delta)^s u} = |\xi|^{2s} \hat{u}.$$

La ecuación del calor fraccionaria

Definición

Se define el **Laplaciano fraccionario** de $u : \mathbb{R}^N \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ a una función $(-\Delta)^s u$ definida mediante la transformada de Fourier,

$$\widehat{(-\Delta)^s u} = |\xi|^{2s} \hat{u}.$$

Tiene sentido plantear la ecuación del calor fraccionaria:

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^s u = 0, \\ \qquad u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

La ecuación del calor fraccionaria

Definición

Se define el **Laplaciano fraccionario** de $u : \mathbb{R}^N \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ a una función $(-\Delta)^s u$ definida mediante la transformada de Fourier,

$$\widehat{(-\Delta)^s u} = |\xi|^{2s} \hat{u}.$$

Tiene sentido plantear la ecuación del calor fraccionaria:

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^s u = 0, \\ \qquad u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Un desarrollo análogo al anterior concluye

$$u(x, t) = u_0(x) * P_t(x)$$

donde $P_t(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|^{2s} t}) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N \times (0, \infty))$, por ser $e^{-\xi^{2s} t}$ una función de la clase de las distribuciones temperadas.

Para $s \in (0,1)$ en general no hay fórmula explícita del núcleo. En cambio, sí la hay para $s = 1/2$:

$$P_{1/2}(x,t) = c_N \frac{t}{(t^2 + x^2)^{\frac{N+1}{2}}}$$

Lo que sí se conoce es que todos los $P_t(x)$ tienen una dependencia especial del tiempo llamada autosemejanza, que permiten escribir los núcleos como

$$P_t(x) = t^{-\frac{N}{2s}} F(|x| t^{-\frac{1}{2s}}) = t^{-\frac{N}{2s}} G(|x|^2 t^{-\frac{1}{s}})$$

(G es tal que $F(\xi) = G(\xi^2)$). Nótese que tenemos $\frac{1}{2} F'(\xi) = G'(\xi^2)\xi$.

Para $s \in (0,1)$ en general no hay fórmula explícita del núcleo. En cambio, sí la hay para $s = 1/2$:

$$P_{1/2}(x,t) = c_N \frac{t}{(t^2 + x^2)^{\frac{N+1}{2}}}$$

Lo que sí se conoce es que todos los $P_t(x)$ tienen una dependencia especial del tiempo llamada autosemejanza, que permiten escribir los núcleos como

$$P_t(x) = t^{-\frac{N}{2s}} F(|x| t^{-\frac{1}{2s}}) = t^{-\frac{N}{2s}} G(|x|^2 t^{-\frac{1}{s}})$$

(G es tal que $F(\xi) = G(\xi^2)$). Nótese que tenemos $\frac{1}{2} F'(\xi) = G'(\xi^2)\xi$.

Es conocido (R. M. Blumenthal, R. K. Getoor. *Some Theorems on Stable Processes*, Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 263–273) que $F(\xi)$ tiene aproximadamente la forma

$$F(\xi) \approx \frac{c}{(1+\xi^2)^{\frac{N+2s}{2}}}, \qquad \text{y} \qquad P_t(x) \asymp \frac{t}{(t^{\frac{1}{s}} + x^2)^{\frac{N+2s}{2}}}.$$

De igual forma, ahora para el Laplaciano fraccionario, probaremos varios resultados de convergencia según distintas hipótesis sobre el dato inicial

- $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$
- $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ con momento de orden 1 finito
- $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ con momento de orden 1 signado nulo y momento de orden 2 finito

Comportamiento asintótico de la ecuación del calor

Teorema

Sea $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ con $M(u_0) = \int_{\mathbb{R}^N} |u_0(y)|\, dy$ y

$$N_1(u_0) = \int_{\mathbb{R}^N} |y\, u_0(y)|\, dy < +\infty.$$

Entonces,

$$t^{N/2} \|u(x,t) - M(u_0) G_t(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0$$

con orden de convergencia $\mathcal{O}(1/t^{1/2})$, siendo $G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ el núcleo de Gauss para la ecuación del calor.

Demostración:

$u(x,t) - M(u_0)\, G_t(x)$

,

Demostración:

$$u(x,t) - M(u_0)\, G_t(x) = G_t * u_0(x) - M(u_0)\, G_t(x)$$

,

Demostración:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) - M(u_0)\, G_t(x) &= G_t * u_0(x) - M(u_0)\, G_t(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} G_t(x-y) u_0(y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\, dy\, G_t(x)
\end{aligned}
$$

,

Demostración:

$$\begin{aligned} u(x,t) - M(u_0)\, G_t(x) &= G_t * u_0(x) - M(u_0)\, G_t(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} G_t(x-y) u_0(y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\, dy\, G_t(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) [G_t(x-y) - G_t(x)]\, dy \end{aligned}$$

,

Demostración:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) - M(u_0)\, G_t(x) &= G_t * u_0(x) - M(u_0)\, G_t(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} G_t(x-y) u_0(y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\, dy\, G_t(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)[G_t(x-y) - G_t(x)]\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \left(- \int_0^1 \partial s\, G_t(x-sy)\, ds \right) dy
\end{aligned}
$$

,

Demostración:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) - M(u_0)\, G_t(x) &= G_t * u_0(x) - M(u_0)\, G_t(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} G_t(x-y) u_0(y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\, dy\, G_t(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)[G_t(x-y) - G_t(x)]\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \left(- \int_0^1 \partial s\, G_t(x-sy)\, ds \right) dy \\
&= - \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \int_0^1 \left\langle -y, \frac{-(x-sy)}{2t(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{(x-sy)^2}{4t}} \right\rangle ds\, dy
\end{aligned}
$$

,

Demostración:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) - M(u_0)\,G_t(x) &= G_t * u_0(x) - M(u_0)\,G_t(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} G_t(x-y)u_0(y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\,dy\; G_t(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)[G_t(x-y) - G_t(x)]\,dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\left(-\int_0^1 \partial s\, G_t(x-sy)\,ds\right)dy\\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\int_0^1 \left\langle -y, \frac{-(x-sy)}{2t(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{(x-sy)^2}{4t}} \right\rangle ds\,dy\\
&= -\frac{(4\pi t)^{-N/2}}{2t^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\int_0^1 \langle y, f(x,y,s)\rangle\, ds\,dy,
\end{aligned}
$$

siendo $f(x,y,s) = e^{-\frac{(x-sy)^2}{4t}}\,\frac{x-sy}{t^{1/2}}$.

Ahora, tomando valor absoluto:

$$|u(x,t) - M(u_0)\, G_t(x)|$$

Ahora, tomando valor absoluto:

$$|u(x,t) - M(u_0)\,G_t(x)| = \left| -\frac{(4\pi t)^{-N/2}}{2t^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \int_0^1 \langle y, f(x,y,s)\rangle \, ds\, dy \right|$$

Ahora, tomando valor absoluto:

$$|u(x,t) - M(u_0)\, G_t(x)| = \left| -\frac{(4\pi t)^{-N/2}}{2t^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \int_0^1 \langle y, f(x,y,s) \rangle \, ds\, dy \right|$$

$$\leq C\, t^{-\frac{N+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |u_0(y)| \int_0^1 |\langle y, f(x,y,s) \rangle| \; ds\, dy$$

Ahora, tomando valor absoluto:

$$\begin{aligned}
|u(x,t) - M(u_0)\, G_t(x)| &= \left| -\frac{(4\pi t)^{-N/2}}{2t^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \int_0^1 \langle y, f(x,y,s)\rangle \, ds \, dy \right| \\
&\leq C\, t^{-\frac{N+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |u_0(y)| \int_0^1 |\langle y, f(x,y,s)\rangle| \; ds \, dy \\
&\leq C\, t^{-\frac{N+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |u_0(y)| \int_0^1 |y|\, |f(x,y,s)| \; ds \, dy
\end{aligned}$$

Ahora, tomando valor absoluto:

$$
\begin{aligned}
|u(x,t) - M(u_0)\, G_t(x)| &= \left| -\frac{(4\pi t)^{-N/2}}{2t^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \int_0^1 \langle y, f(x,y,s)\rangle \, ds\, dy \right| \\
&\leq C\, t^{-\frac{N+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |u_0(y)| \int_0^1 |\langle y, f(x,y,s)\rangle| \, ds\, dy \\
&\leq C\, t^{-\frac{N+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |u_0(y)| \int_0^1 |y|\, |f(x,y,s)| \, ds\, dy
\end{aligned}
$$

Empleando el cambio de variable $\xi = \frac{x-sy}{t^{1/2}}$ se comprueba fácilmente que $|f| = |\xi e^{-\xi^2/4}| < +\infty$.

Ahora, tomando valor absoluto:

$$
\begin{aligned}
|u(x,t) - M(u_0)\, G_t(x)| &= \left| -\frac{(4\pi t)^{-N/2}}{2t^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \int_0^1 \langle y, f(x,y,s)\rangle \, ds\, dy \right| \\
&\leq C\, t^{-\frac{N+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |u_0(y)| \int_0^1 |\langle y, f(x,y,s)\rangle| \, ds\, dy \\
&\leq C\, t^{-\frac{N+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |u_0(y)| \int_0^1 |y|\, |f(x,y,s)| \, ds\, dy
\end{aligned}
$$

Empleando el cambio de variable $\xi = \frac{x-sy}{t^{1/2}}$ se comprueba fácilmente que $|f| = |\xi e^{-\xi^2/4}| < +\infty$. Con ello,

$$
\begin{aligned}
|u(x,t) - M(u_0)\, G_t(x)| &\leq C\, t^{-\frac{N+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |y u_0(y)|\, dy \int_0^1 ds \\
&= C\, t^{-\frac{N+1}{2}} N_1(u_0).
\end{aligned}
$$

Ahora, tomando valor absoluto:

$$\begin{aligned}|u(x,t) - M(u_0)\, G_t(x)| &= \left| -\frac{(4\pi t)^{-N/2}}{2t^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \int_0^1 \langle y, f(x,y,s)\rangle \, ds\, dy \right| \\ &\leq C\, t^{-\frac{N+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |u_0(y)| \int_0^1 |\langle y, f(x,y,s)\rangle| \, ds\, dy \\ &\leq C\, t^{-\frac{N+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |u_0(y)| \int_0^1 |y|\, |f(x,y,s)| \, ds\, dy\end{aligned}$$

Empleando el cambio de variable $\xi = \frac{x-sy}{t^{1/2}}$ se comprueba fácilmente que $|f| = |\xi e^{-\xi^2/4}| < +\infty$. Con ello,

$$\begin{aligned}|u(x,t) - M(u_0)\, G_t(x)| &\leq C\, t^{-\frac{N+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |y u_0(y)| \, dy \int_0^1 ds \\ &= C\, t^{-\frac{N+1}{2}} N_1(u_0).\end{aligned}$$

Por tanto, $t^{N/2}|u(x,t) - M(u_0)\, G_t(x)| \leq C\, t^{-1/2} N_1(u_0)$. $\square$

Teorema

Sea $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ con $M(u_0) = \int_{\mathbb{R}^N} |u_0(y)|\, dy$. Entonces,

$$t^{N/2} \| u(x,t) - M(u_0) G_t(x) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0$$

siendo $G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ el núcleo de Gauss para la ecuación del calor.

Demostración

Dado que $C_c(\mathbb{R}^N)$ es denso en $L^1(\mathbb{R}^N)$, prefijado $\delta > 0$, existe una función $u_{0,\delta} \in C_c(\mathbb{R}^N)$ con $\mathrm{sop}(u_{0,\delta}) = K_\delta \subset B(0,R)$ compacto en $\mathbb{R}^N$ tal que

$$\|u_0 - u_{0,\delta}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \delta.$$

Demostración

Dado que $C_c(\mathbb{R}^N)$ es denso en $L^1(\mathbb{R}^N)$, prefijado $\delta > 0$, existe una función $u_{0,\delta} \in C_c(\mathbb{R}^N)$ con $\text{sop}(u_{0,\delta}) = K_\delta \subset B(0,R)$ compacto en $\mathbb{R}^N$ tal que

$$\|u_0 - u_{0,\delta}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \delta.$$

Lema (estimaciones L^p–L^q). Sea $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Entonces, existe una constante $C = C(N,p,q) > 0$ tal que

$$\|u(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{C_{p,q}}{t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Demostración

Dado que $C_c(\mathbb{R}^N)$ es denso en $L^1(\mathbb{R}^N)$, prefijado $\delta > 0$, existe una función $u_{0,\delta} \in C_c(\mathbb{R}^N)$ con $\mathrm{sop}(u_{0,\delta}) = K_\delta \subset B(0, R)$ compacto en $\mathbb{R}^N$ tal que

$$\|u_0 - u_{0,\delta}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \delta.$$

Lema (estimaciones L^p–L^q). Sea $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Entonces, existe una constante $C = C(N, p, q) > 0$ tal que

$$\|u(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{C_{p,q}}{t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Denotamos por u_δ la solución del problema de calor con dato inicial $u_{0,\delta}$, de forma que por linealidad $u - u_\delta$ es solución del problema de calor con dato inicial $u_0 - u_{0,\delta}$ y en virtud del lema anterior,

$$\|u(t) - u_\delta(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq Ct^{-N/2}\|u_0 - u_{0,\delta}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq C\delta t^{-N/2}$$

cualquiera que sea $t > 0$.

Por otro lado, veamos que podemos aplicar el caso anterior a $u_{0,\delta}$.

- $u_{0,\delta} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, pues en particular $u_0 \in C_c(\mathbb{R}^N)$.
- Su primer momento es finito:

$$N_1(u_{0,\delta}) = \int_{\mathbb{R}^N} |y| |u_{0,\delta}(y)| \, dy = \int_K |y| |u_{0,\delta}(y)| \, dy < +\infty$$

Por otro lado, veamos que podemos aplicar el caso anterior a $u_{0,\delta}$.

- $u_{0,\delta} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, pues en particular $u_0 \in C_c(\mathbb{R}^N)$.
- Su primer momento es finito:

$$N_1(u_{0,\delta}) = \int_{\mathbb{R}^N} |y|| \, u_{0,\delta}(y)| \, dy = \int_K |y|| \, u_{0,\delta}(y)| \, dy < +\infty$$

Por tanto, por el teorema anterior,

$$\|u_\delta(t) - M(u_{0,\delta})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C t^{-\frac{N+1}{2}} N(u_{0,\delta}).$$

Por otro lado, veamos que podemos aplicar el caso anterior a $u_{0,\delta}$.

- $u_{0,\delta} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, pues en particular $u_0 \in C_c(\mathbb{R}^N)$.
- Su primer momento es finito:

$$N_1(u_{0,\delta}) = \int_{\mathbb{R}^N} |y| |u_{0,\delta}(y)| \, dy = \int_K |y| |u_{0,\delta}(y)| \, dy < +\infty$$

Por tanto, por el teorema anterior,

$$\|u_\delta(t) - M(u_{0,\delta})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq Ct^{-\frac{N+1}{2}} N(u_{0,\delta}).$$

Para un t suficientemente grande se tiene que

$$t^{N/2} \|u_\delta(t) - M(u_{0,\delta})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq Ct^{-1/2} N(u_{0,\delta}) \leq C\delta.$$

Dos últimas apreciaciones:

- Por ser $\|u_0 - u_{0,\delta}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \delta$, se tiene que $|M(u_0) - M(u_{0,\delta})| \leq \delta$.
- Además, $G_t \leq Ct^{-N/2}$.

Dos últimas apreciaciones:

- Por ser $\|u_0 - u_{0,\delta}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \delta$, se tiene que $|M(u_0) - M(u_{0,\delta})| \leq \delta$.
- Además, $G_t \leq Ct^{-N/2}$.

Escribimos ahora:

$$\begin{aligned}\|u - M(u_0)G_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &= \|u - M(u_0)G_t + u_\delta(t) - M(u_{0,\delta})G_t - u_\delta + M(u_{0,\delta})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|u - u_\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|M(u_{0,\delta})G_t - M(u_0)G_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \\ &\quad \|u_\delta - M(u_{0,\delta})G_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\end{aligned}$$

Dos últimas apreciaciones:

- Por ser $\|u_0 - u_{0,\delta}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \delta$, se tiene que $|M(u_0) - M(u_{0,\delta})| \leq \delta$.
- Además, $G_t \leq Ct^{-N/2}$.

Escribimos ahora:

$$\begin{aligned}\|u - M(u_0)G_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &= \|u - M(u_0)G_t + u_\delta(t) - M(u_{0,\delta})G_t - u_\delta + M(u_{0,\delta})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|u - u_\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|M(u_{0,\delta})G_t - M(u_0)G_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \\ &\quad \|u_\delta - M(u_{0,\delta})G_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\end{aligned}$$

Por tanto, desde las anteriores desigualdades:

$$t^{N/2}\|u(t) - M(u_0)G_t\|_\infty \leq 3C\delta$$

para t suficientemente grande. Como $\delta > 0$ es arbitrario, se concluye el resultado. $\square$

Comportamiento asintótico de la ecuación del calor

Supongamos ahora que $N = 1$, por simplicidad.

Teorema

Sea $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$*, y supongamos que*

$$N_{1\mathrm{s}} = \int_{\mathbb{R}} y\, u_0(y)\, dy = 0, \qquad N_2 = \int_{\mathbb{R}} y^2\, |u_0(y)|\, dy < +\infty,$$

Entonces, tenemos estabilización de la solución de la ecuación del calor hacia la Gaussiana con una velocidad relativa de convergencia $\mathcal{O}(1/t)$

Comportamiento asintótico de la ecuación del calor

Supongamos ahora que $N = 1$, por simplicidad.

Teorema

Sea $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$, y supongamos que

$$N_{1\mathrm{s}} = \int_{\mathbb{R}} y\, u_0(y)\, dy = 0, \qquad N_2 = \int_{\mathbb{R}} y^2 \,|u_0(y)|\, dy < +\infty,$$

Entonces, tenemos estabilización de la solución de la ecuación del calor hacia la Gaussiana con una velocidad relativa de convergencia $\mathcal{O}(1/t)$

Que el primer momento signado es nulo lo suponemos sin pérdida de generalidad, tras una traslación posiblemente necesaria respecto de

$$\frac{1}{M}\int_{\mathbb{R}} y\, u_0(y)\, dy, \qquad M = \int_{\mathbb{R}} |u_0(y)|\, dy.$$

Dado que el primer momento signado es finito, la función

$$V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad V(x) := \int_{-\infty}^{x} y\, u_0(y)\, dy$$

está bien definida

Dado que el primer momento signado es finito, la función

$$V:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad V(x):=\int_{-\infty}^{x} y\,u_0(y)\,dy$$

está bien definida y satisface las siguientes propiedades:

- V es una función absolutamente continua y V' existe en casi todo punto, con $V'(y)=y\,u_0(y)$ en casi todo $y\in\mathbb{R}$ en virtud del Teorema de Diferenciación de Lebesgue

Dado que el primer momento signado es finito, la función

$$V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad V(x) := \int_{-\infty}^{x} y\, u_0(y)\, dy$$

está bien definida y satisface las siguientes propiedades:

- V es una función absolutamente continua y V' existe en casi todo punto, con $V'(y) = y\, u_0(y)$ en casi todo $y \in \mathbb{R}$ en virtud del Teorema de Diferenciación de Lebesgue
- $V(-\infty) = 0 \quad$ y $\quad V(+\infty) = N_1 = 0.$

Dado que el primer momento signado es finito, la función

$$V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad V(x) := \int_{-\infty}^{x} y\, u_0(y)\, dy$$

está bien definida y satisface las siguientes propiedades:

- V es una función absolutamente continua y V' existe en casi todo punto, con $V'(y) = y\, u_0(y)$ en casi todo $y \in \mathbb{R}$ en virtud del Teorema de Diferenciación de Lebesgue
- $V(-\infty) = 0 \quad \text{y} \quad V(+\infty) = N_1 = 0.$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |V(y)|\, dy \le N_2 < +\infty$

En efecto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |V(y)|\, dy = \int_{-\infty}^{0} |V(y)|\, dy + \int_{0}^{\infty} |V(y)|\, dy;$$

En efecto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |V(y)|\, dy = \int_{-\infty}^{0} |V(y)|\, dy + \int_{0}^{\infty} |V(y)|\, dy;$$

y, por una parte, intercambiando el orden de integración

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} |V(y)|\, dy &= \int_{-\infty}^{0} \Big| \int_{-\infty}^{y} z\, u_0(z)\, dz \Big| dy \le \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{y} |z|\, |u_0(z)|\, dz\, dy \\ &= \int_{\infty}^{0} \int_{z}^{0} |z|\, |u_0(z)|\, dy\, dz = \int_{-\infty}^{0} z^2 |u_0(z)|\, dz\end{aligned}$$

En efecto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |V(y)|\, dy = \int_{-\infty}^{0} |V(y)|\, dy + \int_{0}^{\infty} |V(y)|\, dy;$$

y, por una parte, intercambiando el orden de integración

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} |V(y)|\, dy &= \int_{-\infty}^{0} \left| \int_{-\infty}^{y} z\, u_0(z)\, dz \right| dy \leq \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{y} |z|\, |u_0(z)|\, dz\, dy \\ &= \int_{\infty}^{0} \int_{z}^{0} |z|\, |u_0(z)|\, dy\, dz = \int_{-\infty}^{0} z^2 |u_0(z)|\, dz\end{aligned}$$

Se deduce de manera análoga que $\int_0^\infty |V(y)|\, dy \leq \int_0^\infty z^2 |u_0(z)|\, dz$ y obtenemos así

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |V(y)|\, dy \leq \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 |u_0(z)|\, dz = N_2$$

Volvemos sobre nuestro problema, para el cual habíamos obtenido la identidad

$$t^{N/2}\big(M\cdot G_t(x)-u(x,t)\big) = C\,t^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}\int_0^1 u_0(y)\,y\,\frac{x-\lambda y}{t^{1/2}}\,e^{-|x-sy|^2/4t}\,d\lambda\,dy$$

Volvemos sobre nuestro problema, para el cual habíamos obtenido la identidad

$$t^{N/2}\big(M\cdot G_t(x)-u(x,t)\big) = C\,t^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}\int_0^1 u_0(y)\,y\,\frac{x-\lambda y}{t^{1/2}}e^{-|x-sy|^2/4t}\,d\lambda\,dy$$

Definiendo la función auxiliar $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$H(\xi)=\xi e^{-|\xi|^2/4}.$$

tras el cambio de variable,

$$\xi=(x-\lambda y)\,t^{-1/2}$$

la identidad queda reescrita en la forma

$$t^{N/2}\big(M\cdot G_t(x)-u(x,t)\big) = C\,t^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}\int_0^1 V'(y)\,H(\xi)\,d\lambda\,dy$$

para cierta constante $C>0$.

Recordamos la acotación,

$$\int_{\mathbb{R}} |V(y)|\, dy \leq N_2$$

Recordamos la acotación,

$$\int_{\mathbb{R}} |V(y)|\, dy \leq N_2$$

y observamos desde $\xi = (x - \lambda y)\, t^{-1/2}$ y $H(\xi) := \xi e^{-|\xi|^2/4}$, que

$$\frac{dH}{dy} = \frac{dH}{d\xi}\frac{d\xi}{dy} = -t^{-1/2}\lambda \cdot \frac{dH}{d\xi},$$

siendo sencillo comprobar que $dH/d\xi$ es acotada en $\mathbb{R}$.

Recordamos la acotación,

$$\int_{\mathbb{R}} |V(y)|\, dy \leq N_2$$

y observamos desde $\xi = (x - \lambda y)\, t^{-1/2}$ y $H(\xi) := \xi e^{-|\xi|^2/4}$, que

$$\frac{dH}{dy} = \frac{dH}{d\xi}\frac{d\xi}{dy} = -t^{-1/2}\lambda \cdot \frac{dH}{d\xi},$$

siendo sencillo comprobar que $dH/d\xi$ es acotada en $\mathbb{R}$. Empleando dichas estimaciones, como consecuencia del Teorema de Fubini e integración por partes:

$$t^{N/2}\big|M \cdot G_t(x) - u(x,t)\big| \leq \tilde{C}\, N_2\, t^{-1}$$

para cierta constante $\tilde{C} > 0$. Así, la convergencia es de orden $\mathcal{O}(1/t)$, como queríamos demostrar.

En efecto,

$$t^{N/2}\big(M \cdot G_t(x) - u(x,t)\big) = C\, t^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 V'(y)\, H(\xi)\, d\lambda\, dy$$

En efecto,

$$t^{N/2}\big(M \cdot G_t(x) - u(x,t)\big) = C\, t^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 V'(y)\, H(\xi)\, d\lambda\, dy$$
$$= C\, t^{-1/2} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} V'(y)\, H(\xi)\, dy\, d\lambda$$

En efecto,

$$\begin{aligned} t^{N/2}\big(M \cdot G_t(x) - u(x,t)\big) &= C\, t^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 V'(y)\, H(\xi)\, d\lambda\, dy \\ &= C\, t^{-1/2} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} V'(y)\, H(\xi)\, dy\, d\lambda \\ &= C\, t^{-1/2} \int_0^1 \Big(- \int_{\mathbb{R}} V(y)\, \frac{d}{dy} H(\xi)\, dy \Big)\, d\lambda \end{aligned}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} t^{N/2}\big(M\cdot G_t(x)-u(x,t)\big) &= C\,t^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}\int_0^1 V'(y)\,H(\xi)\,d\lambda\,dy \\ &= C\,t^{-1/2}\int_0^1\int_{\mathbb{R}} V'(y)\,H(\xi)\,dy\,d\lambda \\ &= C\,t^{-1/2}\int_0^1\Big(-\int_{\mathbb{R}} V(y)\,\frac{d}{dy}H(\xi)\,dy\Big)\,d\lambda \end{aligned}$$

y empleando que $\frac{d}{dy}H=-t^{-1/2}\lambda\cdot\frac{dH}{d\xi}$, concluimos:

$$t^{N/2}\big|M\cdot G_t(x)-u(x,t)\big|\le \tilde{C}\,t^{-1}N_2$$

Además, las estimaciones anteriores son óptimas:

Ejemplo

Consideremos $G(x, t)$, la distribución Gaussiana en $\mathbb{R}$, así como un desplazamiento en espacio suyo $U(x, t) := G(x + h, t)$, con $h > 0$. Entonces, $0 \neq N_{1s}$ y $N_1 < \infty$ y la velocidad de convergencia del error relativo en $L^\infty(\mathbb{R})$ es de orden $\mathcal{O}(1/t^{1/2})$.

Además, las estimaciones anteriores son óptimas:

Ejemplo

Consideremos $G(x,t)$, la distribución Gaussiana en $\mathbb{R}$, así como un desplazamiento en espacio suyo $U(x,t) := G(x+h,t)$, con $h > 0$. Entonces, $0 \neq N_{1s}$ y $N_1 < \infty$ y la velocidad de convergencia del error relativo en $L^\infty(\mathbb{R})$ es de orden $\mathcal{O}(1/t^{1/2})$.

En efecto, en virtud del Teorema de Taylor,

$$U(x,t) - G(x,t) \sim h\frac{\partial G}{\partial x} \sim -\frac{h}{2t^{1/2}t^{1/2}}\xi e^{-\xi^2/4}$$

con $\xi = (x+\hat{h})/t^{1/2}$ y comprobamos que:

$$t^{1/2}\|u(t) - G_t\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \sim t^{-1/2}.$$

La velocidad de convergencia del error relativo es $\mathcal{O}(1/t^{1/2})$, como queríamos.

Otro ejemplo:

Ejemplo

Consideremos $G(x,t)$, la distribución Gaussiana en $\mathbb{R}$, y

$$U(x,t) := \frac{G(x-h,t)+G(x+h,t)}{2},$$

siendo $h>0$. Entonces, $N_{1s}=0$, $N_2<\infty$, y la velocidad de convergencia del error relativo en $L^\infty(\mathbb{R})$ es de orden $\mathcal{O}(1/t)$.

Otro ejemplo:

Ejemplo

Consideremos $G(x,t)$, la distribución Gaussiana en $\mathbb{R}$, y

$$U(x,t) := \frac{G(x-h,t)+G(x+h,t)}{2},$$

siendo $h>0$. Entonces, $N_{1s}=0$, $N_2<\infty$, y la velocidad de convergencia del error relativo en $L^\infty(\mathbb{R})$ es de orden $\mathcal{O}(1/t)$.

En virtud del Teorema de Taylor, análogamente:

$$\begin{aligned} t^{1/2} 2(U-G) &\sim e^{-(x-h)^2/4t} - e^{-x^2/4t} + e^{-(x+h)^2/4t} - e^{-x^2/4t} \\ &\sim h^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(\hat{x},t) \sim t^{-1} h^2 \left((1+\xi^2) e^{\xi^2/4} \right). \end{aligned}$$

El orden de convergencia del error relativo estimado era $\mathcal{O}(1/t)$, y no podemos mejorar nuestra estimación.

Convergencia mediante el método de las entropías

Consideramos la ecuación clásica del calor en $\mathbb{R}^N$ para $\tau > 0$

$$u_\tau = \frac{1}{2}\Delta_y u$$

con la notación $u = u(y,\tau)$.

Convergencia mediante el método de las entropías

Consideramos la ecuación clásica del calor en $\mathbb{R}^N$ para $\tau > 0$

$$u_\tau = \frac{1}{2}\Delta_y u$$

con la notación $u = u(y,\tau)$. Conocemos la solución fundamental

$$U(y,\tau) = C\tau^{-N/2}e^{-y^2/2\tau}.$$

Convergencia mediante el método de las entropías

Consideramos la ecuación clásica del calor en $\mathbb{R}^N$ para $\tau > 0$

$$u_\tau = \frac{1}{2}\Delta_y u$$

con la notación $u = u(y,\tau)$. Conocemos la solución fundamental

$$U(y,\tau) = C\tau^{-N/2}e^{-y^2/2\tau}.$$

En primer lugar, reescalamos la función y el espacio de acuerdo con los tamaños de la sol. fund., y también logarítmicamente el tiempo:

$$y = x(1+\tau)^{1/2}, \qquad t = \log(1+\tau), \qquad u(y,\tau) = v(x,t)(1+\tau)^{-N/2}$$

lo que conduce a la ecuación de Fokker-Plank para $v(x,t)$,

$$v_t = \frac{1}{2}\Delta_x v + \frac{1}{2}\nabla\cdot(x\,v).$$

Considerando el caso estacionario de la ecuación de Fokker-Planck obtenemos la distribución Gaussiana:

$$0 = \frac{1}{2}\Delta_x v + \frac{1}{2}\nabla \cdot (x\, v) = \frac{1}{2}\nabla(\nabla v + x\, v)$$

Considerando el caso estacionario de la ecuación de Fokker-Planck obtenemos la distribución Gaussiana:

$$0 = \frac{1}{2}\Delta_x v + \frac{1}{2}\nabla \cdot (x\, v) = \frac{1}{2}\nabla(\nabla v + x\, v)$$

De aquí que

$$\nabla v + x\, v = 0,$$

por simplicidad,

Considerando el caso estacionario de la ecuación de Fokker-Planck obtenemos la distribución Gaussiana:

$$0 = \frac{1}{2}\Delta_x v + \frac{1}{2}\nabla \cdot (x\, v) = \frac{1}{2}\nabla(\nabla v + x\, v)$$

De aquí que

$$\nabla v + x\, v = 0,$$

por simplicidad, y

$$\nabla v = -x\, v \implies \nabla(\log v) = -x$$

Considerando el caso estacionario de la ecuación de Fokker-Planck obtenemos la distribución Gaussiana:

$$0 = \frac{1}{2}\Delta_x v + \frac{1}{2}\nabla \cdot (x\, v) = \frac{1}{2}\nabla(\nabla v + x\, v)$$

De aquí que

$$\nabla v + x\, v = 0,$$

por simplicidad, y

$$\nabla v = -x\, v \implies \nabla(\log v) = -x$$

e integrando

$$\log V = -\frac{1}{2}x^2 + C \implies v = Ce^{-x^2/2},$$

que es la distribución Gaussiana a la que otras soluciones van a tender.

Queremos probar la convergencia de una solución v de la ecuación de Fokker-Planck en L^2 cuando $t \to \infty$. Para ello es conveniente considerar el cociente y obtener una ecuación con pesos usando el cambio:

$$w := \frac{v}{G}, \qquad G(x) := Ce^{-x^2/2},$$

Queremos probar la convergencia de una solución v de la ecuación de Fokker-Planck en L^2 cuando $t \to \infty$. Para ello es conveniente considerar el cociente y obtener una ecuación con pesos usando el cambio:

$$w := \frac{v}{G}, \qquad G(x) := Ce^{-x^2/2},$$

Desde la ecuación de Fokker-Planck,

$$v_t = \frac{1}{2}\nabla(\nabla v + x\, v),$$

empleando el cambio anterior,

$$w_t G = \frac{1}{2}\nabla\left(\left(\frac{\nabla v}{v} + x\right) v\right) = \frac{1}{2}\nabla\left(\left(\frac{\nabla v}{v} - \frac{\nabla G}{G}\right) v\right) = \frac{1}{2}\nabla\left(\frac{\nabla w}{w} v\right)$$

Obtenemos entonces la ecuación de Ornstein-Uhlenbeck:

$$w_t = \frac{1}{2G}\nabla(G\,\nabla w).$$

Obtenemos entonces la ecuación de Ornstein-Uhlenbeck:

$$w_t = \frac{1}{2G}\nabla(G\,\nabla w).$$

Alternativamente, podemos reescribir la ecuación anterior en la forma

$$w_t = \frac{1}{2}\Delta w - \frac{1}{2}x\,\nabla w.$$

Obtenemos entonces la ecuación de Ornstein-Uhlenbeck:

$$w_t = \frac{1}{2G}\nabla(G\,\nabla w).$$

Alternativamente, podemos reescribir la ecuación anterior en la forma

$$w_t = \frac{1}{2}\Delta w - \frac{1}{2}x\,\nabla w.$$

Retomando nuestro objetivo de que $v \to G$ en L^2 cuando $t \to \infty$, buscamos equivalentemente que $w - 1 \to 0$ en $L^2(\mu)$ cuando $t \to \infty$, siendo $d\mu = G\,dx$.

Asumimos para ello sin pérdida de generalidad que

$$\int_{\mathbb{R}^N} w(t)\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} w(t)\, G dx = \int_{\mathbb{R}^N} v(t)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} u(t)\, dy = 1$$

trabajando en el espacio $(\mathbb{R}^N, e^{-x^2/2} dx)$.

Asumimos para ello sin pérdida de generalidad que

$$\int_{\mathbb{R}^N} w(t)\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} w(t)\, G dx = \int_{\mathbb{R}^N} v(t)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} u(t)\, dy = 1$$

trabajando en el espacio $(\mathbb{R}^N, e^{-x^2/2}dx)$. Realizamos ahora una estimación crucial esencial sobre el tiempo de decaimiento de la energía de la ecuación de Ornstein-Uhlenbeck,

$$\mathfrak{F}(w(t)) := \int_{\mathbb{R}^N} |w(t) - 1|^2\, G\, dx$$

$$\frac{d\mathfrak{F}(w(t))}{dt} = -\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2\, G dx = -\mathfrak{D}(w(t)).$$

Como consecuencia de la desigualdad de Poincaré Gaussiana (*A generalized Poincaré inequality for Gaussian measures*, William Beckner, Proc Amer. Math. Soc. 105 (1989), 397-400),

$$\mathfrak{F} \leq \mathfrak{D},$$

Como consecuencia de la desigualdad de Poincaré Gaussiana (*A generalized Poincaré inequality for Gaussian measures*, William Beckner, Proc Amer. Math. Soc. 105 (1989), 397-400),

$$\mathfrak{F} \leq \mathfrak{D},$$

con lo que $-\frac{d\mathfrak{F}}{dt} = \mathfrak{D} \geq \mathfrak{F}$, luego $-\frac{d\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}} \geq dt$ e integrando

$$-\log \mathfrak{F} \geq t + C,$$

se tiene finalmente

$$\mathfrak{F}(w(t)) \leq \mathfrak{F}(w(0))\, e^{-t}$$

cualquiera que sea $t \geq 0$.

Hemos demostrado:

Teorema

Bajo la hipótesis de integrabilidad del dato inicial y de que el error cuadrático pesado inicial sea finito,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |w_0 - 1|^2 d\mu < +\infty,$$

las soluciones de la ecuación de Ornstein-Uhlenbeck satisfacen la estimación de estabilización

$$\|w(t) - 1\|_{L^2(\mu)} \leq \|w_0 - 1\|_{L^2(\mu)} e^{-t/2}.$$

Si deshacemos el cambio de variable,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |w(t) - 1|^2 \, G dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{v - G}{G} \right|^2 G dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v - G|^2 \, K dx$$

donde $K = 1/G = e^{x^2/2}$, que sería un peso grande mientras la solución $v(x, t)$ sería pequeña. La estimación resulta:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v(t) - G|^2 \, d\nu \leq e^{-t} \int_{\mathbb{R}^N} |v_0 - G|^2 \, d\nu$$

cualquiera que sea $t \geq 0$, siendo $d\nu = K \, dx$.

Comportamiento asintótico de la ecuación del calor fraccionaria

De manera análoga a la ecuación del calor, planteamos la ecuación del calor fraccionaria

$$\partial_t u + (-\Delta)^s u = 0$$

cuyo núcleo es

$$P_t(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|^{2s} t})$$

En primer lugar, suponemos que $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y que

$$N_1(u_0) = \int_{\mathbb{R}^N} |y\, u_0(y)|\, dy < +\infty.$$

Además, denotamos

$$M(u_0) = \int_{\mathbb{R}^N} |u_0(y)|\, dy$$

$$u(x,t) - M(u_0)\, P_t(x) = P_t * u_0(x) - M(u_0)\, P_t(x)$$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) - M(u_0)\, P_t(x) &= P_t * u_0(x) - M(u_0)\, P_t(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) P_t(x-y)\, dy - P_t(x) \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\, dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) - M(u_0)\, P_t(x) &= P_t * u_0(x) - M(u_0)\, P_t(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) P_t(x-y)\, dy - P_t(x) \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) [P_t(x-y) - P_t(x)]\, dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) - M(u_0)\,P_t(x) &= P_t * u_0(x) - M(u_0)\,P_t(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) P_t(x-y)\,dy - P_t(x) \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)[P_t(x-y) - P_t(x)]\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \left(- \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \lambda} P_t(x - \lambda y)\,d\lambda \right) dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) - M(u_0)\,P_t(x) &= P_t * u_0(x) - M(u_0)\,P_t(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) P_t(x-y)\,dy - P_t(x) \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) [P_t(x-y) - P_t(x)]\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \left(- \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \lambda} P_t(x - \lambda y)\,d\lambda \right)\,dy \\
&= -\frac{1}{t^{N/2s}} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 u_0(y)\,(-y)\,G'(|\xi|^2)\,2\,\xi \frac{\lambda}{t^{1/2s}}\,d\lambda\,dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) - M(u_0)\,P_t(x) &= P_t * u_0(x) - M(u_0)\,P_t(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) P_t(x-y)\,dy - P_t(x) \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)[P_t(x-y) - P_t(x)]\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \left(- \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \lambda} P_t(x - \lambda y)\,d\lambda \right)\, dy \\
&= -\frac{1}{t^{N/2s}} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 u_0(y)\,(-y) G'(|\xi|^2)\,2\,\xi \frac{\lambda}{t^{1/2s}}\,d\lambda\,dy \\
&= \frac{2}{t^{N/2s}} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 u_0(y)\,y\,G'(|\xi|^2)\,\xi \frac{\lambda}{t^{1/2s}}\,d\lambda\,dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) - M(u_0)\, P_t(x) &= P_t * u_0(x) - M(u_0)\, P_t(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) P_t(x-y)\, dy - P_t(x) \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) [P_t(x-y) - P_t(x)]\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \left(- \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \lambda} P_t(x - \lambda y)\, d\lambda \right)\, dy \\
&= -\frac{1}{t^{N/2s}} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 u_0(y)\,(-y) G'(|\xi|^2)\, 2\, \xi \frac{\lambda}{t^{1/2s}}\, d\lambda\, dy \\
&= \frac{2}{t^{N/2s}} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 u_0(y)\, y\, G'(|\xi|^2)\, \xi \frac{\lambda}{t^{1/2s}}\, d\lambda\, dy \\
&= \frac{2}{t^{(N+1)/2s}} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 y u_0(y)\, \xi\, G'(|\xi|^2) \lambda\ d\lambda\, dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) - M(u_0)\,P_t(x) &= P_t * u_0(x) - M(u_0)\,P_t(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) P_t(x-y)\,dy - P_t(x) \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) [P_t(x-y) - P_t(x)]\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \left(- \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \lambda} P_t(x - \lambda y)\,d\lambda \right)\,dy \\
&= -\frac{1}{t^{N/2s}} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 u_0(y)\,(-y) G'(|\xi|^2)\,2\,\xi \frac{\lambda}{t^{1/2s}}\,d\lambda\,dy \\
&= \frac{2}{t^{N/2s}} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 u_0(y)\,y\,G'(|\xi|^2)\,\xi \frac{\lambda}{t^{1/2s}}\,d\lambda\,dy \\
&= \frac{2}{t^{(N+1)/2s}} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 y u_0(y)\,\xi\,G'(|\xi|^2) \lambda\;d\lambda\,dy \\
&= \frac{1}{t^{(N+1)/2s}} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 y u_0(y)\,F'(|\xi|) \lambda\;d\lambda\,dy
\end{aligned}
$$

Hemos empleado que

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} P_t(x-\lambda y) = \langle -y, \nabla P_t(x-\lambda y)\rangle$$
$$= -y t^{-N/2s} G'(|\xi|^2) 2\xi \frac{\lambda}{t^{1/2s}}$$

.

Hemos empleado que

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} P_t(x - \lambda y) = \langle -y, \nabla P_t(x - \lambda y) \rangle$$
$$= -y t^{-N/2s} G'(|\xi|^2) 2\xi \frac{\lambda}{t^{1/2s}}$$

y podemos acotar F' aplicando el teorema de regularidad de soluciones de la ecuación del calor ya que F está acotada.
Así, deducimos:

Hemos empleado que

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} P_t(x-\lambda y) = \langle -y, \nabla P_t(x-\lambda y)\rangle$$
$$= -yt^{-N/2s} G'(|\xi|^2) 2\xi \frac{\lambda}{t^{1/2s}}$$

y podemos acotar F' aplicando el teorema de regularidad de soluciones de la ecuación del calor ya que F está acotada.
Así, deducimos:

$$t^{N/2}|u(x,t) - M(u_0)\, P_t(x)| \leq \frac{1}{t^{(N+1)/2s}} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 |yu_0(y)|\, |F'(|\xi|)|\lambda \; d\lambda\, dy$$

.

Hemos empleado que

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} P_t(x-\lambda y) = \langle -y, \nabla P_t(x-\lambda y)\rangle$$
$$= -y t^{-N/2s} G'(|\xi|^2) 2\xi \frac{\lambda}{t^{1/2s}}$$

y podemos acotar F' aplicando el teorema de regularidad de soluciones de la ecuación del calor ya que F está acotada.
Así, deducimos:

$$t^{N/2}|u(x,t) - M(u_0)\, P_t(x)| \leq \frac{1}{t^{(N+1)/2s}} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 |y u_0(y)|\, |F'(|\xi|)| \lambda \; d\lambda \, dy$$
$$\leq \frac{1}{t^{1/2s}} C N_1 \to 0$$

cuando $t \to \infty$ con una velocidad relativa de convergencia $\mathcal{O}(t^{-1/2s})$.

Supongamos ahora que $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ sin hipótesis sobre su primer momento y sea $u_{0,\delta}$ una aproximación de soporte compacto de u. Se tiene $\|u(t) - u_\delta(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq Ct^{\frac{-N}{2s}}\delta$
En efecto:

Supongamos ahora que $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ sin hipótesis sobre su primer momento y sea $u_{0,\delta}$ una aproximación de soporte compacto de u. Se tiene $\|u(t) - u_\delta(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq Ct^{\frac{-N}{2s}}\delta$
En efecto:

$$\|u(t) - u_\delta(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \|P_t(x) * \Big(u_0(x) - u_{0,\delta}(x)\Big)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$$

Supongamos ahora que $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ sin hipótesis sobre su primer momento y sea $u_{0,\delta}$ una aproximación de soporte compacto de u. Se tiene $\|u(t) - u_\delta(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq Ct^{\frac{-N}{2s}}\delta$
En efecto:

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_\delta(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &= \|P_t(x) * \Big(u_0(x) - u_{0,\delta}(x)\Big)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|P_t(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|u_0(x) - u_{0,\delta}(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ sin hipótesis sobre su primer momento y sea $u_{0,\delta}$ una aproximación de soporte compacto de u. Se tiene $\|u(t) - u_\delta(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq Ct^{\frac{-N}{2s}}\delta$
En efecto:

$$\begin{aligned}
\|u(t) - u_\delta(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &= \|P_t(x) * \Big(u_0(x) - u_{0,\delta}(x)\Big)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \|P_t(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|u_0(x) - u_{0,\delta}(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq Ct^{\frac{-N}{2s}}\delta
\end{aligned}$$

cualquiera que sea $t > 0$.

Supongamos ahora que $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ sin hipótesis sobre su primer momento y sea $u_{0,\delta}$ una aproximación de soporte compacto de u. Se tiene $\|u(t) - u_\delta(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq Ct^{\frac{-N}{2s}}\delta$
En efecto:

$$\begin{aligned}
\|u(t) - u_\delta(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &= \|P_t(x) * \Big(u_0(x) - u_{0,\delta}(x)\Big)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \|P_t(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|u_0(x) - u_{0,\delta}(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq Ct^{\frac{-N}{2s}}\delta
\end{aligned}$$

cualquiera que sea $t > 0$.
Ahora bien, $u_{0,\delta}$ posee primer momento finito (por ser de $C_c(\mathbb{R}^N)$), luego

$$\|u_\delta(t) - M(u_{0,\delta})P_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{\tilde{C} N_1(u_{0,\delta})}{t^{(N+1)/2s}}$$

Esto implica, para tiempos grandes, que:

$$t^{N/2s}\|u_\delta - M(u_{0,\delta})P_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \tilde{C}\,\delta$$

Esto implica, para tiempos grandes, que:

$$t^{N/2s}\|u_\delta - M(u_{0,\delta})P_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \tilde{C}\,\delta$$

Y como $|M(u_0) - M(u_{0,\delta})| \leq \delta$, aplicando la desigualdad triangular tenemos:

Esto implica, para tiempos grandes, que:

$$t^{N/2s}\|u_\delta - M(u_{0,\delta})P_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \tilde{C}\,\delta$$

Y como $|M(u_0) - M(u_{0,\delta})| \leq \delta$, aplicando la desigualdad triangular tenemos:

$$\lim_{t\to\infty} t^{N/2s}\|u(t) - M(u_0)P_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0$$

Esto implica, para tiempos grandes, que:

$$t^{N/2s}\|u_\delta - M(u_{0,\delta})P_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \tilde{C}\,\delta$$

Y como $|M(u_0) - M(u_{0,\delta})| \leq \delta$, aplicando la desigualdad triangular tenemos:

$$\lim_{t\to\infty} t^{N/2s}\|u(t) - M(u_0)P_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0$$

Así, pidiendo sólo $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ obtenemos convergencia, pero no velocidad.

Estudiamos ahora el caso $u_0 \in L^1, N_{1s} = 0, N_2 < \infty$.

Habíamos obtenido la identidad

Estudiamos ahora el caso $u_0 \in L^1, N_{1s} = 0, N_2 < \infty$.

Habíamos obtenido la identidad

$$t^{N/2s}\big(u(x,t) - M \cdot P_t(x)\big) = C\, t^{-1/2s} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 u_0(y)\, y \cdot |\xi|\, G'(|\xi|^2)\, d\lambda\, dy$$

Estudiamos ahora el caso $u_0 \in L^1, N_{1s} = 0, N_2 < \infty$.

Habíamos obtenido la identidad

$$
\begin{aligned}
t^{N/2s}\big(u(x,t) - M \cdot P_t(x)\big) &= C\, t^{-1/2s} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 u_0(y)\, y \cdot |\xi|\, G'(|\xi|^2)\, d\lambda\, dy \\
&= C\, t^{-1/2s} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 V'(y) \cdot e(\xi) F'(|\xi|)\, d\lambda\, dy
\end{aligned}
$$

Estudiamos ahora el caso $u_0 \in L^1, N_{1s} = 0, N_2 < \infty$.

Habíamos obtenido la identidad

$$
\begin{aligned}
t^{N/2s}\big(u(x,t) - M \cdot P_t(x)\big) &= C\, t^{-1/2s} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 u_0(y)\, y \cdot |\xi| G'(|\xi|^2)\, d\lambda\, dy \\
&= C\, t^{-1/2s} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 V'(y) \cdot e(\xi) F'(|\xi|)\, d\lambda\, dy \\
&= C\, t^{-1/2s} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 V(y) \cdot H(\xi)\, \frac{\lambda}{t^{1/2s}}\, d\lambda\, dy
\end{aligned}
$$

$$H(\xi) = (e(\xi) F'(|\xi|))'$$

Estudiamos ahora el caso $u_0 \in L^1, N_{1s} = 0, N_2 < \infty$.

Habíamos obtenido la identidad

$$\begin{aligned} t^{N/2s}\big(u(x,t) - M \cdot P_t(x)\big) &= C\, t^{-1/2s} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 u_0(y)\, y \cdot |\xi| G'(|\xi|^2)\, d\lambda\, dy \\ &= C\, t^{-1/2s} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 V'(y) \cdot e(\xi) F'(|\xi|)\, d\lambda\, dy \\ &= C\, t^{-1/2s} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 V(y) \cdot H(\xi)\, \frac{\lambda}{t^{1/2s}}\, d\lambda\, dy \\ &= C\, t^{-1/s} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 V(y) \cdot H(\xi)\, \lambda\, d\lambda\, dy \end{aligned}$$

$$H(\xi) = (e(\xi) F'(|\xi|))'$$

Estudiamos ahora el caso $u_0 \in L^1, N_{1s} = 0, N_2 < \infty$.

Habíamos obtenido la identidad

$$\begin{aligned} t^{N/2s}\big(u(x,t) - M \cdot P_t(x)\big) &= C\, t^{-1/2s} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 u_0(y)\, y \cdot |\xi| G'(|\xi|^2)\, d\lambda\, dy \\ &= C\, t^{-1/2s} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 V'(y) \cdot e(\xi) F'(|\xi|)\, d\lambda\, dy \\ &= C\, t^{-1/2s} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 V(y) \cdot H(\xi)\, \frac{\lambda}{t^{1/2s}}\, d\lambda\, dy \\ &= C\, t^{-1/s} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 V(y) \cdot H(\xi)\, \lambda\, d\lambda\, dy \end{aligned}$$

Ahora, $H(\xi) = (e(\xi)F'(|\xi|))'$ está acotado por el teorema de regularización y sabemos que $\int_{\mathbb{R}} |V(y)| dy \leq N_2$ luego:

Estudiamos ahora el caso $u_0 \in L^1, N_{1s} = 0, N_2 < \infty$.

Habíamos obtenido la identidad

$$
\begin{aligned}
t^{N/2s}\big(u(x,t) - M \cdot P_t(x)\big) &= C\, t^{-1/2s} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 u_0(y)\, y \cdot |\xi| G'(|\xi|^2)\, d\lambda\, dy \\
&= C\, t^{-1/2s} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 V'(y) \cdot e(\xi) F'(|\xi|)\, d\lambda\, dy \\
&= C\, t^{-1/2s} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 V(y) \cdot H(\xi)\, \frac{\lambda}{t^{1/2s}}\, d\lambda\, dy \\
&= C\, t^{-1/s} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 V(y) \cdot H(\xi)\, \lambda\, d\lambda\, dy
\end{aligned}
$$

Ahora, $H(\xi) = (e(\xi)F'(|\xi|))'$ está acotado por el teorema de regularización y sabemos que $\int_{\mathbb{R}} |V(y)| dy \leq N_2$ luego:

$$
t^{N/2s} \| M \cdot P_t(x) - u(x,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{CN_2}{t^{1/s}}
$$

En conclusión, hemos obtenido

$$t^{N/2s}\|M \cdot P_t(x) - u(x,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{CN_2}{t^{1/s}}$$

Así, todas las soluciones de la ecuación del calor fraccionaria en el espacio convergen a P_t si la masa inicial $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ es finita, pero la velocidad de convergencia depende de cuánta masa inicial está lejos, es decir, de lo pesadas que son las colas.
Si comparamos la velocidad de convergencia de la ecuación del calor con la fraccionaria vemos que la última es más rápida.

Muchas gracias