Espacios de Banach y el Teorema de Krivine

Cristina Lois, José David Rodríguez, Óscar Roldán,
Guillem Sala, Alberto Salguero y Carlos Valverde

VII Escuela-Taller/XIII Encuentro Red Análisis Funcional y Aplicaciones

Cáceres, 6-11 Marzo 2017

Índice

Índice

Bases

$(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert $\Longrightarrow \exists (e_n)_{n=1}^{+\infty}$ base ortonormal: $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle \, e_n$.

Bases

$(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbert $\Longrightarrow \exists (e_n)_{n=1}^{+\infty}$ base ortonormal: $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$.

Definición

Una sucesión $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ es una **base** de X si para cualquier $x \in X$ existe una única sucesión $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n$.

Bases

$(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbert $\Longrightarrow \exists (e_n)_{n=1}^{+\infty}$ base ortonormal: $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle \, e_n$.

Definición

Una sucesión $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ es una **base** de X si para cualquier $x \in X$ existe una única sucesión $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n$.

Bases

$(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert $\Longrightarrow \exists (e_n)_{n=1}^{+\infty}$ base ortonormal: $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$

Definición

Una sucesión $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ es una **base** de X si para cualquier $x \in X$ existe una única sucesión $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n.$

Ejemplos:

Bases

$$(H, \langle \cdot, \cdot \rangle) \text{ Hilbert} \implies \exists (e_n)_{n=1}^{+\infty} \text{ base ortonormal: } x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle \, e_n.$$

Definición

Una sucesión $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ es una **base** de X si para cualquier $x \in X$ existe una única sucesión $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n$.

Ejemplos:

- Base canónica $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ de c_0 y ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$:

$$e_n := (0, \ldots, 0, \overset{(n)}{1}, 0, \ldots).$$

Bases

$(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbert $\Longrightarrow \exists (e_n)_{n=1}^{+\infty}$ base ortonormal: $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle \, e_n$.

Definición

Una sucesión $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ es una **base** de X si para cualquier $x \in X$ existe una única sucesión $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n$.

Ejemplos:

- Base canónica $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ de c_0 y ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$:

$$e_n := (0, \ldots, 0, \overset{(n)}{1}, 0, \ldots).$$

- Bases de Haar en $L^p([0,1])$, $1 \leq p < +\infty$.

Bases

$(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert $\Longrightarrow \exists (e_n)_{n=1}^{+\infty}$ base ortonormal: $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle\, e_n$.

Definición

Una sucesión $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ es una **base** de X si para cualquier $x \in X$ existe una única sucesión $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n$.

Ejemplos:

- Base canónica $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ de c_0 y ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$:

$$e_n := (0, \ldots, 0, \overset{(n)}{1}, 0, \ldots).$$

- Bases de Haar en $L^p([0,1])$, $1 \leq p < +\infty$.
- Se puede dar una base de $\mathcal{C}[0,1]$.

Bases de Schauder

Definición

Una sucesión $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ es una **base de Schauder** de X si existe una sucesión $(e_n^*)_{n=1}^{+\infty}$ en X^* tal que:

Bases de Schauder

Definición

Una sucesión $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ es una **base de Schauder** de X si existe una sucesión $(e_n^*)_{n=1}^{+\infty}$ en X^* tal que:

1. $e_k^*(e_j) = \delta_{k,j}$.

Bases de Schauder

Definición

Una sucesión $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ es una **base de Schauder** de X si existe una sucesión $(e_n^*)_{n=1}^{+\infty}$ en X^* tal que:

1. $e_k^*(e_j) = \delta_{k,j}$.
2. $x = \sum_{n=1}^{+\infty} e_n^*(x) e_n$, para todo $x \in X$.

Bases de Schauder

Definición

Una sucesión $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ es una **base de Schauder** de X si existe una sucesión $(e_n^*)_{n=1}^{+\infty}$ en X^* tal que:

1. $e_k^*(e_j) = \delta_{k,j}$.
2. $x = \sum_{n=1}^{+\infty} e_n^*(x)e_n$, para todo $x \in X$.

Los funcionales $(e_n^*)_{n=1}^{+\infty}$ se denominan **funcionales biortogonales** asociados a $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$.

Bases de Schauder

Definición

Una sucesión $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ es una **base de Schauder** de X si existe una sucesión $(e_n^*)_{n=1}^{+\infty}$ en X^* tal que:

1. $e_k^*(e_j) = \delta_{k,j}$.
2. $x = \sum_{n=1}^{+\infty} e_n^*(x) e_n$, para todo $x \in X$.

Los funcionales $(e_n^*)_{n=1}^{+\infty}$ se denominan **funcionales biortogonales** asociados a $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$.

Proposición

Sea X un espacio de Banach separable. Una sucesión $(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ es una base de Schauder de X si, y sólo si, $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ es una base de X.

Sucesiones básicas

Notación: $S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) e_k.$

Sucesiones básicas

Notación: $S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) e_k$.

Definición

Si $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ es una base de X, $K := \sup_n \|S_n\|$ es la **constante básica**. Si $K = 1$, la base se llama **monótona**.

Sucesiones básicas

Notación: $S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x)e_k$.

Definición

Si $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ es una base de X, $K := \sup_n \|S_n\|$ es la **constante básica**. Si $K = 1$, la base se llama **monótona**.

Definición

$(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ es una **sucesión básica** si es base de $[e_n] := \overline{\mathrm{span}((e_n)_{n=1}^{+\infty})}$.

Sucesiones básicas

Notación: $S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) e_k$.

Definición

Si $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ es una base de X, $K := \sup_n \|S_n\|$ es la **constante básica**. Si $K = 1$, la base se llama **monótona**.

Definición

$(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ es una **sucesión básica** si es base de $[e_n] := \overline{\operatorname{span}((e_n)_{n=1}^{+\infty})}$.

Proposición (Criterio de Grunblum)

Una sucesión $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ de elementos no nulos de X es básica si, y sólo si

$$\exists K > 0 : \quad \left\| \sum_{k=1}^{m} a_k e_k \right\| \leq K \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|, \quad \forall (a_k)_k \subset \mathbb{R}, \quad \forall m \leq n.$$

Bases equivalentes

Definición

Dos bases (o sucesiones básicas) $(x_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ e $(y_n)_{n=1}^{+\infty} \subset Y$ son **equivalentes**, $(x_n)_n \sim (y_n)_n$, si $\forall (a_n)_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n \text{ converge } \iff \sum_{n=1}^{+\infty} a_n y_n \text{ converge.}$$

Bases equivalentes

Definición

Dos bases (o sucesiones básicas) $(x_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ e $(y_n)_{n=1}^{+\infty} \subset Y$ son **equivalentes**, $(x_n)_n \sim (y_n)_n$, si $\forall (a_n)_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n \text{ converge } \iff \sum_{n=1}^{+\infty} a_n y_n \text{ converge.}$$

Proposición

Dos bases $(x_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ e $(y_n)_{n=1}^{+\infty} \subset Y$ son equivalentes si, y sólo si, $\exists C > 0$ tal que $\forall (a_i)_{i=1}^{+\infty} \subset c_{00}$,

$$C^{-1}\left\|\sum_{i=1}^{+\infty} a_i y_i\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{+\infty} a_i x_i\right\| \leq C\left\|\sum_{i=1}^{+\infty} a_i y_i\right\|.$$

Si $C = 1$, se dice que son ***isométricamente equivalentes*** *(o 1-equivalentes).*

Sucesiones básicas de bloques

Definición

Sea $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ base de X. Supongamos que $(p_n)_{n=1}^{+\infty}$ es una sucesión de enteros estrictamente creciente con $p_0 = 0$ y que $(a_n)_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$. Entonces la sucesión de vectores no nulos $(u_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ de la forma

$$u_n := \sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} a_j e_j$$

se llama **sucesión básica de bloques** (o *BBS*) de $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$

Sucesiones básicas de bloques

Definición

Sea $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ base de X. Supongamos que $(p_n)_{n=1}^{+\infty}$ es una sucesión de enteros estrictamente creciente con $p_0 = 0$ y que $(a_n)_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$. Entonces la sucesión de vectores no nulos $(u_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ de la forma

$$u_n := \sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} a_j e_j$$

se llama **sucesión básica de bloques** (o *BBS*) de $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$

Proposición (Bessaga–Pełczyński)

Sea $(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ *una base de* X. *Sea* $Y \subseteq X$ *un subespacio con* $\dim(Y) = +\infty$. *Entonces,* $\forall \varepsilon > 0$, *existe* $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ *BBS de* $(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$, *y existe* $(y_n)_{n=1}^{+\infty} \subset Y$ *de forma que* $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n - y_n\| \leq \varepsilon$.

El problema de la base

Pregunta:

El problema de la base

Pregunta: ¿Todo espacio de Banach separable posee una base?

El problema de la base

Pregunta: ¿Todo espacio de Banach separable posee una base?

Respuesta:

El problema de la base

Pregunta: ¿Todo espacio de Banach separable posee una base?

Respuesta: No (Enflo, 1973).

El problema de la base

Pregunta: ¿Todo espacio de Banach separable posee una base?

Respuesta: No (Enflo, 1973).

Teorema

Si X es infinito-dimensional, contiene una sucesión básica. De hecho, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar una sucesión básica con constante como mucho $1 + \varepsilon$.

Índice

Bases incondicionales

Definición

Sea $(x_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ una sucesión. Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ es **incondicionalmente convergente** si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n x_n$ converge para cualquier elección de signos $\theta_n \in \{-1, 1\}$.

Bases incondicionales

Definición

Sea $(x_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ una sucesión. Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ es **incondicionalmente convergente** si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n x_n$ converge para cualquier elección de signos $\theta_n \in \{-1, 1\}$.

Definición

Una base $(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ se denomina **incondicional** si para cualquier $x \in X$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} e_n^*(x) e_n$ converge incondicionalmente.

Bases incondicionales

Definición

Sea $(x_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ una sucesión. Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ es **incondicionalmente convergente** si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n x_n$ converge para cualquier elección de signos $\theta_n \in \{-1, 1\}$.

Definición

Una base $(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ se denomina **incondicional** si para cualquier $x \in X$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} e_n^*(x) e_n$ converge incondicionalmente.

Ejemplos:

Bases incondicionales

Definición

Sea $(x_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ una sucesión. Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ es **incondicionalmente convergente** si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n x_n$ converge para cualquier elección de signos $\theta_n \in \{-1, 1\}$.

Definición

Una base $(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ se denomina **incondicional** si para cualquier $x \in X$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} e_n^*(x) e_n$ converge incondicionalmente.

Ejemplos:

- En c_0 y l_p con $1 \leq p < +\infty$ la base canónica $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ es incondicional.

Bases incondicionales

Definición

Sea $(x_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ una sucesión. Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ es **incondicionalmente convergente** si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n x_n$ converge para cualquier elección de signos $\theta_n \in \{-1, 1\}$.

Definición

Una base $(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ se denomina **incondicional** si para cualquier $x \in X$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} e_n^*(x)e_n$ converge incondicionalmente.

Ejemplos:

- En c_0 y l_p con $1 \leq p < +\infty$ la base canónica $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ es incondicional.
- En c_0 la base sumante $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ con $f_n = \sum_{k=1}^{n} e_k$ es condicional.

Bases incondicionales

Definición

Sea $(x_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ una sucesión. Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ es **incondicionalmente convergente** si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n x_n$ converge para cualquier elección de signos $\theta_n \in \{-1, 1\}$.

Definición

Una base $(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ se denomina **incondicional** si para cualquier $x \in X$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} e_n^*(x) e_n$ converge incondicionalmente.

Ejemplos:

- En c_0 y l_p con $1 \leq p < +\infty$ la base canónica $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ es incondicional.
- En c_0 la base sumante $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ con $f_n = \sum_{k=1}^{n} e_k$ es condicional.
- Espacios sin base incondicional: L^1, $C[0, 1]$, el espacio de James ($\mathcal{J}$)...

Constante básica incondicional

Proposición

Una base $(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ *es incondicional si, y sólo si,* $\exists K \geq 1$ *tal que para todo* $N \in \mathbb{N}$, *siempre que* $a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$ *son escalares que satisfacen que* $|a_n| \leq |b_n|$, $1 \leq n \leq N$, *se tiene:*

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n e_n \right\| \leq K \left\| \sum_{n=1}^{N} b_n e_n \right\| . \tag{1}$$

Constante básica incondicional

Proposición

Una base $(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ *es incondicional si, y sólo si,* $\exists K \geq 1$ *tal que para todo* $N \in \mathbb{N}$*, siempre que* $a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$ *son escalares que satisfacen que* $|a_n| \leq |b_n|$*,* $1 \leq n \leq N$*, se tiene:*

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n e_n \right\| \leq K \left\| \sum_{n=1}^{N} b_n e_n \right\| . \tag{1}$$

Definición

Dado $(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ base incondicional, se define la **constante básica incondicional** K_u **de** $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ a la menor K de forma que se verifica (1).

Constante básica incondicional

Proposición

Una base $(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ *es incondicional si, y sólo si,* $\exists K \geq 1$ *tal que para todo* $N \in \mathbb{N}$*, siempre que* $a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$ *son escalares que satisfacen que* $|a_n| \leq |b_n|$*,* $1 \leq n \leq N$*, se tiene:*

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n e_n \right\| \leq K \left\| \sum_{n=1}^{N} b_n e_n \right\| . \tag{1}$$

Definición

Dado $(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ base incondicional, se define la **constante básica incondicional** K_u **de** $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ a la menor K de forma que se verifica (1). Diremos que $(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ es K-**incondicional** si $K_u \leq K$.

Constante de supresión

Si $(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ es una base incondicional y $A \subset \mathbb{N}$, existe una proyección

$$P_A : X \longrightarrow [e_k : k \in A]$$

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} e_k^*(x) e_k \longmapsto \sum_{k \in A} e_k^*(x) e_k.$$

Constante de supresión

Si $(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ es una base incondicional y $A \subset \mathbb{N}$, existe una proyección

$$P_A : X \longrightarrow [e_k : k \in A]$$
$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} e_k^*(x) e_k \longmapsto \sum_{k \in A} e_k^*(x) e_k.$$

P_A es acotada. $\{P_A : A \subset \mathbb{N}\}$ son las proyecciones naturales asociadas a la base incondicional $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$. Por el Principio de Acotación Uniforme, existe

$$K_s := \sup_{A \subset \mathbb{N}} \|P_A\|.$$

Constante de supresión

Si $(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ es una base incondicional y $A \subset \mathbb{N}$, existe una proyección

$$P_A : X \longrightarrow [e_k : k \in A]$$
$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} e_k^*(x) e_k \longmapsto \sum_{k \in A} e_k^*(x) e_k.$$

P_A es acotada. $\{P_A : A \subset \mathbb{N}\}$ son las proyecciones naturales asociadas a la base incondicional $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$. Por el Principio de Acotación Uniforme, existe

$$K_s := \sup_{A \subset \mathbb{N}} \|P_A\|.$$

A esa constante se le llama **constante de supresión de la base**, y verifica

$$1 \leq K_s \leq K_u \leq 2K_s.$$

Bases shrinking

Definición

$(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ es una base ***shrinking*** si $[e_n^*] = X^*$.

Bases shrinking

Definición

$(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ es una base ***shrinking*** si $[e_n^*] = X^*$.

Ejemplos:

Bases shrinking

Definición

$(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ es una base ***shrinking*** si $[e_n^*] = X^*$.

Ejemplos:

- En ℓ_p, $1 < p < +\infty$, la base canónica es *shrinking*.

Bases shrinking

Definición

$(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ es una base ***shrinking*** si $[e_n^*] = X^*$.

Ejemplos:

- En ℓ_p, $1 < p < +\infty$, la base canónica es *shrinking*.
- En ℓ_1, la base canónica no es *shrinking*.

Bases shrinking

Definición

$(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ es una base ***shrinking*** si $[e_n^*] = X^*$.

Ejemplos:

- En ℓ_p, $1 < p < +\infty$, la base canónica es *shrinking*.
- En ℓ_1, la base canónica no es *shrinking*.
- En c_0, la base canónica es *shrinking*, pero la base sumante no.

Bases acotadamente completas

Definición

$(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ es una base **acotadamente completa** si $\forall (a_n)_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_N \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n e_n \right\| < +\infty,$$

la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n$ converge.

Bases acotadamente completas

Definición

$(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ es una base **acotadamente completa** si $\forall (a_n)_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_N \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n e_n \right\| < +\infty,$$

la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n$ converge.

Ejemplos:

Bases acotadamente completas

Definición

$(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ es una base **acotadamente completa** si $\forall (a_n)_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_N \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n e_n \right\| < +\infty,$$

la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n$ converge.

Ejemplos:

- En ℓ_p, $1 < p < +\infty$, la base canónica es *ac. completa*.

Bases acotadamente completas

Definición

$(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ es una base **acotadamente completa** si $\forall (a_n)_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_N \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n e_n \right\| < +\infty,$$

la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n$ converge.

Ejemplos:

- En ℓ_p, $1 < p < +\infty$, la base canónica es *ac. completa*.
- En c_0, la base canónica no es *ac. completa*

Criterio de reflexividad

Teorema (James, 1951)

Si X es separable y $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ es una base, entonces X es reflexivo si, y sólo si, $(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ es acotadamente completa y shrinking.

Criterio de reflexividad

Teorema (James, 1951)

Si X *es separable y* $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ *es una base, entonces* X *es reflexivo si, y sólo si,* $(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ *es acotadamente completa y shrinking.*

Teorema (James)

Sea $(u_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ *una base incondicional.*

Criterio de reflexividad

Teorema (James, 1951)

Si X es separable y $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ es una base, entonces X es reflexivo si, y sólo si, $(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ es acotadamente completa y shrinking.

Teorema (James)

Sea $(u_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ una base incondicional. Entonces $(u_n)_n$ no es shrinking si, y sólo si, X contiene un subespacio isomorfo a ℓ_1.

Criterio de reflexividad

Teorema (James, 1951)

Si X es separable y $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ es una base, entonces X es reflexivo si, y sólo si, $(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ es acotadamente completa y shrinking.

Teorema (James)

Sea $(u_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ una base incondicional. Entonces $(u_n)_n$ no es shrinking si, y sólo si, X contiene un subespacio isomorfo a ℓ_1. Además, $(u_n)_n$ no es acotadamente completo si, y sólo si, X contiene un subespacio isomorfo a c_0.

Criterio de reflexividad

Teorema (James, 1951)

Si X *es separable y* $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ *es una base, entonces* X *es reflexivo si, y sólo si,* $(e_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ *es acotadamente completa y shrinking.*

Teorema (James)

Sea $(u_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X$ *una base incondicional. Entonces* $(u_n)_n$ *no es shrinking si, y sólo si,* X *contiene un subespacio isomorfo a* ℓ_1*. Además,* $(u_n)_n$ *no es acotadamente completo si, y sólo si,* X *contiene un subespacio isomorfo a* c_0*.*

Corolario

Un espacio de Banach X *con base incondicional es reflexivo si, y sólo si, no contiene subespacios isomorfos a* c_0 *ni* ℓ_1*.*

Índice

Motivación

Sabemos que

Motivación

Sabemos que

- Todo subespacio infinito dimensional de ℓ_p contiene una copia de ℓ_p.

Motivación

Sabemos que

- Todo subespacio infinito dimensional de ℓ_p contiene una copia de ℓ_p.
- Todo subespacio de L_p, $p > 2$, contiene una copia de los espacios ℓ_p o ℓ_2 (Kadets–Pełczyński).

Motivación

Sabemos que

- Todo subespacio infinito dimensional de ℓ_p contiene una copia de ℓ_p.
- Todo subespacio de L_p, $p > 2$, contiene una copia de los espacios ℓ_p o ℓ_2 (Kadets–Pełczyński).

Pregunta:

Motivación

Sabemos que

- Todo subespacio infinito dimensional de ℓ_p contiene una copia de ℓ_p.
- Todo subespacio de L_p, $p > 2$, contiene una copia de los espacios ℓ_p o ℓ_2 (Kadets–Pełczyński).

Pregunta: ¿Es cierto que todo espacio de Banach contiene una copia de ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, o de c_0?

Motivación

Sabemos que

- Todo subespacio infinito dimensional de ℓ_p contiene una copia de ℓ_p.
- Todo subespacio de L_p, $p > 2$, contiene una copia de los espacios ℓ_p o ℓ_2 (Kadets–Pełczyński).

Pregunta: ¿Es cierto que todo espacio de Banach contiene una copia de ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, o de c_0?

Respuesta:

Motivación

Sabemos que

- Todo subespacio infinito dimensional de ℓ_p contiene una copia de ℓ_p.
- Todo subespacio de L_p, $p > 2$, contiene una copia de los espacios ℓ_p o ℓ_2 (Kadets–Pełczyński).

Pregunta: ¿Es cierto que todo espacio de Banach contiene una copia de ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, o de c_0?

Respuesta: ¡NO! (Tsirelson, 1974).

Herramientas Básicas

Teorema (No distorsión de ℓ_1 y c_0 de James)

Sea $(x_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión básica normalizada en un espacio de Banach X equivalente a la base canónica de ℓ_1 o a la de c_0. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe una BBS normalizada $(y_n)_{n=1}^\infty$ de $(x_n)_{n=1}^\infty$ tal que

$$\left\|\sum_{k=1}^N a_k y_k\right\| \geq (1-\varepsilon)\sum_{k=1}^N |a_k|, \qquad \left\|\sum_{k=1}^N a_k y_k\right\| \leq (1+\varepsilon)\,\text{máx}\,|a_k|,$$

en el caso de ℓ_1 y c_0 respectivamente, para toda sucesión de escalares $(a_k)_{k=1}^N$.

Herramientas Básicas

Teorema (No distorsión de ℓ_1 y c_0 de James)

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica normalizada en un espacio de Banach X equivalente a la base canónica de ℓ_1 o a la de c_0. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe una BBS normalizada $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} a_k y_k \right\| \geq (1-\varepsilon) \sum_{k=1}^{N} |a_k|, \qquad \left\| \sum_{k=1}^{N} a_k y_k \right\| \leq (1+\varepsilon) \max |a_k|,$$

en el caso de ℓ_1 y c_0 respectivamente, para toda sucesión de escalares $(a_k)_{k=1}^{N}$.

Definición

Una familia de intervales disjuntos de números naturales $(I_1, \ldots, I_m)$ es **admisible** si $\forall k = 1, \ldots, m$, $I_k \subseteq [m+1, \infty)$.

Construcción del Espacio de Tsirelson

1) Dado $E \subseteq \mathbb{N}$, y $\xi \in c_{00}$,

$$E\xi := (\chi_E(n)\xi(n))_{n=1}^{\infty}.$$

Construcción del Espacio de Tsirelson

1) Dado $E \subseteq \mathbb{N}$, y $\xi \in c_{00}$,

$$E\xi := (\chi_E(n)\xi(n))_{n=1}^{\infty}.$$

2) Definimos la norma

$$\|\xi\|_T := \text{máx}\left\{\|\xi\|_{c_0}, \sup \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\|I_j\xi\|_T\right\}$$

Construcción del Espacio de Tsirelson

1) Dado $E \subseteq \mathbb{N}$, y $\xi \in c_{00}$,

$$E\xi := (\chi_E(n)\xi(n))_{n=1}^{\infty}.$$

2) Definimos la norma

$$\|\xi\|_T := \max\left\{\|\xi\|_{c_0}, \sup \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\|I_j\xi\|_T\right\}$$

3) Llamamos T a la compleción de $(c_{00}, \|\cdot\|_T)$ y notamos que los vectores unitarios canónicos $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ forman una base 1-incondicional de T.

Teorema

Teorema (Tsirelson)

Existe un espacio de Banach reflexivo que no contiene copias de ℓ_p para $1 \leq p < \infty$ ni de c_0.

Teorema

Teorema (Tsirelson)

Existe un espacio de Banach reflexivo que no contiene copias de ℓ_p para $1 \leq p < \infty$ ni de c_0.

Pero aún hay esperanza, porque

Teorema

Teorema (Tsirelson)

Existe un espacio de Banach reflexivo que no contiene copias de ℓ_p *para* $1 \leq p < \infty$ *ni de* c_0.

Pero aún hay esperanza, porque

Teorema (Dvoretzky)

ℓ_2 *es finitamente representable en todo espacio de Banach infinitamente dimensional X.*

Demostración

1) Suponemos c_0 o ℓ_p para $1 < p < \infty$ admite un embedding en T. Por el principio de selección de Bessaga-Pełczyński se llega a una contradicción.

Demostración

1) Suponemos c_0 o ℓ_p para $1 < p < \infty$ admite un embedding en T. Por el principio de selección de Bessaga-Pełczyński se llega a una contradicción.
2) Suponemos que ℓ_1 admite un embedding en T. Bessaga-Pełczyński nos da una BBS normalizada equivalente a la ℓ_1-basis. Razonando con $\varepsilon < 1/4$ en el teorema de no-distorsion de ℓ_1 de James llegamos a una contradicción.

Demostración

1) Suponemos c_0 o ℓ_p para $1 < p < \infty$ admite un embedding en T. Por el principio de selección de Bessaga-Pełczyński se llega a una contradicción.
2) Suponemos que ℓ_1 admite un embedding en T. Bessaga-Pełczyński nos da una BBS normalizada equivalente a la ℓ_1-basis. Razonando con $\varepsilon < 1/4$ en el teorema de no-distorsion de ℓ_1 de James llegamos a una contradicción.
3) Gracias al teorema de James, como T no contiene ninguna copia de c_0 ni ℓ_1, obtenemos que T es reflexivo.

Índice

Notación y definiciones

1) $\mathcal{P}\mathbb{N}$ se identifica con $\Delta = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Notación y definiciones

1) $\mathcal{P}\mathbb{N}$ se identifica con $\Delta = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
2) $\mathcal{P}_\infty\mathbb{N} = \{$subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}\}$, $\mathcal{F}\mathbb{N} = (\mathcal{P}_\infty\mathbb{N})^c$

Notación y definiciones

1) $\mathcal{P}\mathbb{N}$ se identifica con $\Delta = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
2) $\mathcal{P}_{\infty}\mathbb{N} = \{$subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}\}$, $\mathcal{F}\mathbb{N} = (\mathcal{P}_{\infty}\mathbb{N})^c$
3) Si $M \in \mathcal{P}\mathbb{N}$, $\mathcal{F}_r(M) = \{A \subset M : \#(A) = r\}$.

Notación y definiciones

1) $\mathcal{P}\mathbb{N}$ se identifica con $\Delta = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
2) $\mathcal{P}_\infty\mathbb{N} = \{$subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}\}$, $\mathcal{F}\mathbb{N} = (\mathcal{P}_\infty\mathbb{N})^c$
3) Si $M \in \mathcal{P}\mathbb{N}$, $\mathcal{F}_r(M) = \{A \subset M : \#(A) = r\}$.

Definición

Si $M \in \mathcal{P}_\infty\mathbb{N}$ y $f : \mathcal{F}_r(M) \to \mathbb{R}$, diremos que

$$\lim_{A\in\mathcal{F}_r(M)} f(A) = \alpha$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$A \in \mathcal{F}_r(M),\ \ A \subset [N, +\infty) \Rightarrow |f(A) - \alpha| < \varepsilon$$

Teoremas

Teorema (Ramsey)

1. *Dados* $r \in \mathbb{N}$ *y una función* $f : \mathcal{F}_r(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ *acotada, existe* $M \in \mathcal{P}_\infty \mathbb{N}$ *tal que* $\lim_{A \in \mathcal{F}_r(M)} f(A)$ *existe.*

Teoremas

Teorema (Ramsey)

1. *Dados* $r \in \mathbb{N}$ *y una función* $f : \mathcal{F}_r(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ *acotada, existe* $M \in \mathcal{P}_\infty \mathbb{N}$ *tal que* $\lim_{A \in \mathcal{F}_r(M)} f(A)$ *existe.*
2. *En particular, si* $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}_r(\mathbb{N})$*, existe* $M \in \mathcal{P}_\infty \mathbb{N}$ *tal que* $\mathcal{F}_r(M) \subset \mathcal{A}$ *o bien* $\mathcal{F}_r(M) \cap \mathcal{A} = \varnothing$.

Teoremas

Teorema (Ramsey)

1. *Dados* $r \in \mathbb{N}$ *y una función* $f : \mathcal{F}_r(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ *acotada, existe* $M \in \mathcal{P}_\infty\mathbb{N}$ *tal que* $\lim_{A \in \mathcal{F}_r(M)} f(A)$ *existe.*
2. *En particular, si* $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}_r(\mathbb{N})$*, existe* $M \in \mathcal{P}_\infty\mathbb{N}$ *tal que* $\mathcal{F}_r(M) \subset \mathcal{A}$ *o bien* $\mathcal{F}_r(M) \cap \mathcal{A} = \varnothing$*.*

Teorema (ℓ_1 de Rosenthal)

Si $(x_n)_{n=1}^\infty$ *es una sucesión acotada en un espacio de Banach de dimensión infinita* X*, entonces ocurre una de las dos siguientes:*

Teoremas

Teorema (Ramsey)

1. *Dados* $r \in \mathbb{N}$ *y una función* $f : \mathcal{F}_r(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ *acotada, existe* $M \in \mathcal{P}_\infty\mathbb{N}$ *tal que* $\lim_{A \in \mathcal{F}_r(M)} f(A)$ *existe.*
2. *En particular, si* $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}_r(\mathbb{N})$*, existe* $M \in \mathcal{P}_\infty\mathbb{N}$ *tal que* $\mathcal{F}_r(M) \subset \mathcal{A}$ *o bien* $\mathcal{F}_r(M) \cap \mathcal{A} = \varnothing$*.*

Teorema (ℓ_1 de Rosenthal)

Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión acotada en un espacio de Banach de dimensión infinita* X*, entonces ocurre una de las dos siguientes:*

$a)$ (x_n) *tiene una subsucesión débilmente de Cauchy.*

Teoremas

Teorema (Ramsey)

1. *Dados* $r \in \mathbb{N}$ *y una función* $f : \mathcal{F}_r(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ *acotada, existe* $M \in \mathcal{P}_\infty \mathbb{N}$ *tal que* $\lim_{A \in \mathcal{F}_r(M)} f(A)$ *existe.*
2. *En particular, si* $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}_r(\mathbb{N})$*, existe* $M \in \mathcal{P}_\infty \mathbb{N}$ *tal que* $\mathcal{F}_r(M) \subset \mathcal{A}$ *o bien* $\mathcal{F}_r(M) \cap \mathcal{A} = \varnothing$*.*

Teorema (ℓ_1 de Rosenthal)

Si $(x_n)_{n=1}^\infty$ *es una sucesión acotada en un espacio de Banach de dimensión infinita* X*, entonces ocurre una de las dos siguientes:*

a) (x_n) *tiene una subsucesión débilmente de Cauchy.*

b) (x_n) *tiene una subsucesión básica equivalente a la base canónica de* ℓ_1*.*

Demostración (Ramsey)

1) Por inducción sobre r, para el caso $r > 1$, existe un conjunto $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que existe

$$g(m_1, \ldots, m_{r-1}) := \lim_{m_r \in M_1} f(m_1, \ldots, m_{r-1}, m_r)$$

Demostración (Ramsey)

1) Por inducción sobre r, para el caso $r > 1$, existe un conjunto $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que existe

$$g(m_1, \ldots, m_{r-1}) := \lim_{m_r \in M_1} f(m_1, \ldots, m_{r-1}, m_r)$$

2) Por hipótesis de inducción existe $M_2 \subset M_1$ infinito tal que existe

$$\lim_{A \in \mathcal{F}_{r-1}(M_2)} g(A) = \alpha$$

Demostración (Ramsey)

1) Por inducción sobre r, para el caso $r > 1$, existe un conjunto $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que existe

$$g(m_1, \ldots, m_{r-1}) := \lim_{m_r \in M_1} f(m_1, \ldots, m_{r-1}, m_r)$$

2) Por hipótesis de inducción existe $M_2 \subset M_1$ infinito tal que existe

$$\lim_{A \in \mathcal{F}_{r-1}(M_2)} g(A) = \alpha$$

3) Dados $A \in \mathcal{F}_{r-1}(M_2)$ y $\varepsilon > 0$ existe $N = N(A, \varepsilon)$ tal que si $n > N(A, \varepsilon)$, entonces

$$|f(A \cup \{n\}) - g(A)| < \varepsilon$$

Demostración (Ramsey)

1) Por inducción sobre r, para el caso $r > 1$, existe un conjunto $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que existe

$$g(m_1, \ldots, m_{r-1}) := \lim_{m_r \in M_1} f(m_1, \ldots, m_{r-1}, m_r)$$

2) Por hipótesis de inducción existe $M_2 \subset M_1$ infinito tal que existe

$$\lim_{A \in \mathcal{F}_{r-1}(M_2)} g(A) = \alpha$$

3) Dados $A \in \mathcal{F}_{r-1}(M_2)$ y $\varepsilon > 0$ existe $N = N(A, \varepsilon)$ tal que si $n > N(A, \varepsilon)$, entonces

$$|f(A \cup \{n\}) - g(A)| < \varepsilon$$

4) El conjunto M se construye por inducción haciendo

$$m_{n+1} > \max_{A \in \mathcal{F}_{r-1}\{m_1, \ldots, m_n\}} N(A, 2^{-n})$$

Índice

Primeras definiciones y resultados

Definición

Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach X es **"spreading"** si para cualquier sucesión de naturales $0 < p_1 < \cdots < p_n$,

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_{p_j} \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\|,$$

para cualquier sucesión $(a_i)_{i=1}^{n}$ de escalares.

Primeras definiciones y resultados

Definición

Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach X es **"spreading"** si para cualquier sucesión de naturales $0 < p_1 < \cdots < p_n$,

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_{p_j} \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\|,$$

para cualquier sucesión $(a_i)_{i=1}^{n}$ de escalares. Además, un espacio de sucesiones $\mathcal{X}$ es **"spreading"** si la base canónica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es "spreading".

Primeras definiciones y resultados

Definición

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones acotadas en los espacios de Banach X e Y respectivamente. Diremos que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es **finitamente representable por bloques** (o *BFR*) en $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ si para todo $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ existen

- una sucesión de **bloques** $(u_j)_{j=1}^{N}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de la forma

$$u_j = \sum_{p_{j-1}+1}^{p_j} a_j x_j, \qquad j = 1, \dots, N,$$

  donde $(p_j)_{j=0}^{N}$ es una sucesión estrictamente creciente de naturales y $(a_j)_{j=1}^{N}$ es una sucesión de escalares y
- un operador $T : [y_j]_{j=1}^{N} \to [u_j]_{j=1}^{N}$ tal que $Ty_j = u_j$ y $\|T\|\|T^{-1}\| < 1 + \varepsilon$.

Primeras definiciones y resultados

Definición

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada en un espacio de Banach X. Diremos que un espacio de sucesiones $\mathcal{X}$ es **finitamente representable por bloques** en $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ si la base canónica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\mathcal{X}$ lo es.

Primeras definiciones y resultados

Definición

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada en un espacio de Banach X. Diremos que un espacio de sucesiones $\mathcal{X}$ es **finitamente representable por bloques** en $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ si la base canónica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\mathcal{X}$ lo es.

Definición

Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espacios de sucesiones. Diremos que $\mathcal{X}$ es **finitamente representable por bloques** en $\mathcal{Y}$ si lo es en su base canónica.

Primeras definiciones y resultados

Teorema (Brunel y Sucheston)

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión normalizada en un espacio de Banach* X *tal que* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *no sea relativamente compacto. Entonces existe un espacio de sucesiones spreading* $\mathcal{X}$ *finitamente representable por bloques en* (x_n)*.*

Más concretamente, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *y un espacio de sucesiones spreading* $\mathcal{X}$ *tal que, si* $M = \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$*, entonces:*

$$\lim_{\{p_1,\ldots,p_r\}\in\mathcal{F}_r(M),\ (p_1<\cdots<p_n)} \left\|\sum_{j=1}^{r} a_j x_{p_j}\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{r} a_j e_j\right\|_{\mathcal{X}}$$

Demostración

1) Se tiene, por el teorema de Ramsey, la existencia de un conjunto M_∞ tal que existe

$$\lim_{\{p_1,\ldots,p_r\}\in\mathcal{F}_r(M_\infty),\ (p_1<\cdots<p_n)} \left\|\sum_{j=1}^{r} a_j x_{p_j}\right\|$$

para cada sucesión $(a_j)_{j=1}^{r}$.

Demostración

1) Se tiene, por el teorema de Ramsey, la existencia de un conjunto M_∞ tal que existe

$$\lim_{\{p_1,\dots,p_r\}\in\mathcal{F}_r(M_\infty),\ (p_1<\cdots<p_n)} \left\| \sum_{j=1}^{r} a_j x_{p_j} \right\|$$

para cada sucesión $(a_j)_{j=1}^r$.

2) Se define, para $\xi \in c_{00}$,

$$\|\xi\|_{\mathcal{X}} = \lim_{\{p_1,\dots,p_r\}\in\mathcal{F}_r(M_\infty)} \left\| \sum_{j=1}^{r} \xi(j) x p_j \right\|$$

Primeras definiciones y resultados

Proposición

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión "spreading" no constante en un espacio de Banach* X.

1. *Si* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *no es débilmente Cauchy, entonces* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión básica equivalente a la base canónica de* ℓ_1.

Primeras definiciones y resultados

Proposición

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión "spreading" no constante en un espacio de Banach* X*.*

1. *Si* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *no es débilmente Cauchy, entonces* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión básica equivalente a la base canónica de* ℓ_1*.*
2. *Si* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es débilmente nula, entonces es una sucesión básica incondicional con constante de supresión* $K_s = 1$*.*

Primeras definiciones y resultados

Proposición

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión "spreading" no constante en un espacio de Banach* X.

1. *Si* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *no es débilmente Cauchy, entonces* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión básica equivalente a la base canónica de* ℓ_1.
2. *Si* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es débilmente nula, entonces es una sucesión básica incondicional con constante de supresión* $K_s = 1$.
3. *Si* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es débilmente Cauchy, entonces* $(x_{2n-1} - x_{2n})_{n=1}^{\infty}$ *es débilmente nula y "spreading".*

Teorema de Krivine

Teorema

Sean $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión unitaria en* X *que no tiene subsucesiones convergentes. Entonces, se cumple uno de los siguientes puntos:*

- c_0 *es finitamente representable por bloques en* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$*;*
- *existe* $1 \leq p < \infty$ *tal que* ℓ_p *es finitamente representable por bloques en* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Demostración Teorema de Krivine

Se realizará en varias etapas:

1. Reducción a una sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ "spreading", $1-$incondicional y finitamente representable por bloques en $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Demostración Teorema de Krivine

Se realizará en varias etapas:

1. Reducción a una sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ "spreading", $1-$incondicional y finitamente representable por bloques en $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.
2. Ver que para toda sucesión $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ con $s_n \subset \mathbb{N}$ tal que $\# s_n \leq 3$ y $\max s_n < \min s_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\left(\frac{\sum_{i \in s_n} e_i}{\left\| \sum_{i \in s_n} e_i \right\|} \right)_{n=1}^{\infty}$$

es sucesión de bloques de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ y $1-$equivalente a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.

Demostración Teorema de Krivine

Se realizará en varias etapas:

1. Reducción a una sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ “spreading”, $1-$incondicional y finitamente representable por bloques en $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.
2. Ver que para toda sucesión $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ con $s_n \subset \mathbb{N}$ tal que $\# s_n \leq 3$ y $\max s_n < \min s_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que
$$\left(\frac{\sum_{i \in s_n} e_i}{\left\| \sum_{i \in s_n} e_i \right\|} \right)_{n=1}^{\infty}$$
es sucesión de bloques de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ y $1-$equivalente a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.
3. Si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ cumple los dos puntos anteriores, existe $p \in [1, +\infty]$ de modo que es $1-$equivalente a la base unitaria de
$$\begin{cases} \ell_p, & \text{si } 1 \leq p < +\infty \\ c_0, & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

Etapa I

- Primera reducción: Se define una sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ **"spreading"** y finitamente representable por bloques en $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Etapa I

- Primera reducción: Se define una sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ **"spreading"** y finitamente representable por bloques en $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.
- Segunda reducción: Se encuentra otra sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ "spreading", finitamente representable por bloques en la anterior e **incondicional con constante de supresión 1** (por tanto $2-$incondicional).

Etapa I

- Primera reducción: Se define una sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ **"spreading"** y finitamente representable por bloques en $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.
- Segunda reducción: Se encuentra otra sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ "spreading", finitamente representable por bloques en la anterior e **incondicional con constante de supresión 1** (por tanto $2-$incondicional).
  - Caso 1: Si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es débilmente nula, por (ii) de la Proposición previa cumple las condiciones.

Etapa I

- Primera reducción: Se define una sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ **"spreading"** y finitamente representable por bloques en $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.
- Segunda reducción: Se encuentra otra sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ "spreading", finitamente representable por bloques en la anterior e **incondicional con constante de supresión 1** (por tanto $2-$incondicional).
  - Caso 1: Si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es débilmente nula, por (ii) de la Proposición previa cumple las condiciones.
  - Caso 2: Si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ NO es débilmente nula vamos a utilizar la dicotomía de Rosenthal ℓ_1, de donde se tiene una de las siguientes condiciones:

Etapa I

- Primera reducción: Se define una sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ **"spreading"** y finitamente representable por bloques en $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.
- Segunda reducción: Se encuentra otra sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ "spreading", finitamente representable por bloques en la anterior e **incondicional con constante de supresión 1** (por tanto $2-$incondicional).
  - Caso 1: Si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es débilmente nula, por (ii) de la Proposición previa cumple las condiciones.
  - Caso 2: Si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ NO es débilmente nula vamos a utilizar la dicotomía de Rosenthal ℓ_1, de donde se tiene una de las siguientes condiciones:
    - $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a la base unitaria de ℓ_1;

Etapa I

- Primera reducción: Se define una sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ **"spreading"** y finitamente representable por bloques en $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.
- Segunda reducción: Se encuentra otra sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ "spreading", finitamente representable por bloques en la anterior e **incondicional con constante de supresión 1** (por tanto $2-$incondicional).
  - Caso 1: Si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es débilmente nula, por (ii) de la Proposición previa cumple las condiciones.
  - Caso 2: Si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ NO es débilmente nula vamos a utilizar la dicotomía de Rosenthal ℓ_1, de donde se tiene una de las siguientes condiciones:
    - $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a la base unitaria de ℓ_1;
    - $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es débilmente de Cauchy.

Etapa I

- Primera reducción: Se define una sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ **"spreading"** y finitamente representable por bloques en $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.
- Segunda reducción: Se encuentra otra sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ "spreading", finitamente representable por bloques en la anterior e **incondicional con constante de supresión 1** (por tanto $2-$incondicional).
    - Caso 1: Si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es débilmente nula, por (ii) de la Proposición previa cumple las condiciones.
    - Caso 2: Si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ NO es débilmente nula vamos a utilizar la dicotomía de Rosenthal ℓ_1, de donde se tiene una de las siguientes condiciones:
        - $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a la base unitaria de ℓ_1;
        - $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es débilmente de Cauchy. En este caso, por (iii) de la Proposición previa la sucesión

$$(f_n)_{n=1}^{\infty} \ : \ f_n = \frac{e_{2n} - e_{2n+1}}{\|e_{2n} - e_{2n+1}\|} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

es débilmente nula y "spreading".

Etapa I

- Tercera reducción: Queremos construir otra sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ "spreading" y finitamente representable por bloques en la anterior y **1-incondicional**.

Etapa I

- Tercera reducción: Queremos construir otra sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ "spreading" y finitamente representable por bloques en la anterior y **1-incondicional**. Para ello consideramos $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|\sum_{i=1}^{n} e_i\right\|$ y distinguimos los casos:

Etapa I

- Tercera reducción: Queremos construir otra sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ "spreading" y finitamente representable por bloques en la anterior y **1-incondicional**. Para ello consideramos $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|\sum_{i=1}^{n} e_i\right\|$ y distinguimos los casos:
  - Si $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|\sum_{i=1}^{n} e_i\right\| < \infty$ entonces $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a la base unitaria de c_0, y hemos probado el Teorema de Krivine para c_0.

Etapa I

- Tercera reducción: Queremos construir otra sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ "spreading" y finitamente representable por bloques en la anterior y **1-incondicional**. Para ello consideramos $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|\sum_{i=1}^{n} e_i\right\|$ y distinguimos los casos:
  - Si $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|\sum_{i=1}^{n} e_i\right\| < \infty$ entonces $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a la base unitaria de c_0, y hemos probado el Teorema de Krivine para c_0.
  - En caso contrario, se puede encontrar la base deseada.

Etapa II

- Definimos $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} \cap [0,1)$ y trabajamos con $c_{00}(\mathbb{Q}_0)$ que es espacio normado con la norma

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} a_j e_{q_j}\right\| := \left\|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\right\|.$$

Denotamos la complección de este espacio normado por $\mathcal{X}(\mathbb{Q}_0)$.

Etapa II

- Definimos $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} \cap [0,1)$ y trabajamos con $c_{00}(\mathbb{Q}_0)$ que es espacio normado con la norma

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j e_{q_j} \right\| := \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \right\| .$$

  Denotamos la compleción de este espacio normado por $\mathcal{X}(\mathbb{Q}_0)$.

- Se definen ahora los operadores

$$T_2 : c_{00}(\mathbb{Q}_0) \longrightarrow c_{00}(\mathbb{Q}_0)\ ,\ e_q \longmapsto e_{\frac{q}{2}} + e_{\frac{q+1}{2}}$$

$$T_3 : c_{00}(\mathbb{Q}_0) \longrightarrow c_{00}(\mathbb{Q}_0)\ ,\ e_q \longmapsto e_{\frac{q}{3}} + e_{\frac{q+1}{3}} + e_{\frac{q+2}{3}}$$

  que se extienden a $\mathcal{X}(\mathbb{Q}_0)$ obteniendo operadores continuos.

Etapa II

- Estamos en condiciones de demostrar que la sucesión

$$\left(\frac{\sum_{i\in s_n} e_i}{\left\|\sum_{i\in s_n} e_i\right\|} \right)_{n=1}^{\infty}$$

es $1-$equivalente a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Para ello se hace uso de **Teoría espectral**.

Etapa II

- Estamos en condiciones de demostrar que la sucesión

$$\left(\frac{\sum_{i \in s_n} e_i}{\left\| \sum_{i \in s_n} e_i \right\|} \right)_{n=1}^{\infty}$$

es $1-$equivalente a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Para ello se hace uso de **Teoría espectral**. Como los operadores T_2 y T_3 conmutan se tiene que existen $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ elementos de $\mathcal{X}$ y λ, μ autovalores aproximados tales que

$$T_2(\xi_n) - \lambda \xi_n \longrightarrow 0, \; n \to \infty,$$

$$T_3(\xi_n) - \mu \xi_n \longrightarrow 0, \;\; n \to \infty.$$

Etapa II

- Estamos en condiciones de demostrar que la sucesión

$$\left(\frac{\sum_{i \in s_n} e_i}{\left\| \sum_{i \in s_n} e_i \right\|} \right)_{n=1}^{\infty}$$

es $1-$equivalente a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Para ello se hace uso de **Teoría espectral**. Como los operadores T_2 y T_3 conmutan se tiene que existen $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ elementos de $\mathcal{X}$ y λ, μ autovalores aproximados tales que

$$T_2(\xi_n) - \lambda \xi_n \longrightarrow 0, \; n \to \infty,$$

$$T_3(\xi_n) - \mu \xi_n \longrightarrow 0, \;\; n \to \infty.$$

Pregunta: ¿Cómo se construye la sucesión de bloques?

Etapa II

- Estamos en condiciones de demostrar que la sucesión

$$\left(\frac{\sum_{i \in s_n} e_i}{\left\| \sum_{i \in s_n} e_i \right\|} \right)_{n=1}^{\infty}$$

es $1-$equivalente a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Para ello se hace uso de **Teoría espectral**. Como los operadores T_2 y T_3 conmutan se tiene que existen $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ elementos de $\mathcal{X}$ y λ, μ autovalores aproximados tales que

$$T_2(\xi_n) - \lambda \xi_n \longrightarrow 0,\ n \to \infty,$$

$$T_3(\xi_n) - \mu \xi_n \longrightarrow 0,\ \ n \to \infty.$$

Pregunta: ¿Cómo se construye la sucesión de bloques?

Etapa III

- Para $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$, se tiene $\lambda = \|e_1 + e_2\|$, $\mu = \|e_1 + e_2 + e_3\|$ y además:

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} \lambda^{k_i} \mu^{l_i} e_i \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{\sum_{i=1}^{m} 2^{k_i} 3^{l_i}} e_j \right\|$$

por la construcción hecha en la etapa anterior.

Etapa III

- Para $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$, se tiene $\lambda = \|e_1 + e_2\|$, $\mu = \|e_1 + e_2 + e_3\|$ y además:

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} \lambda^{k_i} \mu^{l_i} e_i \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{\sum_{i=1}^{m} 2^{k_i} 3^{l_i}} e_j \right\|$$

  por la construcción hecha en la etapa anterior.
- **Pregunta:** ¿De dónde sale el p buscado?

Etapa III

- Para $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$, se tiene $\lambda = \|e_1 + e_2\|$, $\mu = \|e_1 + e_2 + e_3\|$ y además:

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} \lambda^{k_i} \mu^{l_i} e_i \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{\sum_{i=1}^{m} 2^{k_i} 3^{l_i}} e_j \right\|$$

  por la construcción hecha en la etapa anterior.

- **Pregunta:** ¿De dónde sale el p buscado?
  El conjunto $D = \{\frac{2^k}{3^l} \ : \ k, l \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{R}^+$. Definimos

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ \frac{2^k}{3^l} \longmapsto \frac{\lambda^k}{\mu^l}$$

  que cumple:
  - f es multiplicativa $(f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \ \forall \ x, y \in D)$,
  - f es creciente.

Etapa III

Veamos que efectivamente es creciente. Si $\frac{2^{k_1}}{3^{l_1}} \leq \frac{2^{k_2}}{3^{l_2}}$ entonces

$$\frac{\lambda^{k_1}}{\mu^{l_1}} \leq \frac{\lambda^{k_2}}{\mu^{l_2}} \iff \lambda^{k_1}\mu^{l_2} \leq \lambda^{k_2}\mu^{l_1} \iff \left\|\lambda^{k_1}\mu^{l_2}e_1\right\| \leq \left\|\lambda^{k_2}\mu^{l_1}e_1\right\|.$$

Etapa III

Veamos que efectivamente es creciente. Si $\frac{2^{k_1}}{3^{l_1}} \leq \frac{2^{k_2}}{3^{l_2}}$ entonces

$$\frac{\lambda^{k_1}}{\mu^{l_1}} \leq \frac{\lambda^{k_2}}{\mu^{l_2}} \iff \lambda^{k_1}\mu^{l_2} \leq \lambda^{k_2}\mu^{l_1} \iff \left\|\lambda^{k_1}\mu^{l_2}e_1\right\| \leq \left\|\lambda^{k_2}\mu^{l_1}e_1\right\|.$$

- Podemos extender a una función multiplicativa y continua

$$\bar{f} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

que por tanto es de la forma $\bar{f}(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Se prueba que $\alpha \in [0, 1]$.

Referencias

Albiac, F.; Nigel, J.K
Topics in Banach Space Theory.
Springer, 2006.

Lindenstrauss, J.; Tzafriri, L.
Classical Banach Spaces I: Sequence Spaces
Springer-Verlag, 1977.

Benyamini, Y.; Lindestrauss, J.
Geometric Nonlinear Functional Analysis
AMS, 2000.