Espacios de Hardy y funciones holomorfas en infinitas variables

Jonathan Chirinos, Eki González, Nerea González, Antoni López, Héctor Méndez y Alicia Quero

Escuela Taller Análisis Funcional
Bilbao, 8 marzo 2019

Índice

Índice

Preliminares

Definición

$H_\infty(\mathbb{D}) = \{ f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C} \ : \ f \text{ holomorfa y acotada } \}$

Preliminares

Definición

$H_\infty(\mathbb{D}) = \{ f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C} \, : \, f \text{ holomorfa y acotada } \}$

Teorema

$H_\infty(\mathbb{D})$ con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|$$

es un espacio de Banach.

Coeficiente de Fourier

Sean $f \in L_1(\mathbb{T})$ y $n \in \mathbb{Z}$

$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(w) w^{-n} dw.$$

Preliminares

Coeficiente de Fourier

Sean $f \in L_1(\mathbb{T})$ y $n \in \mathbb{Z}$

$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(w) w^{-n} dw.$$

Espacio de Hardy

$H_\infty(\mathbb{T}) = \{f \in L_\infty(\mathbb{T}) : \hat{f}(n) = 0,\ n < 0\}$

$H_\infty(\mathbb{T})$ es Banach.

Objetivo

Pretendemos probar que hay un isomorfismo isométrico

$$H_\infty(\mathbb{T}) = H_\infty(\mathbb{D})$$

Objetivo

Pretendemos probar que hay un isomorfismo isométrico

$$H_\infty(\mathbb{T}) = H_\infty(\mathbb{D})$$

$$f \in H_\infty(\mathbb{T})$$

Objetivo

Pretendemos probar que hay un isomorfismo isométrico

$$H_\infty(\mathbb{T}) = H_\infty(\mathbb{D})$$

$$f \in H_\infty(\mathbb{T}) \longrightarrow \big(\hat{f}(n)\big)_n$$

Objetivo

Pretendemos probar que hay un isomorfismo isométrico

$$H_\infty(\mathbb{T}) = H_\infty(\mathbb{D})$$

$$f \in H_\infty(\mathbb{T}) \longrightarrow \big(\hat{f}(n)\big)_n \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n.$$

Objetivo

Pretendemos probar que hay un isomorfismo isométrico

$$H_\infty(\mathbb{T}) = H_\infty(\mathbb{D})$$

$$f \in H_\infty(\mathbb{T}) \longrightarrow \left(\hat{f}(n)\right)_n \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n.$$

Pero

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\hat{f}(n)\right| |z^n| \leq \|f\|_\infty \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n < \infty \Longleftrightarrow |z| < 1.$$

Objetivo

Pretendemos probar que hay un isomorfismo isométrico

$$H_\infty(\mathbb{T}) = H_\infty(\mathbb{D})$$

$$f \in H_\infty(\mathbb{T}) \longrightarrow \left(\hat{f}(n)\right)_n \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n.$$

Pero

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\hat{f}(n)\right| |z^n| \leq \|f\|_\infty \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n < \infty \Longleftrightarrow |z| < 1.$$

Luego

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$$

define una función $g \colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa.

Núcleo de Poisson

Para $z \in \mathbb{D}$ y $w \in \mathbb{T}$,

$$p(z, w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} w^{-n} r^{|n|} u^n,$$

donde $z = ru$ con $u = z/|z| \in \mathbb{T}$ y $r = |z|$.

- Está bien definido;

Núcleo de Poisson

Para $z \in \mathbb{D}$ y $w \in \mathbb{T}$,

$$p(z,w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} w^{-n} r^{|n|} u^n,$$

donde $z = ru$ con $u = z/|z| \in \mathbb{T}$ y $r = |z|$.

- Está bien definido;
- $p(z,w) = \dfrac{|w|^2 - |z|^2}{|w-z|^2} > 0 \quad \forall w \in \mathbb{T},\ z \in \mathbb{D}$;
- $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} p(z,w)dw = 1.$

Operador de Poisson

Para $f \in L_1(\mathbb{T})$,

$$P[f](z) = \int_{\mathbb{T}} p(z,w) f(w) dw = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) r^{|n|} u^n \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Operador de Poisson

Para $f \in L_1(\mathbb{T})$,

$$P[f](z) = \int_{\mathbb{T}} p(z,w) f(w) dw = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) r^{|n|} u^n \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Teorema

$P\colon H_\infty(\mathbb{T}) \longrightarrow H_\infty(\mathbb{D})$ es un isomorfismo isométrico tal que $c_n(P[f]) = \hat{f}(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Operador de Poisson

Para $f \in L_1(\mathbb{T})$,

$$P[f](z) = \int_{\mathbb{T}} p(z,w) f(w) dw = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) r^{|n|} u^n \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Teorema

$P\colon H_\infty(\mathbb{T}) \longrightarrow H_\infty(\mathbb{D})$ es un isomorfismo isométrico tal que $c_n(P[f]) = \hat{f}(n)\ \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Si $f \in H_\infty(\mathbb{T})$ entonces

$$P[f](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n.$$

Con esto

$$\|P[f]\|_\infty \leq \sup_{z\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{T}} |p(z,w)f(w)| dw \leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{T}} p(z,w) dw = \|f\|_\infty.$$

Teorema

$P\colon H_\infty(\mathbb{T}) \longrightarrow H_\infty(\mathbb{D})$ es un isomorfismo isométrico tal que $c_n(P[f]) = \hat{f}(n)\ \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Para la sobreyectividad: tomamos $g \in H_\infty(\mathbb{D})$ y para $n \in \mathbb{N}$ consideramos $g_n(w) = g\big((1 - 1/n)w\big)$ para $w \in \mathbb{T}$.

Teorema

$P\colon H_\infty(\mathbb{T}) \longrightarrow H_\infty(\mathbb{D})$ es un isomorfismo isométrico tal que $c_n(P[f]) = \hat{f}(n)\ \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Para la sobreyectividad: tomamos $g \in H_\infty(\mathbb{D})$ y para $n \in \mathbb{N}$ consideramos $g_n(w) = g\big((1-1/n)w\big)$ para $w \in \mathbb{T}$.
Idea: ver que g_n tiene una subsucesión convergente en L_∞.

Teorema

$P\colon H_\infty(\mathbb{T}) \longrightarrow H_\infty(\mathbb{D})$ es un isomorfismo isométrico tal que $c_n(P[f]) = \hat{f}(n)\ \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Para la sobreyectividad: tomamos $g \in H_\infty(\mathbb{D})$ y para $n \in \mathbb{N}$ consideramos $g_n(w) = g\big((1-1/n)w\big)$ para $w \in \mathbb{T}$.
Idea: ver que g_n tiene una subsucesión convergente en L_∞.
Hace falta:

- toda función holomorfa es analítica;
- Teorema de Banach-Alaoglu;
- convergencia w^*.

Índice

Definiciones

Función holomorfa en N-variables

Sea U abierto de $\mathbb{C}^N$, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa si para cada $z \in U$ existe un único $\nabla f(z) \in \mathbb{C}^N$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z) - \langle \nabla f(z), h\rangle}{\|h\|} = 0.$$

$H_\infty(\mathbb{D}^N) = \{f\colon \mathbb{D}^N \longrightarrow \mathbb{C} \,:\, f \text{ es holomorfa y acotada}\}$

Definiciones

Función holomorfa en N-variables

Sea U abierto de $\mathbb{C}^N$, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa si para cada $z \in U$ existe un único $\nabla f(z) \in \mathbb{C}^N$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z) - \langle \nabla f(z), h \rangle}{\|h\|} = 0.$$

$H_\infty(\mathbb{D}^N) = \{f\colon \mathbb{D}^N \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ es holomorfa y acotada}\}$

Teorema

$H_\infty(\mathbb{D}^N)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}^N} |f(z)|.$$

Analiticidad

Teorema

Sea $f : \mathbb{D}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Existen $\big(c_\alpha(f)\big)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \subset \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} c_\alpha(f) z^\alpha \,, \quad \forall z \in \mathbb{D}^N$$

La convergencia es absoluta y uniforme en cada compacto.

Analiticidad

Teorema

Sea $f : \mathbb{D}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Existen $\big(c_\alpha(f)\big)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \subset \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha(f) z^\alpha \,, \quad \forall z \in \mathbb{D}^N$$

La convergencia es absoluta y uniforme en cada compacto.

Los coeficientes son únicos y se pueden calcular con la fórmula integral de Cauchy.

Coeficientes de Fourier y espacio $H_\infty(\mathbb{T}^N)$

Coeficientes de Fourier

Dada $f \in L_1(\mathbb{T}^N)$ y $\alpha \in \mathbb{Z}^N$,

$$\hat{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{T}^N} f(w) w^{-\alpha} dw.$$

Coeficientes de Fourier y espacio $H_\infty(\mathbb{T}^N)$

Coeficientes de Fourier

Dada $f \in L_1(\mathbb{T}^N)$ y $\alpha \in \mathbb{Z}^N$,

$$\hat{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{T}^N} f(w) w^{-\alpha} dw.$$

Espacio de Hardy

$$H_\infty(\mathbb{T}^N) = \left\{ f \in L_\infty(\mathbb{T}^N) \colon \hat{f}(\alpha) = 0 \text{ si } \alpha \notin \mathbb{N}_0^N \right\}.$$

$H_\infty(\mathbb{T}^N)$ es Banach.

Núcleo de Poisson en N-variables

Para $z \in \mathbb{D}^N$ y $w \in \mathbb{T}^N$,

$$p_N(z,w) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^N} w^{-\alpha} r^{|\alpha|} u^{\alpha},$$

donde $u \in \mathbb{T}^N$ viene dado por $u_j = z_j/|z_j|$ y $r = (r_1, \ldots, r_N)$ por $r_j = |z_j|$, y escribimos $r^{|\alpha|} = r_1^{|\alpha_1|} \cdots r_N^{|\alpha_N|}$ y $z = ru$.

$$p_N(z,w) = \prod_{j=1}^{N} p(z_j, w_j) \quad \forall z \in \mathbb{D}^N, w \in \mathbb{T}^N.$$

Operador de Poisson

Para $f \in L_1(\mathbb{T}^N)$,

$$P_N[f](z) = \int_{\mathbb{T}^N} p_N(z,w) f(w) dw = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^N} \hat{f}(\alpha) r^{|\alpha|} u^{\alpha} \quad \forall z \in \mathbb{D}^N.$$

Operador de Poisson

Para $f \in L_1(\mathbb{T}^N)$,

$$P_N[f](z) = \int_{\mathbb{T}^N} p_N(z,w) f(w) dw = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^N} \hat{f}(\alpha) r^{|\alpha|} u^{\alpha} \quad \forall z \in \mathbb{D}^N.$$

Teorema

Para cada $N \in \mathbb{N}$, el operador

$$P_N \colon H_\infty(\mathbb{T}^N) \longrightarrow H_\infty(\mathbb{D}^N)$$

es un isomorfismo isométrico tal que $c_\alpha(P_N[f]) = \hat{f}(\alpha)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

Índice

Problemas en infintas variables

- ¿Qué tomamos como análogo a $\mathbb{D}^N$?
- ¿Qué es una función holomorfa en infinitas variables?
- ¿Cómo definimos los coeficientes de Fourier en $\mathbb{T}^\infty$?

Primeros pasos

Análogo de $\mathbb{D}^N$

B_{c_0} (Bola abierta unidad de c_0)

Primeros pasos

Análogo de $\mathbb{D}^N$

B_{c_0} (Bola abierta unidad de c_0)

Función holomorfa (Fréchet)

$f\colon B_{c_0} \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa si para cada $x \in B_{c_0}$ existe un único $x^* \in c_0^*$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - x^*(h)}{\|h\|} = 0.$$

Primeros pasos

Análogo de $\mathbb{D}^N$

B_{c_0} (Bola abierta unidad de c_0)

Función holomorfa (Fréchet)

$f \colon B_{c_0} \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa si para cada $x \in B_{c_0}$ existe un único $x^* \in c_0^*$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - x^*(h)}{\|h\|} = 0.$$

$H_\infty(B_{c_0}) = \{f \colon B_{c_0} \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ es holomorfa y acotada}\}$

Primeros pasos

Análogo de $\mathbb{D}^N$

B_{c_0} (Bola abierta unidad de c_0)

Función holomorfa (Fréchet)

$f\colon B_{c_0} \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa si para cada $x \in B_{c_0}$ existe un único $x^* \in c_0^*$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - x^*(h)}{\|h\|} = 0.$$

$H_\infty(B_{c_0}) = \{f\colon B_{c_0} \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ es holomorfa y acotada}\}$ ...Banach

Coeficientes de Taylor

Dada $g \in H_\infty(B_{c_0})$ y N sea $g_N : \mathbb{D}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ restricción. Entonces

$$g_N(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha(g_N) z^\alpha.$$

Coeficientes de Taylor

Dada $g \in H_\infty(B_{c_0})$ y N sea $g_N : \mathbb{D}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ restricción. Entonces

$$g_N(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha(g_N) z^\alpha.$$

Se cumple

$$c_\alpha(g_N) = c_\alpha(g_M).$$

para todo $M \geq N$.

Coeficientes de Taylor

Dada $g \in H_\infty(B_{c_0})$ y N sea $g_N : \mathbb{D}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ restricción. Entonces

$$g_N(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha(g_N) z^\alpha.$$

Se cumple

$$c_\alpha(g_N) = c_\alpha(g_M).$$

para todo $M \geq N$. Luego

$$g \sim \big(c_\alpha(g)\big)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}.$$

Coeficientes de Taylor

Dada $g \in H_\infty(B_{c_0})$ y N sea $g_N : \mathbb{D}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ restricción. Entonces

$$g_N(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha(g_N) z^\alpha.$$

Se cumple

$$c_\alpha(g_N) = c_\alpha(g_M).$$

para todo $M \geq N$. Luego

$$g \sim \big(c_\alpha(g)\big)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}.$$

Problema: $g(z)$ puede **NO** coincidir con $\sum c_\alpha(g) z^\alpha$.

Coeficientes de Fourier y espacio $H_\infty(\mathbb{T}^\infty)$

$$\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{N}_0^N, \quad \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}^N.$$

Coeficientes de Fourier y espacio $H_\infty(\mathbb{T}^\infty)$

$$\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{N}_0^N, \quad \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}^N.$$

Coeficientes de Fourier

Dada $f \in L_1(\mathbb{T}^\infty)$ y $\alpha \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$,

$$\hat{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{T}^\infty} f(w) w^{-\alpha} dw.$$

Coeficientes de Fourier y espacio $H_\infty(\mathbb{T}^\infty)$

$$\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{N}_0^N, \quad \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}^N.$$

Coeficientes de Fourier

Dada $f \in L_1(\mathbb{T}^\infty)$ y $\alpha \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$,

$$\hat{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{T}^\infty} f(w) w^{-\alpha} dw.$$

Espacio de Hardy

$$H_\infty(\mathbb{T}^\infty) = \left\{ f \in L_\infty(\mathbb{T}^\infty) \colon \hat{f}(\alpha) = 0 \text{ si } \alpha \notin \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \right\}.$$

Resultado final

Teorema

Existe un único isomorfismo isométrico

$$P_\infty \colon H_\infty(\mathbb{T}^\infty) \longrightarrow H_\infty(B_{c_0})$$

tal que para cada $f \in H_\infty(\mathbb{T}^\infty)$, $c_\alpha(P_\infty[f]) = \hat{f}(\alpha)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$.

Resultado final

Teorema

Existe un único isomorfismo isométrico

$$P_\infty \colon H_\infty(\mathbb{T}^\infty) \longrightarrow H_\infty(B_{c_0})$$

tal que para cada $f \in H_\infty(\mathbb{T}^\infty)$, $c_\alpha(P_\infty[f]) = \hat{f}(\alpha)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$.

Idea: "bajar", aplicar el teorema N-dimensional y "subir".

$$\begin{tikzcd}
H_\infty(\mathbb{T}^\infty) \arrow[r] \arrow[d, dashed, leftrightarrow] & H_\infty(B_{c_0}) \arrow[d, dashed, leftrightarrow] \\
H_\infty(\mathbb{T}^N) \arrow[r] & H_\infty(\mathbb{D}^N)
\end{tikzcd}$$

"Subir" / "bajar" (parte holomorfa)

Teorema ("subir")

Sea $(c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} \subset \mathbb{C}$ tal que

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} |c_\alpha z^\alpha| < \infty \quad \forall z \in \mathbb{D}^N \text{ para cada } N \in \mathbb{N}$$

$$\sup_N \sup_{z \in \mathbb{D}^N} \Big| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha z^\alpha \Big| < \infty$$

Entonces existe una única $g \in H_\infty(B_{c_0})$ tal que $c_\alpha(g) = c_\alpha \ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$. Además $\|g\|_\infty$ es igual al supremo.

"Bajar"

Tomamos $g_N \in H_\infty(\mathbb{D}^N)$, la restricción de g a las primeras N variables.

“Subir” / “bajar” (parte armónica)

Teorema (“subir”)

Sea $(c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} \subset \mathbb{C}$, son equivalentes:

1. existe $f \in H_\infty(\mathbb{T}^\infty)$ tal que $\hat{f}(\alpha) = c_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$;
2. para cada $N \in \mathbb{N}$, existe $f_N \in H_\infty(\mathbb{T}^N)$ tal que $\hat{f}_N(\alpha) = c_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ cumpliendo $\sup\limits_{N\in\mathbb{N}} \|f_N\|_\infty < \infty$.

Además, en ese caso $\|f\|_\infty = \sup_{N\in\mathbb{N}} \|f_N\|_\infty$.

“Bajar”

Tomar

$$f_{[N]}(w) = \int_{\mathbb{T}^\infty} f(w,z)dz.$$

Se tiene: $f_{[N]} \in H_\infty(\mathbb{T}^N)$ y $\hat{f}_{[N]}(\alpha) = \hat{f}(\alpha)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

Resultado final

Teorema

Existe un único isomorfismo isométrico

$$P_\infty \colon H_\infty(\mathbb{T}^\infty) \longrightarrow H_\infty(B_{c_0})$$

tal que para cada $f \in H_\infty(\mathbb{T}^\infty)$, $c_\alpha(P_\infty[f]) = \hat{f}(\alpha)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$.

Idea: "bajar", aplicar el teorema N-dimensional y "subir".

$$\begin{tikzcd}
H_\infty(\mathbb{T}^\infty) \arrow[r] \arrow[d, dashed, leftrightarrow] & H_\infty(B_{c_0}) \arrow[d, dashed, leftrightarrow] \\
H_\infty(\mathbb{T}^N) \arrow[r] & H_\infty(\mathbb{D}^N)
\end{tikzcd}$$