Análisis de las desigualdades de Poincaré-Sobolev

Antonio Zarauz, Daniel Santacreu, Javier Martínez, Sergi Arias
y Vicent Asensio
Tutelado por Carlos Pérez

9 de marzo de 2017

Contenidos

1. Desigualdades de Poincaré
2. Desigualdades de Sobolev
3. Equivalencia entre desigualdad puntual y en media
4. Desigualdad isoperimétrica con pesos
5. Propiedades de los pesos A_p

Definición

Dado $\alpha \in (0, n)$ *definimos el operador fraccionario como*

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy = (K_\alpha * f)(x).$$

Donde $K_\alpha(x) = \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}$, *y* $K_\alpha \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Definición

Dado $\alpha \in (0, n)$ definimos el operador fraccionario como

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy = (K_\alpha * f)(x).$$

Donde $K_\alpha(x) = \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}$, y $K_\alpha \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Definición

Sea Q un cubo en $\mathbb{R}^n$, llamamos promedio de f en Q a

$$f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y)\, dy.$$

Lema (6-1)

Si $f \in \mathcal{C}^1(Q)$, *entonces existe* $C_n > 0$ *tal que*

$$|f(x) - f_Q| \leq C_n I_1(|\nabla f|\chi_Q)(x) \quad \textit{para todo } x \in Q.$$

Lema (6-1)

Si $f \in \mathcal{C}^1(Q)$, entonces existe $C_n > 0$ tal que

$$|f(x) - f_Q| \leq C_n I_1(|\nabla f|\chi_Q)(x) \quad \textit{para todo } x \in Q.$$

<u>Demostración:</u> Sea $x \in Q$

$$|f(x) - f_Q| \leq \left| f(x) - \frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)\,dy \right| \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f(y)|\,dy$$

definimos, $\gamma(t) = f(x + t(y-x))$, entonces
como $\gamma'(t) = \nabla f(x + t(y-x))(y-x)$, obtenemos

$$f(y) - f(x) = \gamma(1) - \gamma(0) = \int_0^1 \nabla f(x + t(y-x))(y-x)\,dt.$$

- Utilizando lo anterior y aplicando Fubini

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f(y)|dy &\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q\int_0^1 |\nabla f(x+t(y-x))||y-x|dt\,dy \\
&= \frac{1}{|Q|}\int_0^1\int_{B(x,\sqrt{n}\ell(Q))} |\nabla f(x+t(y-x))||y-x|\chi_Q(y)dy\,dt.
\end{aligned}
$$

- Utilizando lo anterior y aplicando Fubini

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f(y)|dy \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q\int_0^1 |\nabla f(x+t(y-x))||y-x|dt\,dy$$
$$= \frac{1}{|Q|}\int_0^1\int_{B(x,\sqrt{n}\ell(Q))} |\nabla f(x+t(y-x))||y-x|\chi_Q(y)dy\,dt.$$

- Realizamos el cambio de variable $z = x + t(y-x)$, y obtenemos

$$\frac{1}{|Q|}\int_0^1\int_{B(x,t\sqrt{n}\ell(Q))} |\nabla f(z)|\frac{|z-x|}{t}\frac{1}{t^n}\chi_Q(z)dz\,dt$$
$$= \frac{1}{|Q|}\int_Q\int_{\frac{|z-x|}{C_n\ell(Q)}}^{\infty} |\nabla f(z)|\frac{|z-x|}{t}\frac{1}{t^n}dt\,dz.$$

- Por tanto, esto es igual a

$$C_n \int_Q \frac{|\nabla f(z)|}{|z-x|^{n-1}} dz = C_n I_1(|\nabla f| \chi_Q)(x).$$

$\square$

Nuestro objetivo es probar la desigualdad de Poincaré (1,1).

Lema

Si Ω es un conjunto medible Lebesgue con medida finita y positiva, entonces existe una constante $C_n > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in (0, n)$ se cumple

$$\int_\Omega \frac{1}{|y-x|^{n-\alpha}} dy \leq C_n |\Omega|^{\frac{\alpha}{n}}.$$

Nuestro objetivo es probar la desigualdad de Poincaré (1,1).

Lema

Si Ω es un conjunto medible Lebesgue con medida finita y positiva, entonces existe una constante $C_n > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in (0, n)$ se cumple

$$\int_\Omega \frac{1}{|y-x|^{n-\alpha}} dy \leq C_n |\Omega|^{\frac{\alpha}{n}}.$$

Demostración: Podemos suponer $x = 0$ (la medida de Lebesgue es invariante por translación). Sea

$$B = B\left(0, \frac{|\Omega|^{1/n}}{v_n^{1/n}}\right)$$

con $v_n = |B(0,1)|$. Claramente, $|\Omega| = |B|$.

- Si $\Omega \cap B = \emptyset$, necesariamente $|y| > \frac{|\Omega|^{1/n}}{v_n^{1/n}}$ para todo $y \in \Omega$, de manera que:

$$\int_\Omega \frac{1}{|y|^{n-\alpha}} dy \leq \int_\Omega \frac{1}{\left(\frac{|\Omega|^{1/n}}{v_n^{1/n}}\right)^{n-\alpha}} dy = v_n^{1-\frac{\alpha}{n}} \frac{|\Omega|}{|\Omega|^{1-\frac{\alpha}{n}}}$$
$$= v_n^{1-\frac{\alpha}{n}} |\Omega|^{\frac{\alpha}{n}}.$$

- Si $\Omega \cap B = \emptyset$, necesariamente $|y| > \frac{|\Omega|^{1/n}}{v_n^{1/n}}$ para todo $y \in \Omega$, de manera que:

$$\int_\Omega \frac{1}{|y|^{n-\alpha}} dy \le \int_\Omega \frac{1}{\left(\frac{|\Omega|^{1/n}}{v_n^{1/n}}\right)^{n-\alpha}} dy = v_n^{1-\frac{\alpha}{n}} \frac{|\Omega|}{|\Omega|^{1-\frac{\alpha}{n}}}$$
$$= v_n^{1-\frac{\alpha}{n}} |\Omega|^{\frac{\alpha}{n}}.$$

- Si $\Omega \cap B \neq \emptyset$ se tiene:

$$\int_\Omega \frac{1}{|y|^{n-\alpha}} dy = \int_{\Omega\cap B} \frac{1}{|y|^{n-\alpha}} dy + \int_{\Omega\setminus B} \frac{1}{|y|^{n-\alpha}} dy$$
$$\le \int_B \frac{1}{|y|^{n-\alpha}} dy + v_n^{1-\frac{\alpha}{n}} |\Omega|^{\frac{\alpha}{n}}.$$

- Hacemos un cambio a coordenadas polares

$$\int_B \frac{1}{|y|^{n-\alpha}} dy = \omega_{n-1} \int_0^{C_n|\Omega|^{1/n}} r^{\alpha-1} dr \leq C_{n,\alpha} |\Omega|^{\frac{\alpha}{n}}.$$

En ambos obtenemos la desigualdad deseada. $\square$

- Hacemos un cambio a coordenadas polares

$$\int_B \frac{1}{|y|^{n-\alpha}} dy = \omega_{n-1} \int_0^{C_n|\Omega|^{1/n}} r^{\alpha-1} dr \leq C_{n,\alpha} |\Omega|^{\frac{\alpha}{n}}.$$

En ambos obtenemos la desigualdad deseada. $\square$

Con estos dos resultados ya podemos probar la primera desigualdad de Poincaré.

Teorema (Desigualdad de Poincaré (1,1))

Existe $C_n > 0$ tal que para toda $f \in \mathcal{C}^1(Q)$ se verifica la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq C_n \frac{\ell(Q)}{|Q|}\int_Q |\nabla f(x)|dx.$$

Teorema (Desigualdad de Poincaré (1,1))

Existe $C_n > 0$ tal que para toda $f \in \mathcal{C}^1(Q)$ se verifica la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq C_n \frac{\ell(Q)}{|Q|}\int_Q |\nabla f(x)|dx.$$

Demostración: Usando el lema *6-1* y Fubini tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx &\leq C_n \frac{1}{|Q|}\int_Q I_1(|\nabla f|\chi_Q)(x)dx \\
&= C_n \frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\int_Q \frac{|\nabla f(y)|}{|x-y|^{n-1}}dy\right)dx \\
&= C_n \frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla f(y)| \left(\int_Q \frac{1}{|x-y|^{n-1}}dx\right)dy.
\end{aligned}$$

- Ahora, usando el lema anterior con $\alpha = 1$, y teniendo en cuenta que $|Q| = \ell(Q)^n$ llegamos a

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx &\leq C_n \frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla f(y)|(C_n \ell(Q))dy \\ &= C_n \frac{\ell(Q)}{|Q|}\int_Q |\nabla f(x)|dx.\end{aligned}$$

□

Operador maximal de Hardy-Littlewood

Definición

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy$$

Operador maximal de Hardy-Littlewood

Definición

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy$$

Teorema

Para $1 < p \leq \infty$, existe $C_{n,p} > 0$ tal que

$$\|Mf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,p} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Teorema (Desigualdad de Poincaré (p,p))

Existe $C_n > 0$ tal que para toda $f \in \mathcal{C}^1(Q)$,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{n,p}\ell(Q)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

donde $1 < p < \infty$.

Teorema (Desigualdad de Poincaré (p,p))

Existe $C_n > 0$ tal que para toda $f \in \mathcal{C}^1(Q)$,

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{n,p} \ell(Q) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |\nabla f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

donde $1 < p < \infty$.

$$\Uparrow$$

Teorema

Dada $f \in \mathcal{C}^1(Q)$ y $x \in Q$,

$$|f(x) - f_Q| \leq C_n \ell(Q) M(|\nabla f| \chi_Q)(x).$$

Demostración

Lema (6-1)

Si $f \in \mathcal{C}^1(Q)$, entonces

$$|f(x) - f_Q| \leq C_n I_1(|\nabla f|\chi_Q)(x),$$

para toda $x \in Q$.

- Basta ver que

  $$I_1(g\chi_Q)(x) \leq C_n \ell(Q) M(g\chi_Q)(x)$$

  para toda $g \geq 0$.

- Definimos, para $x \in Q$ e $i \in \mathbb{N}$,

$$C_i(x) = \left\{ y \in Q : \frac{\sqrt{n}\ell(Q)}{2^{i+1}} \leq |x - y| \leq \frac{\sqrt{n}\ell(Q)}{2^i} \right\}.$$

- Definimos, para $x \in Q$ e $i \in \mathbb{N}$,

$$C_i(x) = \left\{ y \in Q : \frac{\sqrt{n}\ell(Q)}{2^{i+1}} \leq |x - y| \leq \frac{\sqrt{n}\ell(Q)}{2^i} \right\}.$$

- Observamos que $Q \setminus \{x\} \subseteq \cup_{i=0}^{\infty} C_i(x)$.

- Definimos, para $x \in Q$ e $i \in \mathbb{N}$,

$$C_i(x) = \left\{ y \in Q : \frac{\sqrt{n}\ell(Q)}{2^{i+1}} \leq |x-y| \leq \frac{\sqrt{n}\ell(Q)}{2^i} \right\}.$$

- Observamos que $Q \setminus \{x\} \subseteq \cup_{i=0}^{\infty} C_i(x)$.

$$\begin{aligned} I_1(g\chi_Q)(x) &= \int_Q \frac{g(y)}{|x-y|^{n-1}} dy \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \int_{C_i(x)} \frac{g(y)}{|x-y|^{n-1}} \chi_Q(y) dy \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2^{i+1}}{\sqrt{n}\ell(Q)} \right)^{n-1} \int_{|x-y| \leq \frac{\sqrt{n}\ell(Q)}{2^i}} g(y)\chi_Q(y) dy \end{aligned}$$

- Multiplicamos y dividimos por $\left|B\left(x, \frac{\sqrt{n}\ell(Q)}{2^i}\right)\right|$, obteniendo

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{2^{i+1}}{\sqrt{n}\ell(Q)}\right)^{n-1}\left|B\left(x, \frac{\sqrt{n}\ell(Q)}{2^i}\right)\right| \cdot \frac{1}{\left|B\left(x, \frac{\sqrt{n}\ell(Q)}{2^i}\right)\right|}\int_{B\left(x, \frac{\sqrt{n}\ell(Q)}{2^i}\right)} g(y)\chi_Q(y)dy$$

$$\leq C_n\ell(Q)M(g\chi_Q)(x).$$

Desigualdades de Poincaré

Teorema (Desigualdad de Poincaré (p,p))

Existe $C_n > 0$ tal que para toda $f \in \mathcal{C}^1(Q)$,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{n,p}\ell(Q)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

donde $1 < p < \infty$.

Demostración

- Usando el Teorema anterior,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|^p dx \leq C_n^p \ell(Q)^p \frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}^n} M(|\nabla f|\chi_Q)^p(x),$$

Demostración

- Usando el Teorema anterior,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|^p dx \leq C_n^p \ell(Q)^p \frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}^n} M(|\nabla f|\chi_Q)^p(x),$$

y, como M es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, la cantidad anterior es inferior a

$$C_{n,p}^p \ell(Q)^p \frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla f(x)|^p(x) dx.$$

Contenidos

1 Desigualdades de Poincaré

2 Desigualdades de Sobolev

3 Equivalencia entre desigualdad puntual y en media

4 Desigualdad isoperimétrica con pesos

5 Propiedades de los pesos A_p

Desigualdades de Sobolev

Teorema (Hardy-Littlewood-Sobolev)

Si $n > 1$,

1) I_1 esta acotado entre $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < n$.
2) I_1 esta acotado entre $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^{\frac{n}{n-1},\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Desigualdades de Sobolev

Teorema (Hardy-Littlewood-Sobolev)

Si $n > 1$,

1) I_1 esta acotado entre $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < n$.
2) I_1 esta acotado entre $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^{\frac{n}{n-1},\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Índice de Sobolev

Para $1 \leq p < n$,

$$p^* = \frac{pn}{n-p}.$$

Desigualdades de Sobolev

Teorema (Hardy-Littlewood-Sobolev)

Si $n > 1$,

1) I_1 esta acotado entre $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < n$.
2) I_1 esta acotado entre $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^{\frac{n}{n-1},\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Índice de Sobolev

Para $1 \leq p < n$,

$$p^* = \frac{pn}{n-p}.$$

L^p débil

$L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n) = \{f : \|f\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} t|x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t|^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$

Demostración 1)

- Consideramos $f \geq 0$.

Demostración 1)

- Consideramos $f \geq 0$.
- Descomponemos el operador fraccionario en

$$I_1 f(x) = \underbrace{\int_{B(x,\delta)} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-1}} dy}_{A(x)} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\delta)} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-1}} dy}_{B(x)}$$

donde

$$\delta = \left(\frac{\|f\|_p}{Mf(x)} \right)^{\frac{p}{n}}.$$

$$B(x) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\delta)} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-1}} dy \leq \|f\|_p \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\delta)} \frac{1}{|x-y|^{(n-1)p'}} dy \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$B(x) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\delta)} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-1}} dy \leq \|f\|_p \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\delta)} \frac{1}{|x-y|^{(n-1)p'}} dy \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\delta)} \frac{1}{|x-y|^{(n-1)p'}} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \omega_{n-1,p} \; \delta^{1-\frac{n}{p}}.$$

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \int_{B(x,\delta)} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-1}}dy \leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{B\left(x,\frac{\delta}{2^j}\right)\setminus B\left(x,\frac{\delta}{2^{j+1}}\right)} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-1}}dy \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|B\left(x,\frac{\delta}{2^j}\right)\right| \frac{1}{\left|B\left(x,\frac{\delta}{2^j}\right)\right|} \int_{B\left(x,\frac{\delta}{2^j}\right)} \frac{f(y)}{\left(\frac{\delta}{2^{j+1}}\right)^{n-1}}dy \\
&\leq C_n Mf(x)\delta.
\end{aligned}
$$

- Del modo en el que hemos escogido δ, tenemos

$$I_1 f(x) = A(x) + B(x) \leq C_n \left(\delta M f(x) + \delta^{1-\frac{n}{p}} \|f\|_p \right)$$
$$= C_n \|f\|_p^{\frac{p}{n}} M f(x)^{1-\frac{p}{n}}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

- Entonces, tomando normas,

$$\|I_1 f\|_{p^*} \leq C_n \|f\|_p^{\frac{p}{n}} \left\| M(f)^{1-\frac{p}{n}} \right\|_{p^*},$$

y, además,

$$\left\| M(f)^{1-\frac{p}{n}} \right\|_{p^*} \leq C_{n,p} \|f\|_p^{1-\frac{p}{n}}.$$

Demostración 2)

Teorema

I_1 esta acotado entre $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^{\frac{n}{n-1},\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración 2)

Teorema

I_1 esta acotado entre $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^{\frac{n}{n-1},\infty}(\mathbb{R}^n)$.

- Consideramos $f \geq 0$ y definimos

$$E_\lambda^k = \{x \in B(0,k) : I_1 f(x) > \lambda\},$$

con $k, \lambda > 0$.

Demostración 2)

Teorema

I_1 esta acotado entre $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^{\frac{n}{n-1},\infty}(\mathbb{R}^n)$.

- Consideramos $f \geq 0$ y definimos

$$E_\lambda^k = \{x \in B(0,k) : I_1 f(x) > \lambda\},$$

con $k, \lambda > 0$. Entonces

$$\begin{aligned}\lambda |E_\lambda^k| &\leq \int_{E_\lambda^k} I_1 f(x) dx = \int_{E_\lambda^k} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-1}} dy\ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{E_\lambda^k} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} dx\ dy \leq C_n \|f\|_1 |E_\lambda^k|^{\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

- Entonces
$$\lambda|E_\lambda^k|^{1-\frac{1}{n}} \leq C_n\|f\|_1.$$

- Entonces
$$\lambda |E_\lambda^k|^{1-\frac{1}{n}} \le C_n \|f\|_1.$$

- Finalmente, como
$$E_\lambda^k \nearrow \cup_k E_\lambda^k =: E_\lambda$$
tenemos
$$\lambda |E_\lambda|^{1-\frac{1}{n}} = \lim_{k \longrightarrow \infty} \lambda |E_\lambda^k|^{1-\frac{1}{n}} \le C_n \|f\|_1.$$

Contenidos

1 Desigualdades de Poincaré

2 Desigualdades de Sobolev

3 Equivalencia entre desigualdad puntual y en media

4 Desigualdad isoperimétrica con pesos

5 Propiedades de los pesos A_p

Antes hemos visto que, dados un cubo Q y $f \in \mathcal{C}^1(Q)$, se tiene que

$$|f(x) - f_Q| \leq I_1(|\nabla f|\chi_Q)(x), \quad \text{a.e. } x \in Q$$

y que esta desigualdad implica la desigualdad de Poincaré (1,1):

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq C\frac{\ell(Q)}{|Q|}\int_Q |\nabla f(x)|dx.$$

Teorema

Sean $n \in \mathbb{N}$ *y* $0 < \alpha < n$. *Sean* $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *con* $g \geq 0$. *Son equivalentes:*

I) *Existe una constante* $C > 0$ *tal que, si* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *es un cubo, entonces,*

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)dx. \tag{1}$$

II) *Existe una constante* $C > 0$ *tal que, si* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *es un cubo, entonces,*

$$|f(x) - f_Q| \leq I_\alpha(g\chi_Q)(x), \quad a.e.\ x \in Q. \tag{2}$$

Teorema

III) *Existe una constante $C > 0$ tal que, si $Q \subset \mathbb{R}^n$ es un cubo y w es un peso, entonces,*

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q| w(x) dx \leq C \frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x) M(w\chi_Q)(x) dx. \tag{3}$$

IV) *Dado $p \geq 1$, existe una constante $C > 0$ tal que, si $Q \subset \mathbb{R}^n$ es un cubo, entonces,*

$$\|f - f_Q\|_{L^p\left(Q, \frac{dx}{|Q|}\right)} \leq C\ell(Q)^\alpha \|g\|_{L^p\left(Q, \frac{dx}{|Q|}\right)}. \tag{4}$$

$$\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{II}.\ \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx \leq C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)dx \Rightarrow |f(x)-f_Q| \leq I_\alpha(g\chi_Q)(x), \quad \text{a.e. } x \in Q.$$

- Escribamos $Q_0 := Q$.

$$\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{II}.\ \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx \leq C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)dx \Rightarrow |f(x)-f_Q| \leq I_\alpha(g\chi_Q)(x), \quad \text{a.e. } x \in Q.$$

- Escribamos $Q_0 := Q$.
- Fijemos $x \in Q$ y consideremos la familia de subcubos diádicos de Q que verifica que

$$\{x\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} Q_k.$$

$$\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{II}.\ \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)dx \Rightarrow |f(x) - f_Q| \leq I_\alpha(g\chi_Q)(x), \quad \text{a.e. } x \in Q.$$

- Escribamos $Q_0 := Q$.
- Fijemos $x \in Q$ y consideremos la familia de subcubos diádicos de Q que verifica que

$$\{x\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} Q_k.$$

- Para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, escribamos $f_k := \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f$.

$$\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{II}.\ \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx \le C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)dx \Rightarrow |f(x)-f_Q| \le I_\alpha(g\chi_Q)(x), \quad \text{a.e. } x \in Q.$$

- Escribamos $Q_0 := Q$.
- Fijemos $x \in Q$ y consideremos la familia de subcubos diádicos de Q que verifica que

$$\{x\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} Q_k.$$

- Para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, escribamos $f_k := \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f$.
- Por el T.D.L., para casi todo $x \in Q$, tenemos que

$$|f(x) - f_Q| = |f(x) - f_{Q_0}| = \lim_{k\to\infty} |f_k - f_{Q_0}|.$$

$$\text{I} \Rightarrow \text{II}. \ \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)dx \Rightarrow |f(x) - f_Q| \leq I_\alpha(g\chi_Q)(x), \quad \text{a.e. } x \in Q.$$

- Ahora, escribiendo esa diferencia como una serie telescópica y aplicando que $Q_{k+1} \subset Q_k$ y $|Q_{k+1}| = 2^{-n}|Q_k|$:

$$\text{I} \Rightarrow \text{II}.\ \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)dx \Rightarrow |f(x) - f_Q| \leq I_\alpha(g\chi_Q)(x), \quad \text{a.e. } x \in Q.$$

- Ahora, escribiendo esa diferencia como una serie telescópica y aplicando que $Q_{k+1} \subset Q_k$ y $|Q_{k+1}| = 2^{-n}|Q_k|$:

$$\lim_{k\to\infty} |f_k - f_{Q_0}| = \left|\sum_{k=0}^{\infty}(f_k - f_{k+1})\right|$$

$$\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{II}.\ \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx \leq C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)dx \Rightarrow |f(x)-f_Q| \leq I_\alpha(g\chi_Q)(x), \quad \text{a.e. } x \in Q.$$

- Ahora, escribiendo esa diferencia como una serie telescópica y aplicando que $Q_{k+1} \subset Q_k$ y $|Q_{k+1}| = 2^{-n}|Q_k|$:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}|f_k - f_{Q_0}| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty}(f_k - f_{k+1})\right| \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1}{|Q_{k+1}|}\int_{Q_{k+1}} f(y)dy - f_k\right| \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1}{|Q_{k+1}|}\int_{Q_{k+1}} f(y) - f_k dy\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{|Q_{k+1}|}\int_{Q_{k+1}} |f(y) - f_k|dy
\end{aligned}$$

$$\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{II}.\ \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx \leq C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)dx \Rightarrow |f(x)-f_Q| \leq I_\alpha(g\chi_Q)(x), \quad \text{a.e. } x \in Q.$$

- Ahora, escribiendo esa diferencia como una serie telescópica y aplicando que $Q_{k+1} \subset Q_k$ y $|Q_{k+1}| = 2^{-n}|Q_k|$:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} |f_k - f_{Q_0}| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty}(f_k - f_{k+1})\right| \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1}{|Q_{k+1}|}\int_{Q_{k+1}} f(y)dy - f_k\right| \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1}{|Q_{k+1}|}\int_{Q_{k+1}} f(y) - f_k dy\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{|Q_{k+1}|}\int_{Q_{k+1}} |f(y) - f_k|dy \\
&\leq 2^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} |f(y) - f_k|dy.
\end{aligned}$$

$$\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{II}.\ \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx \le C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)dx \Rightarrow |f(x)-f_Q| \le I_\alpha(g\chi_Q)(x), \quad \text{a.e. } x \in Q.$$

- Usando la desigualdad (1):

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}|f(y)-f_k|dy &\le C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\ell(Q_k)^\alpha}{|Q_k|}\int_{Q_k} g(y)dy\\ &\le C\int_{Q_0} g(y)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\ell(Q_k)^\alpha}{|Q_k|}\chi_{Q_k}(y)dy.\end{aligned}$$

$$\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{II}.\ \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx \le C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)dx \Rightarrow |f(x)-f_Q| \le I_\alpha(g\chi_Q)(x), \quad \text{a.e. } x\in Q.$$

- Usando la desigualdad (1):

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}|f(y)-f_k|dy &\le C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\ell(Q_k)^\alpha}{|Q_k|}\int_{Q_k} g(y)dy \\ &\le C\int_{Q_0} g(y)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\ell(Q_k)^\alpha}{|Q_k|}\chi_{Q_k}(y)dy.\end{aligned}$$

- Para terminar, bastará ver que, para todo $y\in Q_0$, se tiene que $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\ell(Q_k)^\alpha}{|Q_k|}\chi_{Q_k}(y) \lesssim \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}$, con constante independiente de y.

$$\text{I} \Rightarrow \text{II.}\ \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q| dx \leq C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)dx \Rightarrow |f(x) - f_Q| \leq I_\alpha(g\chi_Q)(x), \quad \text{a.e. } x \in Q.$$

- Como $n - \alpha > 0$, existe $\varepsilon \in (0, n - \alpha)$.

$$\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{II}.\ \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx \leq C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)dx \Rightarrow |f(x)-f_Q| \leq I_\alpha(g\chi_Q)(x), \quad \text{a.e. } x \in Q.$$

- Como $n-\alpha > 0$, existe $\varepsilon \in (0, n-\alpha)$.
- Podemos escribir, para cada $y \in Q_0$:

$$\sum_{k=}^{\infty} \frac{\ell(Q_k)^\alpha}{|Q_k|}\chi_{Q_k}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ell(Q_k)^{-\epsilon}}{\ell(Q_k)^{n-\alpha-\varepsilon}}\chi_{Q_k}(y).$$

$$\text{I} \Rightarrow \text{II.}\ \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \le C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)dx \Rightarrow |f(x) - f_Q| \le I_\alpha(g\chi_Q)(x), \quad \text{a.e. } x \in Q.$$

- Como $n - \alpha > 0$, existe $\varepsilon \in (0, n-\alpha)$.
- Podemos escribir, para cada $y \in Q_0$:

$$\sum_{k=}^{\infty} \frac{\ell(Q_k)^\alpha}{|Q_k|}\chi_{Q_k}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ell(Q_k)^{-\epsilon}}{\ell(Q_k)^{n-\alpha-\varepsilon}}\chi_{Q_k}(y).$$

- $y \in Q_k \Rightarrow |x - y| \le C\ell(Q_k) \Rightarrow \ \forall y \in Q_0,$

$$\sum_{k=}^{\infty} \frac{\ell(Q_k)^\alpha}{|Q_k|}\chi_{Q_k}(y) \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C\ell(Q_k)^{-\epsilon}}{|x-y|^{n-\alpha-\varepsilon}}\chi_{Q_k}(y)$$

$$= \frac{C}{|x-y|^{n-\alpha-\varepsilon}}\sum_{k=0}^{\infty} \ell(Q_k)^{-\epsilon}\chi_{Q_k}(y).$$

$$\text{I} \Rightarrow \text{II.}\ \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \le C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)dx \Rightarrow |f(x) - f_Q| \le I_\alpha(g\chi_Q)(x), \quad \text{a.e. } x \in Q.$$

- Ahora bien, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tenemos que $\ell(Q_k) = \ell(Q_0)/2^k$, por lo que

$$\frac{C}{|x-y|^{n-\alpha-\varepsilon}}\sum_{k=0}^{\infty}\ell(Q_k)^{-\epsilon}\chi_{Q_k}(y) = \frac{C\ell(Q_0)^{-\epsilon}}{|x-y|^{n-\alpha-\varepsilon}}\sum_{k=0}^{\infty}2^{k\varepsilon}\chi_{Q_k}(y).$$

$$\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{II}. \ \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx \leq C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)dx \Rightarrow |f(x)-f_Q| \leq I_\alpha(g\chi_Q)(x), \quad \text{a.e. } x \in Q.$$

- Ahora bien, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tenemos que $\ell(Q_k) = \ell(Q_0)/2^k$, por lo que

$$\frac{C}{|x-y|^{n-\alpha-\varepsilon}}\sum_{k=0}^{\infty}\ell(Q_k)^{-\epsilon}\chi_{Q_k}(y) = \frac{C\ell(Q_0)^{-\epsilon}}{|x-y|^{n-\alpha-\varepsilon}}\sum_{k=0}^{\infty}2^{k\varepsilon}\chi_{Q_k}(y).$$

- Fijemos $y \in Q_0 \backslash \{x\}$. Existe el último $k_0 = k_0(y)$ tal que $y \in Q_{k_0}$.

$$\text{I} \Rightarrow \text{II}. \ \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \le C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)dx \Rightarrow |f(x) - f_Q| \le I_\alpha(g\chi_Q)(x), \quad \text{a.e. } x \in Q.$$

- Ahora bien, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tenemos que $\ell(Q_k) = \ell(Q_0)/2^k$, por lo que

$$\frac{C}{|x-y|^{n-\alpha-\varepsilon}}\sum_{k=0}^{\infty}\ell(Q_k)^{-\epsilon}\chi_{Q_k}(y) = \frac{C\ell(Q_0)^{-\epsilon}}{|x-y|^{n-\alpha-\varepsilon}}\sum_{k=0}^{\infty}2^{k\varepsilon}\chi_{Q_k}(y).$$

- Fijemos $y \in Q_0 \backslash \{x\}$. Existe el último $k_0 = k_0(y)$ tal que $y \in Q_{k_0}$.
- Como antes, $|x-y| \le C\ell(Q_{k_0}) = C2^{-k_0}\ell(Q_0)$, es decir,

$$2^{k_0} \le C\frac{\ell(Q_0)}{|x-y|}. \tag{5}$$

$$\text{I} \Rightarrow \text{II.}\ \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx \leq C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)dx \Rightarrow |f(x)-f_Q| \leq I_\alpha(g\chi_Q)(x), \quad \text{a.e. } x \in Q.$$

- Ahora bien, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tenemos que $\ell(Q_k) = \ell(Q_0)/2^k$, por lo que

$$\frac{C}{|x-y|^{n-\alpha-\varepsilon}}\sum_{k=0}^{\infty}\ell(Q_k)^{-\epsilon}\chi_{Q_k}(y) = \frac{C\ell(Q_0)^{-\epsilon}}{|x-y|^{n-\alpha-\varepsilon}}\sum_{k=0}^{\infty}2^{k\varepsilon}\chi_{Q_k}(y).$$

- Fijemos $y \in Q_0 \backslash \{x\}$. Existe el último $k_0 = k_0(y)$ tal que $y \in Q_{k_0}$.
- Como antes, $|x-y| \leq C\ell(Q_{k_0}) = C2^{-k_0}\ell(Q_0)$, es decir,

$$2^{k_0} \leq C\frac{\ell(Q_0)}{|x-y|}. \tag{5}$$

$$\text{I} \Rightarrow \text{II.}\ \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \le C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)dx \Rightarrow |f(x) - f_Q| \le I_\alpha(g\chi_Q)(x), \quad \text{a.e. } x \in Q.$$

- Por tanto, para cada $y \in Q_0 \setminus \{x\}$, podemos continuar escribiendo

$$\frac{C\ell(Q_0)^{-\epsilon}}{|x-y|^{n-\alpha-\varepsilon}}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\varepsilon}\chi_{Q_k}(y) = \frac{C\ell(Q_0)^{-\epsilon}}{|x-y|^{n-\alpha-\varepsilon}}\sum_{k=0}^{k_0(y)} 2^{k\varepsilon}$$

$$\text{I} \Rightarrow \text{II.} \ \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx \le C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)dx \Rightarrow |f(x)-f_Q| \le I_\alpha(g\chi_Q)(x), \quad \text{a.e. } x \in Q.$$

- Por tanto, para cada $y \in Q_0 \setminus \{x\}$, podemos continuar escribiendo

$$\frac{C\ell(Q_0)^{-\epsilon}}{|x-y|^{n-\alpha-\varepsilon}}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\varepsilon}\chi_{Q_k}(y) = \frac{C\ell(Q_0)^{-\epsilon}}{|x-y|^{n-\alpha-\varepsilon}}\sum_{k=0}^{k_0(y)} 2^{k\varepsilon}$$

- Sumando la serie geométrica, obtenemos

$$\frac{C\ell(Q_0)^{-\epsilon}}{|x-y|^{n-\alpha-\varepsilon}}\sum_{k=0}^{k_0(y)} 2^{k\varepsilon} = \frac{C\ell(Q_0)^{-\epsilon}}{|x-y|^{n-\alpha-\varepsilon}}\frac{2^\varepsilon 2^{k_0(y)\varepsilon}-1}{2^\varepsilon-1}$$

$$\le C_\varepsilon \frac{\ell(Q_0)^{-\epsilon}}{|x-y|^{n-\alpha-\varepsilon}}2^{\varepsilon k_0(y)}.$$

I $\Rightarrow$ II. $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx \leq C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)dx \Rightarrow |f(x)-f_Q| \leq I_\alpha(g\chi_Q)(x)$, a.e. $x \in Q$.

- Por tanto, para cada $y \in Q_0 \backslash \{x\}$, podemos continuar escribiendo

$$\frac{C\ell(Q_0)^{-\epsilon}}{|x-y|^{n-\alpha-\varepsilon}}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\varepsilon}\chi_{Q_k}(y) = \frac{C\ell(Q_0)^{-\epsilon}}{|x-y|^{n-\alpha-\varepsilon}}\sum_{k=0}^{k_0(y)} 2^{k\varepsilon}$$

- Sumando la serie geométrica, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{C\ell(Q_0)^{-\epsilon}}{|x-y|^{n-\alpha-\varepsilon}}\sum_{k=0}^{k_0(y)} 2^{k\varepsilon} &= \frac{C\ell(Q_0)^{-\epsilon}}{|x-y|^{n-\alpha-\varepsilon}}\frac{2^\varepsilon 2^{k_0(y)\varepsilon}-1}{2^\varepsilon-1}\\ &\leq C_\varepsilon\frac{\ell(Q_0)^{-\epsilon}}{|x-y|^{n-\alpha-\varepsilon}}2^{\varepsilon k_0(y)}.\end{aligned}$$

- Ahora, usando la propiedad (5) de y y $k_0(y)$, tenemos que

$$C_\varepsilon\frac{\ell(Q_0)^{-\varepsilon}}{|x-y|^{n-\alpha-\varepsilon}}2^{\varepsilon k_0(y)} \leq C_\varepsilon\frac{\ell(Q_0)^{-\varepsilon}}{|x-y|^{n-\alpha-\varepsilon}}\frac{\ell(Q_0)^{\varepsilon}}{|x-y|^{\varepsilon}} = \frac{C_\varepsilon}{|x-y|^{n-\alpha}}.$$

$$\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{II}.\ \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)dx \Rightarrow |f(x) - f_Q| \leq I_\alpha(g\chi_Q)(x), \quad \text{a.e. } x \in Q$$

- En definitiva, hemos probado que, para todo $y \in Q_0 \backslash \{x\}$, se tiene que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ell(Q_k)^\alpha}{|Q_k|}\chi_{Q_k}(y) \leq C\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}.$$

$$\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{II}.\ \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx \leq C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)dx \Rightarrow |f(x)-f_Q| \leq I_\alpha(g\chi_Q)(x), \quad \text{a.e. } x \in Q$$

- En definitiva, hemos probado que, para todo $y \in Q_0 \setminus \{x\}$, se tiene que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ell(Q_k)^\alpha}{|Q_k|}\chi_{Q_k}(y) \leq C\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}.$$

- Por tanto, para casi todo $x \in Q$, se tiene que

$$\begin{aligned} |f(x)-f_Q| &\leq C\int_{Q_0} g(y)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\ell(Q_k)^\alpha}{|Q_k|}\chi_{Q_k}(y)dy \\ &\leq C\int_{Q_0}\frac{g(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy \\ &= CI_\alpha(g\chi_Q)(x), \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar.

II $\Rightarrow$ III. $|f(x)-f_Q| \leq I_\alpha(g\chi_Q)(x)$, a.e. $x \in Q \Rightarrow \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|w(x)dx \leq C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)M(w\chi_Q)(x)dx.$

- Por hipótesis, integrando en Q la desigualdad (2), podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_Q |f(x)-f_Q|w(x)dx &\leq C\int_Q\int_Q \frac{g(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dyw(x)dx \\ &= C\int_Q\int_Q \frac{w(x)}{|x-y|^{n-\alpha}}dxg(y)dy,\end{aligned}$$

donde se ha usado el Teorema de Tonelli.

II $\Rightarrow$ III. $|f(x)-f_Q| \leq I_\alpha(g\chi_Q)(x)$, a.e. $x \in Q \Rightarrow \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|w(x)dx \leq C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)M(w\chi_Q)(x)dx.$

- Por hipótesis, integrando en Q la desigualdad (2), podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_Q |f(x)-f_Q|w(x)dx &\leq C\int_Q\int_Q \frac{g(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dyw(x)dx \\ &= C\int_Q\int_Q \frac{w(x)}{|x-y|^{n-\alpha}}dxg(y)dy,\end{aligned}$$

donde se ha usado el Teorema de Tonelli.

- Ahora basta con estimar bien la integral en x.

$$\text{II} \Rightarrow \text{III. } |f(x) - f_Q| \leq I_\alpha(g\chi_Q)(x), \quad \text{a.e. } x \in Q \Rightarrow \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q| w(x)dx \leq C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)M(w\chi_Q)(x)dx.$$

- Por hipótesis, integrando en Q la desigualdad (2), podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_Q |f(x) - f_Q| w(x)dx &\leq C\int_Q\int_Q \frac{g(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dyw(x)dx \\ &= C\int_Q\int_Q \frac{w(x)}{|x-y|^{n-\alpha}}dxg(y)dy,\end{aligned}$$

  donde se ha usado el Teorema de Tonelli.
- Ahora basta con estimar bien la integral en x.
- Tengamos en cuenta que, para nuestros cálculos, y es un punto fijo del cubo Q y que, si llamamos r al lado de Q, entonces se tiene que $Q \subset Q(y, 2r)$.

II $\Rightarrow$ III. $|f(x)-f_Q| \leq I_\alpha(g\chi_Q)(x)$, a.e. $x \in Q \Rightarrow \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|w(x)dx \leq C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)M(w\chi_Q)(x)dx.$

- Por hipótesis, integrando en Q la desigualdad (2), podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_Q |f(x)-f_Q|w(x)dx &\leq C\int_Q\int_Q \frac{g(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dyw(x)dx\\ &= C\int_Q\int_Q \frac{w(x)}{|x-y|^{n-\alpha}}dxg(y)dy,\end{aligned}$$

  donde se ha usado el Teorema de Tonelli.
- Ahora basta con estimar bien la integral en x.
- Tengamos en cuenta que, para nuestros cálculos, y es un punto fijo del cubo Q y que, si llamamos r al lado de Q, entonces se tiene que $Q \subset Q(y, 2r)$.
- Definamos $r_0 = 2\ell(Q)$ y $r_k = r_{k-1}/2$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

II $\Rightarrow$ III. $|f(x)-f_Q| \leq I_\alpha(g\chi_Q)(x)$, a.e. $x \in Q \Rightarrow \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|w(x)dx \leq C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)M(w\chi_Q)(x)dx$.

- Para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos $A(y,k) = Q(y,r_k)\backslash Q(y,r_{k-1})$.

II $\Rightarrow$ III. $|f(x)-f_Q| \leq I_\alpha(g\chi_Q)(x)$, a.e. $x \in Q \Rightarrow \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|w(x)dx \leq C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)M(w\chi_Q)(x)dx.$

- Para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos $A(y,k) = Q(y,r_k)\backslash Q(y,r_{k-1})$.
- Podemos acotar

$$\begin{aligned}\int_Q \frac{w(x)}{|x-y|^{n-\alpha}}dx &\leq \int_{Q(y,r_0)} \frac{w(x)\chi_Q(x)}{|x-y|^{n-\alpha}}dx\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A(y,k)} \frac{w(x)\chi_Q(x)}{|x-y|^{n-\alpha}}dx\\ &\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r_k^\alpha}{r_k^n}\int_{Q(y,r_k)} w(x)\chi_Q(x)dx,\end{aligned}$$

donde, para cada $k \in \mathbb{N}$, se ha tenido en cuenta que, como x en $A(y,k) \subset Q(y,r_k)$, $|x-y|$ es comparable a r_k.

$$\text{II} \Rightarrow \text{III.}\ |f(x)-f_Q| \leq I_\alpha(g\chi_Q)(x), \quad \text{a.e. } x \in Q \Rightarrow \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|w(x)dx \leq C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)M(w\chi_Q)(x)dx.$$

- Teniendo en cuenta la definición de r_k, podemos continuar la cadena de igualdades anterior como sigue:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k^\alpha}{r_k^n}\int_{Q(y,r_k)} w\chi_Q = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\ell(Q)}{2^{(k-1)}}\right)^\alpha \frac{1}{r_k^n}\int_{Q(y,r_k)} w(x)\chi_Q(x)dx$$

$$\mathrm{II} \Rightarrow \mathrm{III.}\ |f(x)-f_Q| \leq I_\alpha(g\chi_Q)(x), \quad \text{a.e. } x \in Q \Rightarrow \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|w(x)dx \leq C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)M(w\chi_Q)(x)dx.$$

- Teniendo en cuenta la definición de r_k, podemos continuar la cadena de igualdades anterior como sigue:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r_k^\alpha}{r_k^n}\int_{Q(y,r_k)} w\chi_Q &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\ell(Q)}{2^{(k-1)}}\right)^\alpha \frac{1}{r_k^n}\int_{Q(y,r_k)} w(x)\chi_Q(x)dx \\ &\leq \ell(Q)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{(k-1)\alpha}}M(w\chi_Q)(y)\end{aligned}$$

II $\Rightarrow$ III. $|f(x)-f_Q| \leq I_\alpha(g\chi_Q)(x)$, a.e. $x \in Q \Rightarrow \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|w(x)dx \leq C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)M(w\chi_Q)(x)dx$.

- Teniendo en cuenta la definición de r_k, podemos continuar la cadena de igualdades anterior como sigue:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r_k^\alpha}{r_k^n}\int_{Q(y,r_k)} w\chi_Q &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\ell(Q)}{2^{(k-1)}}\right)^\alpha \frac{1}{r_k^n}\int_{Q(y,r_k)} w(x)\chi_Q(x)dx \\ &\leq \ell(Q)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{(k-1)\alpha}}M(w\chi_Q)(y) \\ &= C_\alpha \ell(Q)^\alpha M(w\chi_Q)(y),\end{aligned}$$

donde hemos usado que $\frac{1}{r_k^n}\int_{Q(y,r_k)} w(x)\chi_Q(x)dx$ es una de las medias de $w\chi_Q$ sobre cubos conteniendo a y.

II $\Rightarrow$ III. $|f(x)-f_Q| \leq I_\alpha(g\chi_Q)(x)$, a.e. $x \in Q \Rightarrow \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|w(x)dx \leq C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)M(w\chi_Q)(x)dx.$

- En definitiva, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_Q |f(x)-f_Q|w(x)dx &\leq C\int_Q\int_Q \frac{w(x)}{|x-y|^{n-\alpha}}dxg(y)dy \\ &\leq C_\alpha \ell(Q)^\alpha \int_Q g(y)M(w\chi_Q)(y)dy,\end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar.

III $\Rightarrow$ IV. $\|f-f_Q\|_{L^1\left(Q,\frac{dw}{|Q|}\right)} \leq C\ell(Q)^\alpha \|g\|_{L^1\left(Q,\frac{dM(w\chi_Q)}{|Q|}\right)} \Rightarrow \|f-f_Q\|_{L^p\left(Q,\frac{dx}{|Q|}\right)} \leq C\ell(Q)^\alpha \|g\|_{L^p\left(Q,\frac{dx}{|Q|}\right)}$

- El caso $p=1$ es el anterior con $w=1$. Para el caso $p>1$ vamos a a usar un argumento de dualidad combinado con la desigualdad (3) y la acotación en L^p de M.

III $\Rightarrow$ IV. $\|f-f_Q\|_{L^1\left(Q,\frac{dw}{|Q|}\right)} \le C\ell(Q)^{\alpha}\|g\|_{L^1\left(Q,\frac{dM(w\chi_Q)}{|Q|}\right)} \Rightarrow \|f-f_Q\|_{L^p\left(Q,\frac{dx}{|Q|}\right)} \le C\ell(Q)^{\alpha}\|g\|_{L^p\left(Q,\frac{dx}{|Q|}\right)}$

- El caso $p=1$ es el anterior con $w=1$. Para el caso $p>1$ vamos a a usar un argumento de dualidad combinado con la desigualdad (3) y la acotación en L^p de M.
- Como $p>1$, $(L^p)'=L^{p'}$, lo que permite escribir

$$\left(\int_Q |f-f_Q|^p\right)^{1/p} = \sup_{\|h\|_{L^{p'}(Q)}=1}\left\{\left|\int_Q (f-f_Q)h\right|\right\}.$$

III $\Rightarrow$ IV. $\|f-f_Q\|_{L^1\left(Q,\frac{dw}{|Q|}\right)} \leq C\ell(Q)^{\alpha}\|g\|_{L^1\left(Q,\frac{dM(w\chi_Q)}{|Q|}\right)} \Rightarrow \|f-f_Q\|_{L^p\left(Q,\frac{dx}{|Q|}\right)} \leq C\ell(Q)^{\alpha}\|g\|_{L^p\left(Q,\frac{dx}{|Q|}\right)}$

- El caso $p=1$ es el anterior con $w=1$. Para el caso $p>1$ vamos a a usar un argumento de dualidad combinado con la desigualdad (3) y la acotación en L^p de M.
- Como $p>1$, $(L^p)'=L^{p'}$, lo que permite escribir

$$\left(\int_Q |f-f_Q|^p\right)^{1/p} = \sup_{\|h\|_{L^{p'}(Q)}=1}\left\{\left|\int_Q (f-f_Q)h\right|\right\}.$$

- Tomando ahora una $h\in L^{p'}(Q)$ con $\|h\|_{L^{p'}(Q)}=1$, tenemos que

$$\left|\int_Q (f(y)-f_Q)h(y)dy\right| \leq \int_Q |f(y)-f_Q||h(y)|dy.$$

III $\Rightarrow$ IV. $\|f-f_Q\|_{L^1\left(Q,\frac{dw}{|Q|}\right)} \leq C\ell(Q)^\alpha \|g\|_{L^1\left(Q,\frac{dM(w\chi_Q)}{|Q|}\right)} \Rightarrow \|f-f_Q\|_{L^p\left(Q,\frac{dx}{|Q|}\right)} \leq C\ell(Q)^\alpha \|g\|_{L^p\left(Q,\frac{dx}{|Q|}\right)}$

- Usando la desigualdad (3) con h como peso, tenemos que

$$\int_Q |f - f_Q||h| \leq C\ell(Q)^\alpha \int_Q g(y)M(h\chi_Q)(y)dy$$

III $\Rightarrow$ IV. $\|f - f_Q\|_{L^1\left(Q, \frac{dw}{|Q|}\right)} \leq C\ell(Q)^{\alpha} \|g\|_{L^1\left(Q, \frac{dM(w\chi_Q)}{|Q|}\right)} \Rightarrow \|f - f_Q\|_{L^p\left(Q, \frac{dx}{|Q|}\right)} \leq C\ell(Q)^{\alpha} \|g\|_{L^p\left(Q, \frac{dx}{|Q|}\right)}$

- Usando la desigualdad (3) con h como peso, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_Q |f - f_Q||h| &\leq C\ell(Q)^{\alpha} \int_Q g(y) M(h\chi_Q)(y) dy \\ &\leq C\ell(Q)^{\alpha} \left(\int_Q g^p\right)^{1/p} \left(\int_Q M(h\chi_Q)^{p'}\right)^{1/p'},\end{aligned}$$

donde, en la última desigualdad, hemos utilizado la desigualdad de Hölder con p y p'.

III $\Rightarrow$ IV. $\|f-f_Q\|_{L^1\left(Q,\frac{dw}{|Q|}\right)} \leq C\ell(Q)^\alpha \|g\|_{L^1\left(Q,\frac{dM(w\chi_Q)}{|Q|}\right)} \Rightarrow \|f-f_Q\|_{L^p\left(Q,\frac{dx}{|Q|}\right)} \leq C\ell(Q)^\alpha \|g\|_{L^p\left(Q,\frac{dx}{|Q|}\right)}$

- Usando la desigualdad (3) con h como peso, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_Q |f-f_Q||h| &\leq C\ell(Q)^\alpha \int_Q g(y)M(h\chi_Q)(y)dy \\ &\leq C\ell(Q)^\alpha \left(\int_Q g^p\right)^{1/p} \left(\int_Q M(h\chi_Q)^{p'}\right)^{1/p'},\end{aligned}$$

  donde, en la última desigualdad, hemos utilizado la desigualdad de Hölder con p y p'.
- Utilizando la acotación de M en $L^{p'}$, podemos continuar la cadena de desigualdades anterior del siguiente modo:

$$\begin{aligned}&\leq \ell(Q)^\alpha \left(\int_Q g^p(y)dy\right)^{1/p} \left(\int_Q h^{p'}(y)dy\right)^{1/p'} \\ &= C\ell(Q)^\alpha \|g\|_{L^p(Q)}\|h\|_{L^{p'}(Q)} \\ &= C\ell(Q)^\alpha \|g\|_{L^p(Q)}.\end{aligned}$$

$\mathrm{IV} \Rightarrow \mathrm{I}.$ $\|f - f_Q\|_{L^p\left(Q, \frac{dx}{|Q|}\right)} \leq C\ell(Q)^\alpha \|g\|_{L^p\left(Q, \frac{dx}{|Q|}\right)} \Rightarrow \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq C\frac{\ell(Q)^\alpha}{|Q|}\int_Q g(x)dx.$

La prueba de $\mathrm{IV}) \Rightarrow \mathrm{I})$ consiste solo en usar $p = 1$ en $\mathrm{IV})$.

Contenidos

1 Desigualdades de Poincaré

2 Desigualdades de Sobolev

3 Equivalencia entre desigualdad puntual y en media

4 Desigualdad isoperimétrica con pesos

5 Propiedades de los pesos A_p

Preliminares

Como ya se ha visto, existe una íntima relación entre una función f (suficientemente derivable) y su gradiente a través de la integral fraccional:

$$|f(x) - f_Q| \leq C_n I_1(|\nabla f|\chi_Q)(x)$$

Si suponemos además que f tiene soporte compacto, escogiendo un cubo *suficientemente grande* podemos deducir que

$$|f(x)| \leq C_n I_1(|\nabla f|)(x) \tag{6}$$

Probaremos ahora una desigualdad de tipo Sobolev con pesos para $p = 1$ haciendo uso del operador maximal.

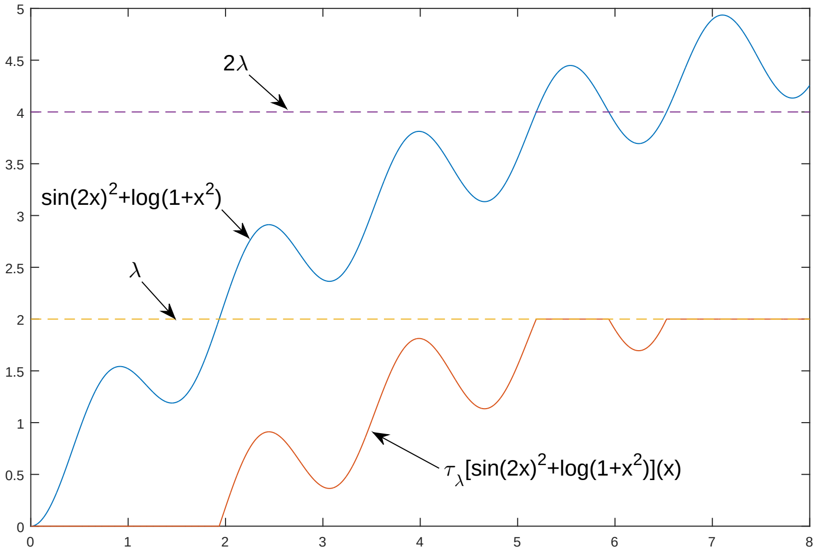
- Para toda función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se tiene que

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{x \in \mathbb{R}^n \colon 2^k < |f(x)| \leq 2^{k+1}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} F_k$$

- Si g es una función negativo negativa y $\lambda > 0$, definimos

$$\tau_\lambda(g) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad g(x) \leq \lambda \\ g(x) - \lambda & \text{si} \quad \lambda < g(x) \leq 2\lambda \\ \lambda & \text{si} \quad 2\lambda < g(x) \end{cases}$$

Ejemplos


2λ
sin(2x)^2+log(1+x^2)
λ
τ_λ[sin(2x)^2+log(1+x^2)](x)
0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5
0 1 2 3 4 5 6 7 8

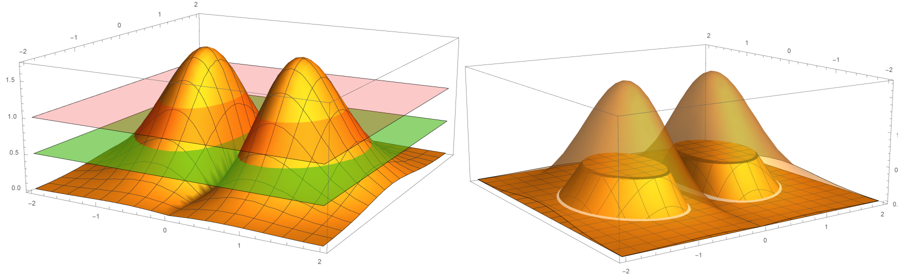


Figura: Ejemplo de truncamiento de la función $f(x,y) = 4|x|e^{-(x^2+y^2)}$ con $\lambda = \frac{1}{2}$.

Uniendo estas dos últimas ideas, obtenemos en particular que para todo $k \in \mathbb{Z}$ y una función f

$$
\begin{aligned}
\tau_{2^k}(|f|)(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |f(x)| \leq 2^k \\ |f(x)| - 2^k & \text{si} \quad 2^k < |f(x)| \leq 2^{k+1} \\ 2^k & \text{si} \quad 2^{k+1} < |f(x)| \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \cup_{j=-\infty}^{k-1} F_j \\ |f(x)| - 2^k & \text{si} \quad x \in F_k \\ 2^k & \text{si} \quad x \in \cup_{j=k+1}^{+\infty} F_j \end{cases}
\end{aligned}
$$

Usaremos que las funciones Lipschitz son estables para valor absoluto y truncamiento , que
$\text{supp}(\nabla \tau_{2^k}(|f|)) = \text{supp}(\nabla |f|) \cap F_k \subset F_k$ y que $\tau_{2^k}(|f|)|_{F_{k+1}} = 2^k$.

Enunciado del teorema

Teorema (Desigualdad isoperimétrica con pesos)

Sea $n > 1$ y μ una medida no negativa. Existe una constante C_n tal que para cada función Lipschitz f con soporte compacto,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{n'}\, d\mu\right)^{\frac{1}{n'}} \leq C_n \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| (M\mu(x))^{\frac{1}{n'}}\, dx$$

Demostración

Probamos primero la estimación débil

$$\|f\|_{L^{n',\infty}(\mu)} \leq C_n \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| (M\mu(x))^{\frac{1}{n'}}\, dx$$

Cuando $n' > 1$, $\|\cdot\|_{L^{n',\infty}(\mu)}$ es equivalente a una norma, de donde usando (6) y la desigualdad débil de Minkowski obtenemos

$$\|f\|_{L^{n',\infty}(\mu)} \leq C_n \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\, \| |\cdot - x|^{1-n} \|_{L^{n',\infty}(\mu)}\, dx$$

En efecto,

$$\|f\|_{L^{n',\infty}(\mu)} = \sup_{t>0} t\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n \colon |f(x)| > t\}\right)^{\frac{1}{n'}}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^{n',\infty}(\mu)} &= \sup_{t>0} t\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n \colon |f(x)| > t\}\right)^{\frac{1}{n'}} \\ &\leq \sup_{t>0} t\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n \colon C_n|I_1(|\nabla f|)(x)| > t\}\right)^{\frac{1}{n'}}\end{aligned}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{n'},\infty(\mu)} &= \sup_{t>0} t\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n \colon |f(x)| > t\}\right)^{\frac{1}{n'}} \\
&\leq \sup_{t>0} t\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n \colon C_n|I_1(|\nabla f|)(x)| > t\}\right)^{\frac{1}{n'}} \\
&= C_n \sup_{t>0} t\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n \colon (K_1 * |\nabla f|)(x) > t\}\right)^{\frac{1}{n'}}
\end{aligned}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{n',\infty}(\mu)} &= \sup_{t>0} t\mu\left(\{x\in\mathbb{R}^n\colon |f(x)|>t\}\right)^{\frac{1}{n'}} \\
&\le \sup_{t>0} t\mu\left(\{x\in\mathbb{R}^n\colon C_n|I_1(|\nabla f|)(x)|>t\}\right)^{\frac{1}{n'}} \\
&= C_n \sup_{t>0} t\mu\left(\{x\in\mathbb{R}^n\colon (K_1*|\nabla f|)(x)>t\}\right)^{\frac{1}{n'}} \\
&\le C_n \int_{\mathbb{R}^n} \|\,|x-y|^{1-n}\,\|_{L^{n',\infty}(\mu)}\,|\nabla f(y)|\,dy
\end{aligned}$$

Obsérvese además que

$$\| |\cdot - x|^{1-n} \|_{L^{n',\infty}(\mu)} = \sup_{t>0} t\mu\left(\left\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{1-n} > t\right\}\right)^{\frac{1}{n'}}$$

Obsérvese además que

$$\| \, |\cdot - x|^{1-n} \, \|_{L^{n',\infty}(\mu)} = \sup_{t>0} \, t\mu \left(\left\{ y \in \mathbb{R}^n \colon |y - x|^{1-n} > t \right\} \right)^{\frac{1}{n'}}$$

$$(\lambda = t^{\frac{1}{n'}})$$

Obsérvese además que

$$\| \, |\cdot - x|^{1-n} \, \|_{L^{n',\infty}(\mu)} = \sup_{t>0} \, t\mu \left(\left\{ y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{1-n} > t \right\} \right)^{\frac{1}{n'}}$$

$$\left(\lambda = t^{\frac{1}{n'}}\right) = \sup_{\lambda>0} \left[\lambda\mu \left(\left\{ y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{1-n} > \lambda^{\frac{1}{n'}} \right\} \right) \right]^{\frac{1}{n'}}$$

Obsérvese además que

$$\| |\cdot - x|^{1-n} \|_{L^{n',\infty}(\mu)} = \sup_{t>0} t\mu \left(\left\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{1-n} > t\right\}\right)^{\frac{1}{n'}}$$

$$(\lambda = t^{\frac{1}{n'}}) = \sup_{\lambda>0} \left[\lambda\mu\left(\left\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{1-n} > \lambda^{\frac{1}{n'}}\right\}\right)\right]^{\frac{1}{n'}}$$

$$(n' = \frac{-n}{1-n})$$

Obsérvese además que

$$
\begin{aligned}
\|\,|\cdot - x|^{1-n}\,\|_{L^{n',\infty}(\mu)} &= \sup_{t>0} t\mu\left(\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{1-n} > t\}\right)^{\frac{1}{n'}} \\
\left(\lambda = t^{\frac{1}{n'}}\right) &= \sup_{\lambda>0} \left[\lambda\mu\left(\left\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{1-n} > \lambda^{\frac{1}{n'}}\right\}\right)\right]^{\frac{1}{n'}} \\
\left(n' = \frac{-n}{1-n}\right) &= \sup_{\lambda>0} \left[\lambda\mu\left(\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{-n} > \lambda\}\right)\right]^{\frac{1}{n'}}
\end{aligned}
$$

Obsérvese además que

$$
\begin{aligned}
\| |\cdot - x|^{1-n} \|_{L^{n',\infty}(\mu)} &= \sup_{t>0} t\mu\left(\left\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{1-n} > t\right\}\right)^{\frac{1}{n'}} \\
\color{blue}{(\lambda = t^{\frac{1}{n'}})} &= \sup_{\lambda>0} \left[\lambda\mu\left(\left\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{1-n} > \lambda^{\frac{1}{n'}}\right\}\right)\right]^{\frac{1}{n'}} \\
\color{blue}{(n' = \frac{-n}{1-n})} &= \sup_{\lambda>0} \left[\lambda\mu\left(\left\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{-n} > \lambda\right\}\right)\right]^{\frac{1}{n'}} \\
&= \sup_{\lambda>0} \left[\lambda\mu\left(\left\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{n} < \frac{1}{\lambda}\right\}\right)\right]^{\frac{1}{n'}}
\end{aligned}
$$

Obsérvese además que

$$\| |\cdot - x|^{1-n} \|_{L^{n',\infty}(\mu)} = \sup_{t>0} t\mu\left(\left\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{1-n} > t\right\}\right)^{\frac{1}{n'}}$$

$$(\lambda = t^{\frac{1}{n'}}) = \sup_{\lambda>0} \left[\lambda\mu\left(\left\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{1-n} > \lambda^{\frac{1}{n'}}\right\}\right)\right]^{\frac{1}{n'}}$$

$$(n' = \frac{-n}{1-n}) = \sup_{\lambda>0} \left[\lambda\mu\left(\left\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{-n} > \lambda\right\}\right)\right]^{\frac{1}{n'}}$$

$$= \sup_{\lambda>0} \left[\lambda\mu\left(\left\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{n} < \frac{1}{\lambda}\right\}\right)\right]^{\frac{1}{n'}}$$

$$(\xi = \lambda^{-n})$$

Obsérvese además que

$$
\begin{aligned}
\| |\cdot - x|^{1-n} \|_{L^{n',\infty}(\mu)} &= \sup_{t>0} t\mu\left(\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{1-n} > t\}\right)^{\frac{1}{n'}} \\
(\lambda = t^{\frac{1}{n'}}) &= \sup_{\lambda>0} \left[\lambda\mu\left(\left\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{1-n} > \lambda^{\frac{1}{n'}}\right\}\right)\right]^{\frac{1}{n'}} \\
\left(n' = \frac{-n}{1-n}\right) &= \sup_{\lambda>0} \left[\lambda\mu\left(\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{-n} > \lambda\}\right)\right]^{\frac{1}{n'}} \\
&= \sup_{\lambda>0} \left[\lambda\mu\left(\left\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{n} < \frac{1}{\lambda}\right\}\right)\right]^{\frac{1}{n'}} \\
(\xi = \lambda^{-n}) &= \sup_{\xi>0} \left[\frac{1}{\xi^n}\mu\left(\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x| < \xi\}\right)\right]^{\frac{1}{n'}}
\end{aligned}
$$

Obsérvese además que

$$
\begin{aligned}
\| \, |\cdot - x|^{1-n} \, \|_{L^{n',\infty}(\mu)} &= \sup_{t>0} \, t\mu\left(\left\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{1-n} > t\right\}\right)^{\frac{1}{n'}} \\
{\color{blue}(\lambda = t^{\frac{1}{n'}})} &= \sup_{\lambda>0} \left[\lambda\mu\left(\left\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{1-n} > \lambda^{\frac{1}{n'}}\right\}\right)\right]^{\frac{1}{n'}} \\
{\color{blue}(n' = \frac{-n}{1-n})} &= \sup_{\lambda>0} \left[\lambda\mu\left(\left\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{-n} > \lambda\right\}\right)\right]^{\frac{1}{n'}} \\
&= \sup_{\lambda>0} \left[\lambda\mu\left(\left\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{n} < \frac{1}{\lambda}\right\}\right)\right]^{\frac{1}{n'}} \\
{\color{blue}(\xi = \lambda^{-n})} &= \sup_{\xi>0} \left[\frac{1}{\xi^n}\mu\left(\left\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x| < \xi\right\}\right)\right]^{\frac{1}{n'}} \\
&= \sup_{\xi>0} \left[\frac{1}{\xi^n} \int_{B(x,\xi)} d\mu\right]^{\frac{1}{n'}}
\end{aligned}
$$

Obsérvese además que

$$
\begin{aligned}
\| |\cdot - x|^{1-n} \|_{L^{n',\infty}(\mu)} &= \sup_{t>0} t\mu\left(\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{1-n} > t\}\right)^{\frac{1}{n'}} \\
(\lambda = t^{\frac{1}{n'}}) &= \sup_{\lambda>0} \left[\lambda\mu\left(\left\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{1-n} > \lambda^{\frac{1}{n'}}\right\}\right)\right]^{\frac{1}{n'}} \\
\left(n' = \frac{-n}{1-n}\right) &= \sup_{\lambda>0} \left[\lambda\mu\left(\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{-n} > \lambda\}\right)\right]^{\frac{1}{n'}} \\
&= \sup_{\lambda>0} \left[\lambda\mu\left(\left\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x|^{n} < \frac{1}{\lambda}\right\}\right)\right]^{\frac{1}{n'}} \\
(\xi = \lambda^{-n}) &= \sup_{\xi>0} \left[\frac{1}{\xi^n}\mu\left(\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y-x| < \xi\}\right)\right]^{\frac{1}{n'}} \\
&= \sup_{\xi>0} \left[\frac{1}{\xi^n}\int_{B(x,\xi)} d\mu\right]^{\frac{1}{n'}} \approx [M(\mu(x))]^{\frac{1}{n'}}
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$\|f\|_{L^{n'}(\mu)} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{F_k} |f(x)|^{n'} \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{n'}}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^{n'}(\mu)} &= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{F_k} |f(x)|^{n'}\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{n'}} \\ &\leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{(k+1)n'} \mu(F_k)\right)^{\frac{1}{n'}}\end{aligned}$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^{n'}(\mu)} &= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{F_k} |f(x)|^{n'}\, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{n'}} \\
&\leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{(k+1)n'} \mu(F_k) \right)^{\frac{1}{n'}} \\
&= 2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k \mu\big(\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n \colon 2^k < \tau_{2^k}(|f|)(x) \leq 2^{k+1}\}}_{F_k}\big)^{\frac{1}{n'}}
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^{n'}(\mu)} &= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{F_k} |f(x)|^{n'}\, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{n'}} \\
&\leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{(k+1)n'} \mu(F_k) \right)^{\frac{1}{n'}} \\
&= 2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k \mu(\underbrace{\{x\in\mathbb{R}^n \colon 2^k < \tau_{2^k}(|f|)(x) \leq 2^{k+1}\}}_{F_k})^{\frac{1}{n'}} \\
&\leq 2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k \mu(\underbrace{\{x\in\mathbb{R}^n \colon \tau_{2^k}(|f|)(x) > 2^k\}}_{\cup_{j=k}^{+\infty} F_j})^{\frac{1}{n'}}
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^{n'}(\mu)} &= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{F_k} |f(x)|^{n'}\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{n'}} \\
&\leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{(k+1)n'} \mu(F_k)\right)^{\frac{1}{n'}} \\
&= 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k \mu(\underbrace{\{x\in\mathbb{R}^n \colon 2^k < \tau_{2^k}(|f|)(x) \leq 2^{k+1}\}}_{F_k})^{\frac{1}{n'}} \\
&\leq 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k \mu(\underbrace{\{x\in\mathbb{R}^n \colon \tau_{2^k}(|f|)(x) > 2^k\}}_{\cup_{j=k}^{+\infty} F_j})^{\frac{1}{n'}} \\
&\leq 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{t>0} t\mu(\{x\in\mathbb{R}^n \colon \tau_{2^k}(|f|)(x) > t\})^{\frac{1}{n'}}
\end{aligned}
$$

$$\|f\|_{L^{n'}(\mu)} \cdots \leq 2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{t>0} t\mu(\{x \in \mathbb{R}^n \colon \tau_{2^k}(|f|)(x) > t\})^{\frac{1}{n'}}$$

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^{n'}(\mu)} \cdots &\leq 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{t>0} t \mu(\{x \in \mathbb{R}^n \colon \tau_{2^k}(|f|)(x) > t\})^{\frac{1}{n'}} \\
&\leq C_n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \tau_{2^k}(|f|)(x)| \, (M\mu(x))^{\frac{1}{n'}} \; dx
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{n'}(\mu)} \cdots &\leq 2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{t>0} t\mu(\{x \in \mathbb{R}^n \colon \tau_{2^k}(|f|)(x) > t\})^{\frac{1}{n'}} \\
&\leq C_n \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \tau_{2^k}(|f|)(x)| \, (M\mu(x))^{\frac{1}{n'}} \, dx \\
&\leq C_n \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{F_k} |\nabla \tau_{2^k}(|f|)(x)| \, (M\mu(x))^{\frac{1}{n'}} \, dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^{n'}(\mu)} \cdots &\leq 2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{t>0} t\mu(\{x\in\mathbb{R}^n \colon \tau_{2^k}(|f|)(x) > t\})^{\frac{1}{n'}} \\
&\leq C_n \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \tau_{2^k}(|f|)(x)| \, (M\mu(x))^{\frac{1}{n'}} \; dx \\
&\leq C_n \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{F_k} |\nabla \tau_{2^k}(|f|)(x)| \, (M\mu(x))^{\frac{1}{n'}} \; dx \\
&\leq C_n \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \tau_{2^k}(|f|)(x)| \, (M\mu(x))^{\frac{1}{n'}} \; dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^{n'}(\mu)} \cdots &\leq 2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{t>0} t\mu(\{x \in \mathbb{R}^n \colon \tau_{2^k}(|f|)(x) > t\})^{\frac{1}{n'}} \\
&\leq C_n \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \tau_{2^k}(|f|)(x)| \, (M\mu(x))^{\frac{1}{n'}} \; dx \\
&\leq C_n \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{F_k} |\nabla \tau_{2^k}(|f|)(x)| \, (M\mu(x))^{\frac{1}{n'}} \; dx \\
&\leq C_n \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \tau_{2^k}(|f|)(x)| \, (M\mu(x))^{\frac{1}{n'}} \; dx \\
&= C_n \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| \, (M\mu(x))^{\frac{1}{n'}} \; dx
\end{aligned}
$$

Contenidos

1 Desigualdades de Poincaré

2 Desigualdades de Sobolev

3 Equivalencia entre desigualdad puntual y en media

4 Desigualdad isoperimétrica con pesos

5 Propiedades de los pesos A_p

- Decimos que ω es una función peso si es positiva y localmente integrable cpp en $\mathbb{R}^n$.

- Decimos que ω es una función peso si es positiva y localmente integrable cpp en $\mathbb{R}^n$.
- Denotamos $\omega(E) = \int_E \omega$, donde E es un conjunto medible.

Teorema

(a) *Existe* $C > 0$ *dimensional tal que para todo* $\lambda > 0$ *y* $f \geq 0$

Teorema

(a) *Existe $C > 0$ dimensional tal que para todo $\lambda > 0$ y $f \geq 0$*

$$\omega(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| M\omega(x) dx. \tag{7}$$

Teorema

(a) *Existe* $C > 0$ *dimensional tal que para todo* $\lambda > 0$ *y* $f \geq 0$

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(\omega)} \leq C\|f\|_{L^1(M\omega)} \tag{7}$$

Teorema

(a) *Existe* $C > 0$ *dimensional tal que para todo* $\lambda > 0$ *y* $f \geq 0$

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(\omega)} \leq C\|f\|_{L^1(M\omega)} \tag{7}$$

(b) *Si* $1 < p < \infty$, *entonces existe* $C > 0$ *tal que para todo* $f \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p \omega(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p M\omega(x)dx. \tag{8}$$

Teorema

(a) *Existe* $C > 0$ *dimensional tal que para todo* $\lambda > 0$ *y* $f \geq 0$

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(\omega)} \leq C\|f\|_{L^1(M\omega)} \tag{7}$$

(b) *Si* $1 < p < \infty$, *entonces existe* $C > 0$ *tal que para todo* $f \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p \omega(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p M\omega(x) dx. \tag{8}$$

- Notemos que (8) se sigue de (7) y usando el Teorema de interpolación de Marcinkiewicz, ya que $M : L^\infty(u) \to L^\infty(v)$ para pesos arbitrarios u, v.

Lema (Vitali covering lemma)

Sea $\mathcal{F} = \{Q_i\}_{i=1}^N$ una familia finita de cubos en $\mathbb{R}^n$. Entonces existe una subsucesión de cubos disjuntos dos a dos $\mathcal{F}' = \{Q_j\}_{j=1}^M$ tal que

$$\bigcup_{Q \in \mathcal{F}} Q \subset \bigcup_{j=1}^{M} 5Q_j$$

Lema (Vitali covering lemma)

Sea $\mathcal{F} = \{Q_i\}_{i=1}^{N}$ una familia finita de cubos en $\mathbb{R}^n$. Entonces existe una subsucesión de cubos disjuntos dos a dos $\mathcal{F}' = \{Q_j\}_{j=1}^{M}$ tal que

$$\bigcup_{Q \in \mathcal{F}} Q \subset \bigcup_{j=1}^{M} 5Q_j$$

- Sea $\Omega_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$ y sea $K \subset \Omega_\lambda$ un compacto.

Lema (Vitali covering lemma)

Sea $\mathcal{F} = \{Q_i\}_{i=1}^N$ una familia finita de cubos en $\mathbb{R}^n$. Entonces existe una subsucesión de cubos disjuntos dos a dos $\mathcal{F}' = \{Q_j\}_{j=1}^M$ tal que

$$\bigcup_{Q\in\mathcal{F}} Q \subset \bigcup_{j=1}^{M} 5Q_j$$

- Sea $\Omega_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$ y sea $K \subset \Omega_\lambda$ un compacto.
- Si $x \in K$, entonces por definición de M, existe un cubo $Q_x = Q$ que contiene x tal que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|dy > \lambda$$

Lema (Vitali covering lemma)

Sea $\mathcal{F} = \{Q_i\}_{i=1}^N$ una familia finita de cubos en $\mathbb{R}^n$. Entonces existe una subsucesión de cubos disjuntos dos a dos $\mathcal{F}' = \{Q_j\}_{j=1}^M$ tal que

$$\bigcup_{Q\in\mathcal{F}} Q \subset \bigcup_{j=1}^{M} 5Q_j$$

- Sea $\Omega_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$ y sea $K \subset \Omega_\lambda$ un compacto.
- Si $x \in K$, entonces por definición de M, existe un cubo $Q_x = Q$ que contiene x tal que

$$\frac{1}{\lambda}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|dy > 1. \tag{9}$$

- Dado que $K \subset \cup_{x \in K} Q_x$ es compacto, existe un subrecubrimiento finito $\mathcal{F} = \{Q\}$ de K, i.e. $K \subset \cup_{Q \in \mathcal{F}} Q$, donde cada Q satisface (9).

- Dado que $K \subset \cup_{x \in K} Q_x$ es compacto, existe un subrecubrimiento finito $\mathcal{F} = \{Q\}$ de K, i.e. $K \subset \cup_{Q \in \mathcal{F}} Q$, donde cada Q satisface (9).
- Por Lema podemos extraer una familia de cubos disjuntos 2 a 2 $\{Q_j\}_{j=1}^{M}$ con $\cup_{Q \in \mathcal{F}} Q \subset \cup_{j=1}^{M} 5Q_j$.

- Dado que $K \subset \cup_{x \in K} Q_x$ es compacto, existe un subrecubrimiento finito $\mathcal{F} = \{Q\}$ de K, i.e. $K \subset \cup_{Q \in \mathcal{F}} Q$, donde cada Q satisface (9).
- Por Lema podemos extraer una familia de cubos disjuntos 2 a 2 $\{Q_j\}_{j=1}^{M}$ con $\cup_{Q \in \mathcal{F}} Q \subset \cup_{j=1}^{M} 5Q_j$.
- Esto implica que

$$\omega(K) \;\; \leq \;\; \omega(\Omega_\lambda) \leq \omega\big(\cup_{j=1}^{M} 5Q_j\big) \leq \sum_{j=1}^{M} \omega(5Q_j)$$

- Dado que $K \subset \cup_{x\in K} Q_x$ es compacto, existe un subrecubrimiento finito $\mathcal{F} = \{Q\}$ de K, i.e. $K \subset \cup_{Q\in\mathcal{F}} Q$, donde cada Q satisface (9).
- Por Lema podemos extraer una familia de cubos disjuntos 2 a 2 $\{Q_j\}_{j=1}^M$ con $\cup_{Q\in\mathcal{F}} Q \subset \cup_{j=1}^M 5Q_j$.
- Esto implica que

$$\begin{aligned}\omega(K) &\leq \omega(\Omega_\lambda) \leq \omega\big(\cup_{j=1}^M 5Q_j\big) \leq \sum_{j=1}^M \omega(5Q_j) \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^M \omega(5Q_j)\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(y)|dy\end{aligned}$$

- Dado que $K \subset \cup_{x\in K} Q_x$ es compacto, existe un subrecubrimiento finito $\mathcal{F} = \{Q\}$ de K, i.e. $K \subset \cup_{Q\in\mathcal{F}} Q$, donde cada Q satisface (9).
- Por Lema podemos extraer una familia de cubos disjuntos 2 a 2 $\{Q_j\}_{j=1}^M$ con $\cup_{Q\in\mathcal{F}} Q \subset \cup_{j=1}^M 5Q_j$.
- Esto implica que

$$
\begin{aligned}
\omega(K) &\leq \omega(\Omega_\lambda) \leq \omega\big(\cup_{j=1}^M 5Q_j\big) \leq \sum_{j=1}^M \omega(5Q_j) \\
&\leq \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^M \omega(5Q_j)\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f(y)|dy \\
&\leq \frac{C}{\lambda}\sum_{j=1}^M \omega(5Q_j)\frac{1}{|5Q_j|}\int_{Q_j} |f(y)|dy.
\end{aligned}
$$

- Puesto que $\dfrac{\omega(5Q_j)}{|5Q_j|} \leq M\omega(y), \ \forall y \in Q_j$, acotamos por

- Puesto que $\dfrac{\omega(5Q_j)}{|5Q_j|} \leq M\omega(y), \ \forall y \in Q_j$, acotamos por

$$\frac{C}{\lambda} \sum_{j=1}^{M} \int_{Q_j} |f(y)| M\omega(y) dy$$

- Puesto que $\dfrac{\omega(5Q_j)}{|5Q_j|} \leq M\omega(y), \ \forall y \in Q_j$, acotamos por

$$\frac{C}{\lambda}\sum_{j=1}^{M}\int_{Q_j}|f(y)|M\omega(y)dy \leq \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|M\omega(y)dy.$$

Pesos de Muckenhoupt

Definición

Decimos que $\omega \in A_1$ si hay $K > 0$ tal que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(y)dy \leq K \operatorname*{ínf}_Q \omega.$$

Pesos de Muckenhoupt

Definición

Decimos que $\omega \in A_1$ si hay $K > 0$ tal que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(y)dy \leq K \inf_Q \omega.$$

- El ínfimo de los K se denotará por $[\omega]_{A_1}$.

Pesos de Muckenhoupt

Definición

Decimos que $\omega \in A_1$ si hay $K > 0$ tal que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(y)dy \leq K \operatorname*{ínf}_Q \omega.$$

- El ínfimo de los K se denotará por $[\omega]_{A_1}$.
- Además,

$$\omega \in A_1 \iff \exists K > 0 : M\omega(x) \leq K\omega(x) \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Pesos de Muckenhoupt

Definición

Un peso $\omega \in A_p$, $1 < p < \infty$ si

$$[\omega]_{A_p} = \sup_Q \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(y)dy\Big)\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(y)^{1-p'}dy\Big)^{p-1} < \infty$$

para cada cubo Q.

Pesos de Muckenhoupt

Definición

Un peso $\omega \in A_p$, $1 < p < \infty$ si

$$[\omega]_{A_p} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(y)dy\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(y)^{1-p'}dy\right)^{p-1} < \infty$$

para cada cubo Q.

Definición

Un peso ω pertenece a A_∞ siempre que

$$[\omega]_{A_\infty} = \sup_Q \left\{\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(t)dt\right) exp\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q log\omega(t)^{-1}dt\right)\right\} < \infty.$$

Desigualdad de Holder inversa. Caso A_1

Desigualdad de Holder inversa. Caso A_1

Si $\omega \in A_1$, entonces existe $r > 1$ tal que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{c}{|Q|}\int_Q \omega.$$

Desigualdad de Holder inversa. Caso A_1

Si $\omega \in A_1$, entonces existe $r > 1$ tal que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{c}{|Q|}\int_Q \omega.$$

Lema

Sea $\omega \in A_1$ *y* $r_\omega = 1 + \frac{1}{2^{n+1}[\omega]_{A_1}}$. *Para cada cubo* Q,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{r_\omega}\right)^{\frac{1}{r_\omega}} \leq \frac{2}{|Q|}\int_Q \omega,$$

Desigualdad de Holder inversa. Caso A_1

Si $\omega \in A_1$, entonces existe $r > 1$ tal que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{c}{|Q|}\int_Q \omega.$$

Lema

Sea $\omega \in A_1$ y $r_\omega = 1 + \frac{1}{2^{n+1}[\omega]_{A_1}}$. Para cada cubo Q,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{r_\omega}\right)^{\frac{1}{r_\omega}} \leq \frac{2}{|Q|}\int_Q \omega,$$

que implica

Desigualdad de Holder inversa. Caso A_1

Si $\omega \in A_1$, entonces existe $r > 1$ tal que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{c}{|Q|}\int_Q \omega.$$

Lema

Sea $\omega \in A_1$ y $r_\omega = 1 + \frac{1}{2^{n+1}[\omega]_{A_1}}$. Para cada cubo Q,

$$M_{r_\omega}\omega(x) \leq 2[\omega]_{A_1}\omega(x).$$

- Recordemos la "layer cake formula":

$$\int_X \varphi(f(x))dx = \int_0^\infty \varphi'(t)\nu(\{x \in X : f(x) > t\})dt.$$

- Recordemos la "layer cake formula":

$$\int_X \varphi(f(x))dx = \int_0^\infty \varphi'(t)\nu(\{x \in X : f(x) > t\})dt.$$

- Fijamos un cubo Q y sea M_Q^d el operador diádico restringido a Q. También, $\omega_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q \omega$.

- Recordemos la "layer cake formula":

$$\int_X \varphi(f(x))dx = \int_0^\infty \varphi'(t)\nu(\{x \in X : f(x) > t\})dt.$$

- Fijamos un cubo Q y sea M_Q^d el operador diádico restringido a Q. También, $\omega_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q \omega$.
- Entonces,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{1+\delta}(x)dx$$

- Recordemos la "layer cake formula":

$$\int_X \varphi(f(x))dx = \int_0^\infty \varphi'(t)\nu(\{x \in X : f(x) > t\})dt.$$

- Fijamos un cubo Q y sea M_Q^d el operador diádico restringido a Q. También, $\omega_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q \omega$.
- Entonces,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{1+\delta}(x)dx \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q M_Q^d(\omega)(x)^\delta \omega(x)dx$$

- Recordemos la "layer cake formula":

$$\int_X \varphi(f(x))dx = \int_0^\infty \varphi'(t)\nu(\{x \in X : f(x) > t\})dt.$$

- Fijamos un cubo Q y sea M_Q^d el operador diádico restringido a Q. También, $\omega_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q \omega$.
- Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{1+\delta}(x)dx &\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q M_Q^d(\omega)(x)^\delta \omega(x)dx \\ &= \frac{\delta}{|Q|}\int_0^\infty t^{\delta-1}\omega(\{x \in Q : M_Q^d(\omega)(x) > t\})dt\end{aligned}$$

- Recordemos la "layer cake formula":

$$\int_X \varphi(f(x))dx = \int_0^\infty \varphi'(t)\nu(\{x \in X : f(x) > t\})dt.$$

- Fijamos un cubo Q y sea M_Q^d el operador diádico restringido a Q. También, $\omega_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q \omega$.
- Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{1+\delta}(x)dx &\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q M_Q^d(\omega)(x)^\delta \omega(x)dx \\ &= \frac{\delta}{|Q|}\int_0^\infty t^{\delta-1}\omega(\{x \in Q : M_Q^d(\omega)(x) > t\})dt \\ \leq \frac{\delta}{|Q|}\int_0^{\omega_Q} t^\delta dt + &\frac{\delta}{|Q|}\int_{\omega_Q}^\infty t^{\delta-1}\omega(\{x \in Q : M_Q^d(\omega)(x) > t\})dt \end{aligned}$$

- Recordemos la "layer cake formula":

$$\int_X \varphi(f(x))dx = \int_0^\infty \varphi'(t)\nu(\{x \in X : f(x) > t\})dt.$$

- Fijamos un cubo Q y sea M_Q^d el operador diádico restringido a Q. También, $\omega_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q \omega$.
- Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{1+\delta}(x)dx &\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q M_Q^d(\omega)(x)^\delta \omega(x)dx \\
&= \frac{\delta}{|Q|}\int_0^\infty t^{\delta-1}\omega(\{x \in Q : M_Q^d(\omega)(x) > t\})dt \\
\leq \frac{\delta}{|Q|}\int_0^{\omega_Q} t^\delta dt &+ \frac{\delta}{|Q|}\int_{\omega_Q}^\infty t^{\delta-1}\omega(\{x \in Q : M_Q^d(\omega)(x) > t\})dt \\
&= (\omega_Q)^{\delta+1} + \frac{\delta}{|Q|}\int_{\omega_Q}^\infty t^{\delta-1}\omega(\{x \in Q : M_Q^d(\omega)(x) > t\})dt.
\end{aligned}$$

- Ahora, usamos que para $t > \omega_Q$,

$$\omega(\{x \in Q : M_Q^d(\omega)(x) > t\}) \leq 2^n t \left|\{x \in Q : M_Q^d(\omega)(x) > t\}\right|$$

para estimar como sigue

- Ahora, usamos que para $t > \omega_Q$,

$$\omega(\{x \in Q : M_Q^d(\omega)(x) > t\}) \leq 2^n t \Big|\{x \in Q : M_Q^d(\omega)(x) > t\}\Big|$$

para estimar como sigue

$$\frac{\delta}{|Q|} \int_{\omega_Q}^{\infty} t^{\delta-1} \omega(\{x \in Q : M_Q^d(\omega)(x) > t\}) dt \leq$$
$$\leq \frac{\delta}{|Q|} \int_{\omega_Q}^{\infty} 2^n t^{\delta} \Big|\{x \in Q : M_Q^d(\omega)(x) > t\}\Big| dt \leq$$

- Ahora, usamos que para $t > \omega_Q$,

$$\omega(\{x \in Q : M_Q^d(\omega)(x) > t\}) \leq 2^n t\big|\{x \in Q : M_Q^d(\omega)(x) > t\}\big|$$

para estimar como sigue

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{|Q|}\int_{\omega_Q}^{\infty} t^{\delta-1}\omega(\{x \in Q : M_Q^d(\omega)(x) > t\})dt &\leq \\ \leq \frac{\delta}{|Q|}\int_{\omega_Q}^{\infty} 2^n t^{\delta}\big|\{x \in Q : M_Q^d(\omega)(x) > t\}\big|dt &\leq \\ \leq \frac{2^n\delta}{|Q|(\delta+1)}(\delta+1)\int_0^{\infty} t^{\delta+1}\big|\{x \in Q : M_Q^d(\omega)(x) > t\}\big|\frac{dt}{t} &= \end{aligned}$$

- Ahora, usamos que para $t > \omega_Q$,

$$\omega(\{x \in Q : M_Q^d(\omega)(x) > t\}) \leq 2^n t \big|\{x \in Q : M_Q^d(\omega)(x) > t\}\big|$$

para estimar como sigue

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{|Q|} \int_{\omega_Q}^{\infty} t^{\delta-1} \omega(\{x \in Q : M_Q^d(\omega)(x) > t\}) dt \leq \\
\leq \frac{\delta}{|Q|} \int_{\omega_Q}^{\infty} 2^n t^{\delta} \big|\{x \in Q : M_Q^d(\omega)(x) > t\}\big| dt \leq \\
\leq \frac{2^n \delta}{|Q|(\delta+1)} (\delta+1) \int_0^{\infty} t^{\delta+1} \big|\{x \in Q : M_Q^d(\omega)(x) > t\}\big| \frac{dt}{t} = \\
= \frac{2^n \delta}{|Q|(\delta+1)} \int_Q \left(M_Q^d(\omega)(x)\right)^{\delta+1} dx \leq
\end{aligned}$$

- Ahora, usamos que para $t > \omega_Q$,

$$\omega(\{x \in Q : M_Q^d(\omega)(x) > t\}) \leq 2^n t \Big| \{x \in Q : M_Q^d(\omega)(x) > t\} \Big|$$

para estimar como sigue

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{|Q|} \int_{\omega_Q}^{\infty} t^{\delta-1} \omega(\{x \in Q : M_Q^d(\omega)(x) > t\}) dt \leq \\
\leq \frac{\delta}{|Q|} \int_{\omega_Q}^{\infty} 2^n t^{\delta} \Big| \{x \in Q : M_Q^d(\omega)(x) > t\} \Big| dt \leq \\
\leq \frac{2^n \delta}{|Q|(\delta+1)} (\delta+1) \int_0^{\infty} t^{\delta+1} \Big| \{x \in Q : M_Q^d(\omega)(x) > t\} \Big| \frac{dt}{t} = \\
= \frac{2^n \delta}{|Q|(\delta+1)} \int_Q \left(M_Q^d(\omega)(x) \right)^{\delta+1} dx \leq \\
\leq \frac{2^n \delta}{|Q|(\delta+1)} [\omega]_{A_1} \int_Q \left(M_Q^d(\omega)(x) \right)^{\delta} \omega(x) dx.
\end{aligned}$$

- Estas desigualdades implican que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (M_Q^d\omega)^\delta \omega dx \leq (\omega_Q)^{\delta+1} + \frac{2^n\delta[\omega]_{A_1}}{\delta+1}\frac{1}{|Q|}\int_Q (M_Q^d(\omega)(x))^\delta \omega(x)dx.$$

- Estas desigualdades implican que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (M_Q^d\omega)^\delta \omega dx \leq (\omega_Q)^{\delta+1} + \frac{2^n\delta[\omega]_{A_1}}{\delta+1}\frac{1}{|Q|}\int_Q (M_Q^d(\omega)(x))^\delta \omega(x)dx.$$

- Tomando $\delta = \frac{1}{2^{n+1}[\omega]_{A_1}}$, tenemos que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (M_Q^d\omega)^\delta \omega dx \leq (\omega_Q)^{\delta+1} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2^{n+1}[\omega]_{A_1}+1}{2^{n+1}[\omega]_{A_1}}}\frac{1}{|Q|}\int_Q (M_Q^d(\omega)(x))^\delta \omega(x)dx$$

- Estas desigualdades implican que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (M_Q^d\omega)^\delta \omega dx \leq (\omega_Q)^{\delta+1} + \frac{2^n\delta[\omega]_{A_1}}{\delta+1}\frac{1}{|Q|}\int_Q (M_Q^d(\omega)(x))^\delta \omega(x)dx.$$

- Tomando $\delta = \frac{1}{2^{n+1}[\omega]_{A_1}}$, tenemos que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (M_Q^d\omega)^\delta \omega dx \leq (\omega_Q)^{\delta+1} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2^{n+1}[\omega]_{A_1}+1}{2^{n+1}[\omega]_{A_1}}}\frac{1}{|Q|}\int_Q (M_Q^d(\omega)(x))^\delta \omega(x)dx$$

- y

$$\frac{1}{|Q|}\left(1-\frac{2^n[\omega]_{A_1}}{2^{n+1}[\omega]_{A_1}+1}\right)\int_Q (M_Q^d\omega)^\delta \omega dx \leq (\omega_Q)^{\delta+1}$$

- Estas desigualdades implican que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (M_Q^d\omega)^\delta \omega dx \leq (\omega_Q)^{\delta+1} + \frac{2^n\delta[\omega]_{A_1}}{\delta+1}\frac{1}{|Q|}\int_Q (M_Q^d(\omega)(x))^\delta \omega(x) dx.$$

- Tomando $\delta = \frac{1}{2^{n+1}[\omega]_{A_1}}$, tenemos que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (M_Q^d\omega)^\delta \omega dx \leq (\omega_Q)^{\delta+1} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2^{n+1}[\omega]_{A_1}+1}{2^{n+1}[\omega]_{A_1}}}\frac{1}{|Q|}\int_Q (M_Q^d(\omega)(x))^\delta \omega(x) dx$$

- y

$$\frac{1}{|Q|}\left(1 - \frac{2^n[\omega]_{A_1}}{2^{n+1}[\omega]_{A_1}+1}\right)\int_Q (M_Q^d\omega)^\delta \omega dx \leq (\omega_Q)^{\delta+1}$$

- que comporta

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (M_Q^d(\omega))^\delta \omega dx \leq \frac{2^{n+1}[\omega]_{A_1}+1}{2^n[\omega]_{A_1}+1}(\omega_Q)^{\delta+1}$$

- Estas desigualdades implican que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (M_Q^d\omega)^\delta \omega dx \le (\omega_Q)^{\delta+1} + \frac{2^n\delta[\omega]_{A_1}}{\delta+1}\frac{1}{|Q|}\int_Q (M_Q^d(\omega)(x))^\delta \omega(x)dx.$$

- Tomando $\delta = \frac{1}{2^{n+1}[\omega]_{A_1}}$, tenemos que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (M_Q^d\omega)^\delta \omega dx \le (\omega_Q)^{\delta+1} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2^{n+1}[\omega]_{A_1}+1}{2^{n+1}[\omega]_{A_1}}}\frac{1}{|Q|}\int_Q (M_Q^d(\omega)(x))^\delta \omega(x)dx$$

- y

$$\frac{1}{|Q|}\left(1 - \frac{2^n[\omega]_{A_1}}{2^{n+1}[\omega]_{A_1}+1}\right)\int_Q (M_Q^d\omega)^\delta \omega dx \le (\omega_Q)^{\delta+1}$$

- que comporta

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (M_Q^d(\omega))^\delta \omega dx \le \frac{2^{n+1}[\omega]_{A_1}+1}{2^n[\omega]_{A_1}+1}(\omega_Q)^{\delta+1} \le \frac{2^{n+1}[\omega]_{A_1}}{2^n[\omega]_{A_1}}(\omega_Q)^{\delta+1}$$

Desigualdad de Holder inversa. Caso A_p, $1 < p < \infty$

$\omega \in A_p$ si existen constantes $r > 1$ y $c \geq 1$ tal que para cada cubo Q,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{c}{|Q|}\int_Q \omega$$

Desigualdad de Holder inversa. Caso A_p, $1 < p < \infty$

$\omega \in A_p$ si existen constantes $r > 1$ y $c \geq 1$ tal que para cada cubo Q,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{c}{|Q|}\int_Q \omega$$

- Si $\omega_1, \omega_2 \in A_1$

Desigualdad de Holder inversa. Caso A_p, $1 < p < \infty$

$\omega \in A_p$ si existen constantes $r > 1$ y $c \geq 1$ tal que para cada cubo Q,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{c}{|Q|}\int_Q \omega$$

- Si $\omega_1, \omega_2 \in A_1 \Rightarrow \omega = \omega_1 \omega_2^{1-p} \in A_p$

Desigualdad de Holder inversa. Caso A_p, $1 < p < \infty$

$\omega \in A_p$ si existen constantes $r > 1$ y $c \geq 1$ tal que para cada cubo Q,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{c}{|Q|}\int_Q \omega$$

- Si $\omega_1, \omega_2 \in A_1 \Rightarrow \omega = \omega_1 \omega_2^{1-p} \in A_p$
- $[\omega]_{A_p} \leq [\omega_1]_{A_1}[\omega_2]_{A_1}^{p-1}$.

Desigualdad de Holder inversa. Caso A_p, $1 < p < \infty$

$\omega \in A_p$ si existen constantes $r > 1$ y $c \geq 1$ tal que para cada cubo Q,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{c}{|Q|}\int_Q \omega$$

- Si $\omega_1, \omega_2 \in A_1 \Rightarrow \omega = \omega_1 \omega_2^{1-p} \in A_p$
- $[\omega]_{A_p} \leq [\omega_1]_{A_1}[\omega_2]_{A_1}^{p-1}$.

Lema

Sea $\omega \in A_p$, $1 < p < \infty$ *y sea* $r_\omega = 1 + \frac{1}{2^{2p+n+1}[\omega]_{A_p}}$. *Entonces*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{r_\omega} dx\right)^{\frac{1}{r_\omega}} \leq \frac{2}{|Q|}\int_Q \omega.$$

Desigualdad de Holder inversa. Caso A_∞

- La clase de pesos A_∞ se define por

$$A_\infty = \bigcup_{p>1} A_p$$

Desigualdad de Holder inversa. Caso A_∞

- La clase de pesos A_∞ se define por

$$A_\infty = \bigcup_{p>1} A_p$$

Lema

Existe constante positiva, $\delta = 1 + \frac{1}{c_n[\omega]_{A_\infty}}$*, tal que*

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega^{1+\delta} \right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq \frac{2}{|Q|} \int_Q \omega$$

Por qué A_p?

Por qué A_p?

- Caracterización de las funciones cuyo maximal es acotado ($p > 1$)

Por qué A_p?

- Caracterización de las funciones cuyo maximal es acotado ($p > 1$) ($p = 1$ en el sentido débil).

Por qué A_p?

- Caracterización de las funciones cuyo maximal es acotado ($p > 1$) ($p = 1$ en el sentido débil).
- Ecuaciones elípticas degeneradas.

Por qué A_p?

- Caracterización de las funciones cuyo maximal es acotado ($p > 1$) ($p = 1$ en el sentido débil).
- Ecuaciones elípticas degeneradas. El peso es la degeneración.

Por qué A_p?

- Caracterización de las funciones cuyo maximal es acotado ($p > 1$) ($p = 1$ en el sentido débil).
- Ecuaciones elípticas degeneradas. El peso es la degeneración.
- Desigualdades de Poincaré (p, p) válido, con $\alpha = 1$.

Análisis de las desigualdades de Poincaré-Sobolev

Antonio Zarauz, Daniel Santacreu, Javier Martínez, Sergi Arias
y Vicent Asensio
Tutelado por Carlos Pérez

9 de marzo de 2017