

**Índices de Pérdidas por catástrofes subyacentes
de Insurance-Linked Securities.
Modelización continua**

**María José Pérez-Fructuoso
Madrid Open University (UDIMA)**

Introducción

Incremento mundial de las pérdidas derivadas catástrofes debido a:

- Cambios climáticos y geológicos.
- Crecimiento de la población en áreas propensas a catástrofes naturales.

Consecuencia: MAYOR EXPOSICIÓN A PÉRDIDAS POR CATÁSTROFES que pueden comprometer la SOLVENCIA de las aseguradoras que operan en él.

SOLUCIONES DEL MERCADO ASEGURADOR:

- Reducir la contratación de pólizas en aquellos ramos más susceptibles de verse afectados por este tipo de eventos.
- Aumentar la contratación de reaseguro.

PROBLEMA:

SITUACIÓN DE MERCADO DURO en la industria reaseguradora de riesgo catastrófico:

- Elevados precios de reaseguro catastrófico.
- Restricción de la capacidad de cobertura para catástrofes.

Introducción

SOLUCIONES DEL MERCADO DE CAPITAL:

➤ **TITULIZACIÓN:** emisión y creación de derivados financieros, para transferir el riesgo asegurado a los inversores de los mercados de capital quienes toman posiciones en la ocurrencia y el coste de las catástrofes.

BONOS SOBRE CATÁSTROFES: DEFINICIÓN

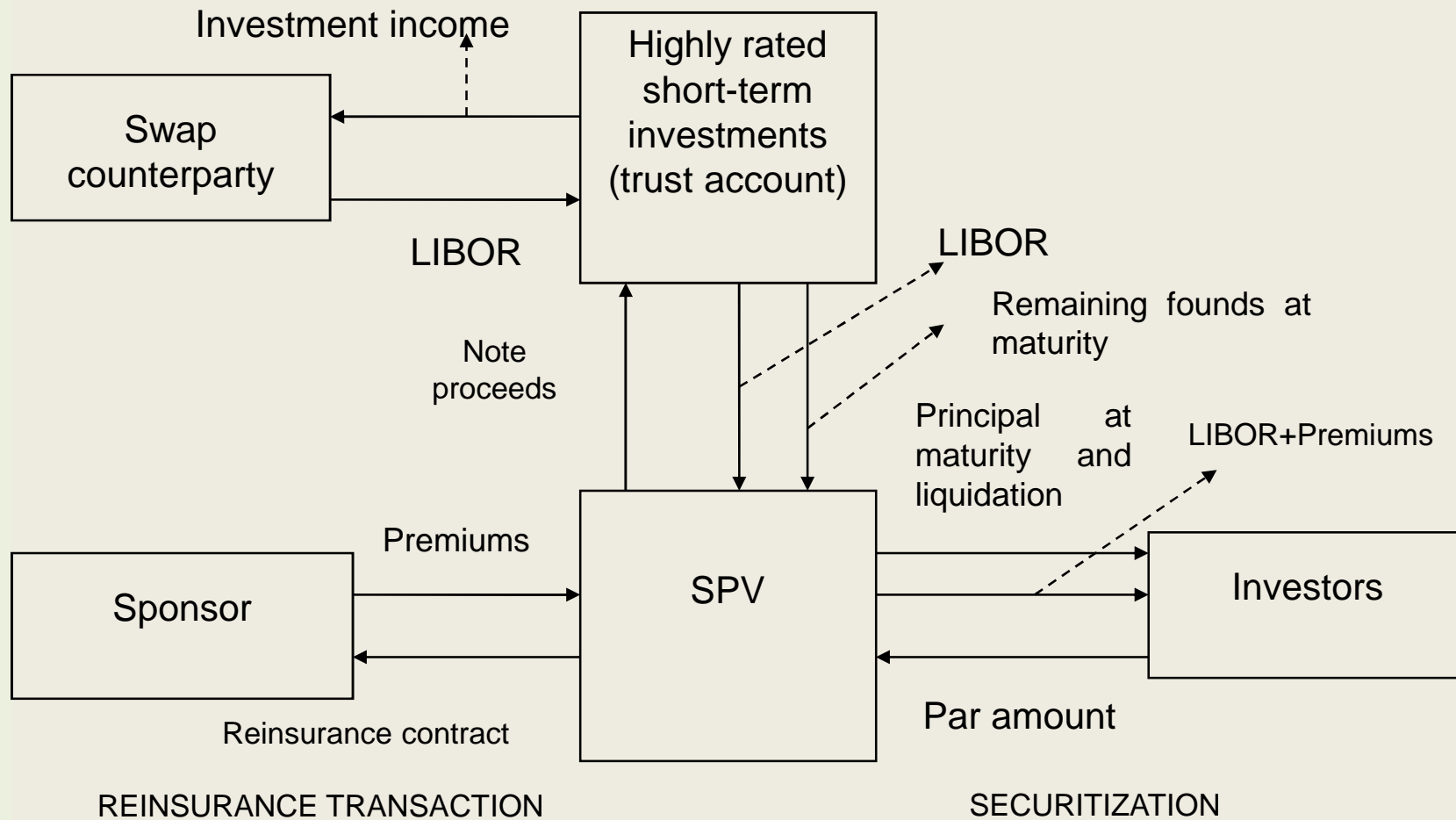
Título de renta fija que paga un determinado tipo de interés o cupón en unas fechas previstas y reembolsa el principal al vencimiento.

DIFERENCIA CON LOS BONOS TRADICIONALES:

Inversores sujetos a la pérdida del total o de una parte del principal y/o de los cupones si ocurre un determinado suceso desencadenante a lo largo de la vida del bono ⇒ **PAGOS CONDICIONADOS**

Introducción

ESTRUCTURA GENÉRICA DE UNA TRANSACCIÓN CON CAT-BONDS



Introducción

Los bonos sobre catástrofes han evolucionado mucho desde los primeros días del mercado. Inicialmente los desencadenantes eran de indemnización \Rightarrow actualmente preferencia por desencadenantes de índices que reflejan el desarrollo de una de los daños catastróficos cubiertos en la emisión.

El pago de los cupones y/o el principal están condicionados a que el índice de pérdidas seleccionado exceda un determinado punto de intervención, de forma que si los daños fueran menores, el inversor recupera al vencimiento todo el principal más una elevada rentabilidad y en el otro caso, el patrocinador recibe de una SPV una cuantía igual a las pérdidas del inversor.

Los desencadenantes de índices de pérdidas reducen el azar moral y evitan que la aseguradora tenga que revelar información (confidencial) sobre su política de suscripción. Pero generan riesgo de base. Por tanto, una modelación precisa del índice de pérdidas seleccionado resulta de primordial importancia para su tarificación.

Introducción

Contribuciones previas

DIVERSOS AUTORES han abordado el análisis de la tarificación y por tanto de modelación del índice de pérdidas de estos productos alternativos de cobertura aseguradora.

- Cummins y Geman (1995)
- Geman y Yor (1997)
- Aase (2001)
- Loubergé, Kellezi, y Gilli (1999)
- Lee y Yu (2002)
- Cox y Pedersen (2000)
- **Alegre, Pérez-Fructuoso, y Devolder (2003)**

Determinación del índice de pérdidas por catástrofes

Hipótesis sobre la ocurrencia de catástrofes

$[0, T] \subset [0, T']$ es el periodo de riesgo del bono catastrófico.

T' es el vencimiento del bono

$\tau \in [0, T]$ es el momento de ocurrencia de la catástrofe.

$K_{\tau}^{(.,i)}$ es la variable aleatoria cuantía total de la catástrofe $(.,i)$ ocurrida en el momento τ donde el superíndice $(.)$ representa el tipo concreto del suceso catastrófico cubierto en el contrato (inundación, huracán, terremoto, tsunami, ...) e $i = 1, 2, 3$ denota si la catástrofe es de pequeña ($i=1$), media ($i=2$) o gran cuantía ($i=3$) (Alegre, Pérez-Fructuoso, y Devolder 2003).

$\delta_{i,\tau}$ es una variable indicador (Bernoulli variable) cuyo valor es 0 si no se produce la catástrofe $(.,i)$ en $\tau \in [0, T]$, o 1 en otro caso.

Hipótesis sobre la declaración de siniestros

La ocurrencia de la catástrofe $(.,i)$ en el momento $\tau \in [0, T]$ desencadena el proceso de declaración de siniestros hasta el vencimiento del bono, $T' \Rightarrow \forall t \in (\tau, T'] \subset [0, T']$, la cuantía total de la catástrofe es la suma de dos variables aleatorias,

$$K_{\tau}^{(:,i)} = R_{\tau}^{(:,i)}(t) + S_{\tau}^{(:,i)}(t)$$

$R_{\tau}^{(:,i)}(t)$ la cuantía de siniestros pendiente de declaración en t (*IBNRL*) y $S_{\tau}^{(:,i)}(t)$ la cuantía declarada de siniestros hasta t (*RL*).

Condiciones de Contorno para $R_{\tau}^{(:,i)}(t)$ y $S_{\tau}^{(:,i)}(t)$

- *Inicial:*

$$R_{\tau}^{(:,i)}(\tau) = K_{\tau}^{(:,i)} \quad \text{y} \quad S_{\tau}^{(:,i)}(\tau) = 0$$

- *Final:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_{\tau}^{(:,i)}(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} S_{\tau}^{(:,i)}(t) = K_{\tau}^{(:,i)}$$

Hipótesis sobre la declaración de siniestros

Cummins y Geman (1995), Geman y Yor (1997), Loubergé, Kellezi y Gilli (1999) o Lee y Yu (2002) definen la declaración de siniestros (RL) como un **proceso geométrico Browniano** y como consecuencia asumen un crecimiento exponencial en promedio de la siniestralidad instantánea.

Sin embargo, **la evidencia empírica muestra lo contrario:**

- Cuando se produce la catástrofe la mayor parte de las reclamaciones se declaran inmediatamente y el resto de las declaraciones va decreciendo en el tiempo.
- La intensidad del proceso de declaración de siniestros está estrechamente relacionada con las **características específicas** de la catástrofe ocurrida (tipo, momento y área geográfica).

Hipótesis sobre la declaración de siniestros

Nuestro modelo se basa en la hipótesis de que cada catástrofe tiene su evolución particular y el proceso de reclamaciones instantáneo no crece exponencialmente en el tiempo sino que lo hace de forma proporcional a IBNRL.

Ecuación diferencial estocástica para IBNRL,

$$dR_{\tau}^{(:,i)}(t) = -\alpha_{\tau}^{(:,i)}(t - \tau) \times R_{\tau}^{(:,i)}(t) \times dt + \sigma_{\tau}^{(:,i)} \times R_{\tau}^{(:,i)}(t) \times dw_{\tau}^{(:,i)}(t - \tau)$$

$\alpha_{\tau}^{(:,i)}(t - \tau)$ es la función real de variable real tasa de declaración de siniestros representativa de la tendencia del proceso.

$\sigma_{\tau}^{(:,i)}$ es un valor constante que expresa la volatilidad del proceso de declaraciones.

$w_{\tau}^{(:,i)}(t - \tau)$ es un proceso de Wiener estándar a través del cual se introduce la aleatoriedad en nuestro modelo.

Hipótesis sobre la declaración de siniestros

La E.D.E. de la IBNRL decrece en el tiempo de forma proporcional a la tasa de declaración de siniestros, cuyo valor se estima suponiendo que los siniestros asociados a catástrofes de cuantía media ($i=2$) se declaran más rápido que aquellos asociados a las grandes catástrofes ($i=3$), $\alpha_{\tau}^{(,2)}(t - \tau) > \alpha_{\tau}^{(,3)}(t - \tau)$.

Las catástrofes de pequeña cuantía ($i=1$), se supone que se declaran de forma instantánea en el momento en el que se producen, es decir

$$\alpha_{\tau}^{(,1)}(t - \tau) \rightarrow \infty$$

$$R_{\tau}^{(,1)}(t) = 0 \text{ y } S_{\tau}^{(,1)}(t) = k_{\tau}^{(,1)}$$

Hipótesis sobre la declaración de siniestros

Perturbar la tasa declaración de siniestros a través de un ruido blanco amplificado por la volatilidad $\sigma_{i,\tau}$ puede dar lugar a valores negativos de esta variable y consecuentemente producir un crecimiento de la IBNRL, contradiciendo una de las hipótesis inicialmente asumidas en la modelación. Esto puede ocurrir cuando la valoración pericial da lugar a valores de pérdidas por debajo de los declarados inicialmente.

Por tanto, una condición necesaria para nuestro modelo será limitar los valores de $\sigma_{i,\tau}$ a aquellos que eliminen cualquier escenario de crecimiento de la IBNRL.

Solución general para la IBNRL y la RL

Aplicando el lema de Itô en la E.D.E. de la IBNRL obtenemos:

$$R_{\tau}^{(:,i)}(t) = K_{\tau}^{(:,i)} \times e^{-\left(\int_0^{t-\tau} \alpha_{\tau}^{(:,i)}(s) ds + \frac{(\sigma_{\tau}^{(:,i)})^2}{2} \times (t-\tau)\right) + \sigma_{\tau}^{(:,i)} \times w_{\tau}^{(:,i)}(t-\tau)}$$

La RL se obtiene fácilmente por diferencia entre la cuantía total de la catástrofe y la IBNRL:

$$S_{\tau}^{(:,i)}(t) = K_{\tau}^{(:,i)} - R_{\tau}^{(:,i)}(t) = K_{\tau}^{(:,i)} \times \left[1 - e^{-\left(\int_0^{t-\tau} \alpha_{\tau}^{(:,i)}(s) ds + \frac{(\sigma_{\tau}^{(:,i)})^2}{2} \times (t-\tau)\right) + \sigma_{\tau}^{(:,i)} \times w_{\tau}^{(:,i)}(t-\tau)} \right]$$

Cálculo del índice de pérdidas por catástrofes

Los cat bonds basados en índices de pérdidas cubren una única catástrofe y sus pagos están condicionados al valor que toma un índice de pérdidas determinado al vencimiento, en nuestro caso $LI(T')$.

$LI(T')$ se obtiene (en el momento inicial del proceso) por agregación hasta T' de las pérdidas catastróficas cubiertas:

$$LI(T') = \delta_{\tau}^{(:,i)} \times S_{\tau}^{(:,i)}(T') = \begin{cases} 0 & \text{si } \delta_{\tau}^{(:,i)} = 0 \\ S_{\tau}^{(:,i)}(T') & \text{si } \delta_{\tau}^{(:,i)} = 1 \end{cases}$$

$$LI(T') = \delta_{\tau}^{(:,i)} \times S_{\tau}^{(:,i)}(T') = \delta_{\tau}^{(:,i)} \times K_{\tau}^{(:,i)} \times \left[1 - e^{-\left(\int_0^{T'-\tau} \alpha_{\tau}^{(:,i)}(s) ds + \frac{(\sigma_{\tau}^{(:,i)})^2}{2} (T'-\tau) \right) + \sigma_{\tau}^{(:,i)} \times W_{\tau}^{(:,i)}(T'-\tau)} \right]$$

$LI(T')$ es aleatorio y tiene las mismas condiciones de contorno que las definidas para la RL.

Cálculo del índice de pérdidas por catástrofes

En cualquier momento t del periodo de valoración definimos la variable condicionada $LI^*(T')$ que es el valor del índice de pérdidas condicionado a la información sobre declaraciones de siniestros disponible en el momento t de valoración ($LI(t)$)

$$LI^*(T') = \left(\delta_{\tau}^{(:,i)} \mid F_t \right) \times \left[\begin{array}{l} LI(t) + \left(k_{\tau}^{(:,i)} \mid F_t \right) \times \left[1 - e^{-\int_{t-\tau}^{T'-\tau} \alpha_{\tau}^{(:,i)}(s) ds - \frac{(\sigma_{\tau}^{(:,i)})^2}{2} \times (T'-t) + \sigma_{\tau}^{(:,i)} \times w_{\tau}^{(:,i)}(T'-t)} \right] \\ \times e^{-\int_0^{t-\tau} \alpha_{\tau}^{(:,i)}(s) ds - \frac{(\sigma_{\tau}^{(:,i)})^2}{2} \times (t-\tau) + \sigma_{\tau}^{(:,i)} \times w_{\tau}^{(:,i)}(t-\tau)} \end{array} \right]$$

$LI^*(T')$ se comporta como $LI(t)$, ya que el término exponencial creciente contrarresta el decreciente. De esta forma cuanto más cerca está el momento de valoración del vencimiento, mayor es $LI^*(T')$ y por tanto mayor es la probabilidad de que los pagos del bono se realicen (desde el punto de vista del asegurador).

Caso particular tasa de declaración de siniestros constante $\alpha_{\tau}^{(:,i)}(s) = \alpha_{\tau}^{(:,i)}$

IBNRL:

$$R_{\tau}^{(:,i)}(t) = K_{\tau}^{(:,i)} \times e^{-\left(\alpha_{\tau}^{(:,i)} + \frac{(\sigma_{\tau}^{(:,i)})^2}{2}\right)(t-\tau) + \sigma_{\tau}^{(:,i)} w_{\tau}^{(:,i)}(t-\tau)}$$

RL:

$$S_{\tau}^{(:,i)}(t) = K_{\tau}^{(:,i)} \times \left[1 - e^{-\left(\alpha_{\tau}^{(:,i)} + \frac{(\sigma_{\tau}^{(:,i)})^2}{2}\right)(t-\tau) + \sigma_{\tau}^{(:,i)} w_{\tau}^{(:,i)}(t-\tau)} \right]$$

LI*(T'):

$$LI^*(T') = \left(\delta_{\tau}^{(:,i)} \mid F_t \right) \times \left[\begin{array}{l} L(t) + \left(K_{\tau}^{(:,i)} \mid F_t \right) \times \left[1 - e^{-\left(\alpha_{\tau}^{(:,i)} + \frac{(\sigma_{\tau}^{(:,i)})^2}{2}\right) \times (T'-t) + \sigma_{\tau}^{(:,i)} \times w_{\tau}^{(:,i)}(T'-t)} \right] \\ \times e^{-\left(\alpha_{\tau}^{(:,i)} + \frac{(\sigma_{\tau}^{(:,i)})^2}{2}\right) \times (t-\tau) + \sigma_{\tau}^{(:,i)} \times w_{\tau}^{(:,i)}(t-\tau)} \end{array} \right]$$

Caso particular tasa de declaración de siniestros constante $\alpha_{\tau}^{(:,i)}(s) = \alpha_{\tau}^{(:,i)}$

Dado que la distribución de IBNRL depende de la distribución de probabilidad de la cuantía total de la catástrofe si ésta última es un valor constante (hipótesis habitual en la literatura actuarial), la distribución de IBNRL es log-normal, siendo la distribución normal asociada:

$$N\left(\ln K_{\tau}^{(:,i)} - \left(\alpha_{\tau}^{(:,i)} + \frac{(\sigma_{\tau}^{(:,i)})^2}{2}\right)(t - \tau), \sigma_{\tau}^{(:,i)} \sqrt{t - \tau}\right)$$

Esto implica que la IBNRL media decrece asintóticamente al eje de abscisas, y la RL por tanto, crezca asintóticamente a la cuantía total de la catástrofe,

$$E[R_{\tau}^{(:,i)}(t)] = K_{\tau}^{(:,i)} \times e^{-\alpha_{\tau}^{(:,i)} \times (t - \tau)} \quad E[S_{\tau}^{(:,i)}(t)] = K_{\tau}^{(:,i)} \times [1 - e^{-\alpha_{\tau}^{(:,i)} \times (t - \tau)}]$$

Caso particular tasa de declaración de siniestros constante $\alpha_{\tau}^{(\cdot,i)}(s) = \alpha_{\tau}^{(\cdot,i)}$

Ejemplo de tarificación

Consideramos un bono cupón cero emitido en el momento 0 con valor facial N , y vencimiento T' . Los resultados del bono están condicionados al valor que toma nuestro índice al vencimiento, $LI(T')$, y a un valor desencadenante C especificado en el contrato.

Si denotamos por $B(T')$ el valor del bono al vencimiento:

- Si $LI(T') \leq C \Rightarrow B(T') = N$
- Si $C < LI(T') < C+N \Rightarrow B(T') = N - (LI(T') - C) \geq 0$
- Si $LI(T') \geq C+N \Rightarrow B(T') = 0$

resulta:

$$B(T') = N - \max(0, LI(T') - C) + \max(0, LI(T') - (C + N))$$

combinación de una posición larga en bono cupón cero libre de riesgo, una posición corta en una opción call catastrófica con precio de ejercicio C , y una posición larga en una opción call catastrófica con precio de ejercicio $C+N$.

Caso particular tasa de declaración de siniestros constante $\alpha_{\tau}^{(\cdot,i)}(s) = \alpha_{\tau}^{(\cdot,i)}$

Ejemplo de tarificación

Bajo un enfoque neutral al riesgo, el precio del bono en cualquier momento t puede calcularse como:

$$B(t) = e^{-r(T'-t)} E_Q[B(T') | F_t]$$

siendo r el tipo de interés libre de riesgo, Q una medida de probabilidad modificada y F_t la información disponible en t sobre declaraciones de siniestros realizadas hasta ese momento.

Entonces $B(t)$ puede escribirse como:

$$B(t) = Ne^{-r(T'-t)} - e^{-r(T'-t)} E_Q[\max(0, LI^*(T') - C) + \max(0, LI^*(T') - (C + N))]$$

cuya solución explícita puede derivarse simplemente aplicando el modelo de valoración de opciones de Black-Scholes,

Caso particular tasa de declaración de siniestros constante $\alpha_{\tau}^{(:,i)}(s) = \alpha_{\tau}^{(:,i)}$

Ejemplo de tarificación

$$B(t) = N \times e^{-r(T'-t)} \times [1 - N(d'_2)] - LI^*(T') \times [N(d_1) - N(d'_1)] + C \times e^{-r(T'-t)} \times [N(d_2) - N(d'_2)]$$

$$d_1 = \frac{\frac{\ln(LI^*(T'))}{C} + \left(r + \frac{(\sigma_{\tau}^{(:,i)})^2}{2} \right) \times (T'-t)}{\sigma_{\tau}^{(:,i)} \times (T'-t)}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_{\tau}^{(:,i)} \times (T'-t)$$

$$d'_1 = \frac{\frac{\ln(LI^*(T'))}{C+N} + \left(r + \frac{(\sigma_{\tau}^{(:,i)})^2}{2} \right) \times (T'-t)}{\sigma_{\tau}^{(:,i)} \times (T'-t)}$$

$$d'_2 = d'_1 - \sigma_{\tau}^{(:,i)} \times (T'-t)$$

Generalización a varias catástrofes: Modificaciones respecto al modelo particular

Hipótesis sobre la ocurrencia de catástrofes

$[0, T] \subset [0, T']$ es el periodo de riesgo con $T' \geq T$.

K_{τ}^i con $i=1,2,3$ y $\tau=1,2,\dots,N^i(t)$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas dentro de cada grupo i que representan la cuantía de la catástrofe ocurrida en el momento t_{τ}^i con $\tau=1,2,\dots,N^i(t)$ y $t_{\tau}^i \leq T$

$i=1,2,3$ denota si la catástrofe es de pequeña ($i=1$), media ($i=2$) o gran cuantía ($i=3$) (Alegre, Pérez-Fructuoso, y Devolder 2003).

$N^i(t)$ es un proceso de Poisson de intensidad $(\lambda^i t)$ que representa el número aleatorio de catástrofes ocurridas en el periodo de riesgo. Consecuentemente,

$$t_{\tau}^i - t_{\tau-1}^i \sim \exp(\lambda^i)$$

Hipótesis sobre la declaración de siniestros

Igual que en el caso anterior para una tasa de declaración de siniestros constante

$\forall t \in (\tau, T'] \subset [0, T']$, la cuantía total de la catástrofe es la suma de dos variables aleatorias,

$$K_{\tau}^i = R_{\tau}^i(t) + S_{\tau}^i(t)$$

$R_{\tau}^i(t)$ cuantía de siniestros pendiente de declaración en t (*IBNRL*) y $S_{\tau}^i(t)$ cuantía declarada de siniestros hasta t (*RL*).

Ecuación diferencial estocástica para IBNRL con tasa de declaración de siniestros constante,

$$dR_{\tau}^i(t) = -\alpha_{\tau}^i \times R_{\tau}^i(t) \times dt + \sigma_{\tau}^i \times R_{\tau}^i(t) \times dw_{\tau}^i(t - \tau)$$

Solución: IBNRL

$$R_{\tau}^i(t) = K_{\tau}^i \times e^{-\left(\alpha_{\tau}^i + \frac{(\sigma_{\tau}^i)^2}{2}\right)(t-t_{\tau}^i) + \sigma_{\tau}^i w_{\tau}^i(t-t_{\tau}^i)} \quad \forall i = 2,3$$

RL

$$S_{\tau}^i(t) = K_{\tau}^i - R_{\tau}^i(t) = K_{\tau}^i \left[1 - e^{-\left(\alpha_{\tau}^i + \frac{(\sigma_{\tau}^i)^2}{2}\right)(t-t_{\tau}^i) + \sigma_{\tau}^i w_{\tau}^i(t-t_{\tau}^i)} \right] \quad \forall i = 2,3$$

Cálculo del índice de pérdidas en el modelo general

Como en el caso anterior, un índice de pérdidas por catástrofes genérico se define como:

$$LI(T') = \frac{L(T')}{cte}$$

donde $LI(T')$ es el valor del índice de pérdidas al vencimiento obtenido como:

$$L(T') = \sum_{i=1}^3 L^i(T') = \sum_{i=1}^3 \sum_{\tau=1}^{N^i(T)} S_{\tau}^i(T')$$

la suma de las cuantías de reclamaciones asociadas a cada una de las catástrofes ocurridas en el periodo de riesgo.

Sustituyendo $S_{\tau}^i(T')$ en la expresión anterior, se obtiene el valor del índice al vencimiento

$$L(T') = \sum_{\tau=1}^{N^1(T)} K_{\tau}^1 + \sum_{i=2}^3 \sum_{\tau=1}^{N^i(T)} K_{\tau}^i \left[1 - e^{-\left(\alpha_{\tau}^i + \frac{(\sigma_{\tau}^i)^2}{2} \right) (T' - t_{\tau}^i) + \sigma_{\tau}^i w_{\tau}^i (T' - t_{\tau}^i)} \right]$$

Cálculo del índice de pérdidas en el modelo general

Para calcular $L^*(T') = L(T') | F_t$ obtenemos primero el valor de la información disponible sobre declaraciones de siniestros realizadas hasta $\forall t \in [t_\tau^i, T']$, $F_t \cong L(t)$

$$L(t) = \sum_{i=1}^3 L^i(t) = \sum_{\tau=1}^{N^i\{\min(t, T)\}} K_\tau^1 + \sum_{i=2}^3 \sum_{\tau=1}^{N^i\{\min(t, T)\}} K_\tau^i \left[1 - e^{-\left(\alpha_\tau^i + \frac{(\sigma_\tau^i)^2}{2}\right)(t-t_\tau^i) + \sigma_\tau^i w_\tau^i(t-t_\tau^i)} \right]$$

Cálculo del índice de pérdidas en el modelo general

Introducimos la variable $L(t)$ en $L(T')$ descomponiendo la variable aleatoria condicionada en la suma de dos variables aleatorias independientes:

- Si $t \in [0, T]$, el condicionante sólo afecta a la cuantía de las declaraciones asociadas a las catástrofes ya ocurridas en el intervalo $[0, t]$ y no tiene ninguna influencia sobre las declaraciones asociadas a las catástrofes que se produzcan en el intervalo $]t, T]$,

$$L^*(T') = L_1(T') + L_2(T')$$

donde $L_1(T')$ cuantifica las pérdidas de las catástrofes ocurridas en $[0, t]$ y $L_2(T')$ refleja las pérdidas asociadas a los riesgos potenciales que pueden ocurrir durante el resto del periodo de riesgo, $]t, T]$,

- Si $t \in]T, T']$,

$$L^*(T') = L_1(T')$$

ya que no pueden incorporarse nuevas catástrofes al índice.

Cálculo del índice de pérdidas en el modelo general

En términos generales, la componente $L_1(T')$ para cualquier momento $t \in [0, T']$ puede calcularse, a partir de la cuantía total de declaraciones en el instante t , $L(t)$, como:

$$L_1(T') = \sum_{i=1}^3 L_1^i(T') = \sum_{\tau=1}^{N^i(\min\{t, T\})} K_{\tau}^1 + \sum_{i=2}^3 \left[L^i(t) + \sum_{\tau=1}^{N^i(\min\{t, T\})} \left(K_{\tau}^i / L^i(t) \right) \left[1 - e^{-\left(\alpha_{\tau}^i + \frac{\sigma_{\tau}^i}{2} \right) (T'-t) + \sigma_{\tau}^i w_{\tau}^i (T'-t)} \right] e^{-\left(\alpha_{\tau}^i + \frac{(\sigma_{\tau}^i)^2}{2} \right) (t-t_{\tau}^i) + \sigma_{\tau}^i w_{\tau}^i (t-t_{\tau}^i)} \right]$$

En el caso en que $t \leq T$, calculamos la variable $L_2(T')$, que no depende de $L(t)$ ya que el número de catástrofes ocurridas es un proceso de Poisson con incrementos independientes,

$$L_2(T') = \sum_{i=1}^3 L_2^i(T') = \sum_{h=1}^{N^i(T-t)} K_h^1 + \sum_{i=2}^3 \sum_{h=1}^{N^i(T-t)} K_h^i \left[1 - e^{-\left(\alpha_{\tau}^i + \frac{(\sigma_{\tau}^i)^2}{2} \right) (T'-t_h^i) + \sigma_{\tau}^i w_h^i (T'-t_h^i)} \right]$$

donde $t_h^i = t + \sum_{w=1}^h t_w^i$ y $t_w^i \rightarrow \text{Exp}(\lambda^i)$

Estimación del modelo constante

Caso particular tasa de declaración de siniestros constante $\alpha_{\tau}^{(:,i)}(s) = \alpha_{\tau}^{(:,i)}$

Estimación de los parámetros del modelo

Tabla 1. Serie de datos Alcira (España) 1 Oct. 1991

Periodo Semana	Porcentaje real de siniestros declarados (Real RL)	Porcentaje real de siniestros pendiente de declaración (Real IBNRL)
0	0	100
1	15.06	84.94
2	46.35	53.65
3	65.04	34.96
4	75.95	24.05
5	81.14	18.86
6	86.64	13.36
7	89.47	10.53
8	91.96	8.04
9	93.06	6.94
10	94.77	5.23
11	95.92	4.08
12	96.29	3.71
13	96.44	3.56
14	97.40	2.60
15	98.25	1.75
16	98.70	1.30
17	99.23	0.77
18	99.71	0.29

Caso particular tasa de declaración de siniestros constante $\alpha_{\tau}^{(:,i)}(s) = \alpha_{\tau}^{(:,i)}$

Estimación de los parámetros del modelo

Tabla 2. Serie de datos de Barcelona (España) 14 Sept. 1999

Periodo Semana	Porcentaje real de siniestros declarados (RL%)	Porcentaje real de siniestros pendiente de declaración (IBNRL%)
0	0	100
1	9.32	90.68
2	31.62	68.38
3	49.32	50.68
4	58.58	41.42
5	68.42	31.58
6	74.57	25.43
7	80.44	19.56
8	83.32	16.68
9	86.72	13.28
10	89.46	10.54
11	91.85	8.15
12	93.20	6.80
13	93.87	6.13
14	96.59	3.41
15	96.59	3.41
16	97.39	2.61
17	98.19	1.81
18	98.74	1.26
19	99.44	0.56

Caso particular tasa de declaración de siniestros constante $\alpha_{\tau}^{(:,i)}(s) = \alpha_{\tau}^{(:,i)}$

Estimación de los parámetros del modelo

Tabla 3. Serie de datos Valencia (España) 20 Oct. 2000

Periodo	Porcentaje real de siniestros declarados	Porcentaje real de siniestros pendiente de declaración
Semana	(RL%)	(IBNRL%)
0	0	100
1	2.46	97.54
2	19.82	80.18
3	39.85	60.15
4	56.84	43.16
5	68.04	31.96
6	72.45	27.55
7	80.46	19.54
8	84.71	15.29
9	85.24	14.76
10	85.30	14.70
11	88.94	11.06
12	91.54	8.46
13	93.02	6.98
14	93.79	6.21
15	94.83	5.17
16	95.78	4.22
17	96.50	3.50
18	97.28	2.72
19	97.74	2.26
20	98.12	1.88
21	98.31	1.69
22	98.39	1.60
23	99.10	0.90
24	99.46	0.54
25	99.64	0.36
26	99.81	0.19

Caso particular tasa de declaración de siniestros constante $\alpha_{\tau}^{(:,i)}(s) = \alpha_{\tau}^{(:,i)}$

Estimación de los parámetros del modelo

Teniendo en cuenta las pautas en la declaración de siniestros de la muestra de datos disponibles, la IBNRL puede escribirse como

$$R_{\tau}^{(:,i)}(t) = R_{\tau}^{(:,i)}(t-1)e^{-\left(\alpha_{\tau}^{(:,i)} + \frac{(\sigma_{\tau}^{(:,i)})^2}{2}\right) + \sigma_{\tau}^{(:,i)}w_{\tau}^{(:,i)}(1)}$$

lo cual significa que la variación de $R_{\tau}^{(:,i)}(t)$ sigue una distribución log-normal cuya distribución normal asociada tiene los siguientes parámetros de tendencia y dispersión

$$\ln \frac{R_{\tau}^{(:,i)}(t)}{R_{\tau}^{(:,i)}(t-1)} \sim N\left(-\left(\alpha_{\tau}^{(:,i)} + \frac{(\sigma_{\tau}^{(:,i)})^2}{2}\right), \sigma_{\tau}^{(:,i)}\right)$$

Caso particular tasa de declaración de siniestros constante $\alpha_{\tau}^{(:,i)}(s) = \alpha_{\tau}^{(:,i)}$

Estimación de los parámetros del modelo

Estimación máximo verosímil de la tasa instantánea de declaración de siniestros:

$$\hat{\alpha}_{\tau}^{(:,i)} = \bar{X} - \frac{(\hat{\sigma}_{\tau}^{(:,i)})^2}{2}$$

con $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n -\ln\left(\frac{\text{Real IBNRL}_i}{\text{Real IBNRL}_{i-1}}\right)$ y $(\hat{\sigma}_{\tau}^{(:,i)})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(-\ln\left(\frac{\text{Real IBNRL}_i}{\text{Real IBNRL}_{i-1}}\right) - \bar{X}\right)^2$ la media y la varianza muestrales.

Estimación de la varianza (de la distribución normal) a través de la cuasi-varianza:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(-\ln\left(\frac{\text{Real IBNRL}_i}{\text{Real IBNRL}_{i-1}}\right) - \bar{X}\right)^2$$

Caso particular tasa de declaración de siniestros constante $\alpha_{\tau}^{(i)}(s) = \alpha_{\tau}^{(i)}$

Estimación de los parámetros del modelo y bondad del ajuste

Tabla 4. Estimación MV de la tasa instantánea de declaración de siniestros

Series	Tasa estimada
Alcira	0.304681167
Barcelona	0.25781368
Valencia	0.228231668

Tabla 5. Volatilidad del proceso de Wiener

Series	Varianza estimada	Desviación estándar estimada
Alcira	0.042209827	0.2054503
Barcelona	0.031633167	0.177857154
Valencia	0.025430441	0.159469247

Tabla 6. Test de Bondad del ajuste

Series	P-valores
Alcira	0.253551
Barcelona	0.153309
Valencia	0.105621

Caso particular tasa de declaración de siniestros constante $\alpha_{\tau}^{(:,i)}(s) = \alpha_{\tau}^{(:,i)}$

Intervalos de predicción

Figura 1. Intervalos de predicción para la serie de datos Alcira

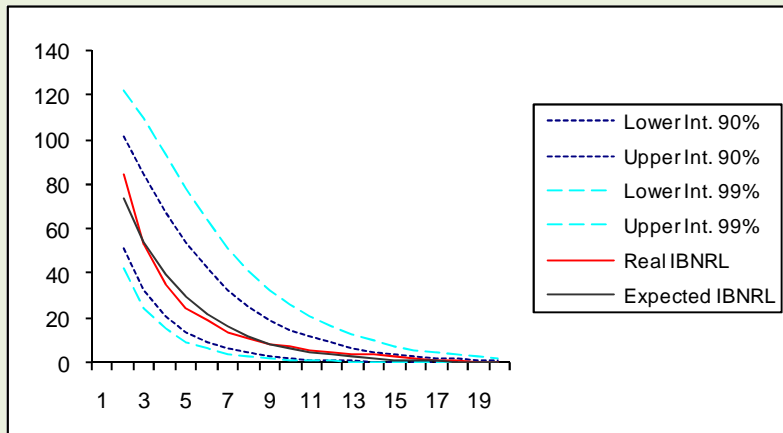


Figura 2. Intervalos de predicción para la serie de datos Barcelona

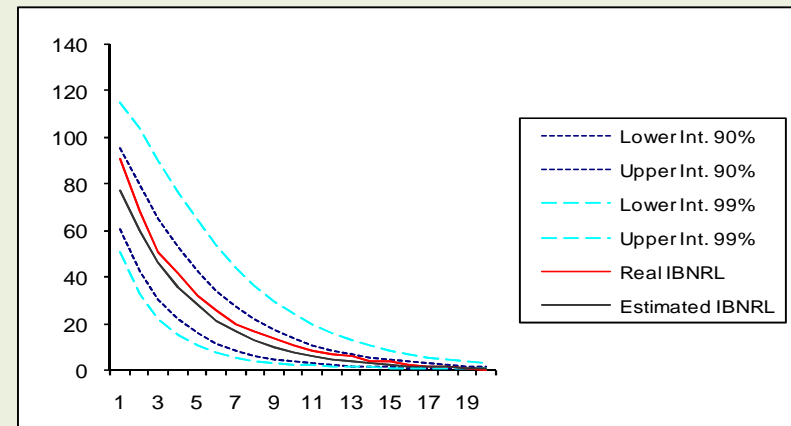
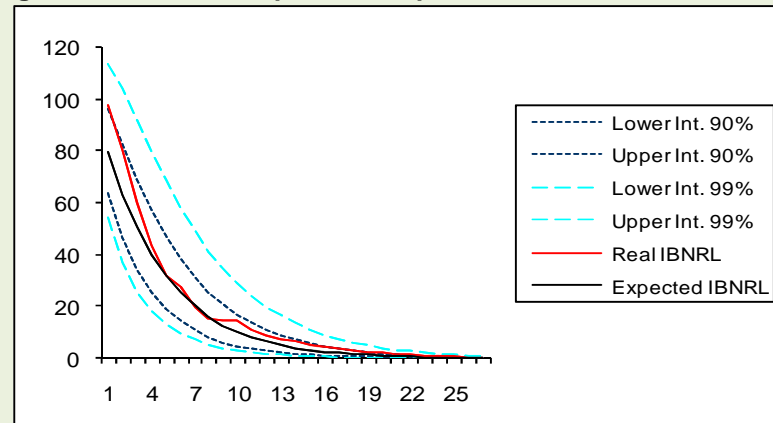


Figura 3 Intervalos de predicción para la serie de datos Valencia



Conclusiones

El modelo continuo propuesto en este artículo permite calcular fácilmente índices de pérdidas por catástrofes, lo que a su vez facilita el proceso de tarificación de los bonos catastróficos basados en índices de pérdidas.

Principales hipótesis:

- La cuantía total de la catástrofe es una variable aleatoria resultante de suma otras dos variables aleatorias: la IBNRL y la RL.
- Proceso de Wiener representa la dinámica decreciente de la IBNRL más que para describir la evolución de la RL, que se obtiene por sustracción de la primera y la cuantía total de la catástrofe cubierta en el contrato.
- El índice de pérdidas es la RL multiplicada por un indicador el cual varía según la probabilidad de que el suceso catastrófico ocurra, lo cual simplifica notablemente tanto el cálculo del índice de pérdidas como la estimación de los parámetros del modelo.

Conclusiones

Para la validación, hemos estimado la tasa de declaración de siniestros (por máxima verosimilitud) y la varianza del modelo (a través del cálculo de la cuasi-varianza), y concluimos que la hipótesis nula de que el logaritmo de las variaciones de la IBNRL se distribuye normalmente no se puede rechazar.

Para comprobar la bondad del ajuste, hemos determinado los intervalos de predicción para la IBNRL real y esperada, y concluimos que el modelo continuo propuesto describe adecuadamente el comportamiento del proceso de declaración de siniestros catastróficos.