Factorizando, que es gerundio

VII Escuela-Taller / XIII Encuentro

9 de marzo de 2017

Blanca Fernández (UCM)
Esther Gómez (UV)
Abel Rosales (US)
Javier Suárez (UAL)
Antonio Torres (UAL)
José Manuel Uzal (USC)

Índice

Índice

Factorizando que es gerundio

Topologías débiles

Operadores débilmente compactos

Teorema y aplicaciones

Topologías Débiles

Notación

Sea X un espacio de Banach:

- Notaremos por X' a su dual y por X'' a su bidual.
- B_X denota a la bola abierta del espacio X.

Topologías Débiles

Notación

Sea X un espacio de Banach:

- Notaremos por X' a su dual y por X'' a su bidual.
- B_X denota a la bola abierta del espacio X.

Definición

Dados $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$, la **topología débil** (w) la generan los abiertos de la forma

$$\mathcal{O} = \{x \in X \ ; \ |x_i'(x - x_0)| < \varepsilon, \ i = 1, ..., n\}$$

Para cualquier elección de $x_1', ...x_n' \in X'$.

Topologías Débiles

Notación

Sea X un espacio de Banach:

- Notaremos por X' a su dual y por X'' a su bidual.
- B_X denota a la bola abierta del espacio X.

Definición

Dados $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$, la **topología débil** (w) la generan los abiertos de la forma

$$\mathcal{O} = \{x \in X \ ; \ |x_i'(x - x_0)| < \varepsilon, \ i = 1, ..., n\}$$

Para cualquier elección de $x_1', ...x_n' \in X'$.

Dados $x_0' \in X$ y $\epsilon > 0$, la **topología débil estrella** (w^*) la generan los abiertos de la forma

$$\mathcal{O}^* = \{x' \in X' \ ; \ |(x' - x_0')(x_i)| < \varepsilon, \ i = 1, ..., n\}$$

Para cualquier elección de $x_1, ...x_n \in X$.

Caracterización

La convergencia débil de sucesiones se caracteriza como sigue:

- Sean $x, x_1, x_2, x_3, \ldots \in X$. Entonces $x_n \xrightarrow{w} x$ si, y solo si, $\lim\limits_{n\to\infty}(x'(x_n)) = x'(x),\ \forall x' \in X'$.
- Sean $x', x'_1, x'_2, x'_3, \ldots \in X'$. Entonces $x'_n \xrightarrow{w^*} x'$ si, y solo si, $\lim\limits_{n\to\infty}(x'_n(x)) = x'(x),\ \forall x \in X$.

Teorema de Banach-Steinhaus

Definición

Sean X e Y dos espacios de Banach y $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(X, Y)$, decimos que $\mathcal{F}$ está **puntualmente acotado** si:

$$\sup\{\|T(x)\|_Y;\ T \in \mathcal{F}\} < \infty,\ \forall x \in X.$$

Factorizando que es gerundio

Topologías débiles

Operadores débilmente compactos

Teorema y aplicaciones

Teorema de Banach-Steinhaus

Definición

Sean X e Y dos espacios de Banach y $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(X, Y)$, decimos que $\mathcal{F}$ está **puntualmente acotado** si:

$$\sup\{\|T(x)\|_Y;\ T \in \mathcal{F}\} < \infty, \ \forall x \in X.$$

Teorema

Sean X e Y dos espacios de Banach y $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(X, Y)$, si $\mathcal{F}$ está puntualmente acotada, entonces $\mathcal{F}$ está acotado en $\mathcal{B}(X, Y)$.

Continuidad

Proposición

Sean X e Y dos espacios de Banach y $T : X \to Y$ una aplicación lineal, los siguientes son equivalentes:

I T *es* $\|\cdot\| - \|\cdot\|$ *continua.*

II T *es* $w - w$ *continua.*

Continuidad

Proposición

Sean X e Y dos espacios de Banach y $T : X \to Y$ una aplicación lineal, los siguientes son equivalentes:

I. T *es* $\|\cdot\| - \|\cdot\|$ *continua.*

II. T *es* $w - w$ *continua.*

Proposición

Sea T un operador lineal $T : X' \to Y'$, entonces es w^*-w^* continuo si, y solo si, existe otro operador $S : Y \to X$ tal que $T = S'$.

Teoremas

Teorema de Alaoglu

Sea X un espacio de Banach, entonces $\overline{B}_{X'}$ es w^*-compacto.

Teoremas

Teorema de Alaoglu

Sea X un espacio de Banach, entonces $\overline{B}_{X'}$ es w^*-compacto.

Teorema de Goldstine

Sea X un espacio de Banach, $\overline{B_X}^{w^*}$ en X'' es $\overline{B}_{X''}$.

Espacios Reflexivos

Definición

Dado X, definimos la **inclusión canónica** π de X en X'' dada por:

$$\pi(x) : x' \mapsto x'(x)$$

π es una isometría lineal.

Espacios Reflexivos

Definición

Dado X, definimos la **inclusión canónica** π de X en X'' dada por:

$$\pi(x) : x' \mapsto x'(x)$$

π es una isometría lineal.

Definición

Un espacio de Banach X se dice **reflexivo** si π es sobreyectiva, y por tanto biyectiva.

Espacios Reflexivos

Definición

Dado X, definimos la **inclusión canónica** π de X en X'' dada por:

$$\pi(x) : x' \mapsto x'(x)$$

π es una isometría lineal.

Definición

Un espacio de Banach X se dice **reflexivo** si π es sobreyectiva, y por tanto biyectiva.

Teorema

Un espacio de Banach X es reflexivo si, y solo si, $\overline{B}_X$ es w-compacta.

Índice

Operadores débilmente compactos

Definición

Un operador $T : X \longrightarrow Y$ entre espacios de Banach se dice **débilmente compacto** (**w-compacto**) cuando $\overline{T(B_X)}$ es un conjunto w-compacto.

Operadores débilmente compactos

Definición

Un operador $T : X \longrightarrow Y$ entre espacios de Banach se dice **débilmente compacto** (**w-compacto**) cuando $\overline{T(B_X)}$ es un conjunto w-compacto.

Proposición

El conjunto de los operadores w-compactos forman un ideal con la composición de aplicaciones.

Proposición

Si X o Y son reflexivos y $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, entonces T es w-compacto.

Lema (Davis-Figiel-Johnson-Pełczyński)

Sea X espacio de Banach, denotamos $U = \overline{B_X}$.

Lema (Davis-Figiel-Johnson-Pełczyński)

Sea X espacio de Banach, denotamos $U = \overline{B_X}$. Sea $W \subseteq X$ convexo, simétrico y acotado.

Lema (Davis-Figiel-Johnson-Pełczyński)

Sea X espacio de Banach, denotamos $U = \overline{B_X}$. Sea $W \subseteq X$ convexo, simétrico y acotado. $\forall n \in \mathbb{N}$ definimos

$$U_n = 2^n W + 2^{-n} U.$$

Lema (Davis-Figiel-Johnson-Pełczyński)

Sea X espacio de Banach, denotamos $U = \overline{B_X}$. Sea $W \subseteq X$ convexo, simétrico y acotado. $\forall n \in \mathbb{N}$ definimos

$$U_n = 2^n W + 2^{-n} U.$$

Denotamos por $||\cdot||_n$ el funcional de Minkowski de U_n:

$$||x||_n := \inf\{\lambda > 0 \colon x \in \lambda U_n\}$$

Factorizando que es gerundio

Topologías débiles

Operadores débilmente compactos

Teorema y aplicaciones

Lema (Davis-Figiel-Johnson-Pełczyński)

Sea X espacio de Banach, denotamos $U = \overline{B_X}$. Sea $W \subseteq X$ convexo, simétrico y acotado. $\forall n \in \mathbb{N}$ definimos

$$U_n = 2^n W + 2^{-n} U.$$

Denotamos por $||\cdot||_n$ el funcional de Minkowski de U_n:

$$||x||_n := \text{ínf}\{\lambda > 0 \colon x \in \lambda U_n\}$$

Definimos $\Psi = \{x \in X \colon |||x||| = (\sum_{n=1}^{\infty} ||x||_n^2)^{1/2} < \infty\}$, y sea la inclusión natural $J \colon \Psi \to X$.

Lema (Davis-Figiel-Johnson-Pełczyński)

Sea X espacio de Banach, denotamos $U = \overline{B_X}$. Sea $W \subseteq X$ convexo, simétrico y acotado. $\forall n \in \mathbb{N}$ definimos

$$U_n = 2^n W + 2^{-n} U.$$

Denotamos por $||\cdot||_n$ el funcional de Minkowski de U_n:

$$||x||_n := \text{ínf}\{\lambda > 0 \colon x \in \lambda U_n\}$$

Definimos $\Psi = \{x \in X \colon |||x||| = (\sum_{n=1}^{\infty} ||x||_n^2)^{1/2} < \infty\}$, y sea la inclusión natural $J \colon \Psi \to X$. Entonces:

- $(\Psi, |||\cdot|||)$ es Banach y J continua.

Lema (Davis-Figiel-Johnson-Pełczyński)

Sea X espacio de Banach, denotamos $U = \overline{B_X}$. Sea $W \subseteq X$ convexo, simétrico y acotado. $\forall n \in \mathbb{N}$ definimos

$$U_n = 2^n W + 2^{-n} U.$$

Denotamos por $||\cdot||_n$ el funcional de Minkowski de U_n:

$$||x||_n := \inf\{\lambda > 0 \colon x \in \lambda U_n\}$$

Definimos $\Psi = \{x \in X \colon |||x||| = (\sum_{n=1}^{\infty} ||x||_n^2)^{1/2} < \infty\}$, y sea la inclusión natural $J \colon \Psi \to X$. Entonces:

I. $(\Psi, |||\cdot|||)$ es Banach y J continua.

II. $W \subseteq \overline{B_\Psi}$.

Factorizando que es gerundio

Topologías débiles

Operadores débilmente compactos

Teorema y aplicaciones

Lema (Davis-Figiel-Johnson-Pełczyński)

Sea X espacio de Banach, denotamos $U = \overline{B_X}$. Sea $W \subseteq X$ convexo, simétrico y acotado. $\forall n \in \mathbb{N}$ definimos

$$U_n = 2^n W + 2^{-n} U.$$

Denotamos por $||\cdot||_n$ el funcional de Minkowski de U_n:

$$||x||_n := \inf\{\lambda > 0 \colon x \in \lambda U_n\}$$

Definimos $\Psi = \{x \in X \colon |||x||| = (\sum_{n=1}^{\infty} ||x||_n^2)^{1/2} < \infty\}$, y sea la inclusión natural $J \colon \Psi \to X$. Entonces:

I. $(\Psi, |||\cdot|||)$ es Banach y J continua.
II. $W \subseteq \overline{B_\Psi}$.
III. $J'' \colon \Psi'' \to X''$ es inyectiva y $(J'')^{-1}(X) = \Psi$.

Factorizando que es gerundio
Topologías débiles
Operadores débilmente compactos
Teorema y aplicaciones

Lema (Davis-Figiel-Johnson-Pełczyński)

Sea X espacio de Banach, denotamos $U = \overline{B_X}$. Sea $W \subseteq X$ convexo, simétrico y acotado. $\forall n \in \mathbb{N}$ definimos

$$U_n = 2^n W + 2^{-n} U.$$

Denotamos por $||\cdot||_n$ el funcional de Minkowski de U_n:

$$||x||_n := \text{ínf}\{\lambda > 0 \colon x \in \lambda U_n\}$$

Definimos $\Psi = \{x \in X \colon |||x||| = (\sum_{n=1}^{\infty} ||x||_n^2)^{1/2} < \infty\}$, y sea la inclusión natural $J \colon \Psi \to X$. Entonces:

I $(\Psi, |||\cdot|||)$ es Banach y J continua.

II $W \subseteq \overline{B_\Psi}$.

III $J'' \colon \Psi'' \to X''$ es inyectiva y $(J'')^{-1}(X) = \Psi$.

IV $(\Psi, |||\cdot|||)$ es reflexivo $\iff \overline{W} \subseteq X$ es w-compacto.

Demostración I

Fijamos $M > 1 : \; ||w|| \leq M, \; \forall w \in W.$

Demostración I

Fijamos $M > 1 : \ ||w|| \leq M, \ \forall w \in W.$

$x \in \lambda U_n \Longrightarrow \exists \ w \in W, \ u \in U \ : \ x = \lambda(2^n w + 2^{-n} u)$

Demostración I

Fijamos $M > 1 : \ ||w|| \leq M, \ \forall w \in W.$
$x \in \lambda U_n \Longrightarrow \exists \ w \in W, \ u \in U \ : \ x = \lambda(2^n w + 2^{-n} u)$

$$||x|| \leq \lambda ||2^n w + 2^{-n} u|| \leq 2^{2n} M \lambda \Longrightarrow ||x|| \leq 2^{2n} M ||x||_n$$

Factorizando que es gerundio

Topologías débiles

Operadores débilmente compactos

Teorema y aplicaciones

Demostración I

Fijamos $M > 1 : \ ||w|| \leq M, \ \forall w \in W$.
$x \in \lambda U_n \Longrightarrow \exists \ w \in W, \ u \in U \ : \ x = \lambda(2^n w + 2^{-n} u)$

$$||x|| \leq \lambda ||2^n w + 2^{-n} u|| \leq 2^{2n} M \lambda \Longrightarrow ||x|| \leq 2^{2n} M ||x||_n$$

$$x \in ||x|| U \subseteq 2^n ||x|| U_n \ \Rightarrow \ ||x||_n \leq 2^n ||x||$$

Factorizando que es gerundio

Topologías débiles

Operadores débilmente compactos

Teorema y aplicaciones

Demostración I

Fijamos $M > 1 : \; ||w|| \leq M, \; \forall w \in W.$
$x \in \lambda U_n \Longrightarrow \exists \; w \in W, \; u \in U \; : \; x = \lambda(2^n w + 2^{-n} u)$

$$||x|| \leq \lambda ||2^n w + 2^{-n} u|| \leq 2^{2n} M \lambda \Longrightarrow ||x|| \leq 2^{2n} M ||x||_n$$

$$x \in ||x|| U \subseteq 2^n ||x|| U_n \; \Rightarrow \; ||x||_n \leq 2^n ||x||$$

$$2^{-n} ||x||_n \leq ||x|| \leq 2^{2n} M ||x||_n, \; \forall x \in X$$

Demostración I

Llamamos $X_n = (X, ||\cdot||_n)$.

Demostración I

Llamamos $X_n = (X, ||\cdot||_n)$.

$$Y = \{(x_1, x_2, \dots) \in (X_1 \oplus X_2 \oplus \dots)_2 : \ x_n = x_1 \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Demostración I

Llamamos $X_n = (X, ||\cdot||_n)$.

$$Y = \{(x_1, x_2, \dots) \in (X_1 \oplus X_2 \oplus \dots)_2 : \; x_n = x_1 \; \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Y es Banach.

Demostración I

Llamamos $X_n = (X, ||\cdot||_n)$.

$$Y = \{(x_1, x_2, \dots) \in (X_1 \oplus X_2 \oplus \dots)_2 : \; x_n = x_1 \; \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Y es Banach.

$$\begin{aligned} \varphi : & \Psi \longrightarrow Y \\ & x \longmapsto (x, x, \dots) \end{aligned} \qquad \text{isomorfismo lineal}$$

Demostración I

Llamamos $X_n = (X, ||\cdot||_n)$.

$$Y = \{(x_1, x_2, \dots) \in (X_1 \oplus X_2 \oplus \dots)_2 : \; x_n = x_1 \; \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Y es Banach.

$$\begin{aligned} \varphi : & \Psi \longrightarrow Y \\ & x \longmapsto (x, x, \dots) \end{aligned} \qquad \text{isomorfismo lineal}$$

$\Longrightarrow (\Psi, |||\cdot|||)$ es un espacio de Banach.

Demostración I

Veamos que J es continua:

$$15M^2 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} ||x||_n^2}_{|||x|||^2} \geq 15M^2 \sum_{n=1}^{\infty} M^{-2} 2^{-4n} ||x||^2 = ||x||^2.$$

Demostración II

$$w \in W \Rightarrow w \in 2^{-n}(2^n W) \subseteq 2^{-n} U_n \Rightarrow ||w||_n \leq 2^{-n}$$

Demostración II

$$w \in W \Rightarrow w \in 2^{-n}(2^n W) \subseteq 2^{-n} U_n \Rightarrow ||w||_n \leq 2^{-n}$$

$$|||w||| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} ||w||_n^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} \right)^{1/2} \leq 1$$

Demostración II

$$w \in W \Rightarrow w \in 2^{-n}(2^n W) \subseteq 2^{-n} U_n \Rightarrow ||w||_n \leq 2^{-n}$$

$$|||w||| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} ||w||_n^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} \right)^{1/2} \leq 1$$

$$\Rightarrow w \in \overline{B_\Psi} \Longrightarrow W \subseteq \overline{B_\Psi}.$$

Demostración III

$$\begin{aligned} T\colon \Psi &\longrightarrow Z = (X_1 \oplus X_2 \oplus \dots)_2 \\ x &\longmapsto T(x) = (x, x, \dots) = (Jx, Jx, \dots). \end{aligned}$$

Factorizando que es gerundio

Topologías débiles

Operadores débilmente compactos

Teorema y aplicaciones

Demostración III

$$\begin{aligned} T : \Psi &\longrightarrow Z = (X_1 \oplus X_2 \oplus \dots)_2 \\ x &\longmapsto T(x) = (x, x, \dots) = (Jx, Jx, \dots). \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$\begin{aligned} T'' : \Psi'' &\longrightarrow Z'' \\ x'' &\longmapsto T''(x'') = (x'', x'', \dots) = (J''x'', J''x'', \dots). \end{aligned}$$

Demostración III

$$\begin{aligned} T : \Psi &\longrightarrow Z = (X_1 \oplus X_2 \oplus \dots)_2 \\ x &\longmapsto T(x) = (x, x, \dots) = (Jx, Jx, \dots). \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$\begin{aligned} T'' : \Psi'' &\longrightarrow Z'' \\ x'' &\longmapsto T''(x'') = (x'', x'', \dots) = (J''x'', J''x'', \dots). \end{aligned}$$

Sea $x'' \in \Psi''$,

$$T''x'' = (x_1'', x_2'', \dots) \in Z'' = (X_1'' \oplus X_2'' \oplus \dots)_2.$$

Demostración III

$$\begin{aligned} T: \Psi &\longrightarrow Z = (X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots)_2 \\ x &\longmapsto T(x) = (x, x, \ldots) = (Jx, Jx, \ldots). \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$\begin{aligned} T'': \Psi'' &\longrightarrow Z'' \\ x'' &\longmapsto T''(x'') = (x'', x'', \ldots) = (J''x'', J''x'', \ldots). \end{aligned}$$

Sea $x'' \in \Psi''$,

$$T''x'' = (x_1'', x_2'', \ldots) \in Z'' = (X_1'' \oplus X_2'' \oplus \ldots)_2.$$

Es decir, $x_n'' \in X_n'' = X''$, $\forall n$.

Demostración III

Fijado n, sea $x' \in X_n' = X'$ y $z' = (0, \ldots, \underset{(n)}{x'}, 0, \ldots)$.

Demostración III

Fijado n, sea $x' \in X'_n = X'$ y $z' = (0, \ldots, \underset{(n)}{x'}, 0, \ldots)$.

$$T'z'(x) = z'(Tx) = x'(Jx) = J'x'(x) \ \forall x \in \Psi \Rightarrow T'z' = J'x'.$$

Demostración III

Fijado n, sea $x' \in X'_n = X'$ y $z' = (0, \ldots, \underset{(n)}{x'}, 0, \ldots)$.

$$T'z'(x) = z'(Tx) = x'(Jx) = J'x'(x)\ \forall x \in \Psi \Rightarrow T'z' = J'x'.$$

Por otra parte, $\forall x' \in X'$,

$$x''_n(x') = <z', T''x''> = <T'z', x''> = x''(J'x') = J''x''(x')$$

Demostración III

Fijado n, sea $x' \in X'_n = X'$ y $z' = (0, \ldots, \underset{(n)}{x'}, 0, \ldots)$.

$$T'z'(x) = z'(Tx) = x'(Jx) = J'x'(x) \; \forall x \in \Psi \Rightarrow T'z' = J'x'.$$

Por otra parte, $\forall x' \in X'$,

$$x''_n(x') = <z', T''x''> = <T'z', x''> = x''(J'x') = J''x''(x')$$

$$\Rightarrow x''_n = J''x'' \; \forall n$$

Factorizando que es gerundio

Topologías débiles

Operadores débilmente compactos

Teorema y aplicaciones

Demostración III

Fijado n, sea $x' \in X_n' = X'$ y $z' = (0, \ldots, \underset{(n)}{x'}, 0, \ldots)$.

$$T'z'(x) = z'(Tx) = x'(Jx) = J'x'(x) \ \forall x \in \Psi \Rightarrow T'z' = J'x'.$$

Por otra parte, $\forall x' \in X'$,

$$x_n''(x') = <z', T''x''> = <T'z', x''> = x''(J'x') = J''x''(x')$$

$$\Rightarrow x_n'' = J''x'' \ \forall n$$

Luego,

$$T''x'' = (x_1'', x_2'', \ldots) = (J''x'', J''x'', \ldots)$$

Demostración III

Como T isometría, T'' también.

Demostración III

Como T isometría, T'' también.

Como T'' inyectivo, $J'' : \Psi'' \longrightarrow X''$ también.

Demostración III

Como T isometría, T'' también.

Como T'' inyectivo, $J'' : \Psi'' \longrightarrow X''$ también.

$$\begin{tikzcd} \Psi \arrow[r, hook, "J"] \arrow[d, "\pi_\Psi"'] & X \arrow[d, "\pi_X"] \\ \Psi'' \arrow[r, "J''"'] & X'' \end{tikzcd}$$

Factorizando que es gerundio

Topologías débiles

Operadores débilmente compactos

Teorema y aplicaciones

Demostración III

Como T isometría, T'' también.

Como T'' inyectivo, $J'' : \Psi'' \longrightarrow X''$ también.

$$\begin{tikzcd} \Psi \arrow[r, hook, "J"] \arrow[d, "\pi_\Psi"'] & X \arrow[d, "\pi_X"] \\ \Psi'' \arrow[r, "J''"'] & X'' \end{tikzcd}$$

$\Psi \subseteq (J'')^{-1}(X)$.

Factorizando que es gerundio

Topologías débiles

Operadores débilmente compactos

Teorema y aplicaciones

Demostración III

Como T isometría, T'' también.

Como T'' inyectivo, $J'' : \Psi'' \longrightarrow X''$ también.

$$\begin{tikzcd} \Psi \arrow[r, hook, "J"] \arrow[d, "\pi_\Psi"'] & X \arrow[d, "\pi_X"] \\ \Psi'' \arrow[r, "J''"'] & X'' \end{tikzcd}$$

$\Psi \subseteq (J'')^{-1}(X)$.

Si $x'' \in (J'')^{-1}(X) \Rightarrow J''x'' \in X$.

Demostración III

Como T isometría, T'' también.

Como T'' inyectivo, $J'' : \Psi'' \longrightarrow X''$ también.

$$\begin{tikzcd} \Psi \arrow[r, hook, "J"] \arrow[d, "\pi_\Psi"'] & X \arrow[d, "\pi_X"] \\ \Psi'' \arrow[r, "J''"'] & X'' \end{tikzcd}$$

$\Psi \subseteq (J'')^{-1}(X)$.

Si $x'' \in (J'')^{-1}(X) \Rightarrow J''x'' \in X$.
También, $J''x'' \in \Psi$ y $T(J''x'') = T''x''$.

Demostración III

Como T isometría, T'' también.

Como T'' inyectivo, $J'' : \Psi'' \longrightarrow X''$ también.

$$\begin{tikzcd} \Psi \arrow[r, hook, "J"] \arrow[d, "\pi_\Psi"'] & X \arrow[d, "\pi_X"] \\ \Psi'' \arrow[r, "J''"'] & X'' \end{tikzcd}$$

$\Psi \subseteq (J'')^{-1}(X)$.

Si $x'' \in (J'')^{-1}(X) \Rightarrow J''x'' \in X$.
También, $J''x'' \in \Psi$ y $T(J''x'') = T''x''$.

Como T'' es inyectivo, $x'' = J''x'' \in \Psi \ \Rightarrow \ (J'')^{-1}(X) \subseteq \Psi$.

Factorizando que es gerundio

Topologías débiles

Operadores débilmente compactos

Teorema y aplicaciones

Demostración III

Como T isometría, T'' también.

Como T'' inyectivo, $J'' : \ \Psi'' \longrightarrow X''$ también.

$$\begin{tikzcd} \Psi \arrow[r, hook, "J"] \arrow[d, "\pi_\Psi"'] & X \arrow[d, "\pi_X"] \\ \Psi'' \arrow[r, "J''"'] & X'' \end{tikzcd}$$

$\Psi \subseteq (J'')^{-1}(X)$.

Si $x'' \in (J'')^{-1}(X) \Rightarrow J''x'' \in X$.
También, $J''x'' \in \Psi$ y $T(J''x'') = T''x''$.

Como T'' es inyectivo, $x'' = J''x'' \in \Psi \ \Rightarrow \ (J'')^{-1}(X) \subseteq \Psi$.

Entonces, $(J'')^{-1}(X) = \Psi$.

Demostración IV

"$\Rightarrow$"

- $J : \Psi \longrightarrow X$ la inclusión (continua).

Demostración IV

"$\Rightarrow$"

- $J : \Psi \longrightarrow X$ la inclusión (continua).
- Ψ es reflexivo, entonces J es w-compacta.

Demostración IV

"$\Rightarrow$"

- $J : \Psi \longrightarrow X$ la inclusión (continua).
- Ψ es reflexivo, entonces J es w-compacta.
- W está en $\overline{B}_\Psi$.

Demostración IV

"$\Rightarrow$"

- $J : \Psi \longrightarrow X$ la inclusión (continua).
- Ψ es reflexivo, entonces J es w-compacta.
- W está en $\overline{B}_\Psi$.
- $\overline{W}$ es w-compacto en X.

Demostración IV

"$\Longleftarrow$"

Veamos que $\Psi'' \subset (J'')^{-1}(X) = \Psi$.

Demostración IV

"$\Leftarrow$"

Veamos que $\Psi'' \subset (J'')^{-1}(X) = \Psi$.

- Por el Teorema de Alaoglu, $\overline{B}_{\Psi''}$ es w^*-compacta.

Demostración IV

"$\Leftarrow$"

Veamos que $\Psi'' \subset (J'')^{-1}(X) = \Psi$.

- Por el Teorema de Alaoglu, $\overline{B}_{\Psi''}$ es w^*-compacta.
- Por el Teorema de Goldstine, $\overline{B}_{\Psi}$ es w^*-densa en $\overline{B}_{\Psi''}$.

Demostración IV

"$\Leftarrow$"

Veamos que $\Psi'' \subset (J'')^{-1}(X) = \Psi$.

- Por el Teorema de Alaoglu, $\overline{B}_{\Psi''}$ es w^*-compacta.
- Por el Teorema de Goldstine, $\overline{B}_{\Psi}$ es w^*-densa en $\overline{B}_{\Psi''}$.
- Como $J : \Psi \longrightarrow X$ continua, entonces $J'' : \Psi'' \longrightarrow X''$ es w^*-continua.

Demostración IV

"$\Leftarrow$"

Veamos que $\Psi'' \subset (J'')^{-1}(X) = \Psi$.

- Por el Teorema de Alaoglu, $\overline{B}_{\Psi''}$ es w^*-compacta.
- Por el Teorema de Goldstine, $\overline{B}_{\Psi}$ es w^*-densa en $\overline{B}_{\Psi''}$.
- Como $J : \Psi \longrightarrow X$ continua, entonces $J'' : \Psi'' \longrightarrow X''$ es w^*-continua.
- $J(\overline{B}_{\Psi})$ es w^*-denso en el w^*-compacto $J''(\overline{B}_{\Psi''})$.

Demostración IV

"$\Leftarrow$"

Veamos que $\Psi'' \subset (J'')^{-1}(X) = \Psi$.

- Por el Teorema de Alaoglu, $\overline{B}_{\Psi''}$ es w^*-compacta.
- Por el Teorema de Goldstine, $\overline{B}_\Psi$ es w^*-densa en $\overline{B}_{\Psi''}$.
- Como $J : \Psi \longrightarrow X$ continua, entonces $J'' : \Psi'' \longrightarrow X''$ es w^*-continua.
- $J(\overline{B}_\Psi)$ es w^*-denso en el w^*-compacto $J''(\overline{B}_{\Psi''})$.
- Se toma $V_n = 2^n \overline{W} + 2^{-n} \overline{B_{X''}}$.

Demostración IV

"$\Leftarrow$"

Veamos que $\Psi'' \subset (J'')^{-1}(X) = \Psi$.

- Por el Teorema de Alaoglu, $\overline{B}_{\Psi''}$ es w^*-compacta.
- Por el Teorema de Goldstine, $\overline{B}_{\Psi}$ es w^*-densa en $\overline{B}_{\Psi''}$.
- Como $J : \Psi \longrightarrow X$ continua, entonces $J'' : \Psi'' \longrightarrow X''$ es w^*-continua.
- $J(\overline{B}_{\Psi})$ es w^*-denso en el w^*-compacto $J''(\overline{B}_{\Psi''})$.
- Se toma $V_n = 2^n\overline{W} + 2^{-n}\overline{B_{X''}}$.
- $J(\overline{B}_{\Psi}) \subset V_n \; \forall \, n \in \mathbb{N}$.

Demostración IV

"$\Leftarrow$"

Veamos que $\Psi'' \subset (J'')^{-1}(X) = \Psi$.

- Por el Teorema de Alaoglu, $\overline{B}_{\Psi''}$ es w^*-compacta.
- Por el Teorema de Goldstine, $\overline{B}_{\Psi}$ es w^*-densa en $\overline{B}_{\Psi''}$.
- Como $J : \Psi \longrightarrow X$ continua, entonces $J'' : \Psi'' \longrightarrow X''$ es w^*-continua.
- $J(\overline{B}_{\Psi})$ es w^*-denso en el w^*-compacto $J''(\overline{B}_{\Psi''})$.
- Se toma $V_n = 2^n \overline{W} + 2^{-n} \overline{B_{X''}}$.
- $J(\overline{B}_{\Psi}) \subset V_n \; \forall\, n \in \mathbb{N}$.
- $J''(\overline{B}_{\Psi''}) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \subset X$.

Demostración IV

"$\Leftarrow$"

Veamos que $\Psi'' \subset (J'')^{-1}(X) = \Psi$.

- Por el Teorema de Alaoglu, $\overline{B}_{\Psi''}$ es w^*-compacta.
- Por el Teorema de Goldstine, $\overline{B}_{\Psi}$ es w^*-densa en $\overline{B}_{\Psi''}$.
- Como $J : \Psi \longrightarrow X$ continua, entonces $J'' : \Psi'' \longrightarrow X''$ es w^*-continua.
- $J(\overline{B}_{\Psi})$ es w^*-denso en el w^*-compacto $J''(\overline{B}_{\Psi''})$.
- Se toma $V_n = 2^n\overline{W} + 2^{-n}\overline{B_{X''}}$.
- $J(\overline{B}_{\Psi}) \subset V_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
- $J''(\overline{B}_{\Psi''}) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \subset X$.
- $\overline{B}_{\Psi''} \subset (J'')^{-1}(X) = \Psi$.

Demostración IV

"$\Leftarrow$"

Veamos que $\Psi'' \subset (J'')^{-1}(X) = \Psi$.

- Por el Teorema de Alaoglu, $\overline{B}_{\Psi''}$ es w^*-compacta.
- Por el Teorema de Goldstine, $\overline{B}_{\Psi}$ es w^*-densa en $\overline{B}_{\Psi''}$.
- Como $J : \Psi \longrightarrow X$ continua, entonces $J'' : \Psi'' \longrightarrow X''$ es w^*-continua.
- $J(\overline{B}_{\Psi})$ es w^*-denso en el w^*-compacto $J''(\overline{B}_{\Psi''})$.
- Se toma $V_n = 2^n\overline{W} + 2^{-n}\overline{B_{X''}}$.
- $J(\overline{B}_{\Psi}) \subset V_n \; \forall\, n \in \mathbb{N}$.
- $J''(\overline{B}_{\Psi''}) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \subset X$.
- $\overline{B}_{\Psi''} \subset (J'')^{-1}(X) = \Psi$.
- $\Psi'' = \Psi$.

Índice

Teorema de factorización

Teorema (Davis-Figiel-Johnson-Pełczyński)

Un operador entre dos espacios de Banach es débilmente compacto si y solamente si factoriza por un espacio de Banach reflexivo.

Teorema de factorización

Teorema (Davis-Figiel-Johnson-Pełczyński)

Un operador entre dos espacios de Banach es débilmente compacto si y solamente si factoriza por un espacio de Banach reflexivo.

Demostración.

Se toma $W = T(B_X)$, y usando el lema anterior se obtiene Ψ reflexivo,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "S"'] & & Y \\ & \Psi \arrow[ur, "J"'] & \end{tikzcd}$$

con $S(x) = T(x)$.

$\square$

Aplicaciones

Proposición

Todo subconjunto débilmente compacto Q de un espacio de Banach real X es homeomorfo a un subconjunto de un espacio de Banach reflexivo (con las respectivas topologías débiles).

Aplicaciones

Proposición

Todo subconjunto débilmente compacto Q de un espacio de Banach real X es homeomorfo a un subconjunto de un espacio de Banach reflexivo (con las respectivas topologías débiles).

Demostración.

1. Construimos $W = \operatorname{conv}(Q \cup (-Q))$.

□

Aplicaciones

Proposición

Todo subconjunto débilmente compacto Q de un espacio de Banach real X es homeomorfo a un subconjunto de un espacio de Banach reflexivo (con las respectivas topologías débiles).

Demostración.

1. Construimos $W = \operatorname{conv}(Q \cup (-Q))$.
2. Usando el lema, obtenemos Ψ reflexivo y $J : \Psi \longrightarrow X$.

□

Aplicaciones

Proposición

Todo subconjunto débilmente compacto Q de un espacio de Banach real X es homeomorfo a un subconjunto de un espacio de Banach reflexivo (con las respectivas topologías débiles).

Demostración.

1. Construimos $W = \mathrm{conv}(Q \cup (-Q))$.
2. Usando el lema, obtenemos Ψ reflexivo y $J : \Psi \longrightarrow X$.
3. Se toma $K = J^{-1}(Q)$ y $J|_K$ homeomorfismo en las topologías débiles.

$\square$

Espacios WCG

Definición

Un espacio de Banach es **WCG** (débil compactamente generado) si existe K subconjunto de X débilmente compacto tal que $\overline{\operatorname{span} K} = X$.

Espacios WCG

Definición

Un espacio de Banach es **WCG** (débil compactamente generado) si existe K subconjunto de X débilmente compacto tal que $\overline{\operatorname{span} K} = X$.

Ejemplo

1. Todo espacio reflexivo X es WCG ($K = \overline{B}_X$).

Espacios WCG

Definición

Un espacio de Banach es **WCG** (débil compactamente generado) si existe K subconjunto de X débilmente compacto tal que $\overline{\operatorname{span} K} = X$.

Ejemplo

1. Todo espacio reflexivo X es WCG ($K = \overline{B}_X$).
2. Todo espacio separable X es WCG.
   Se toma una sucesión $(x_n)_n$ densa en $\overline{B}_X$ y
   $K = \{x_n/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

Espacios WCG

Definición

Un espacio de Banach es **WCG** (débil compactamente generado) si existe K subconjunto de X débilmente compacto tal que $\overline{\operatorname{span} K} = X$.

Ejemplo

1. Todo espacio reflexivo X es WCG ($K = \overline{B}_X$).
2. Todo espacio separable X es WCG.
   Se toma una sucesión $(x_n)_n$ densa en $\overline{B}_X$ y
   $K = \{x_n/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.
3. $c_0(\Gamma)$ con Γ no numerable.

Espacios WCG

Definición

Un espacio de Banach es **WCG** (débil compactamente generado) si existe K subconjunto de X débilmente compacto tal que $\overline{\operatorname{span} K} = X$.

Ejemplo

1. Todo espacio reflexivo X es WCG ($K = \overline{B}_X$).
2. Todo espacio separable X es WCG.
   Se toma una sucesión $(x_n)_n$ densa en $\overline{B}_X$ y
   $K = \{x_n/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.
3. $c_0(\Gamma)$ con Γ no numerable.
4. ℓ_∞ no es WCG.

Caracterización de WCG

Proposición

Un espacio de Banach X es WCG si y solamente si existe un espacio reflexivo R y un operador inyectivo $T : R \longrightarrow X$ tal que $T(R)$ es denso en X.

Caracterización de WCG

Proposición

Un espacio de Banach X es WCG si y solamente si existe un espacio reflexivo R y un operador inyectivo $T : R \longrightarrow X$ tal que $T(R)$ es denso en X.

Demostración.

"$\Leftarrow$" $T(\overline{B}_R)$ relativamente w-compacto y

$$\overline{\operatorname{span} T(\overline{B}_R)} = X$$

$\square$

Factorizando que es gerundio

Topologías débiles

Operadores débilmente compactos

Teorema y aplicaciones

Caracterización de WCG

Proposición

Un espacio de Banach X es WCG si y solamente si existe un espacio reflexivo R y un operador inyectivo $T : R \longrightarrow X$ tal que $T(R)$ es denso en X.

Demostración.

"$\Leftarrow$" $T(\overline{B}_R)$ relativamente w-compacto y

$$\overline{\operatorname{span} T(\overline{B}_R)} = X$$

"$\Rightarrow$" Sea K débilmente compacto tal que $\overline{\operatorname{span} K} = X$. Usamos el lema tomando $R = \Psi$ y $T = J : \Psi \longrightarrow X$.

$\square$

Muchas gracias