Taller Polinomios y Desigualdades Polinomiales

Bernardino del Pino, Manuel
Chiclana Vega, Rafael
Gómez Espinosa, Luis
Lavado Santiago, Estrella de los Ángeles
Martínez Artero, Clara Isabel
Souleymane, Ndiaye
Storch de Gracia Fernández, Nuria

Jueves 7 de marzo de 2019

Contenidos

Polinomios en espacios vectoriales

Sea E un espacio vectorial:

Definición

Un polinomio n-homogéneo P en E se define como

$$P(x) = L(x, \ldots, x),$$

siendo L una forma n-lineal en E.

Definición

Se llama polinomio de grado $\leq n$ a la suma en E de la forma

$$P_0 + P_1 + \ldots + P_n,$$

siendo P_k un polinomio k-homogéneo $(0 \leq k \leq n)$

Fórmula de Polarización

Observación

Se puede demostrar que de entre todas las formas n-lineales que inducen un polinomio homogéneo hay una que es simétrica. Y además el siguiente resultado demuestra que es única.

Teorema

Si $P \in \mathcal{P}(^nE)$ entonces existe una única $L \in \mathcal{L}^s(^nE)$ tal que L induce P. Es más

$$L(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\epsilon_k = \pm 1} \epsilon_1 \cdots \epsilon_n P(\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n).$$

Fórmula Multinomial

Proposición (Fórmula Multinomial)

Sea E *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$*,* $P \in \mathcal{P}_a\left({}^n E\right)$*,* $x_1, \ldots, x_k \in E$ *y* $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$*, entonces*

$$P\left(\sum_{i=1}^{k} a_i x_i\right) = \sum_{\substack{m \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^k \\ |m| = n}} \frac{n!}{m!} a_1^{m_1} \cdots a_k^{m_k} L\left(x_1^{m_1}, \ldots, x_k^{m_k}\right),$$

donde $L \in \mathcal{L}_a^s({}^n E)$ *verifica que* $\hat{L} = P$ *y*

$$L\left(x_1^{m_1}, \ldots, x_k^{m_k}\right) := L\left(\overbrace{x_1, \ldots, x_1}^{m_1}, \ldots, \overbrace{x_k, \ldots, x_k}^{m_k}\right).$$

Continuidad en espacios de polinomios

Sea E un espacio normado.
No todos los polinomios en E son continuos contrariamente a lo que ocurre en dimensión finita.

Teorema

$P \in \mathcal{P}_a(^nE)$ continuo si y solo si está acotado en B_E.

A su vez $L \in \mathcal{L}_a(^nE)$ continua si y solo si está acotada en B_E^n.

Denotamos por $\mathcal{P}\left(^nE\right)$, $\mathcal{L}^s\left(^nE\right)$ y $\mathcal{L}\left(^nE\right)$ a los espacios de polinomios continuos, de las aplicaciones n-lineales simétricas continuas y las aplicaciones n-lineales continuas definidos en el espacio normado E y con valores en $\mathbb{K}$ respectivamente.

Continuidad en espacios de polinomios

Esto nos permite definir en los espacios $\mathcal{P}\left({}^n E\right)$ y $\mathcal{L}^s\left({}^n E\right)$ respectivamente las siguientes normas:

$$||P|| = \sup\{|P(x)| : x \in B_E\}$$

$$||L|| = \sup\{|L(x_1, \ldots, x_n)| : x_k \in B_E \, 1 \leq k \leq n\}$$

Desigualdades notables: desigualdades de tipo Markov

Teorema (A. A. Markov, 1889)

Si $P \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$*, entonces,*

$$||P'||_{[-1,1]} \leq n^2.$$

Teorema (V. A. Markov, 1892)

Si $P \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ *y* $1 \leq k \leq n$*, entonces,*

$$||P^{(k)}||_{[-1,1]} \leq \frac{n^2(n^2-1^2)\cdots(n^2-(k-1)^2)}{1\cdot 3\cdots(2k-1)}.$$

Algunas extensiones a espacios normados

Teorema (Y. Sarantopoulos, 1991)

Si E es un espacio de Banach $P \in \mathcal{P}_n(E)$, entonces,

$$||DP(x)|| \leq \text{mín}\left\{ n\frac{\sqrt{1-P(x)^2}}{\sqrt{1-||x||^2}}, n^2 \right\}$$

para todo $x \in B_E$.

Teorema (L. Harris, 2011)

Si E un espacio de Banach, $P \in \mathcal{P}_n(E)$ y $k \leq n$, entonces,

$$||\hat{D}^k P(x)|| \leq \frac{n^2(n^2-1^2)\cdots(n^2-(k-1)^2)}{1\cdot 3\cdots(2k-1)}$$

para todo $x \in B_E$.

Un ejemplo en el espacio $P \in \mathcal{P}(^2\Delta)$

Teorema

Sea $P \in \mathcal{P}(^2\Delta)$. *Si* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *entonces,*

$$\|DP(x,y)\|_\Delta \leq \Psi_\Delta(x,y)\|P\|_\Delta,$$

donde,

$$\Psi_\Delta(x,y) = \begin{cases} |2x - 6y| & \textit{si } x = 0 \textit{ o } x \neq 0 \textit{ y } (\frac{y}{x} \leq -1 \textit{ o } \frac{y}{x} \geq 2), \\ \left|2x + 2y + y^2/x\right| & \textit{si } x \neq 0 \textit{ y } 1 \leq \frac{y}{x} \leq 2, \\ \left|2x + 2y + x^2/y\right| & \textit{si } y \neq 0 \textit{ y } 1 \leq \frac{x}{y} \leq 2, \\ |6x - 2y| & \textit{si } y = 0 \textit{ o } y \neq 0 \textit{ y } (\frac{x}{y} \leq -1 \textit{ o } \frac{x}{y} \geq 2). \end{cases}$$

Además, la constante $\Psi_\Delta(x,y)$ *es óptima.*

Cálculo de constantes de equivalencia entre normas polinomiales.

Podemos identificar $\mathcal{P}({}^m\mathbb{K}^n)$ con $\mathbb{K}^d$ para $d = \binom{m+n-1}{m}$.

Definición (Norma de los coeficientes o norma q)

La norma ℓ_q de los coeficientes de P se define como

$$|P|_q := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha|^q\right)^{\frac{1}{q}} & \text{si } 1 \leq q < +\infty, \\ \max\{|a_\alpha| : |\alpha| = m\} & \text{si } q = +\infty, \end{cases}$$

para $q \geq 1$ en $\mathcal{P}({}^m\mathbb{K}^n)$.

Normas en $\mathcal{P}(^m\mathbb{K}^n)$: la norma polinomial

Recordamos la siguiente definición.

Definición (Norma polinomial)

Si $|\cdot|$ es una norma en $\mathbb{K}^n$, entonces

$$\|P\| := \sup_{x \in B_X} |P(x)|,$$

donde B_X es la bola unidad cerrada del espacio de Banach $X = (\mathbb{K}^n, |\cdot|)$, define una norma en $\mathcal{P}(^m\mathbb{K}^n)$ llamada norma polinomial.

- $\|\cdot\|_p$ representará la norma polinomial en $(\mathbb{K}^n, |\cdot|_p)$, donde $|\cdot|_p$ es la norma de los coeficientes en $\mathcal{P}(^m\mathbb{K}^n)$.

- **Objetivo**: hallar estimaciones de $\|\cdot\|_p$ en términos de $|\cdot|_q$, con $1 \leq p, q \leq +\infty$.
- Por la equivalencia $\|\cdot\|_p$ y $|\cdot|_q$ en $\mathcal{P}(^m\mathbb{K}^n)$ para cada $1 \leq p, q \leq +\infty$ existen **constantes** $k > 0$ y $K > 0$ tales que

$$k\|P\|_p \leq |P|_q \leq K\|P\|_p,$$

para cada $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{K}^n)$.

Observación

Consideramos el espacio $\mathcal{P}(^m\mathbb{K}^n)$. *Si* $1 \leq p, q \leq +\infty$ *entonces denotaremos*

$$k'_{m,n,q,p} := \max\left\{\|P\|_p : P \in B_{|\cdot|_q}\right\},$$
$$K_{m,n,q,p} := \max\left\{|P|_q : P \in B_{\|\cdot\|_p}\right\}.$$

Como $k'_{m,n,q,p} > 0$, *podemos denotar* $k_{m,n,q,p} := \frac{1}{k'_{m,n,q,p}}$.

p	q	$k_{2,q,p}$	$K_{2,q,p}$
1	1	1	$2+\sqrt{2}$
$+\infty$	1	1	$1+\sqrt{2}$
$+\infty$	$[1,2)$	$3^{\frac{1}{q}-1}$	$(\star\star\star)$
$+\infty$	$[2,+\infty]$	$3^{\frac{1}{q}-1}$	$2^{\frac{1}{q}}$
1	$[1,2)$	1	$(\star\star\star)$
1	$[2,+\infty]$	1	4
$(1,+\infty)$	1	1	$(\star\star\star)$
$[4/3,+\infty)$	$+\infty$	$\frac{2^{\frac{2}{p}}}{3}$	$2^{\frac{2}{p}}$ $(\star)$
2	$[1,2)$	$(\star\star)$	$\dfrac{2\left(1+2^{\frac{1}{q-2}}\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(1+2^{\frac{2(q-1)}{q-2}}\right)^{\frac{1}{2}}}$
$[2,+\infty]$	$[2,+\infty]$	$(\star\star)$	$2^{\text{máx}\left\{\frac{1}{q},\frac{2}{p}\right\}}$

$(\star)$: valores para $p\geq 2$.
$(\star\star)$: preguntas abiertas.
$(\star\star\star)$: solo valores numéricos conocidos.

Desigualdades de tipo Bohnenblust-Hille

Teorema (Desigualdad de Bohnenblust-Hille, 1931)

Consideramos el espacio de polinomios homogéneos $\mathcal{P}({}^n\mathbb{K}^m)$*, con* $n, m \in \mathbb{N}$*. Existe una constante* $D_{\mathbb{K},n} > 0$ *que* ***no depende*** *de* m *tal que para todo* $P \in \mathcal{P}({}^n\mathbb{K}^m)$ *se tiene que*

$$|P|_q \leq D_{\mathbb{K},n} \|P\|_\infty, \tag{1}$$

para cada $q \geq \frac{2n}{n+1}$ *y para todo* $m \in \mathbb{N}$*. Además, cualquier constante* D *que satisfaga la desigualdad* (1) *para* $q < \frac{2n}{n+1}$ ***depende necesariamente*** *de* m*.*

Constantes notables: las constantes de Bohnenblust-Hille

Definición (Constante de Bohnenblust-Hille)

*La **menor constante** que satisfaga la desigualdad (1), para $q = \frac{2n}{n+1}$ es conocida como la constante de Bohnenblust-Hille, y se denota $D_{\mathbb{K},n}$.*

- Se puede definir

$$D_{\mathbb{K},n}(m) = \inf\{D > 0 : |P|_{\frac{2n}{n+1}} \leq D\|P\|_\infty \text{ para todo } P \in \mathcal{P}({}^n\mathbb{K}^m)\},$$

para cierto $m \in \mathbb{N}$.

Constantes Incondicionales

- $P \in \mathcal{P}(^n\mathbb{R}^m)$ puede escribirse como

$$P(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha x^\alpha,$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ y $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m}$ con $m \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

- Definimos, con esta notación, el **módulo de** P como

$$|P|(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{|\alpha| \leq n} |a_\alpha| x^\alpha,$$

Definición (Constantes incondicionales)

Se define la constante incondicional de la base canónica del espacio $\mathcal{P}(^n\mathbb{R}^m)$ *como la menor constante* $C > 0$ *tal que*

$$\|P\|_B \leq \||P|\|_B \leq C\|P\|_B$$

para cada $P \in \mathcal{P}(^n\mathbb{R}^m)$.

En el caso particular de $\mathcal{P}(^n\ell_p^m)$ denotaremos la constante incondicional de la base canónica por $C_{p,n,m}$.

Constantes de Polarización: El Teorema de Martin

Introducimos un importante **resultado de Martin** que

relaciona $\|P\|$ con $\|L\|$

donde L es la polar de P.

Teorema (de Martin, 1932)

Sea E un espacio normado sobre $\mathbb{K}$, entonces

$$\|P\| \leq \|L\| \leq \frac{n^n}{n!} \|P\|$$

para todo $L \in \mathcal{L}^s\left({}^n E\right)$, $P \in \mathcal{P}\left({}^n E\right)$ donde L es la polar de P. Es decir, lo que obtenemos es un isomorfismo topológico entre $\mathcal{L}^s\left({}^n E\right)$ y $\mathcal{P}\left({}^n E\right)$.

Constantes de Polarización

- La constante del Teorema de Martin **no puede** ser reemplazada por una menor.
  En el espacio ℓ_1^n el polinomio $P(x_1, \ldots, x_n) := x_1 \cdots x_n$ satisface
  $$\|L\| = \frac{n^n}{n!} \|P\| .$$
- En **espacios concretos** la constante del Teorema de Martin **puede mejorarse**, motivando la siguiente definición.

Definición (Constantes de polarización)

Dado un espacio de Banach X sobre $\mathbb{K}$, definimos la constante de polarización n-ésima de X como

$$\mathbb{K}(n; X) := \inf\{K > 0 : \|L\| \leq K\|P\| : P \in \mathcal{P}(^n X) \text{ y } \hat{L} = P\}.$$

Nótese que de esta manera podemos escribir $\mathbb{K}(n; \ell_1^n) = \frac{n^n}{n!}$.

Algunas Constantes de Polarización

Teorema

Si H es un espacio de Hilbert real o complejo entonces

$$\mathbb{K}(n; H) = 1.$$

En particular, $\mathcal{P}(^n H)$ es isométrico a $\mathcal{L}^s(^n H)$.

Teorema (Benítez - Sarantopoulos, 1990)

Si E es un espacio normado real, se puede probar que $\mathcal{P}(^n E)$ es isométrico a $\mathcal{L}^s(^n E)$ si y solo si E es un espacio euclídeo.

Teorema (Sarantopoulos, 1986)

$\mathbb{C}(n; L^p) = \frac{n^{\frac{n}{p}}}{n!}$ *siempre que p cumpla $1 \leq p \leq n'$.*

El método de aproximación de Krein-Milman

Definición

Sea E un espacio vectorial, $C \subseteq E$ y $e \in C$. Diremos que e es un punto extremo de C si dados $x, y \in C$ y dado $t \in [0, 1]$ tales que

$$e = tx + (1 - t)y,$$

entonces se tiene que $x = y = e$. Notamos por $\mathrm{ext}(C)$ al conjunto de los puntos extremos de C.

Teorema (de Krein-Milman)

Sea C un subconjunto convexo y compacto de un espacio de Banach. Entonces, se tiene que

1. $\mathrm{ext}(C) \neq \emptyset$.
2. $\overline{\mathrm{conv}}(\mathrm{ext}(C)) = C$.

El método de aproximación de Krein-Milman

Teorema (de Steinitz)

Sea C un subconjunto convexo y compacto de un espacio de Banach de dimensión finita. Entonces se tiene lo siguiente:

1. $\mathrm{ext}(C) \neq \varnothing$.
2. $\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(C)) = C$.

Corolario (Método de Krein-Milman)

Para cada función convexa $f : C \to \mathbb{R}$ que alcanza su máximo en un subconjunto convexo y compacto C de un espacio de Banach de dimensión finita existe un punto extremo e de C tal que $f(e) = \max\{f(x) : x \in C\}$.

Cálculo de la constante incondicional $C_{1,2,2}$

Teorema (Choi, Kim, Ki, 1998)

Los puntos extremos de $B_{\mathcal{P}(^2\ell_1^2)}$ *son de la forma*

1. $P(x,y) = \pm x^2 \pm 2xy \pm y^2$, o
2. $P(x,y) = \pm\frac{\sqrt{4|t|-t^2}}{2}(x^2-y^2) + txy$, con $|t| \in (2,4]$.

Teorema

Si $P \in \mathcal{P}(^2\ell_1^2)$ *entonces*

$$|||P|||_{\ell_1^2} \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}\|P\|_{\ell_1^2}$$

y la igualdad se alcanza para los múltiplos escalares de los polinomios $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x^2-y^2) \pm (2+\sqrt{2})xy$. *Por tanto,* $C_{1,2,2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Cálculo de la constante incondicional $C_{1,2,2}$

Demostración.

Si P es de la forma (1), entonces $|||P|||_{\ell_1^2} = \|P\|_{\ell_1^2} = 1$. Por tanto, debemos fijarnos en los polinomios de la forma (2). Es fácil de ver que si P es como (2), entonces el polinomio $|P|$ alcanza su norma ℓ_1^2 en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. De aquí se deduce que

$$
\begin{aligned}
C_{1,2,2} &= \sup\left\{ \left\| \frac{\sqrt{4|t| - t^2}}{2}(x^2+y^2) + |t|xy \right\|_{\ell_1^2} : |t| \in (2,4] \right\} \\
&= \sup\left\{ \left\| \frac{\sqrt{4s - s^2}}{2}(x^2+y^2) + sxy \right\|_{\ell_1^2} : s \in (2,4] \right\} \\
&= \sup\left\{ \frac{\sqrt{4s-s^2}+s}{4} : s \in (2,4] \right\}.
\end{aligned}
$$

Estimando la función $(2,4] \ni s \mapsto \frac{\sqrt{4s-s^2}+s}{4}$ es fácil ver que alcanza su máximo en $s = 2+\sqrt{2}$, ($t = \pm(2+\sqrt{2})$) y dicho valor es $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. □

Cálculo de la constante incondicional $C_{\infty,2,2}$

Teorema (Choi, Kim, 1998)

Los puntos extremos de $B_{\mathcal{P}(^2\ell_\infty^2)}$ son de la forma

1. $P(x,y) = \pm x^2$, *o*
2. $P(x,y) = \pm y^2$, *o*
3. $P(x,y) = \pm(tx^2 - ty^2 \pm 2\sqrt{t(1-t)}xy)$, *con* $t \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Teorema

Si $P \in \mathcal{P}(^2\ell_\infty^2)$ *entonces*

$$|||P|||_{\ell_\infty^2} \leq (1+\sqrt{2})\|P\|_{\ell_\infty^2}$$

y la igualdad se alcanza para los múltiplos escalares de los polinomios $\frac{2+\sqrt{2}}{4}(x^2 - y^2) \pm \frac{\sqrt{2}}{2}xy$. *Por tanto,* $C_{\infty,2,2} = 1 + \sqrt{2}$.

Cálculo de la constante incondicional $C_{\infty,2,2}$

Demostración.

Si P es de la forma (1) o (2), entonces $|||P|||_{\ell_\infty^2} = \|P\|_{\ell_\infty^2} = 1$. Por tanto, bastará con estudiar los polinomios con la forma (3). Es fácil ver que si P es como (3), entonces el polinomio $|P|$ alcanza su norma ℓ_∞^2 en $(1,1)$. De aquí obtenemos que

$$\begin{aligned} C_{\infty,2,2} &= \sup\left\{ \left\| tx^2 + ty^2 + 2\sqrt{t(1-t)}xy \right\|_{\ell_\infty^2} : t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \right\} \\ &= \sup\left\{ 2t + 2\sqrt{t(1-t)} : t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \right\} \\ &= 1 + \sqrt{2}, \end{aligned}$$

ya que el supremo se alcanza para $t = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$. □

Cálculo de la constante de Bohnenblust-Hille $D_2(\mathbb{R})$

Teorema

Sea f una función real dada por

$$f(t) = \left[2t^{\frac{4}{3}} + (2\sqrt{t(1-t)})^{\frac{4}{3}}\right]^{\frac{3}{4}}.$$

Se tiene que $D_2(\mathbb{R}) = f(t_0) \approx 1{,}837373$, donde

$$t_0 = \frac{1}{36}\left(2\sqrt[3]{107+9\sqrt{129}} + \sqrt[3]{856-72\sqrt{129}} + 16\right) \approx 0{,}867835.$$

Además, los siguientes polinomios normalizados son extremos para este problema:

$$P_2(x,y) = \pm(t_0x^2 - t_0y^2 \pm 2\sqrt{t_0(1-t_0)}xy).$$

Cálculo de la constante de Bohnenblust-Hille $D_2(\mathbb{R})$

Demostración.

Sea

$$f(t) = \left[2t^{\frac{4}{3}} + (2\sqrt{t(1-t)})^{\frac{4}{3}}\right]^{\frac{3}{4}}.$$

Notemos que debido a la convexidad de las normas ℓ_p y a la forma que presentan los puntos extremos de $\mathsf{B}_{\mathcal{P}(^2\ell_\infty^2\mathbb{R})}$ se tiene que

$$\begin{aligned} D_2(\mathbb{R}) &= \sup\{|P|_{\frac{4}{3}} : P \in \mathsf{B}_{\mathcal{P}(^2\ell_\infty^2\mathbb{R})}\} \\ &= \sup\{|P|_{\frac{4}{3}} : P \in \mathrm{ext}(\mathsf{B}_{\mathcal{P}(^2\ell_\infty^2\mathbb{R})})\} = \sup_{t\in[1/2,1]} f(t). \end{aligned}$$

Estudiando la función f se comprueba que dicho supremo se alcanza para $t = t_0$, lo que finaliza la prueba. $\square$

Cálculo de la constante de polarización de $\mathcal{P}(^2\Delta)$

Teorema

Si $P \in \mathcal{P}(^2\Delta)$ *entonces*

$$\max_{(x,y)\in\Delta} \|DP(x,y)\|_\Delta \leq 6\|P\|_\Delta. \tag{2}$$

Además, la constante 6 *es óptima ya que se alcanza la igualdad para* $P(x,y) = x^2 - 6xy + y^2$.

Teorema (Muñoz, Révész, Seoane, 2009)

Si $P \in \mathcal{P}(^2\Delta)$ *y* L *es la polar de* P*, entonces*

$$\|L\|_\Delta \leq 3\|P\|_\Delta.$$

Además, la constante 3 *es óptima.*

Demostración.

Basta observar que si $P \in \mathcal{P}(^2\Delta)$, entonces $DP(\mathbf{x}) = 2L(\mathbf{x}, \cdot)$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ y usar el teorema anterior. $\square$

Algunos problemas ya estudiados

1. $\mathcal{P}(^2\ell_1^2)$ (Choi, Ki, Kim, 1998)
2. $\mathcal{P}(^2\ell_\infty^2)$ (Choi, Ki, Kim, 1998)
3. $\mathcal{P}(^2\ell_2^2)$ (Choi, Kim, 1998)
4. $\mathcal{P}(^2\ell_1^p)$, $p > 1$, $p \neq 2$ (Grecu, 2004)
5. $\mathcal{P}_{m,n}(\mathbb{K})$ (**Caso real:** Muñoz, Seoane, 2006. **Caso complejo:** Neuwirth, 2008)
6. $\mathcal{P}(^2\Delta)$ (Muñoz , Révész, Seoane, 2009)
7. $\mathcal{P}(^2\square)$ (Gámez, Muñoz, Sánchez, Seoane, 2013)
8. $\mathcal{P}(^2D(\alpha,\beta))$ (Bernal, Muñoz, Rodríguez, Seoane, 2019)

Procedimiento para estudiar la geometría de un espacio polinomial

1. Se determina una fórmula explícita de la norma polinomial.
2. Se proyecta la bola sobre un plano convenientemente escogido.
3. Se calcula una parametrización de la esfera unidad.
4. Se determinan los puntos extremos de la bola unidad.

La Geometría de $\mathsf{B}_{D(\beta)}$

Comenzamos definiendo el espacio de los polinomios homogéneos de grado 2 definidos en un sector del disco unidad.

Definición ($\mathcal{P}(^2D(\beta))$)

Para cada $\beta \in [0, 2\pi]$ *con* $0 \leq \beta$ *definimos el sector* $D(\beta)$ *como*

$$D(\beta) := \{re^{i\theta} : \ 0 \leq r \leq 1, \ 0 \leq \theta \leq \beta\}.$$

Si P *es un polinomio homogéneo de grado* 2 $\mathbb{R}^2$*, definimos*

$$\|P\|_{D(\beta)} := \sup\{|P(\mathbf{x})| : \mathbf{x} \in D(\beta)\}.$$

- Las **bolas y esferas** unidad en $\mathcal{P}(^2D(\beta))$ las denotaremos por $\mathsf{B}_{D(\beta)}$ y $\mathsf{S}_{D(\beta)}$ respectivamente.
- Los **puntos extremos** $\mathsf{B}_{D(\beta)}$ los denotamos $\mathrm{ext}(\mathsf{B}_{D(\beta)})$.

La Geometría de $B_{D(\beta)}$

Vamos a estudiar la geometría de las bolas unidad para los siguientes sectores

$$\beta \geq \pi \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\pi}{4}.$$

Observación

- *También es conocida la geometría de las correspondientes bolas para un β arbitrario en un preprint reciente.*
- *También se darán imágenes para otros valores de β como por ejemplo $\beta = \frac{\pi}{2}$*

La Geometría de $\mathrm{B}_{D(\beta)}$ con $\beta \geq \pi$

- Si $\beta \geq \pi$ entonces $\mathrm{B}_{D(\beta)} = \mathrm{B}_{\mathcal{P}(^2\ell_2^2)}$, cuyos puntos extremos fueron primero descritos por Choi y Kim en 1998.
- Se puede probar que

$$\|ax^2 + by^2 + cxy\|_{D(\beta)} = \frac{1}{2}\left(|a+b| + \sqrt{(a-b)^2 + c^2}\right).$$

La Geometría de $\mathsf{B}_{D(\beta)}$ con $\beta \geq \pi$

Teorema

Consideramos un polinomio homogéneo de grado 2 $P(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy$ *en* $\mathbb{R}^2$.

- *La esfera unidad de* $\mathcal{P}({}^2\ell_2^2)$ *viene dada por*

$$\mathsf{S}_{\mathcal{P}({}^2\ell_2^2)} = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : |a+b| + \sqrt{(a-b)^2 + c^2} = 2\}.$$

- *Los puntos extremos son*

$$\begin{aligned} \operatorname{ext}(\mathsf{B}_{\mathcal{P}({}^2\ell_2^2)}) &= \{(a,-a,\pm 2\sqrt{1-a^2}) : a \in [-1,1]\} \cup \{\pm(1,1,0)\} \\ &= \{\pm(a,-a,2\sqrt{1-a^2}) : a \in [-1,1]\} \cup \{\pm(1,1,0)\}. \end{aligned}$$

La Geometría de $B_{D(\beta)}$ con $\beta \geq \pi$

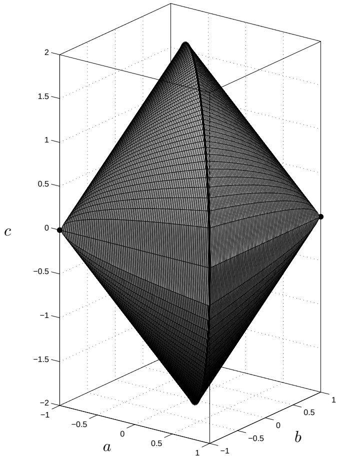


Figura: $S_{\mathcal{P}(^2\ell_2^2)}$. Los puntos extremos de $B_{\mathcal{P}(^2\ell_2^2)}$ están dibujados con puntos y una línea gruesa

La Geometría de $\mathsf{B}_{D(\frac{\pi}{4})}$

La expresión explícita de $\|\cdot\|_{D(\frac{\pi}{4})}$ viene dada por el siguiente resultado.

Teorema

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ *y* $P(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy$ *entonces* $\|P\|_{D(\frac{\pi}{4})}$ *viene dada por*

$$\begin{cases} \text{máx}\left\{|a|, \frac{1}{2}|a+b+c|, \frac{1}{2}\left|a+b+\operatorname{sign}(c)\sqrt{(a-b)^2+c^2}\right|\right\} & \textit{si } c(a-b) \geq 0, \\ \text{máx}\{|a|, \frac{1}{2}|a+b+c|\} & \textit{si } c(a-b) \leq 0, \end{cases}$$

La Geometría de $B_{D(\frac{\pi}{4})}$: proyección sobre un plano

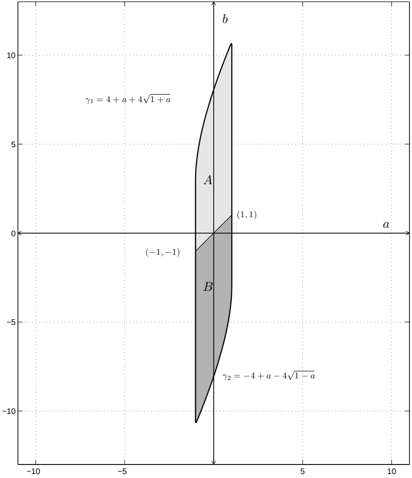


Figura: Proyección de $S_{D(\frac{\pi}{4})}$ en el plano ab

La Geometría de $\mathsf{B}_{D(\frac{\pi}{4})}$: proyección sobre un plano

Teorema

Sean A y B como en la figura que se acaba de mostrar, esto es

$$A = \{(a,b):\ a \in [-1,1],\ a < b \leq \gamma_1(a)\},$$
$$B = \{(a,b):\ a \in [-1,1],\ \gamma_2(a) \leq b \leq a\},$$

donde γ_1, γ_2 están definidos como

$$\gamma_1(a) = 4 + a + 4\sqrt{1+a},$$
$$\gamma_2(a) = -\gamma_1(-a) = -4 + a - 4\sqrt{1-a},$$

para $a \in [-1,1]$. Entonces, la proyección de $\mathsf{S}_{D(\frac{\pi}{4})}$ sobre el plano ab es

$$\pi_{ab}(\mathsf{S}_{D(\frac{\pi}{4})}) = \{(a,b):\ a \in [-1,1],\ \gamma_2(a) \leq b \leq \gamma_1(a)\}.$$

La Geometría de $\mathsf{B}_{D(\frac{\pi}{4})}$: parametrización

Teorema (Parametrización de $\mathsf{B}_{D(\frac{\pi}{4})}$.)

Sean A y B definidos como antes, y hacemos

$$F_1(a,b) = \begin{cases} 2-a-b & \textit{si } (a,b)\in A, \\ 2\sqrt{(1-a)(1-b)} & \textit{si } (a,b)\in B, \end{cases}$$

y $F_2(a,b) = -F_1(-a,-b)$ para todos $(a,b)\in \pi_{ab}(\mathsf{S}_{D(\frac{\pi}{4})})$. Si

$$\Gamma = \{(\pm 1, b, c)\in \mathbb{R}^3 : \ (\pm 1, b)\in \partial \pi_{ab}(\mathsf{S}_{D(\frac{\pi}{4})}),\ F_2(\pm 1, b)\le c\le F_1(\pm 1, b)\},$$

entonces $\mathsf{S}_{D(\frac{\pi}{4})} = \mathrm{graph}(F_1)\cup \mathrm{graph}(F_2)\cup \Gamma$.

La Geometría de $\mathrm{B}_{D(\frac{\pi}{4})}$: puntos extremos

Teorema (Puntos extremos de $\mathrm{B}_{D(\frac{\pi}{4})}$)

El conjunto $\mathrm{ext}(\mathrm{B}_{D(\frac{\pi}{4})})$ *viene dado por*

$$\pm\left(t, 4+t+4\sqrt{1+t}, -2-2t-4\sqrt{1+t}\right) \quad \textit{para} \quad t \in [-1,1],$$

$$\pm\left(1, s, -2\sqrt{2(1+s)}\right) \quad \textit{para} \quad s \in [1, 5+4\sqrt{2}],$$

y

$$\pm(1,1,0).$$

La Geometría de $B_{D(\frac{\pi}{4})}$

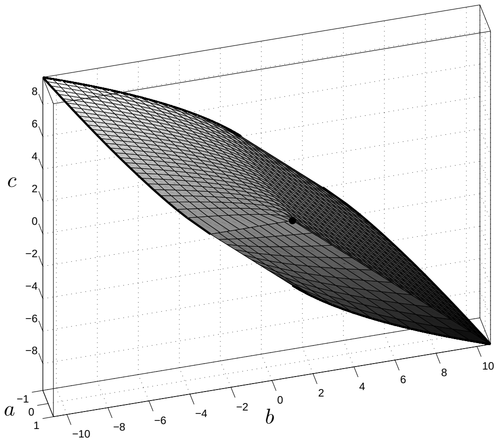


Figura: $S_{D(\frac{\pi}{4})}$. Los puntos extremos de $B_{D(\frac{\pi}{4})}$ están dibujados con puntos y una línea gruesa

La Geometría de $\mathrm{B}_{D(\frac{\pi}{2})}$

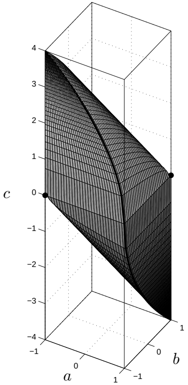


Figura: $S_{D(\frac{\pi}{2})}$. Los puntos extremos de $B_{D(\frac{\pi}{2})}$ están dibujados con un puntos y una línea gruesa

La Geometría de $B_{D(\frac{3\pi}{4})}$: proyección sobre un plano

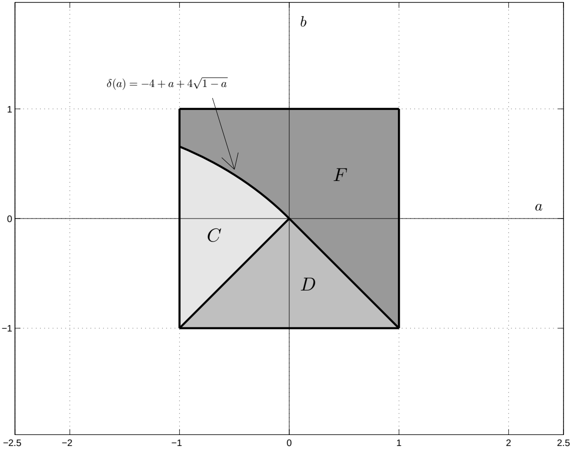
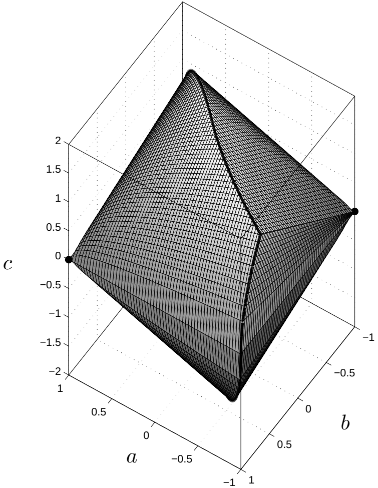


Figura: Proyección de $S_{D(\frac{3\pi}{4})}$ en el plano ab

La Geometría de $B_{D(\frac{3\pi}{4})}$



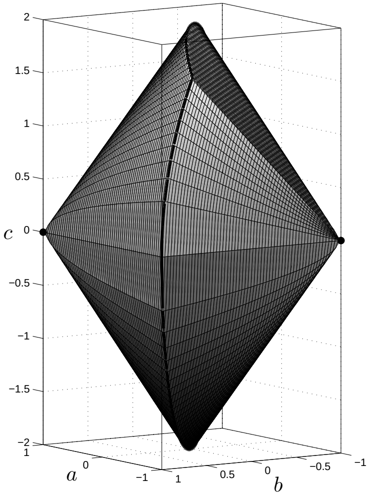


Figura: Dos perspectivas diferentes de $S_{D(\frac{3\pi}{4})}$. Los puntos extremos de $B_{D(\frac{3\pi}{4})}$ están dibujados con puntos y una línea gruesa