Propiedades secuenciales en la topología débil*

XIV Encuentro de la Red de Análisis Funcional y Aplicaciones

Bilbao

Gonzalo Martínez Cervantes

Universidad de Murcia

10 de marzo de 2018

Esta investigación ha sido financiada parcialmente por los proyectos de investigación 19275/PI/14 de la Fundación Séneca - Agencia de Ciencia y Tecnología de la Región de Murcia y por el Ministerio de Economía y Competitividad y FEDER (proyectos MTM2014-54182-P y MTM2017-86182-P).

Definición

Sea (M, d) *un espacio métrico y* F *un subconjunto de* M.

Definición

Sea (M, d) un espacio métrico y F un subconjunto de M.

- *Un elemento x pertenece a $\overline{F}$ si y sólo si existe una sucesión en F que converge a x*

Definición

Sea (M, d) *un espacio métrico y* F *un subconjunto de* M.

- *Un elemento* x *pertenece a* $\overline{F}$ *si y sólo si existe una sucesión en* F *que converge a* x *(*M *es* **Fréchet-Urysohn***).*

Definición

Sea (M, d) un espacio métrico y F un subconjunto de M.

- *Un elemento x pertenece a $\overline{F}$ si y sólo si existe una sucesión en F que converge a x (M es* **Fréchet-Urysohn***).*
- *Si F no es cerrado, entonces existe una sucesión en F que converge a un punto fuera de F*

Definición

Sea (M, d) un espacio métrico y F un subconjunto de M.

- *Un elemento x pertenece a $\overline{F}$ si y sólo si existe una sucesión en F que converge a x (M es* **Fréchet-Urysohn***).*
- *Si F no es cerrado, entonces existe una sucesión en F que converge a un punto fuera de F (M es* **secuencial***).*

Definición

Sea (M, d) un espacio métrico y F un subconjunto de M.

- *Un elemento x pertenece a $\overline{F}$ si y sólo si existe una sucesión en F que converge a x (M es* **Fréchet-Urysohn***).*
- *Si F no es cerrado, entonces existe una sucesión en F que converge a un punto fuera de F (M es* **secuencial***).*
- *F es compacto si y sólo si es sucesionalmente compacto (es decir, si y sólo si toda sucesión en F tiene una subsucesión convergente a un punto de F).*

Definición

Sea K un espacio compacto.

Definición

Sea K un espacio compacto.

- K *es* **Fréchet-Urysohn (FU)** *si para cada conjunto* $F \subseteq K$ *y cada* $x \in \overline{F}$, *existe una sucesión en* F *que converge a* x.

Definición

Sea K un espacio compacto.

- K *es* **Fréchet-Urysohn (FU)** *si para cada conjunto* $F \subseteq K$ *y cada* $x \in \overline{F}$, *existe una sucesión en* F *que converge a* x.
- K *es* **secuencial** *si para cada conjunto* $F \subseteq K$ *no cerrado, existe una sucesión en* F *convergente a un punto fuera de* F.

Definición

Sea K un espacio compacto.

- K *es* **Fréchet-Urysohn (FU)** *si para cada conjunto* $F \subseteq K$ *y cada* $x \in \overline{F}$, *existe una sucesión en* F *que converge a* x.
- K *es* **secuencial** *si para cada conjunto* $F \subseteq K$ *no cerrado, existe una sucesión en* F *convergente a un punto fuera de* F.
- K *es* **sucesionalmente compacto** *si toda sucesión tiene una subsucesión convergente.*

Definición

Sea K un espacio compacto.

- K *es* **Fréchet-Urysohn (FU)** *si para cada conjunto* $F \subseteq K$ *y cada* $x \in \overline{F}$, *existe una sucesión en* F *que converge a* x.
- K *es* **secuencial** *si para cada conjunto* $F \subseteq K$ *no cerrado, existe una sucesión en* F *convergente a un punto fuera de* F.
- K *es* **sucesionalmente compacto** *si toda sucesión tiene una subsucesión convergente.*
- K *tiene* **estrechez numerable** *si para cada conjunto* $F \subseteq K$ *no cerrado, existe un conjunto numerable* $S \subseteq F$ *con* $\overline{S} \setminus F \neq \emptyset$.

Definición

Sea K un espacio compacto.

- K *es* **Fréchet-Urysohn (FU)** *si para cada conjunto $F \subseteq K$ y cada $x \in \overline{F}$, existe una sucesión en F que converge a x.*
- K *es* **secuencial** *si para cada conjunto $F \subseteq K$ no cerrado, existe una sucesión en F convergente a un punto fuera de F.*
- K *es* **sucesionalmente compacto** *si toda sucesión tiene una subsucesión convergente.*
- K *tiene* **estrechez numerable** *si para cada conjunto $F \subseteq K$ no cerrado, existe un conjunto numerable $S \subseteq F$ con $\overline{S} \setminus F \neq \emptyset$. Equivalentemente, para cada $x \in \overline{F}$ existe un conjunto numerable $S \subseteq F$ con $x \in \overline{S}$.*

$\boxed{K \text{ es FU}}$

$\boxed{K \text{ es FU}}$

$$\Downarrow$$

$\boxed{K \text{ es secuencial}}$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{K \text{ es FU}} \arrow[d, Rightarrow] & \\
\boxed{K \text{ es secuencial}} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
& \boxed{\begin{array}{c} K \text{ es sucesional-} \\ \text{mente compacto} \end{array}}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{K \text{ es FU}} \arrow[d, Rightarrow] & \\
\boxed{K \text{ es secuencial}} \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow, bend right] & \\
& \boxed{K \text{ es sucesionalmente compacto}} \\
\boxed{K \text{ tiene estrechez numerable}} &
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{K \text{ es FU}} \arrow[d, Rightarrow] & \\
\boxed{K \text{ es secuencial}} \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow, bend right] & \\
& \boxed{K \text{ es sucesionalmente compacto}} \\
\boxed{K \text{ tiene estrechez numerable}} &
\end{tikzcd}
$$

Problema de Moore-Mrowka: ¿Estrechez numerable implica secuencialidad?

$$
\begin{array}{c}
\boxed{K \text{ es FU}} \\
\Downarrow \\
\boxed{K \text{ es secuencial}}
\end{array}
$$

$\boxed{K \text{ es secuencial}} \Rightarrow \boxed{K \text{ es sucesionalmente compacto}}$

$\boxed{K \text{ es secuencial}} \Rightarrow \boxed{K \text{ tiene estrechez numerable}}$

Problema de Moore-Mrowka: ¿Estrechez numerable implica secuencialidad?

Sí pero no (Balogh, 1989).

Definición

Sea K un espacio compacto y F un subconjunto de K. Para cada ordinal $\alpha \leq \omega_1$ definimos la clausura secuencial α-ésima $S_\alpha(F)$ por inducción transfinita en α:

Definición

Sea K un espacio compacto y F un subconjunto de K. Para cada ordinal $\alpha \leq \omega_1$ definimos la clausura secuencial α-ésima $S_\alpha(F)$ por inducción transfinita en α:

- $S_0(F) = F$;

Definición

Sea K un espacio compacto y F un subconjunto de K. Para cada ordinal $\alpha \leq \omega_1$ definimos la clausura secuencial α-ésima $S_\alpha(F)$ por inducción transfinita en α:

- $S_0(F) = F$;
- $S_{\alpha+1}(F)$ *es la clausura secuencial de* $S_\alpha(F)$ *para cada* $\alpha < \omega_1$, *i.e.* $S_{\alpha+1}(F)$ *es el conjunto de límites de sucesiones en* $S_\alpha(F)$;

Definición

Sea K un espacio compacto y F un subconjunto de K. Para cada ordinal $\alpha \leq \omega_1$ definimos la clausura secuencial α-ésima $S_\alpha(F)$ por inducción transfinita en α:

- $S_0(F) = F$;
- $S_{\alpha+1}(F)$ *es la clausura secuencial de* $S_\alpha(F)$ *para cada* $\alpha < \omega_1$, *i.e.* $S_{\alpha+1}(F)$ *es el conjunto de límites de sucesiones en* $S_\alpha(F)$;
- $S_\alpha(F) = \bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta(F)$ *si* α *es un ordinal límite.*

Definición

Sea K un espacio compacto y F un subconjunto de K. Para cada ordinal $\alpha \leq \omega_1$ definimos la clausura secuencial α-ésima $S_\alpha(F)$ por inducción transfinita en α:

- $S_0(F) = F$;
- $S_{\alpha+1}(F)$ *es la clausura secuencial de* $S_\alpha(F)$ *para cada* $\alpha < \omega_1$, *i.e.* $S_{\alpha+1}(F)$ *es el conjunto de límites de sucesiones en* $S_\alpha(F)$;
- $S_\alpha(F) = \bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta(F)$ *si* α *es un ordinal límite.*

Observación: $S_{\omega_1}(F)$ es sucesionalmente cerrado para todo subespacio F.

Definición

Sea K un espacio compacto y F un subconjunto de K. Para cada ordinal $\alpha \leq \omega_1$ definimos la clausura secuencial α-ésima $S_\alpha(F)$ por inducción transfinita en α:

- $S_0(F) = F$;
- $S_{\alpha+1}(F)$ *es la clausura secuencial de* $S_\alpha(F)$ *para cada* $\alpha < \omega_1$, *i.e.* $S_{\alpha+1}(F)$ *es el conjunto de límites de sucesiones en* $S_\alpha(F)$;
- $S_\alpha(F) = \bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta(F)$ *si* α *es un ordinal límite.*

Observación: $S_{\omega_1}(F)$ es sucesionalmente cerrado para todo subespacio F. Por tanto, un compacto K es secuencial si y sólo si $S_{\omega_1}(F) = \overline{F}$ para cada subespacio F de K.

Definición

Sea K un espacio compacto y F un subconjunto de K. Para cada ordinal $\alpha \leq \omega_1$ definimos la clausura secuencial α-ésima $S_\alpha(F)$ por inducción transfinita en α:

- $S_0(F) = F$;
- *$S_{\alpha+1}(F)$ es la clausura secuencial de $S_\alpha(F)$ para cada $\alpha < \omega_1$, i.e. $S_{\alpha+1}(F)$ es el conjunto de límites de sucesiones en $S_\alpha(F)$;*
- *$S_\alpha(F) = \bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta(F)$ si α es un ordinal límite.*

Observación: $S_{\omega_1}(F)$ es sucesionalmente cerrado para todo subespacio F. Por tanto, un compacto K es secuencial si y sólo si $S_{\omega_1}(F) = \overline{F}$ para cada subespacio F de K.

Definición

K tiene orden secuencial $\leq \alpha$ si $S_\alpha(F) = \overline{F}$ para cada subespacio F de K.

Definición

Sea K un espacio compacto y F un subconjunto de K. Para cada ordinal $\alpha \leq \omega_1$ definimos la clausura secuencial α-ésima $S_\alpha(F)$ por inducción transfinita en α:

- $S_0(F) = F$;
- $S_{\alpha+1}(F)$ *es la clausura secuencial de* $S_\alpha(F)$ *para cada* $\alpha < \omega_1$, *i.e.* $S_{\alpha+1}(F)$ *es el conjunto de límites de sucesiones en* $S_\alpha(F)$;
- $S_\alpha(F) = \bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta(F)$ *si* α *es un ordinal límite.*

Observación: $S_{\omega_1}(F)$ es sucesionalmente cerrado para todo subespacio F. Por tanto, un compacto K es secuencial si y sólo si $S_{\omega_1}(F) = \overline{F}$ para cada subespacio F de K.

Definición

K tiene orden secuencial $\leq \alpha$ si $S_\alpha(F) = \overline{F}$ para cada subespacio F de K.

Por tanto, K tiene orden secuencial ≤ 1 si y sólo si es FU.

El compacto de Franklin: Un compacto con orden secuencial 2 (y por tanto no FU).

El compacto de Franklin: Un compacto con orden secuencial 2 (y por tanto no FU).

Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. Vamos a definir un espacio topológico $K = \mathbb{N} \cup \{x_M : M \in \mathcal{F}\} \cup \{\infty\}$ dando una base de entornos de cada punto de K:

El compacto de Franklin: Un compacto con orden secuencial 2 (y por tanto no FU).

Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. Vamos a definir un espacio topológico $K = \mathbb{N} \cup \{x_M : M \in \mathcal{F}\} \cup \{\infty\}$ dando una base de entornos de cada punto de K:

1. Los puntos de $\mathbb{N}$ son aislados;

El compacto de Franklin: Un compacto con orden secuencial 2 (y por tanto no FU).

Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. Vamos a definir un espacio topológico $K = \mathbb{N} \cup \{x_M : M \in \mathcal{F}\} \cup \{\infty\}$ dando una base de entornos de cada punto de K:

1. Los puntos de $\mathbb{N}$ son aislados;
2. Una base de entornos de un punto de la forma x_M es $\{M' \cup \{x_M\} : M' \subset M,\ M \setminus M' \text{ finito}\}$;

El compacto de Franklin: Un compacto con orden secuencial 2 (y por tanto no FU).

Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. Vamos a definir un espacio topológico $K = \mathbb{N} \cup \{x_M : M \in \mathcal{F}\} \cup \{\infty\}$ dando una base de entornos de cada punto de K:

1. Los puntos de $\mathbb{N}$ son aislados;
2. Una base de entornos de un punto de la forma x_M es $\{M' \cup \{x_M\} : M' \subset M,\ M \setminus M' \text{ finito}\}$;
3. Un base de entornos de $\{\infty\}$ viene dada por $K \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n)$, donde $U_1, U_2, \ldots, U_n$ son entornos básicos de la forma anterior.

El compacto de Franklin: Un compacto con orden secuencial 2 (y por tanto no FU).

Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. Vamos a definir un espacio topológico $K = \mathbb{N} \cup \{x_M : M \in \mathcal{F}\} \cup \{\infty\}$ dando una base de entornos de cada punto de K:

1. Los puntos de $\mathbb{N}$ son aislados;
2. Una base de entornos de un punto de la forma x_M es $\{M' \cup \{x_M\} : M' \subset M,\ M \setminus M' \text{ finito}\}$;
3. Un base de entornos de $\{\infty\}$ viene dada por $K \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n)$, donde $U_1, U_2, \ldots, U_n$ son entornos básicos de la forma anterior.

Para que K sea Hausdorff, necesitamos que $M \cap M'$ sea finito para cada par de conjuntos distintos $M,\ M'$ de $\mathcal{F}$.

El compacto de Franklin: Un compacto con orden secuencial 2 (y por tanto no FU).

Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. Vamos a definir un espacio topológico $K = \mathbb{N} \cup \{x_M : M \in \mathcal{F}\} \cup \{\infty\}$ dando una base de entornos de cada punto de K:

1. Los puntos de $\mathbb{N}$ son aislados;
2. Una base de entornos de un punto de la forma x_M es $\{M' \cup \{x_M\} : M' \subset M, \ M \setminus M' \text{ finito}\}$;
3. Un base de entornos de $\{\infty\}$ viene dada por $K \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n)$, donde $U_1, U_2, \ldots, U_n$ son entornos básicos de la forma anterior.

Para que K sea Hausdorff, necesitamos que $M \cap M'$ sea finito para cada par de conjuntos distintos $M, \ M'$ de $\mathcal{F}$. Para que no haya sucesiones en $\mathbb{N}$ que converjan a ∞, tomamos $\mathcal{F}$ de manera que para cada conjunto infinito $N \subseteq \mathbb{N}$ exista $M \in \mathcal{F}$ con $M \cap N$ infinito (es decir, $\mathcal{F}$ es **una familia maximal casi disjunta**).

El compacto de Franklin: Un compacto con orden secuencial 2 (y por tanto no FU).

Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. Vamos a definir un espacio topológico $K = \mathbb{N} \cup \{x_M : M \in \mathcal{F}\} \cup \{\infty\}$ dando una base de entornos de cada punto de K:

1. Los puntos de $\mathbb{N}$ son aislados;
2. Una base de entornos de un punto de la forma x_M es $\{M' \cup \{x_M\} : M' \subset M,\ M \setminus M' \text{ finito}\}$;
3. Un base de entornos de $\{\infty\}$ viene dada por $K \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n)$, donde $U_1, U_2, \ldots, U_n$ son entornos básicos de la forma anterior.

Para que K sea Hausdorff, necesitamos que $M \cap M'$ sea finito para cada par de conjuntos distintos $M,\ M'$ de $\mathcal{F}$. Para que no haya sucesiones en $\mathbb{N}$ que converjan a ∞, tomamos $\mathcal{F}$ de manera que para cada conjunto infinito $N \subseteq \mathbb{N}$ exista $M \in \mathcal{F}$ con $M \cap N$ infinito (es decir, $\mathcal{F}$ es **una familia maximal casi disjunta**).

El compacto de Franklin: Un compacto con orden secuencial 2 (y por tanto no FU).

Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. Vamos a definir un espacio topológico $K = \mathbb{N} \cup \{x_M : M \in \mathcal{F}\} \cup \{\infty\}$ dando una base de entornos de cada punto de K:

1. Los puntos de $\mathbb{N}$ son aislados;
2. Una base de entornos de un punto de la forma x_M es $\{M' \cup \{x_M\} : M' \subset M,\ M \setminus M' \text{ finito}\}$;
3. Un base de entornos de $\{\infty\}$ viene dada por $K \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n)$, donde $U_1, U_2, \ldots, U_n$ son entornos básicos de la forma anterior.

Para que K sea Hausdorff, necesitamos que $M \cap M'$ sea finito para cada par de conjuntos distintos $M,\ M'$ de $\mathcal{F}$. Para que no haya sucesiones en $\mathbb{N}$ que converjan a ∞, tomamos $\mathcal{F}$ de manera que para cada conjunto infinito $N \subseteq \mathbb{N}$ exista $M \in \mathcal{F}$ con $M \cap N$ infinito (es decir, $\mathcal{F}$ es **una familia maximal casi disjunta**).

Pregunta (Arhangel'skii y Franklin, 1968). ¿Existen compactos con orden secuencial mayor que 2?

X tiene bola dual FU

X tiene bola dual FU

$$\Downarrow$$

X tiene bola dual secuencial

X tiene bola dual FU

$\Downarrow$

X tiene bola dual secuencial

$\searrow$

X tiene bola dual sucesionalmente compacta

X tiene bo-
la dual FU

$\Downarrow$

X tiene bola
dual secuencial

$\Downarrow$

X tiene bola
dual sucesional-
mente compacta

X tiene bola dual
con estrechez
numerable

Definición

Sea X un espacio de Banach.

- *X tiene la* **propiedad** *$\mathcal{E}$ (de Efremov) si para cada conjunto convexo $C \subseteq B_{X^*}$ y cada elemento x en la clausura débil* de C, existe una sucesión en C que converge a x.*

Definición

Sea X un espacio de Banach.

- X *tiene la* **propiedad** $\mathcal{E}$ *(de Efremov) si para cada conjunto convexo* $C \subseteq B_{X^*}$ *y cada elemento* x *en la clausura débil* de* C, *existe una sucesión en* C *que converge a* x. *Es decir,* $S_1(C) = \overline{C}^{w^*}$ *para cada conjunto convexo y acotado* C.

Definición

Sea X un espacio de Banach.

- *X tiene la **propiedad** $\mathcal{E}$ (de Efremov) si para cada conjunto convexo $C \subseteq B_{X^*}$ y cada elemento x en la clausura débil* de C, existe una sucesión en C que converge a x. Es decir, $S_1(C) = \overline{C}^{w^*}$ para cada conjunto convexo y acotado C.*
- *X tiene la **propiedad** $\mathcal{E}'$ si para cada conjunto convexo $C \subseteq B_{X^*}$ no cerrado existe una sucesión en C convergente a un punto fuera de C.*

Definición

Sea X un espacio de Banach.

- *X tiene la* **propiedad** $\mathcal{E}$ *(de Efremov) si para cada conjunto convexo $C \subseteq B_{X^*}$ y cada elemento x en la clausura débil* de C, existe una sucesión en C que converge a x. Es decir, $S_1(C) = \overline{C}^{w^*}$ para cada conjunto convexo y acotado C.*
- *X tiene la* **propiedad** $\mathcal{E}'$ *si para cada conjunto convexo $C \subseteq B_{X^*}$ no cerrado existe una sucesión en C convergente a un punto fuera de C. Es decir, $S_{\omega_1}(C) = \overline{C}^{w^*}$ para cada conjunto convexo y acotado C.*

Definición

Sea X un espacio de Banach.

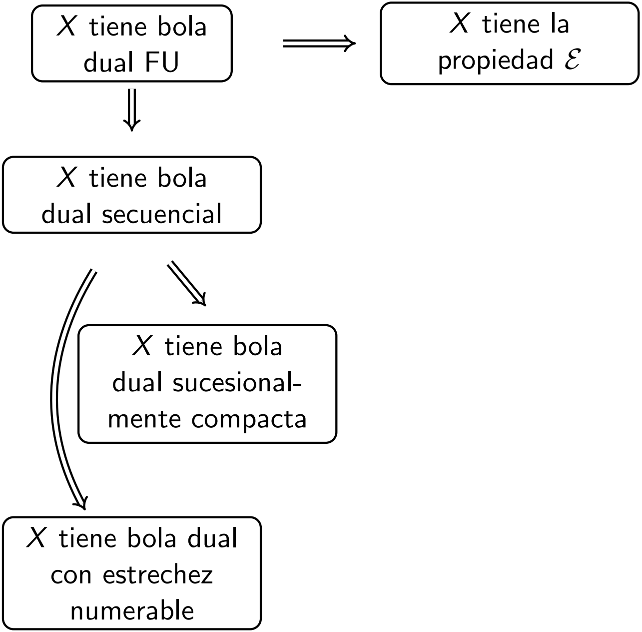
- *X tiene la* **propiedad** *$\mathcal{E}$ (de Efremov) si para cada conjunto convexo $C \subseteq B_{X^*}$ y cada elemento x en la clausura débil* de C, existe una sucesión en C que converge a x. Es decir, $S_1(C) = \overline{C}^{w^*}$ para cada conjunto convexo y acotado C.*
- *X tiene la* **propiedad** *$\mathcal{E}'$ si para cada conjunto convexo $C \subseteq B_{X^*}$ no cerrado existe una sucesión en C convergente a un punto fuera de C. Es decir, $S_{\omega_1}(C) = \overline{C}^{w^*}$ para cada conjunto convexo y acotado C. Si además se verifica $S_\alpha(C) = \overline{C}^{w^*}$ para todo conjunto convexo y acotado C, entonces decimos que X tiene la propiedad* **propiedad** *$\mathcal{E}(\alpha)$.*

Definición

Sea X un espacio de Banach.

- *X tiene la* **propiedad** $\mathcal{E}$ *(de Efremov) si para cada conjunto convexo $C \subseteq B_{X^*}$ y cada elemento x en la clausura débil* de C, existe una sucesión en C que converge a x. Es decir, $S_1(C) = \overline{C}^{w^*}$ para cada conjunto convexo y acotado C.*
- *X tiene la* **propiedad** $\mathcal{E}'$ *si para cada conjunto convexo $C \subseteq B_{X^*}$ no cerrado existe una sucesión en C convergente a un punto fuera de C. Es decir, $S_{\omega_1}(C) = \overline{C}^{w^*}$ para cada conjunto convexo y acotado C. Si además se verifica $S_\alpha(C) = \overline{C}^{w^*}$ para todo conjunto convexo y acotado C, entonces decimos que X tiene la propiedad* **propiedad** $\mathcal{E}(\alpha)$.
- *X tiene la* **propiedad (C)** *de Corson si para cada conjunto convexo $C \subseteq B_{X^*}$ no cerrado existe un conjunto numerable $S \subseteq C$ con $\overline{S}^{w^*} \setminus C \neq \emptyset$ (Caracterización de Pol de la propiedad (C)).*

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{X tiene bola dual FU}} \arrow[d, Rightarrow] & \\
\boxed{\text{X tiene bola dual secuencial}} \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow, bend right] & \\
& \boxed{\text{X tiene bola dual sucesionalmente compacta}} \\
\boxed{\text{X tiene bola dual con estrechez numerable}} &
\end{tikzcd}$$

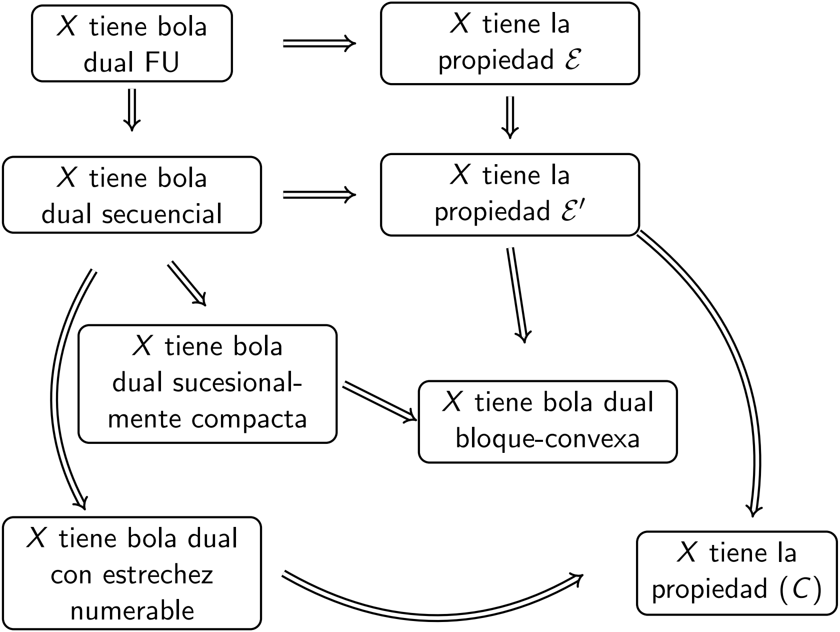

X tiene bola dual FU
X tiene la propiedad $\mathcal{E}$
X tiene bola dual secuencial
X tiene bola dual sucesionalmente compacta
X tiene bola dual con estrechez numerable

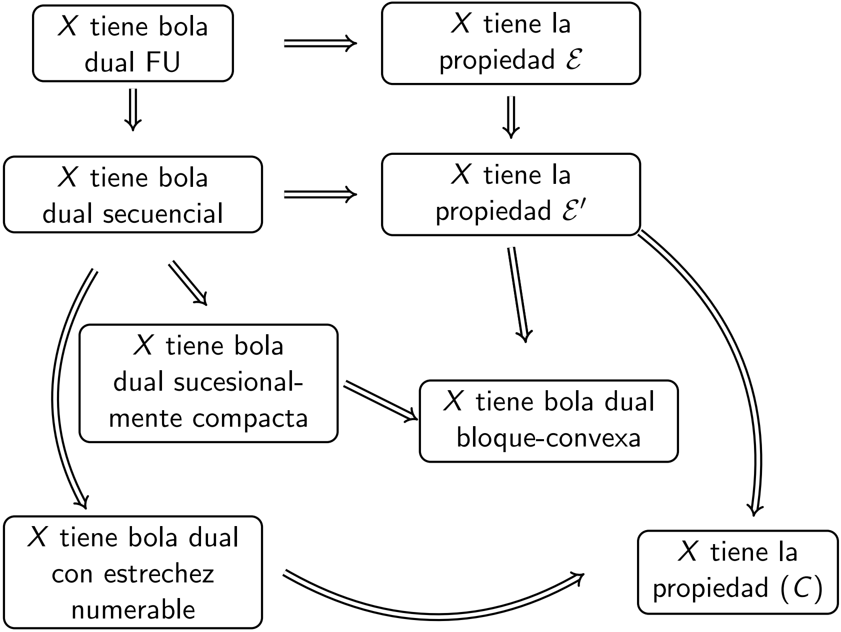
$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c} X \text{ tiene bola} \\ \text{dual FU} \end{array}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\begin{array}{c} X \text{ tiene la} \\ \text{propiedad } \mathcal{E} \end{array}} \\
\boxed{\begin{array}{c} X \text{ tiene bola} \\ \text{dual secuencial} \end{array}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow, bend right] & \boxed{\begin{array}{c} X \text{ tiene la} \\ \text{propiedad } \mathcal{E}' \end{array}} \\
& \boxed{\begin{array}{c} X \text{ tiene bola} \\ \text{dual sucesional-} \\ \text{mente compacta} \end{array}} \\
\boxed{\begin{array}{c} X \text{ tiene bola dual} \\ \text{con estrechez} \\ \text{numerable} \end{array}}
\end{tikzcd}
$$

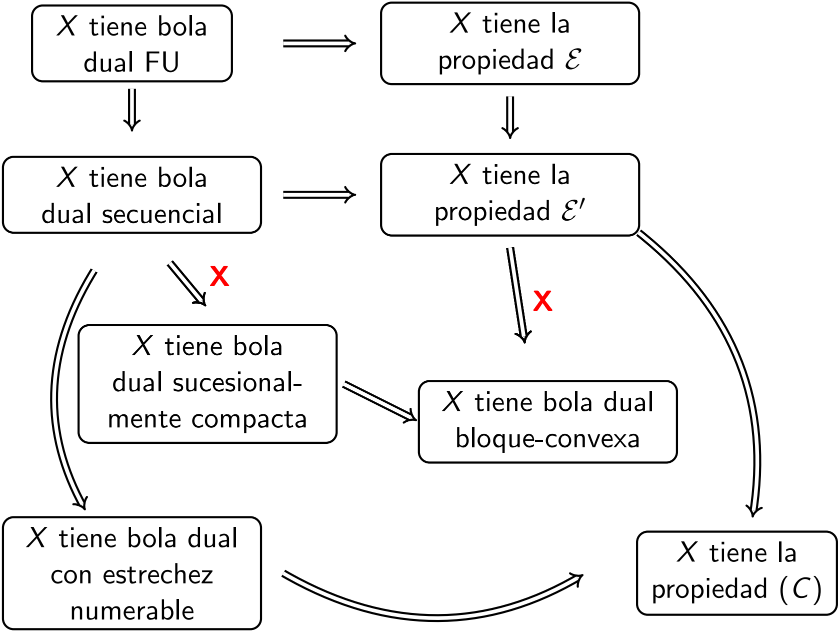
$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{X tiene bola dual FU}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\text{X tiene la propiedad $\mathcal{E}$}} & \\
\boxed{\text{X tiene bola dual secuencial}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow, bend right] & \boxed{\text{X tiene la propiedad $\mathcal{E}'$}} & \\
 & \boxed{\text{X tiene bola dual sucesionalmente compacta}} & \\
\boxed{\text{X tiene bola dual con estrechez numerable}} \arrow[rr, Rightarrow, bend right] & & \boxed{\text{X tiene la propiedad (C)}}
\end{tikzcd}
$$

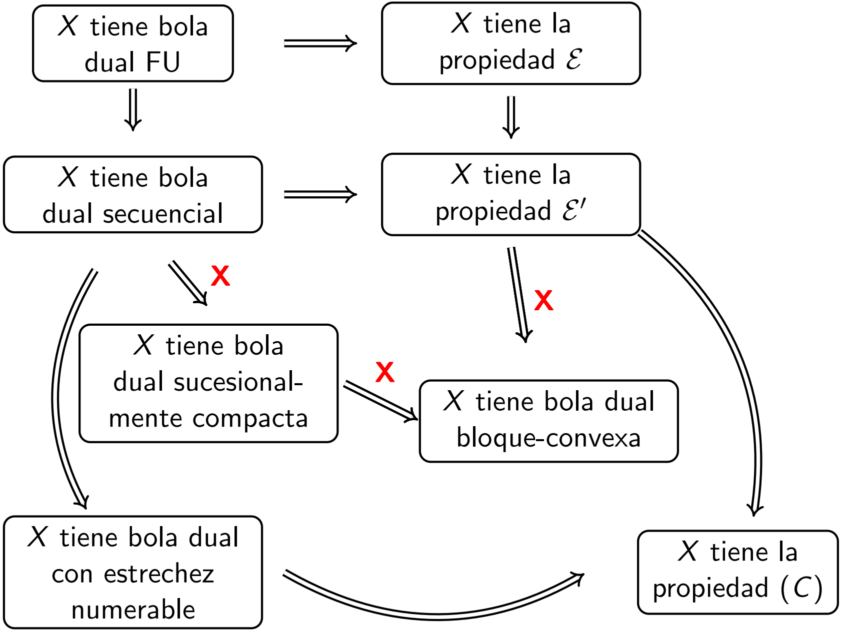
$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{X tiene bola dual FU}} \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & & \boxed{\text{X tiene la propiedad $\mathcal{E}$}} \arrow[d, Rightarrow] & \\
\boxed{\text{X tiene bola dual secuencial}} \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow, bend right] & & \boxed{\text{X tiene la propiedad $\mathcal{E}'$}} & \\
& \boxed{\text{X tiene bola dual sucesional-mente compacta}} & & \\
\boxed{\text{X tiene bola dual con estrechez numerable}} \arrow[rrr, Rightarrow, bend right] & & & \boxed{\text{X tiene la propiedad (C)}}
\end{tikzcd}
$$

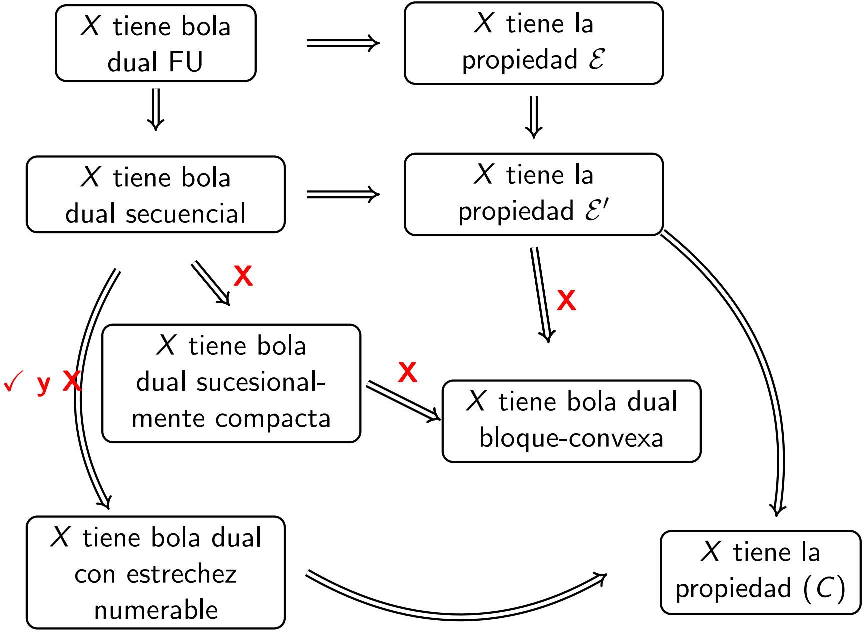
$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c} X \text{ tiene bola} \\ \text{dual FU} \end{array}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\begin{array}{c} X \text{ tiene la} \\ \text{propiedad } \mathcal{E} \end{array}} \arrow[d, Rightarrow] & \\
\boxed{\begin{array}{c} X \text{ tiene bola} \\ \text{dual secuencial} \end{array}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow, bend right] & \boxed{\begin{array}{c} X \text{ tiene la} \\ \text{propiedad } \mathcal{E}' \end{array}} \arrow[ddr, Rightarrow, bend left] & \\
 & \boxed{\begin{array}{c} X \text{ tiene bola} \\ \text{dual sucesional-} \\ \text{mente compacta} \end{array}} & \\
\boxed{\begin{array}{c} X \text{ tiene bola dual} \\ \text{con estrechez} \\ \text{numerable} \end{array}} \arrow[rr, Rightarrow, bend right] & & \boxed{\begin{array}{c} X \text{ tiene la} \\ \text{propiedad } (C) \end{array}}
\end{tikzcd}
$$

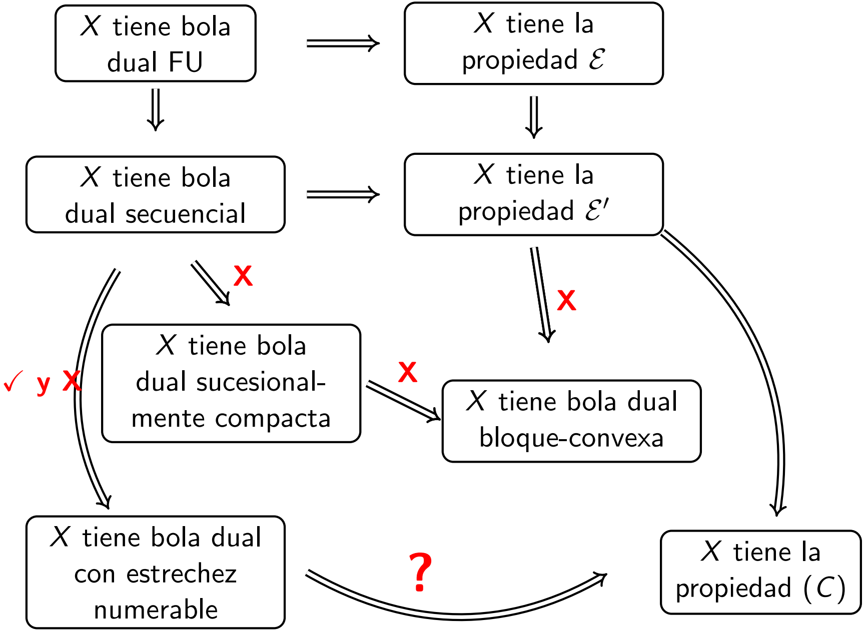

X tiene bola dual FU
X tiene la propiedad $\mathcal{E}$
X tiene bola dual secuencial
X tiene la propiedad $\mathcal{E}'$
X tiene bola dual sucesional-mente compacta
X tiene bola dual bloque-convexa
X tiene bola dual con estrechez numerable
X tiene la propiedad (C)

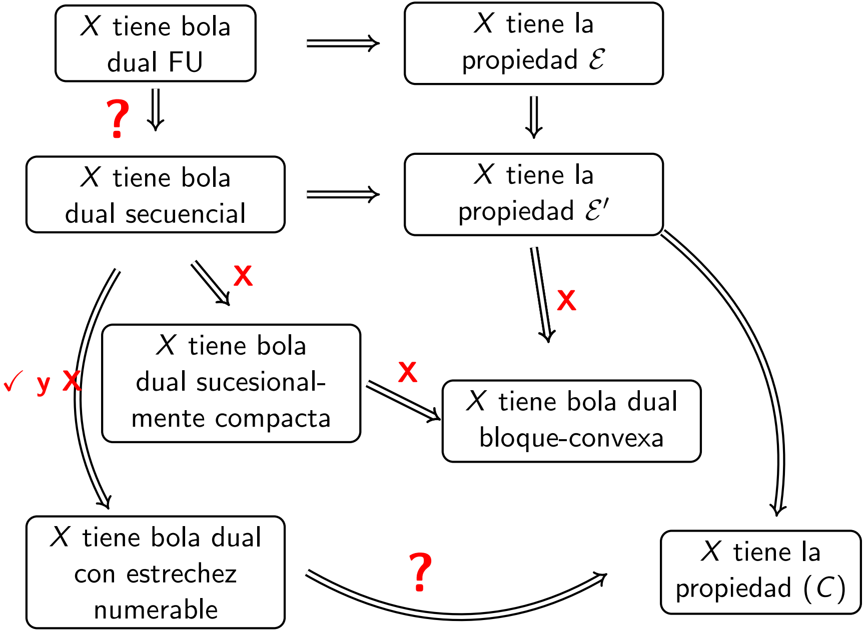

X tiene bola dual FU
X tiene la propiedad $\mathcal{E}$
X tiene bola dual secuencial
X tiene la propiedad $\mathcal{E}'$
X tiene bola dual sucesionalmente compacta
X tiene bola dual bloque-convexa
X tiene bola dual con estrechez numerable
X tiene la propiedad (C)


X tiene bola dual FU
X tiene la propiedad $\mathcal{E}$
X tiene bola dual secuencial
X tiene la propiedad $\mathcal{E}'$
X
X
X tiene bola dual sucesional-mente compacta
X tiene bola dual bloque-convexa
X tiene bola dual con estrechez numerable
X tiene la propiedad (C)


X tiene bola dual FU
X tiene la propiedad $\mathcal{E}$
X tiene bola dual secuencial
X tiene la propiedad $\mathcal{E}'$
X
X
X tiene bola dual sucesional-mente compacta
X
X tiene bola dual bloque-convexa
X tiene bola dual con estrechez numerable
X tiene la propiedad (C)


X tiene bola dual FU
X tiene la propiedad $\mathcal{E}$
X tiene bola dual secuencial
X tiene la propiedad $\mathcal{E}'$
X
X
X tiene bola dual sucesionalmente compacta
✓ y X
X
X tiene bola dual bloque-convexa
X tiene bola dual con estrechez numerable
X tiene la propiedad (C)


X tiene bola dual FU
X tiene la propiedad $\mathcal{E}$
X tiene bola dual secuencial
X tiene la propiedad $\mathcal{E}'$
X
X
✓ y X
X tiene bola dual sucesional-mente compacta
X
X tiene bola dual bloque-convexa
X tiene bola dual con estrechez numerable
?
X tiene la propiedad (C)


X tiene bola dual FU
X tiene la propiedad $\mathcal{E}$
?
X tiene bola dual secuencial
X tiene la propiedad $\mathcal{E}'$
X
X
X tiene bola dual sucesional-mente compacta
✓ y X
X
X tiene bola dual bloque-convexa
X tiene bola dual con estrechez numerable
?
X tiene la propiedad (C)

Pregunta (A. Plichko, 2014)

Si X es un espacio de Banach con bola dual secuencial, ¿entonces tiene bola dual FU?

Pregunta (A. Plichko, 2014)

Si X es un espacio de Banach con bola dual secuencial, ¿entonces tiene bola dual FU?

Teorema (G.M.C., 2017)

Si X es un espacio de Banach con bola dual sucesionalmente compacta y hay un subespacio $Y \subseteq X$ tal que Y y X/Y tienen bola dual secuencial, entonces X tiene bola dual secuencial.

Pregunta (A. Plichko, 2014)

Si X es un espacio de Banach con bola dual secuencial, ¿entonces tiene bola dual FU?

Teorema (G.M.C., 2017)

Si X es un espacio de Banach con bola dual sucesionalmente compacta y hay un subespacio $Y \subseteq X$ tal que Y y X/Y tienen bola dual secuencial, entonces X tiene bola dual secuencial.

Pregunta

¿Es tener bola dual secuencial una propiedad de tres-espacios?

Teorema (G.M.C., 2017)

Si X es un espacio de Banach con bola dual sucesionalmente compacta y hay un subespacio $Y \subseteq X$ tal que Y tiene bola dual secuencial con orden secuencial $\leq \gamma_1$ y X/Y tiene bola dual secuencial secuencial con orden secuencial $\leq \gamma_2$, entonces X tiene bola dual secuencial con orden secuencial $\leq \gamma_1 + \gamma_2$.

Teorema (G.M.C., 2017)

Si X es un espacio de Banach con bola dual sucesionalmente compacta y hay un subespacio $Y \subseteq X$ tal que Y tiene bola dual secuencial con orden secuencial $\leq \gamma_1$ y X/Y tiene bola dual secuencial secuencial con orden secuencial $\leq \gamma_2$, entonces X tiene bola dual secuencial con orden secuencial $\leq \gamma_1 + \gamma_2$.

Teorema (G.M.C., 2017)

Si X es un espacio de Banach con bola dual bloque-convexa y hay un subespacio $Y \subseteq X$ tal que Y tiene la propiedad $\mathcal{E}(\gamma_1)$ y X/Y tiene la propiedad $\mathcal{E}(\gamma_2)$, entonces X tiene la propiedad $\mathcal{E}(\gamma_1 + \gamma_2)$.

Teorema (G.M.C., 2017)

Si X es un espacio de Banach con bola dual sucesionalmente compacta y hay un subespacio $Y \subseteq X$ tal que Y tiene bola dual secuencial con orden secuencial $\leq \gamma_1$ y X/Y tiene bola dual secuencial secuencial con orden secuencial $\leq \gamma_2$, entonces X tiene bola dual secuencial con orden secuencial $\leq \gamma_1 + \gamma_2$.

Teorema (G.M.C., 2017)

Si X es un espacio de Banach con bola dual sucesionalmente compacta y hay un subespacio $Y \subseteq X$ tal que Y tiene bola dual secuencial con orden secuencial $\leq \gamma_1$ y X/Y tiene bola dual secuencial secuencial con orden secuencial $\leq \gamma_2$, entonces X tiene bola dual secuencial con orden secuencial $\leq \gamma_1 + \gamma_2$.

Sea $\mathcal{F}$ una familia maximal casi disjunta en $\mathbb{N}$.

Teorema (G.M.C., 2017)

Si X es un espacio de Banach con bola dual sucesionalmente compacta y hay un subespacio $Y \subseteq X$ tal que Y tiene bola dual secuencial con orden secuencial $\leq \gamma_1$ y X/Y tiene bola dual secuencial secuencial con orden secuencial $\leq \gamma_2$, entonces X tiene bola dual secuencial con orden secuencial $\leq \gamma_1 + \gamma_2$.

Sea $\mathcal{F}$ una familia maximal casi disjunta en $\mathbb{N}$. El espacio de Johnson-Lindenstrauss JL_2 se define como el completado de $\operatorname{span}(c_0 \cup \{\chi_N : N \in \mathcal{F}\}) \subseteq \ell_\infty$ con respecto a la norma

$$\left\| x + \sum_{1 \leq i \leq k} a_i \chi_{N_i} \right\| = \text{máx} \left\{ \left\| x + \sum_{1 \leq i \leq k} a_i \chi_{N_i} \right\|_\infty, \left(\sum_{1 \leq i \leq k} |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Teorema (G.M.C., 2017)

Si X es un espacio de Banach con bola dual sucesionalmente compacta y hay un subespacio $Y \subseteq X$ tal que Y tiene bola dual secuencial con orden secuencial $\leq \gamma_1$ y X/Y tiene bola dual secuencial secuencial con orden secuencial $\leq \gamma_2$, entonces X tiene bola dual secuencial con orden secuencial $\leq \gamma_1 + \gamma_2$.

Sea $\mathcal{F}$ una familia maximal casi disjunta en $\mathbb{N}$. El espacio de Johnson-Lindenstrauss JL_2 se define como el completado de $\operatorname{span}\left(c_0 \cup \{\chi_N : N \in \mathcal{F}\}\right) \subseteq \ell_\infty$ con respecto a la norma

$$\left\| x + \sum_{1 \leq i \leq k} a_i \chi_{N_i} \right\| = \max \left\{ \left\| x + \sum_{1 \leq i \leq k} a_i \chi_{N_i} \right\|_\infty , \left(\sum_{1 \leq i \leq k} |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Si simplemente consideramos $\overline{\operatorname{span}}^{\|\cdot\|_\infty} \left(c_0 \cup \{\chi_N : N \in \mathcal{F}\}\right) \subseteq \ell_\infty$ obtenemos el espacio de Johnson-Lindenstrauss JL_0, que es isomorfo a $\mathcal{C}(K)$ con K el compacto de Franklin.

El espacio de Johnson-Lindenstrauss JL_2 es una suma torcida de c_0 y $\ell_2(\mathcal{F})$.

El espacio de Johnson-Lindenstrauss JL_2 es una suma torcida de c_0 y $\ell_2(\mathcal{F})$. Estos espacios tienen bola dual FU.

El espacio de Johnson-Lindenstrauss JL_2 es una suma torcida de c_0 y $\ell_2(\mathcal{F})$. Estos espacios tienen bola dual FU. JL_2 tiene bola dual sucesionalmente compacta. Por tanto, JL_2 tiene bola dual secuencial con orden secuencial ≤ 2.

El espacio de Johnson-Lindenstrauss JL_2 es una suma torcida de c_0 y $\ell_2(\mathcal{F})$. Estos espacios tienen bola dual FU. JL_2 tiene bola dual sucesionalmente compacta. Por tanto, JL_2 tiene bola dual secuencial con orden secuencial ≤ 2. Como el compacto de Franklin es un subespacio de la bola dual de JL_2, podemos concluir que JL_2 **tiene bola dual secuencial con orden secuencial exactamente 2**.

El espacio de Johnson-Lindenstrauss JL_2 es una suma torcida de c_0 y $\ell_2(\mathcal{F})$. Estos espacios tienen bola dual FU. JL_2 tiene bola dual sucesionalmente compacta. Por tanto, JL_2 tiene bola dual secuencial con orden secuencial ≤ 2. Como el compacto de Franklin es un subespacio de la bola dual de JL_2, podemos concluir que JL_2 **tiene bola dual secuencial con orden secuencial exactamente 2**.

Corolario (G.M.C., 2017)

Por tanto, la pregunta de Plichko tiene una respuesta negativa; **tener bola dual secuencial no implica tener bola dual FU.**

Teorema (G.M.C., 2017)

Si K es un compacto disperso de altura numerable, entonces $\mathcal{C}(K)$ tiene bola dual secuencial con orden secuencial menor o igual que la altura de K.

Teorema (G.M.C., 2017)

Si K es un compacto disperso de altura numerable, entonces $\mathcal{C}(K)$ tiene bola dual secuencial con orden secuencial menor o igual que la altura de K.

Teorema (A.I. Baškirov, 1974)

Bajo la hipótesis del continuo existen compactos dispersos secuenciales de cualquier orden y tal que el orden secuencial coinciden con la altura (cuando el orden secuencial es un ordinal sucesor).

Teorema (G.M.C., 2017)

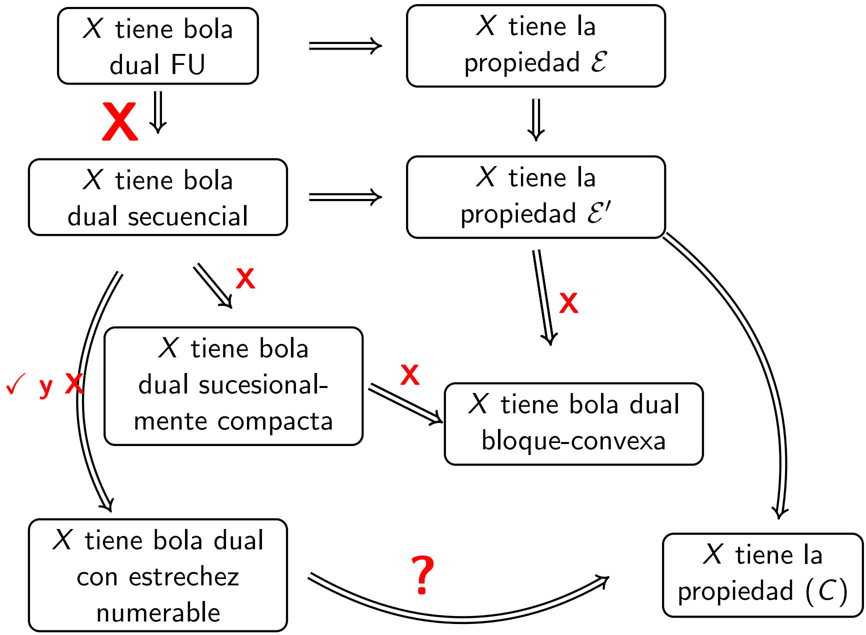
Si K es un compacto disperso de altura numerable, entonces $\mathcal{C}(K)$ tiene bola dual secuencial con orden secuencial menor o igual que la altura de K.

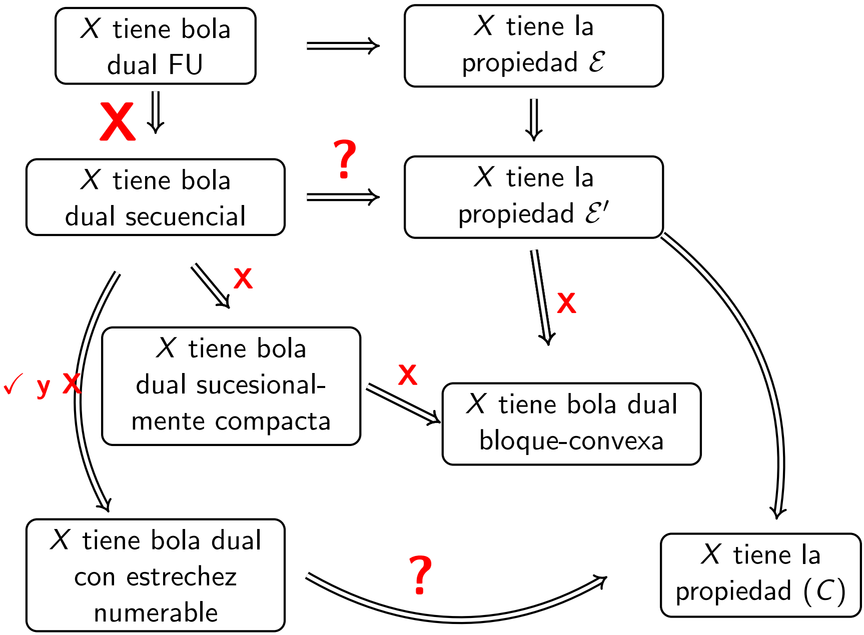
Teorema (A.I. Baškirov, 1974)

Bajo la hipótesis del continuo existen compactos dispersos secuenciales de cualquier orden y tal que el orden secuencial coinciden con la altura (cuando el orden secuencial es un ordinal sucesor).

Corolario (G.M.C., 2017)

Bajo la hipótesis del continuo existen espacios de Banach con bola dual secuencial de orden secuencial numerable arbitrariamente grande.


X tiene bola dual FU
X tiene la propiedad $\mathcal{E}$
X tiene bola dual secuencial
X tiene la propiedad $\mathcal{E}'$
X tiene bola dual sucesionalmente compacta
X tiene bola dual bloque-convexa
X tiene bola dual con estrechez numerable
X tiene la propiedad (C)
X
X
X
X
✓ y X
?


X tiene bola dual FU
X tiene la propiedad ℰ
X
X tiene bola dual secuencial
?
X tiene la propiedad ℰ'
X
X
✓ y X
X tiene bola dual sucesionalmente compacta
X
X tiene bola dual bloque-convexa
X tiene bola dual con estrechez numerable
?
X tiene la propiedad (C)

Pregunta (Plichko y Yost, 1980)

¿La propiedad (C) implica la propiedad $\mathcal{E}$?

Pregunta (Plichko y Yost, 1980)

¿La propiedad (C) implica la propiedad $\mathcal{E}$?

Pregunta (Plichko y Yost, 1980)

¿La propiedad (C) implica la propiedad $\mathcal{E}$?
¿Tiene el espacio de Johnson-Lindenstraus JL_2 la propiedad $\mathcal{E}$?

Pregunta (Plichko y Yost, 1980)

¿La propiedad (C) implica la propiedad $\mathcal{E}$?
¿Tiene el espacio de Johnson-Lindenstraus JL_2 la propiedad $\mathcal{E}$?

J. Moore y C. Brech dan ejemplos consistentes de espacios de Banach con la propiedad (C) pero sin la propiedad $\mathcal{E}$.

Pregunta (Plichko y Yost, 1980)

¿La propiedad (C) implica la propiedad $\mathcal{E}$?
¿Tiene el espacio de Johnson-Lindenstraus JL_2 la propiedad $\mathcal{E}$?

J. Moore y C. Brech dan ejemplos consistentes de espacios de Banach con la propiedad (C) pero sin la propiedad $\mathcal{E}$. El ejemplo de Brech no tiene la propiedad $\mathcal{E}'$.

Pregunta (Plichko y Yost, 1980)

¿La propiedad (C) implica la propiedad $\mathcal{E}$?
¿Tiene el espacio de Johnson-Lindenstraus JL_2 la propiedad $\mathcal{E}$?

J. Moore y C. Brech dan ejemplos consistentes de espacios de Banach con la propiedad (C) pero sin la propiedad $\mathcal{E}$. El ejemplo de Brech no tiene la propiedad $\mathcal{E}'$.

Teorema (A. Avilés, G.M.C., J. Rodríguez)

Bajo la hipótesis del continuo, existe una familia maximal casi disjunta para la cual el correspondiente espacio de Johnson-Lindenstrauss JL_2 **no** *tiene la propiedad $\mathcal{E}$.*

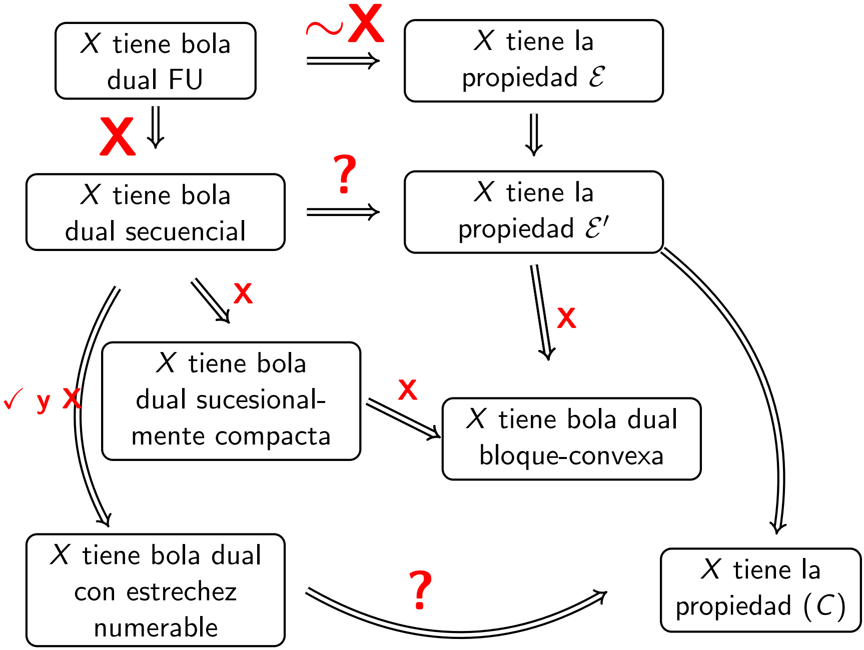
Pregunta (Plichko y Yost, 1980)

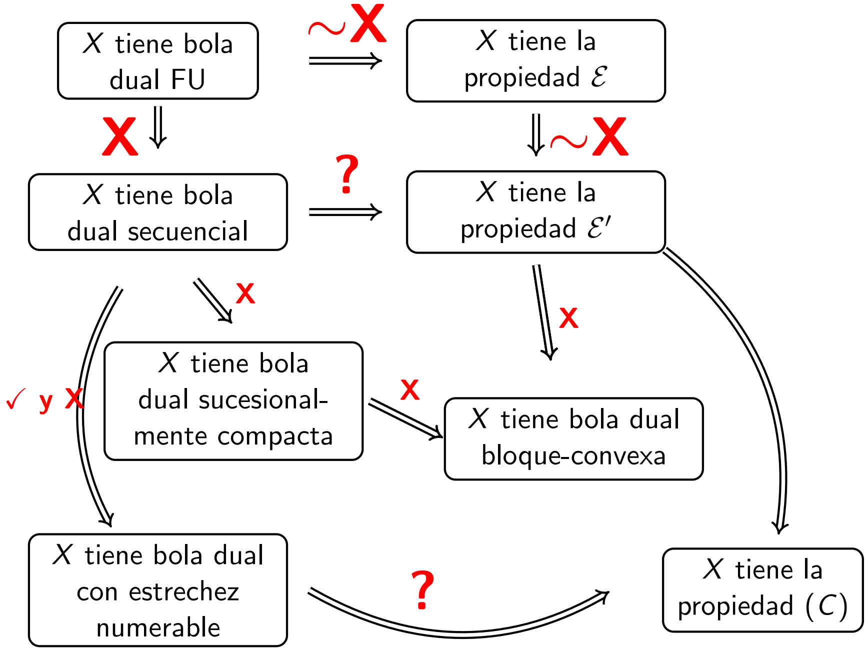
¿La propiedad (C) implica la propiedad $\mathcal{E}$?
¿Tiene el espacio de Johnson-Lindenstraus JL_2 la propiedad $\mathcal{E}$?

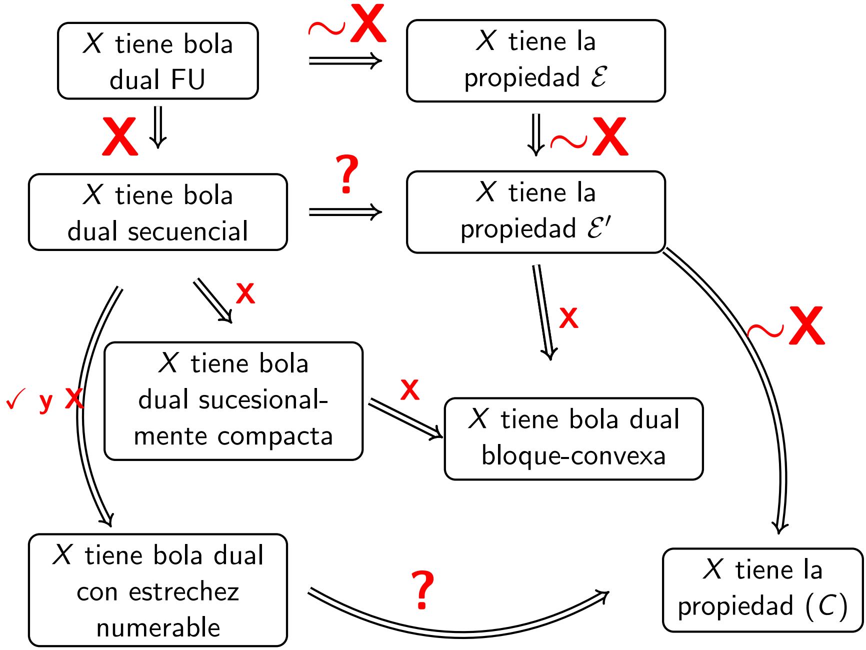
J. Moore y C. Brech dan ejemplos consistentes de espacios de Banach con la propiedad (C) pero sin la propiedad $\mathcal{E}$. El ejemplo de Brech no tiene la propiedad $\mathcal{E}'$.

Teorema (A. Avilés, G.M.C., J. Rodríguez)

Bajo la hipótesis del continuo, existe una familia maximal casi disjunta para la cual el correspondiente espacio de Johnson-Lindenstrauss JL_2 **no** *tiene la propiedad $\mathcal{E}$.*
Además, también bajo la hipótesis del continuo, existe una familia maximal casi disjunta para la cual el correspondiente espacio de Johnson-Lindenstrauss JL_2 **sí** *tiene la propiedad $\mathcal{E}$.*


X tiene bola dual FU
$\sim$X
X tiene la propiedad $\mathcal{E}$
X
?
X tiene bola dual secuencial
X tiene la propiedad $\mathcal{E}'$
X
X
$\checkmark$ y X
X tiene bola dual sucesionalmente compacta
X
X tiene bola dual bloque-convexa
X tiene bola dual con estrechez numerable
?
X tiene la propiedad (C)


X tiene bola dual FU
X tiene la propiedad $\mathcal{E}$
X tiene bola dual secuencial
X tiene la propiedad $\mathcal{E}'$
X tiene bola dual sucesional-mente compacta
X tiene bola dual bloque-convexa
X tiene bola dual con estrechez numerable
X tiene la propiedad (C)
~X
~X
?
?
✓ y X


X tiene bola dual FU
∼X
X tiene la propiedad ℰ
X
∼X
X tiene bola dual secuencial
?
X tiene la propiedad ℰ′
X
X
∼X
✓ y X
X tiene bola dual sucesional-mente compacta
X
X tiene bola dual bloque-convexa
X tiene bola dual con estrechez numerable
?
X tiene la propiedad (C)

Referencias

G. Martínez-Cervantes,
Banach spaces with weak*-sequential dual ball.
Accepted in Proc. Amer. Math. Soc.

A. Plichko,
Three sequential properties of dual Banach spaces in the weak* topology.
Top. Appl., 190 (2015), 93–98.

W.B. Johnson, J. Lindenstrauss,
Some remarks on weakly compactly generated Banach spaces.
Israel J. Math., 17 (1974), 219–230.