Espacios de Banach bajo diferentes axiomas

Antonio Avilés

Universidad de Murcia
AEI, FEDER (MTM2017-86182-P)

Bilbao 2019

Los axiomas de la teoría de conjuntos ZF

Asumimos la existencia de un universo cuyos objetos llamamos conjuntos. De dos conjuntos x, y podemos hacer dos afirmaciones básicas $x \in y$, $x = y$.

Asumimos la existencia de un universo cuyos objetos llamamos conjuntos. De dos conjuntos x, y podemos hacer dos afirmaciones básicas $x \in y$, $x = y$.

- Un conjunto está determinado por sus elementos (extensión)

Los axiomas de la teoría de conjuntos ZF

Asumimos la existencia de un universo cuyos objetos llamamos conjuntos. De dos conjuntos x, y podemos hacer dos afirmaciones básicas $x \in y$, $x = y$.

- Un conjunto está determinado por sus elementos (extensión)
- Tiempo lógico (regularidad)

Los axiomas de la teoría de conjuntos ZF

Asumimos la existencia de un universo cuyos objetos llamamos conjuntos. De dos conjuntos x, y podemos hacer dos afirmaciones básicas $x \in y$, $x = y$.

- Un conjunto está determinado por sus elementos (extensión)
- Tiempo lógico (regularidad)
- Existencia determinada (pares,partes,unión,...)

Los axiomas de la teoría de conjuntos ZF

Asumimos la existencia de un universo cuyos objetos llamamos conjuntos. De dos conjuntos x, y podemos hacer dos afirmaciones básicas $x \in y$, $x = y$.

- Un conjunto está determinado por sus elementos (extensión)
- Tiempo lógico (regularidad)
- Existencia determinada (pares,partes,unión,...)
- Existencia indeterminada (elección)

Los axiomas de la teoría de conjuntos ZF

Asumimos la existencia de un universo cuyos objetos llamamos conjuntos. De dos conjuntos x, y podemos hacer dos afirmaciones básicas $x \in y$, $x = y$.

- Un conjunto está determinado por sus elementos (extensión)
- Tiempo lógico (regularidad)
- Existencia determinada (pares,partes,unión,...)
- Existencia indeterminada (elección)

$0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0,1\}$, ..., $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ℓ_2, ℓ_∞, ...,

Entre lo verdadero y lo falso

Dada una afirmación A...

1. Podemos probar A

Entre lo verdadero y lo falso

Dada una afirmación A...

1. Podemos probar A
2. Podemos probar $\neg A$

Entre lo verdadero y lo falso

Dada una afirmación A...

1. Podemos probar A
2. Podemos probar $\neg A$
3. Podemos probar que no podemos probar A

Entre lo verdadero y lo falso

Dada una afirmación A...

1. Podemos probar A
2. Podemos probar $\neg A$
3. Podemos probar que no podemos probar A
4. Podemos probar que no podemos probar $\neg A$

Entre lo verdadero y lo falso

Dada una afirmación A...

1. Podemos probar A
2. Podemos probar $\neg A$
3. Podemos probar que no podemos probar A
4. Podemos probar que no podemos probar $\neg A$

- Existen infinitos primos $\mathbf{(1)}$; Existen finitos primos $\mathbf{(2)}$

Entre lo verdadero y lo falso

Dada una afirmación A...

1 Podemos probar A
2 Podemos probar $\neg A$
3 Podemos probar que no podemos probar A
4 Podemos probar que no podemos probar $\neg A$

- Existen infinitos primos $(\mathbf{1})$; Existen finitos primos $(\mathbf{2})$
- (CH) Todo subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ se biyecta con $\mathbb{N}$ o $\mathbb{R}$ $(\mathbf{3}+\mathbf{4})$.

Entre lo verdadero y lo falso

Dada una afirmación A...

1. Podemos probar A
2. Podemos probar $\neg A$
3. Podemos probar que no podemos probar A
4. Podemos probar que no podemos probar $\neg A$

- Existen infinitos primos **(1)**; Existen finitos primos **(2)**
- (CH) Todo subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ se biyecta con $\mathbb{N}$ o $\mathbb{R}$ $(\mathbf{3}+\mathbf{4})$.
- La medida de Lebesgue puede extenderse a una medida definida en todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$.

.

Entre lo verdadero y lo falso

Dada una afirmación A...

1. Podemos probar A
2. Podemos probar $\neg A$
3. Podemos probar que no podemos probar A
4. Podemos probar que no podemos probar $\neg A$

- Existen infinitos primos $(\mathbf{1})$; Existen finitos primos $(\mathbf{2})$
- (CH) Todo subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ se biyecta con $\mathbb{N}$ o $\mathbb{R}$ $(\mathbf{3}+\mathbf{4})$.
- La medida de Lebesgue puede extenderse a una medida definida en todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$.
  $(\mathbf{3})$ y se presume que $(\neg\mathbf{2})$, sabiendo que es indemostrable.

Entre lo verdadero y lo falso

Dada una afirmación A...

1. Podemos probar A
2. Podemos probar $\neg A$
3. Podemos probar que no podemos probar A
4. Podemos probar que no podemos probar $\neg A$

- Existen infinitos primos $(\mathbf{1})$; Existen finitos primos $(\mathbf{2})$
- (CH) Todo subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ se biyecta con $\mathbb{N}$ o $\mathbb{R}$ $(\mathbf{3}+\mathbf{4})$.
- La medida de Lebesgue puede extenderse a una medida definida en todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$.
  $(\mathbf{3})$ y se presume que $(\neg\mathbf{2})$, sabiendo que es indemostrable.
  Podemos probar que no podemos probar que no podemos probar $\neg A$.

Axiomas

Cuando tenemos un enunciado A que no puede probarse verdadero ni falso, es legítimo considerarlo como un axioma adicional.

Axiomas

Cuando tenemos un enunciado A que no puede probarse verdadero ni falso, es legítimo considerarlo como un axioma adicional.

Asumimos entonces que existen al menos dos universos, uno en el que se cumple $ZFC + A$ y otro $ZFC + \neg A$.

Algunos enunciados indecidibles

- Todo espacio de Banach de caridnalidad menor o igual que $\mathfrak{c}$ es un subespacio de ℓ_∞/c_0.
  (Parovichenko, Brech, Koszmider, Krupski, Marciszewski, Todorcevic)

- Todo espacio de Banach no separable tiene un sistema biortogonal no numerable
  (Todorcevic, Kunen, Negrepontis)

- Todo automorfismo de $\mathscr{B}(\ell_2)/\mathscr{K}(\ell_2)$ proviene de un autormorfismo de $\mathscr{B}(\ell_2)$
  (Philips, Weaver, Farah)

Dado $A \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ se considera el juego G_A

Dado $A \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ se considera el juego G_A

$$\begin{array}{llllll} \textit{Player I} & n_1 & & n_3 & & \cdots \\ \textit{Player II} & & n_2 & & n_4 & \cdots \end{array}$$

Axiomas de determinación

Dado $A \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ se considera el juego G_A

$$\begin{array}{lccccc} \textit{Player I} & n_1 & & n_3 & & \cdots \\ \textit{Player II} & & n_2 & & n_4 & \cdots \end{array}$$

I gana sii $(n_1, n_2, n_3, \ldots) \in A$.

Axiomas de determinación

Dado $A \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ se considera el juego G_A

$$\begin{array}{lccccc} \textit{Player I} & n_1 & & n_3 & & \cdots \\ \textit{Player II} & & n_2 & & n_4 & \cdots \end{array}$$

I gana sii $(n_1, n_2, n_3, \ldots) \in A$.

- Axioma de determinación. Para cada A, uno de los jugadores tiene estrategia ganadora en G_A.

Axiomas de determinación

Dado $A \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ se considera el juego G_A

$$\begin{array}{lccccc} \textit{Player I} & n_1 & & n_3 & & \cdots \\ \textit{Player II} & & n_2 & & n_4 & \cdots \end{array}$$

I gana sii $(n_1, n_2, n_3, \ldots) \in A$.

- Axioma de determinación. Para cada A, uno de los jugadores tiene estrategia ganadora en G_A.
  Incompatible con el axioma de elección.

Axiomas de determinación

Dado $A \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ se considera el juego G_A

$$\begin{array}{llllll} \textit{Player I} & n_1 & & n_3 & & \cdots \\ \textit{Player II} & & n_2 & & n_4 & \cdots \end{array}$$

I gana sii $(n_1, n_2, n_3, \ldots) \in A$.

- Axioma de determinación. Para cada A, uno de los jugadores tiene estrategia ganadora en G_A.
  Incompatible con el axioma de elección.
- Teorema de Martin. Para cada A Borel, uno de los jugadores tiene estrategia ganadora en G_A.

Axiomas de determinación

Dado $A \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ se considera el juego G_A

$$\begin{array}{lcccccc} \textit{Player I} & n_1 & & n_3 & & \cdots \\ \textit{Player II} & & n_2 & & n_4 & \cdots \end{array}$$

I gana sii $(n_1, n_2, n_3, \dots) \in A$.

- Axioma de determinación. Para cada A, uno de los jugadores tiene estrategia ganadora en G_A.
  Incompatible con el axioma de elección.
- Teorema de Martin. Para cada A Borel, uno de los jugadores tiene estrategia ganadora en G_A.
- Axioma de determinación analítica. Para cada A analítico, uno de los jugadores tiene estrategia ganadora en G_A.

Débil compactos de espacios separables

- Un conjunto dirigido es $(P, \leq)$ parcialmente ordenado tal que $\forall a, b \;\; \exists c \,:\, a \leq c, \;\; b \leq c$.

Débil compactos de espacios separables

- Un conjunto dirigido es $(P, \leq)$ parcialmente ordenado tal que $\forall a, b \;\; \exists c : \; a \leq c, \; b \leq c$.
- $A \subset P$ es cofinal si $\forall p \in P \;\; \exists a \in A : \; p \leq a$.

Débil compactos de espacios separables

- Un conjunto dirigido es $(P, \leq)$ parcialmente ordenado tal que $\forall a, b \;\; \exists c \, : \, a \leq c, \; b \leq c$.
- $A \subset P$ es cofinal si $\forall p \in P \;\; \exists a \in A \, : \, p \leq a$.
- P y Q son Tukey equivalentes si son isomorfos a dos conjuntos cofinales del mismo conjunto dirigido R.

Débil compactos de espacios separables

- Un conjunto dirigido es $(P, \leq)$ parcialmente ordenado tal que $\forall a, b \;\; \exists c \,:\; a \leq c, \;\; b \leq c$.
- $A \subset P$ es cofinal si $\forall p \in P \;\; \exists a \in A \,:\; p \leq a$.
- P y Q son Tukey equivalentes si son isomorfos a dos conjuntos cofinales del mismo conjunto dirigido R.

Teorema (A., Plebanek, Rodríguez)

Bajo el axioma de determinación análitica, si E es Banach separable, los débil compactos de E son Tukey equivalentes a $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathscr{K}(\mathbb{Q})$ ó $Fin(\mathfrak{c})$.

El Axioma de Martin (MA) es uno de muchos de la forma

Hay conjuntos no numerables que se comportan como si fueran numerables

El Axioma de Martin (MA) es uno de muchos de la forma

Hay conjuntos no numerables que se comportan como si fueran numerables

1. $non(\mathcal{N}) = \mathfrak{c}$ Todo conjunto de cardinal menor que el continuo tiene medida nula.

Axioma de Martin y relacionados

El Axioma de Martin (MA) es uno de muchos de la forma

Hay conjuntos no numerables que se comportan como si fueran numerables

1. $non(\mathcal{N}) = \mathfrak{c}$ Todo conjunto de cardinal menor que el continuo tiene medida nula.
2. $add(\mathcal{N}) = \mathfrak{c}$ La unión de menos de un continuo de conjuntos de medida nula tiene medida nula.

El Axioma de Martin (MA) es uno de muchos de la forma

Hay conjuntos no numerables que se comportan como si fueran numerables

1. $non(\mathcal{N}) = \mathfrak{c}$ Todo conjunto de cardinal menor que el continuo tiene medida nula.
2. $add(\mathcal{N}) = \mathfrak{c}$ La unión de menos de un continuo de conjuntos de medida nula tiene medida nula.
3. $add(\mathcal{M}) > \omega_1$ La intersección de ω_1 abiertos densos de $\mathbb{R}$ es denso.

Teorema(Sobckzyk)

Si K es un compacto metrizable, entonces toda sucesión exacta

$$0 \longrightarrow c_0 \longrightarrow X \longrightarrow C(K) \longrightarrow 0$$

es trivial

Sumas torcidas

Teorema(Sobckzyk)

Si K es un compacto metrizable, entonces toda sucesión exacta

$$0 \longrightarrow c_0 \longrightarrow X \longrightarrow C(K) \longrightarrow 0$$

es trivial

Conjetura (Cabello, Castillo, Kalton, Yost)

Si K es un compacto no metrizable, entonces existe una suma torcida no trivial

$$0 \longrightarrow c_0 \longrightarrow X \longrightarrow C(K) \longrightarrow 0$$

Sumas torcidas

Teorema(Sobckzyk)

Si K es un compacto metrizable, entonces toda sucesión exacta

$$0 \longrightarrow c_0 \longrightarrow X \longrightarrow C(K) \longrightarrow 0$$

es trivial

Conjetura (Cabello, Castillo, Kalton, Yost)

Si K es un compacto no metrizable, entonces existe una suma torcida no trivial

$$0 \longrightarrow c_0 \longrightarrow X \longrightarrow C(K) \longrightarrow 0$$

Resultados parciales de esos autores y Correa y Tausk.

Sumas torcidas

Teorema(Marciszewski, Plebanek)

Bajo el Axioma de Martin y no CH, existe un compacto no metrizable K sin sumas torcidas no triviales

$$0 \longrightarrow c_0 \longrightarrow X \longrightarrow C(K) \longrightarrow 0$$

$K = \{0,1\}^{\omega_1}$

Teorema(A., Marciszewski, Plebanek)

Bajo CH, para todo compacto K no metrizable existe una suma torcida no trivial

$$0 \longrightarrow c_0 \longrightarrow X \longrightarrow C(K) \longrightarrow 0$$

Sumas torcidas

Teorema

Para un espacio de Banach Y son equivalentes

Sumas torcidas

Teorema

Para un espacio de Banach Y son equivalentes

- Todas las sumas torcidas $0 \to c_0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ escinden

Sumas torcidas

Teorema

Para un espacio de Banach Y son equivalentes

- Todas las sumas torcidas $0 \to c_0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ escinden
- Toda extensión discreta numerable de (B_{Y^*}, w^*) se puede encontrar dentro de Y^*.

Sumas torcidas

Teorema

Para un espacio de Banach Y son equivalentes

- Todas las sumas torcidas $0 \to c_0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ escinden
- Toda extensión discreta numerable de (B_{Y^*}, w^*) se puede encontrar dentro de Y^*.

Si Y es no separable con $|Y^*| = \mathfrak{c}$,

- (CH) Número de extensiones de B_{Y^*} es $2^{\mathfrak{c}}$,
- Número de extensiones en Y^* es $|Y^*|^{\aleph_0} = |Y^*| = \mathfrak{c}$.

Sumas torcidas

Teorema

Para un espacio de Banach Y son equivalentes

- Todas las sumas torcidas $0 \to c_0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ escinden
- Toda extensión discreta numerable de (B_{Y^*}, w^*) se puede encontrar dentro de Y^*.

Si Y es no separable con $|Y^*| = \mathfrak{c}$,

- (CH) Número de extensiones de B_{Y^*} es $2^{\mathfrak{c}}$,
- Número de extensiones en Y^* es $|Y^*|^{\aleph_0} = |Y^*| = \mathfrak{c}$.

Otros elementos de la demostración:

- Análisis de cómo separar por abiertos disjuntos en una extensión discreta numerable
- Juhász (CH) Todo compacto no metrizable contiene un subcompacto de peso $\mathfrak{c}$.

Sumas torcidas

Problema

Si K es un compacto de peso al menos $\mathfrak{c}$, ¿existe una suma torcida no trivial

$$0 \longrightarrow c_0 \longrightarrow X \longrightarrow C(K) \longrightarrow 0 \ ?$$

Sumas torcidas

Problema

Si K es un compacto de peso al menos $\mathfrak{c}$, ¿existe una suma torcida no trivial

$$0 \longrightarrow c_0 \longrightarrow X \longrightarrow C(K) \longrightarrow 0 \ ?$$

Problema

Para qué cardinales κ existe una suma torcida no trivial

$$0 \longrightarrow c_0 \longrightarrow X \longrightarrow C(\{0,1\}^\kappa) \longrightarrow 0 \ ?$$

Sumas torcidas

Problema

Si K es un compacto de peso al menos $\mathfrak{c}$, ¿existe una suma torcida no trivial

$$0 \longrightarrow c_0 \longrightarrow X \longrightarrow C(K) \longrightarrow 0 \ ?$$

Problema

Para qué cardinales κ existe una suma torcida no trivial

$$0 \longrightarrow c_0 \longrightarrow X \longrightarrow C(\{0,1\}^\kappa) \longrightarrow 0 \ ?$$

No la hay si $\kappa \geq non(\mathscr{M})$ ó $\kappa \geq non(\mathscr{N})$.

https://www.icmat.es/congresos/2019/BSBL/