Problemas abiertos sobre operadores en espacios de Banach

Manuel González

Departamento de Matemáticas
Universidad de Cantabria
Santander

XIII Encuentro de la Red “Análisis Funcional”
Cáceres, 9-11.III.17

Tres grupos de problemas

Consideraremos espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$.

1. Extensión de operadores:
   Variantes de la inyectividad de espacios de Banach. $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$
2. Sumas no triviales de espacios de Banach
   obtenidas mediante técnicas de interpolación. $(\mathbb{K} = \mathbb{C})$
3. Ideales de operadores clásicos. $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C})$

Extensión de operadores

Definición

Un espacio E es inyectivo si dados un espacio X y un subespacio Y de X, todo operador $T : Y \to E$ admite extensión $\widehat{T} : X \to E$.
E es λ-inyectivo ($1 \leq \lambda < \infty$) si siempre podemos obtener $\|\widehat{T}\| \leq \lambda \|T\|$.

NOTA: Todo espacio inyectivo es λ-inyectivo para algún λ.

$\ell_\infty(I) := \{(x_i)_{i \in I} \subset \mathbb{K} : \sup_i |x_i| < \infty\}$ es 1-inyectivo (Hahn-Banach).

Teorema (clásico)

Un espacio es 1-inyectivo si y solo si es lineal-isométrico a un $C(K)$ con K compacto extremadamente disconexo (la clausura de un abierto es abierto).

Problema (1960)

E inyectivo $\Rightarrow$ E isomorfo a un espacio 1-inyectivo?
$C(K)$ inyectivo $\Rightarrow$ $C(K)$ isomorfo a un espacio 1-inyectivo?

Variantes de la inyectividad

A. Avilés, F. Cabello Sánchez, J.M.F. Castillo, M. González, Y. Moreno.
Separably injective Banach spaces.
Lecture Notes in Mathematics, 2132. Springer, 2016.

Definición

E es separablemente inyectivo si dados un espacio separable X y un subespacio Y de X, todo $T : Y \to E$ admite extensión $\widehat{T} : X \to E$.
E es λ-sep. inyectivo ($1 \leq \lambda < \infty$) si siempre podemos obtener $\|\widehat{T}\| \leq \lambda \|T\|$.

Definición

E es universalmente separablemente inyectivo si dados un espacio X y un subespacio separable Y de X, todo $T : Y \to E$ admite extensión $\widehat{T} : X \to E$.
E es univ. λ-sep. inyectivo si siempre podemos obtener $\|\widehat{T}\| \leq \lambda \|T\|$.

E (univ.) sep. inyectivo $\Rightarrow$ E (univ.) λ-sep. inyectivo para algún λ.

Espacios (univ.) separablemente inyectivos

E inyectivo $\Rightarrow$ E univ. sep. inyectivo $\Rightarrow$ E sep. inyectivo.

$\not\Leftarrow$ $\not\Leftarrow$

c_0 es 2-sep. inyectivo, no univ. sep. inyectivo (no complementado en ℓ_∞).

ℓ_∞/c_0 es univ. sep. inyectivo pero no es inyectivo.

Sea E un $C(K)$ o un $\mathcal{L}_\infty$ con $\dim E = \infty$; $\mathfrak{U}$ ultrafiltro no trivial.

$E_\mathfrak{U}$ es univ. sep. inyectivo, no inyectivo.

La inyectividad separable es propiedad tres espacios.

CH $[\mathfrak{c} = \aleph_1]$ La inyectividad univ. separable no es propiedad tres espacios.

Zippin: E sep. inyectivo, de dim. infinita y separable $\Rightarrow E \simeq c_0$.

Todo espacio univ. sep. inyectivo de dim. infinita contiene ℓ_∞.

Espacios univ. separablemente inyectivos

Ejemplo: $\ell_\infty^c(I) := \left\{(x_i)_{i\in I} \subset \mathbb{K} : \sup_i |x_i| < \infty, \mathrm{card}(\{i : |x_i| \neq 0\}) \text{ contable}\right\}$

Todo subesp. separable de $\ell_\infty^c(I)$ está contenido en otro subesp. $\simeq \ell_\infty$.

I no contable $\Rightarrow \ell_\infty^c(I)$ no complementado en $\ell_\infty^c(I)$, luego no inyectivo.

Teorema

E es univ. sep. inyectivo $\Leftrightarrow$ cada subespacio separable de E está contenido en otro subespacio isomorfo a ℓ_∞.

Existen espacios univ. sep. inyectivos no isomorfos a ningún subespacio complementado de un $C(K)$.

Problema

Existen subespacios univ. sep. inyectivos de ℓ_∞ no isomorfos a ℓ_∞?

Espacios $C(K)$ univ. sep. inyectivos

Un compacto K es F-espacio si dados dos subconjuntos F_σ disjuntos de K, sus clausuras son disjuntas.

Teorema (clásico)

$C(K)$ es 1-sep. inyectivo $\Leftrightarrow$ $C(K)$ es un F-espacio

$$\Leftrightarrow \forall f \in C(K)\ \exists u \in C(K) \text{ tal que } f = |f|u.$$

Problema

Caracterizar los K tales que $C(K)$ es univ. 1-sep. inyectivo.

Problema

Caracterizar los K tales que $C(K)$ es sep. inyectivo o univ. sep. inyectivo.

Espacios separablemente inyectivos (1)

E sep. inyectivo $\Rightarrow c_0(E) \equiv c_0 \otimes_\epsilon E$ sep. inyectivo.

Problema

E, F sep. inyectivos $\Rightarrow E \otimes_\epsilon F$ sep. inyectivo?

Problema

Es $\ell_\infty \otimes_\epsilon \ell_\infty$ sep. inyectivo?

NOTA: $\ell_\infty \otimes_\epsilon \ell_\infty$ contiene una copia complementada de c_0,
luego no es univ. sep. inyectivo.

Espacios separablemente inyectivos (2)

CH [$\mathfrak{c} = \aleph_1$] E 1-sep. inyectivo $\Rightarrow$ E univ. 1-sep. inyectivo (Lindenstrauss).

[MA + $\mathfrak{c} = \aleph_2$] E 1-sep. inyectivo $\not\Rightarrow$ E univ. 1-sep. inyectivo.

Avilés-Koszmider (2016) [MA + $\mathfrak{c} > \aleph_1$] E 1-sep. inyectivo $\not\Rightarrow$ $E \supset M \simeq \ell_\infty$.
Luego $\not\Rightarrow$ E univ. sep. inyectivo.

E λ-sep. inyectivo con $\lambda < 2$, dim $E = \infty \Rightarrow \text{dens}(E) \geq \mathfrak{c}$.

Problema

E λ-sep. inyectivo con $\lambda < 2 \Rightarrow E$ isomorfo a un espacio 1-sep. inyectivo?

E univ. λ-sep. inyectivo con $\lambda < 2 \Rightarrow E$ isomorfo a un univ. 1-sep. inyectivo?

Problema

E λ-sep. inyectivo con $\lambda < 2 \Rightarrow E$ Grothendieck?

Equivalentemente: $\Rightarrow E$ no contiene copias complementadas de c_0?

Sumas torcidas e interpolación compleja (Kalton)

(X_0, X_1) par admisible de espacios de Banach; $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < Re\, z < 1\}$.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbb{S}, X_0 + X_1) \text{ espacio básico de funciones analíticas.}$$

$0 < \theta < 1$

$\delta_\theta, \delta'_\theta$ aplicaciones $\mathcal{H} \to X_0 + X_1$ dadas por $\delta_\theta(f) := f(\theta); \quad \delta'_\theta(f) := f'(\theta)$.

$X_\theta := \{f(\theta) : f \in \mathcal{H}\} \equiv \mathcal{H}/Ker(\delta_\theta) \simeq Ker(\delta_\theta)/\big(Ker(\delta_\theta) \cap Ker(\delta'_\theta)\big)$.

$X_\theta \oplus_\Omega X_\theta := \{\big(f'(\theta), f(\theta)\big) : f \in \mathcal{H}\} \equiv \mathcal{H}/\big(Ker(\delta_\theta) \cap Ker(\delta'_\theta)\big)$.

$$0 \longrightarrow X_\theta \xrightarrow{\ j\ } X_\theta \oplus_{\Omega_\theta} X_\theta \xrightarrow{\ q\ } X_\theta \longrightarrow 0,$$

es una sucesión exacta con $j\, f(\theta) := \big(0, f(\theta)\big)$ y $q\, \big(f'(\theta), f(\theta)\big) := f'(\theta)$.

$$\big(X_\theta \oplus_{\Omega_\theta} X_\theta\big)/j(X_\theta) \equiv X_\theta.$$

$X_\theta \oplus_{\Omega_\theta} X_\theta$ es no trivial si el subespacio $j(X_\theta)$ no es complementado.

Sumas torcidas no triviales

J.M.F. Castillo, V. Ferenczi, M. González. **Singular twisted sums generated by complex interpolation.** Trans. Amer. Math. Soc., aparecerá en 2017.

Sea (X_0, X_1) un par admisible de espacios de Banach; $0 < \theta < 1$.

Problema

Cuándo es no trivial la suma $X_\theta \oplus_{\Omega_\theta} X_\theta$?

Qué propiedades tienen las sumas no triviales $X_\theta \oplus_{\Omega_\theta} X_\theta$?

Problema

Cuando es la aplicación cociente q estrictamente singular?

Cuando es la inclusion j estrictamente cosingular?

Sumas torcidas de ℓ_2: el espacio Z_2 de Kalton y Peck

Ejemplo básico: $X_0 = c_0$, $X_1 = \ell_1$ $\quad X_{1/2} = \ell_2 \quad X_{1/2} \oplus_{\Omega_{1/2}} X_{1/2} = Z_2$.

Z_2 no contiene copias complementadas de ℓ_2.

En este caso j es estrict. cosingular y q es estrict. singular.

Si X tiene base monótona shrinking, $X_0 = X$, $X_1 = X^*$ $\quad X_{1/2} \simeq \ell_2$.

Para un mismo $X_{1/2}$, las sumas $X_{1/2} \oplus_{\Omega_{1/2}} X_{1/2}$ pueden ser distintas:

Existe una familia no contable de espacios $\ell_2 \oplus_{\Omega_{1/2}} \ell_2$ no isomorfos entre si.

Problema

Cómo probar que dos sumas torcidas $\ell_2 \oplus_{\Omega_{1/2}} \ell_2$ que provienen de pares distintos son (o no son) isomorfas?
Mismo problema en el caso general.

Ideales de operadores: propiedad de Grothendieck

Definición

X tiene la propiedad de Grothendieck si, para sucesiones en X^*, coinciden la convergencia débil y la $*$-débil.

Reflexivo $\Rightarrow$ Grothendieck.

Para espacios separables, Reflexivo $\Leftrightarrow$ Grothendieck.

$C(K)^{**}$ es Grothendieck (isomorfo a $\ell_\infty(\Gamma)$)

Problema

X Grothendieck $\Rightarrow$ X^{**} Grothendieck?

Ideales de operadores: propiedad de Dunford-Pettis

Definición

X tiene la propiedad de Dunford-Pettis (X tiene DPP) si dadas sucesiones débilmente nulas (x_n) en X y (x_n^*) en X^*, se verifica $\langle x_n, x_n^* \rangle \to 0$.

X^* tiene DPP $\Rightarrow X$ tiene DPP.

$C(K)$ y $L_1(\mu)$ (y todos sus duales) tienen la DPP.

$X = c_0(\ell_2^n)$ y $X^* = \ell_1(\ell_2^n)$ tienen la DPP, pero $X^{**} = \ell_\infty(\ell_2^n)$ no tiene la DPP.

Problema

X^{**} tiene DPP $\Rightarrow X^{***}$ tiene DPP?

Gracias por vuestra atención