Operadores promedio en espacios definidos de forma rectangular

Carolina Espinoza-Villalva

Universidad de Sonora

XV Encuentro de la Red de Análisis Funcional y Aplicaciones
en memoria del profesor Bernardo Cascales, 2019

En el libro "Inequalities" (1934), Hardy, Littlewood y Polya consideraron varios operadores de tipo integral, en particular, probaron la siguiente desigualdad clásica

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)dx,$$

donde $1 < p < \infty$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $f \geq 0$ y la constante $\frac{p}{p-1}$ es la mejor posible.

Sea $\varphi : [0,1] \to [0,\infty)$ una función. Para una función medible f definida en $\mathbb{R}^n$, el operador promedio de Hardy-Littewood con peso H_φ se define puntualmente como

$$H_\varphi f(x) = \int_0^1 f(tx)\varphi(t)dt.$$

Sea $\varphi : [0,1] \to [0,\infty)$ una función. Para una función medible f definida en $\mathbb{R}^n$, el operador promedio de Hardy-Littewood con peso H_φ se define puntualmente como

$$H_\varphi f(x) = \int_0^1 f(tx)\varphi(t)dt.$$

En 1984 Carton-Lebrun y Fosset demostraron que

$t^{1-n}\varphi(t)$ acotada en $[0,1] \Rightarrow H_\varphi$ es un operador acotado en $BMO(\mathbb{R}^n)$.

Sea $\varphi : [0,1] \to [0,\infty)$ una función. Para una función medible f definida en $\mathbb{R}^n$, el operador promedio de Hardy-Littewood con peso H_φ se define puntualmente como

$$H_\varphi f(x) = \int_0^1 f(tx)\varphi(t)dt.$$

En 1984 Carton-Lebrun y Fosset demostraron que

$t^{1-n}\varphi(t)$ acotada en $[0,1] \Rightarrow H_\varphi$ es un operador acotado en $BMO(\mathbb{R}^n)$.

J. Xiao extendió este resultado en 2001: para $1 \leq p \leq \infty$
$\int_0^1 t^{-n/p}\varphi(t)dt < \infty \Leftrightarrow H_\varphi$ es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y
$\int_0^1 \varphi(t)dt < \infty \Leftrightarrow H_\varphi$ es acotado en $BMO(\mathbb{R}^n)$.

Nuestro objetivo

Caracterizar aquellas funciones φ para las cuales H_φ, y otros operadores relacionados con éste, son continuos en los espacios $\mathcal{B}^p(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{CMO}^p(\mathbb{R}^n)$.

Definiendo $\mathcal{B}^p(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{CMO}^p(\mathbb{R}^n)$

Para $1 \leq p < \infty$, definamos el siguiente espacio

$$\mathcal{B}^p(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{B}^p} < \infty\}$$

donde

$$\|f\|_{\mathcal{B}^p} = \sup_{\substack{R_j > 0 \\ j=1,\dots,n}} \left[\frac{1}{2^n R_1 \cdots R_j} \int_{\prod_{j=1}^n [-R_j, R_j]} |f(x)|^p dx\right]^{1/p}.$$

Definiendo $\mathcal{B}^p(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{CMO}^p(\mathbb{R}^n)$

Para $1 \leq p < \infty$, definimos

$$\mathcal{CMO}^p(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{CMO}^p} < \infty\}$$

donde

$$\|f\|_{\mathcal{CMO}^p} = \sup_{\substack{R_j > 0 \\ j=1,\ldots,n}} \left[\frac{1}{2^n R_1 \cdots R_j} \int_{\prod_{j=1}^n [-R_j, R_j]} |f(x) - f_{R_1,\ldots,R_n}|^p dx \right]^{1/p}$$

y $f_{R_1,\ldots,R_n}$ es el promedio de f en $\prod_{j=1}^n [-R_j, R_j]$.

Versión discreta

- $\{r_k\}_{k=1}^{\infty} \subset (0,1]$.
- Supongamos que $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ es estrictamente decreciente.
- $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$.
- $\varphi : \{r_k : k \in \mathbb{N}\} \to (0,\infty)$.

Para cualquie función Lebesgue medible $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, consideremos el operador H_φ^d definido formalmente como

$$H_\varphi^d f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(r_k) f(r_k x).$$

Observación

Una condición necesaria y suficiente para la existencia de H_{φ}^{d} como operador acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, es

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k^{-n/p} \varphi(r_k) < \infty.$$

Observación

Una condición necesaria y suficiente para la existencia de H_{φ}^{d} como operador acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, es

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k^{-n/p} \varphi(r_k) < \infty.$$

- Desigualdad de Minkowski.
- $f_\varepsilon(x) = |x|^{\frac{n}{p}-\varepsilon} \chi_{\{y:|y|>1\}}(x)$, con $0 < \varepsilon < 1$ (Observando que $\|f_\varepsilon\|_p = \frac{C_n}{p\varepsilon}$).

Una generalización de H_φ^d

- Para cada $j = 1, \ldots, n$, sea $\{r_{k_j}^{(j)}\}_{k_j=1}^{\infty} \subset (0,1]$ una sucesión estrictamente decreciente que converge a cero.
- Sea $\Phi : \{r_{k_1}^{(1)} : k_1 \in \mathbb{N}\} \times \cdots \times \{r_{k_n}^{(n)} : k_n \in \mathbb{N}\} \to (0,\infty)$ una función.

Para una función Lebesgue medible $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definamos formalmente

$$\mathbb{H}_\Phi^d f(x) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} \Phi(r_{k_1}^{(1)}, \ldots, r_{k_n}^{(n)}) f(r_{k_1}^{(1)} x_1, \ldots, r_{k_n}^{(n)} x_n).$$

Observación

- El operador $\mathbb{H}_{\Phi}^{d}$ es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ for $1 \leq p < \infty$ i y solo si

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} \Phi(r_{k_1}^{(1)}, \ldots, r_{k_n}^{(n)}) \left(r_{k_1}^{(1)}\right)^{-1/p} \cdots \left(r_{k_1}^{(1)}\right)^{-1/p} < \infty$$

Observación

- El operador $\mathbb{H}^d_\Phi$ es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ for $1 \leq p < \infty$ i y solo si

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} \Phi(r^{(1)}_{k_1}, \ldots, r^{(n)}_{k_n}) \left(r^{(1)}_{k_1}\right)^{-1/p} \cdots \left(r^{(1)}_{k_1}\right)^{-1/p} < \infty$$

- El operador $\mathbb{H}^d_\Phi$ es acotado en $\mathcal{B}^p(\mathbb{R}^n)$ for $1 \leq p < \infty$ si y solo si

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} \Phi(r^{(1)}_{k_1}, \ldots, r^{(n)}_{k_n}) < \infty$$

Versión continua

Para cualquier par de funciones Lebesgue medibles $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\phi : [0,1]^n \to (0,\infty)$ definimos

$$\mathbb{H}_\phi f(x) = \int_{[0,1]^n} f(t_1 x_1, \dots, t_n x_n)\phi(t_1, \dots, t_n)dt.$$

Versión continua

Para cualquier par de funciones Lebesgue medibles $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\phi : [0,1]^n \to (0,\infty)$ definimos

$$\mathbb{H}_\phi f(x) = \int_{[0,1]^n} f(t_1 x_1, \ldots, t_n x_n)\phi(t_1, \ldots, t_n)dt.$$

Usando el mismo argumento que en la versión discreta podemos probar que $\mathbb{H}_\phi$ es un operador acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, si y solo si

$$\int_{[0,1]^n} t_1^{-1/p} \ldots t_n^{-1/p} \phi(t_1, \ldots, t_n)dt.$$

Theorem

El operador $\mathbb{H}_\phi$ *es un operador acotado en* $\mathcal{B}^p(\mathbb{R}^n)$ *y* $\mathcal{CMO}^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, *si y solo si*

$$\int_{[0,1]^n} \phi(t_1, \ldots, t_n) dt < \infty.$$

Más aún,

$$\|\mathbb{H}_\phi\|_{\mathcal{CMO}^p \to \mathcal{CMO}^p} = \|\mathbb{H}_\phi\|_{\mathcal{B}^p \to \mathcal{B}^p} = \int_{[0,1]^n} \phi(t_1, \ldots, t_n) dt.$$

Bosquejo de la demostración para $\mathcal{CMO}^p(\mathbb{R}^n)$

Supongamos que $\int_{[0,1]^n} \Phi(t)dt < \infty$.
Para $f \in \mathcal{CMO}^p(\mathbb{R}^n)$ y $R_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, notemos que

$$(\mathbb{H}_\Phi f)_{R_1,\dots,R_n} = \int_{[0,1]^n} f_{t_1 R_1,\dots,t_n R_n} \Phi(t_1, \dots, t_n) dt.$$

Bosquejo de la demostración para $\mathcal{CMO}^p(\mathbb{R}^n)$

Supongamos que $\int_{[0,1]^n} \Phi(t)dt < \infty$.
Para $f \in \mathcal{CMO}^p(\mathbb{R}^n)$ y $R_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$, notemos que

$$(\mathbb{H}_\Phi f)_{R_1,\ldots,R_n} = \int_{[0,1]^n} f_{t_1 R_1,\ldots,t_n R_n} \Phi(t_1, \ldots, t_n) dt.$$

Usando la desigualdad de Minkowski y un cambio de variables apropiado,

$$\left[\frac{1}{2^n R_1 \cdots R_n} \int_{\prod_{j=1}^n [-R_j, R_j]} |\mathbb{H}_\Phi f(x) - (\mathbb{H}_\Phi f)_{R_1,\ldots,R_n}|^p dx \right]^{1/p}$$

se puede acotar superiormente por

$$\int_{[0,1]^n} \left[\frac{1}{2^n R_1 \cdots R_n} \int_{\Pi_{j=1}^n [-R_j, R_j]} |f(t_1 x_1, \ldots, t_n x_n) - f_{t_1 R_1, \ldots, t_n R_n}|^p dx \right]^{1/p}$$
$$\times \Phi(t_1, \ldots, t_n) dt,$$

lo que implica

$$\|\mathbb{H}_\Phi f\|_{\mathcal{CMO}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{CMO}^p} \int_{[0,1]^n} \Phi(t_1, \ldots, t_n) dt.$$

$$\int_{[0,1]^n} \left[\frac{1}{2^n R_1 \cdots R_n} \int_{\Pi_{j=1}^n [-R_j, R_j]} |f(t_1 x_1, \ldots, t_n x_n) - f_{t_1 R_1, \ldots, t_n R_n}|^p dx \right]^{1/p}$$

$$\times \Phi(t_1, \ldots, t_n) dt,$$

lo que implica

$$\|\mathbb{H}_\Phi f\|_{\mathcal{CMO}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{CMO}^p} \int_{[0,1]^n} \Phi(t_1, \ldots, t_n) dt.$$

Para el recíproco, es suficiente considerar la función

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 \text{ if } & x_n \geq 0 \\ 0 \text{ if } & x_n < 0. \end{cases}$$

El operador de Hardy rectangular n-dimensional

En 1995, Christ y Grafakos definieron la siguiente versión del operador de Hardy:

$$H_n f(x) = \frac{1}{c_n |x|^n} \int\limits_{B(0,|x|)} |f(y)| dy.$$

Probaron que para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{c_n|x|} \int_{B(0,|x|)} |f(y)| dy \right)^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

con $p' = p/p - 1$ la mejor constante posible.

El operador de Hardy rectangular n-dimensional

Para una función localmente integrable f, definamos

$$H_n^R f(x) = \frac{1}{|x_1| \cdots |x_n|} \int_{\prod_{j=1}^n [-|x_j|, |x_j|]} |f(y)| dy,$$

con $x_j \neq 0$ para $j = 1, \dots, n$.

El operador de Hardy rectangular n-dimensional

Para una función localmente integrable f, definamos

$$H_n^R f(x) = \frac{1}{|x_1| \cdots |x_n|} \int_{\prod_{j=1}^n [-|x_j|,|x_j|]} |f(y)| dy,$$

con $x_j \neq 0$ para $j = 1, \ldots, n$.
H_n^R es continuo en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y mediante un cambio de variable puede expresarse de la siguiente manera

$$H_n^R f(x) = \int_{[-1,1]^n} |f(z_1|x_1|, \ldots, z_n|x_n|)| \, dz$$

Theorem

El operador H_n^R *es acotado en* $\mathcal{B}^p(\mathbb{R}^n)$ *y en* $\mathcal{CMO}^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. *Más aún,*

$$\|H_n^R\|_{\mathcal{CMO}^p \to \mathcal{CMO}^p} \leq \|H_n^R\|_{\mathcal{B}^p \to \mathcal{B}^p} = 2^n.$$

¡Gracias!