

GUÍA DE LABORATORIO

para las asignaturas de

TÉCNICAS EXPERIMENTALES

del primer ciclo de la Licenciatura en Física

Contenido

Prólogo	iii
1. Normas básicas para el trabajo en el laboratorio	1
2. Libreta de laboratorio.....	2
3. Escritura de magnitudes y expresiones físicas.....	3
4. Estimación de las incertidumbres de las medidas.....	9
5. Ajuste por mínimos cuadrados.....	15
6. Presentación de gráficas.....	18
7. Memoria de una práctica.....	21
8. Presentación oral de una práctica.....	23
Agradecimientos	26
Lecturas recomendadas	26

Prólogo

Y porque se vea que digo verdad, esperen y escuchen;
que esta Ciencia es como la del nadar que, una vez aprendida, nunca se olvida.

El Quijote. Miguel de Cervantes.

La Física es una ciencia experimental que estudia las propiedades del Universo considerando atributos susceptibles de ser medidos. Por la forma en la que se transmite el conocimiento científico en las aulas, se podría pensar que los modelos teóricos han precedido a las observaciones en muchos fenómenos físicos. Nada más lejos de la realidad. Hasta una época muy reciente los avances más significativos en la Física fueron el resultado de observaciones cuidadosas de los fenómenos naturales, seguidas por el desarrollo de modelos designados específicamente para explicar estas observaciones. Por supuesto, en otras ocasiones también pueden diseñarse experimentos para verificar teorías concretas. Esta situación ilustra que en el desarrollo de la Física, teoría y experimento son fuertemente interdependientes. Ahora bien, los resultados experimentales tienen siempre el papel de juez: confirman o desmienten la validez de diferentes hipótesis y delimitan el rango de aplicabilidad de las teorías.

Los laboratorios de Técnicas Experimentales, además de ayudar en la comprensión de los conceptos discutidos en clase, deben enseñar el desarrollo del Método Experimental como vía para validar y generar el conocimiento científico. El aprendizaje de los métodos experimentales tiene por tanto una importancia central en la formación de un físico. Habilidades como la capacidad de organización del propio trabajo, la planificación de un experimento, la intuición para determinar las magnitudes físicas relevantes y el rango adecuado para la medida o la capacidad crítica para juzgar la bondad de un resultado son destrezas que se adquieren a través de tiempo y esfuerzo y que tienen un alto grado de interdisciplinariedad. Esto resulta evidente si se tiene en cuenta que para comprender un principio físico es necesario, además del contacto directo con la experiencia, el razonamiento activo sobre los distintos fenómenos observados y una fuerte capacidad de síntesis que nos lleve desde la experiencia concreta hasta la teoría abstracta y viceversa.

Esta Guía recoge una visión general de los procedimientos básicos necesarios para el trabajo experimental en el laboratorio. Los objetivos que se persiguen son los siguientes:

- Clarificar el método experimental y el desarrollo de las prácticas en los laboratorios mediante un conjunto de normas de uso general.
- Establecer criterios para estimar los distintos tipos de incertidumbres experimentales y desarrollar estrategias para minimizarlos.
- Utilizar las herramientas estadísticas e informáticas adecuadas para el análisis de los datos.
- Desarrollar las normas básicas de comunicación científica, tanto escrita como oral, para poder elaborar informes científicos orales y escritos.

1. Normas básicas para el trabajo en el laboratorio

En el laboratorio dispondrás del material necesario para la realización de distintos experimentos. Este material debe servir para muchos experimentos diferentes, y se utilizará a lo largo de varios años. Además, el espacio del laboratorio se comparte con otras muchas personas que desarrollan en él su trabajo. Por esta razón hay una serie de normas que se deben seguir en cualquier laboratorio, y que detallamos a continuación.

- Está prohibido comer o beber.
- Debe haber orden en la mesa de trabajo. A la mesa se debe traer la libreta de laboratorio, pero nunca la mochila. Al terminar, la mesa debe dejarse tal y como se facilitó: con el material desmontado y ordenado y el espacio de trabajo limpio.
- El alumno es responsable de la conservación y buen funcionamiento del material. Al comenzar la realización de una práctica deberá comprobar que el material está completo y en buen estado. En caso contrario, avisará al profesor. Asimismo, debe avisar al profesor en caso de accidente, rotura del material o cuando sea necesaria la reposición del mismo.
- El horario del laboratorio, aunque amplio, es limitado. Ello implica que es necesario aprovecharlo al máximo. Es necesario conocer el experimento que se va a realizar y haber leído con atención el guión de la práctica antes de entrar en el laboratorio. Esto garantiza que se conoce tanto el fenómeno que se va a estudiar como la técnica que se va a emplear.
- Deben seguirse siempre de forma escrupulosa las instrucciones que se dan en el guión de la práctica. Cualquier duda que pueda surgir durante la realización de la práctica, debe consultarse con el profesor.
- Antes de utilizar un aparato cuyo funcionamiento se desconozca deben leerse cuidadosamente las instrucciones de su manejo. Si no están, deben pedirse al profesor.
- Antes de empezar a hacer medidas hay que pensar qué medidas se van a hacer y cuál es la mejor forma de tomarlas. Hay que anotar siempre las sensibilidades de los aparatos, ya que a partir de ellas se estimarán las incertidumbres de las medidas.
- De forma general, los generadores de las prácticas que impliquen montajes eléctricos no deben ponerse en marcha hasta que el profesor haya revisado el circuito montado.
- En los montajes eléctricos todos los conductores deben realizar sus contactos mediante bananas, excepto cuando la forma especial del borne no lo permita. Igualmente deben evitarse los nudos de conductores para lo que, de ordinario, basta introducir dos de los conductores del nudo en una misma banana de conexión a uno de los aparatos del circuito.
- La utilización de agua en las cercanías de tomas o circuitos eléctricos es peligrosa. Si se vierte agua sobre un circuito eléctrico debe cortarse rápidamente, pero con las manos secas, la alimentación eléctrica antes de proceder al secado del circuito.
- La utilización de mecheros Bunsen requiere atención especial. Se mantendrán encendidos el tiempo estrictamente necesario y se cerrará la llave de gas al terminar su uso.
- No se debe situar sustancias inflamables en las proximidades de llamas, resistencias eléctricas o elementos a alta temperatura.

- Deben manejarse con especial cuidado los utensilios y máquinas cortantes (como el cutter y la picadora de hielo), aquellos que se encuentren a alta temperatura o los que, por su diseño, puedan pinzar los dedos. Debe comunicarse al profesor cualquier accidente.
- La balanza electrónica no debe utilizarse nunca para objetos húmedos, ni para masas que superen el valor máximo indicado en la balanza.
- Aquellas sustancias cuyas propiedades químicas no se hayan alterado durante la realización del experimento se guardarán en su frasco de origen para su reutilización, a menos que el guión del experimento indique lo contrario.

2. Libreta de laboratorio

La libreta de laboratorio debe concebirse como un diario en el que se recojan todos y cada uno de los experimentos realizados con las incidencias de todo tipo que se han producido. La característica primordial de una libreta de laboratorio es que debe ser verificable, es decir, debe permitir que uno mismo o cualquier otra persona pueda reproducir los resultados en el futuro. Hay que tener en cuenta que en ocasiones hay que repetir una experiencia, como ocurre al detectar algún error o bien en un examen de laboratorio. Para ello debe recoger exactamente qué se hizo, quién lo hizo, cuándo lo hizo y cómo lo hizo. ¿Con cuánto detalle se deben realizar las anotaciones? Si alguien que posee los conocimientos necesarios lee el cuaderno, ¿podría repetir el experimento utilizando únicamente las anotaciones? Si la respuesta es sí, es que la libreta tiene las anotaciones necesarias.

Se recomienda seguir las siguientes pautas:

- Elegir un cuaderno cuadriculado o milimetrado. Esto facilitará la representación esquemática de las gráficas que se vayan obteniendo, la realización ordenada de tablas y el dibujo esquemático de los componentes del experimento.
- Escribir en el cuaderno el nombre y el subgrupo de prácticas, así como el nombre del tutor en el laboratorio y el curso académico.
- Anotar el nombre y la fecha de realización de cada práctica.
- Describir brevemente la práctica, indicando sus objetivos y los fundamentos teóricos en que se basa.
- Hacer un esquema del experimento, acompañado de una descripción de los aparatos, incluidas marcas y su sensibilidad. Si se propone la modificación parcial de un procedimiento, por ejemplo para mejorar la precisión, debe razonarse.
- Describir con detalle, y en lenguaje sencillo, todo lo que se vaya haciendo, incluyendo las incidencias que puedan ocurrir a lo largo de la realización de la práctica, así como anotar todas las dudas que vayan surgiendo.
- Anotar cada magnitud física con sus unidades, estimando la incertidumbre asociada a la medida de dichas magnitudes.

- Siempre que sea posible, registrar los datos es en forma de tablas, donde se recopilen ordenadamente las medidas realizadas.
- No corregir por encima las anotaciones incorrectas. Es mejor trazar una línea y volver a escribirlas, pues en ocasiones lo correcto es lo que inicialmente creíamos erróneo.
- No pasar a limpio las anotaciones en el cuaderno. Por dos razones: puede ser la causa de posibles errores, y se puede caer en la tentación de resumir. En cualquier caso, las anotaciones originales deben permanecer en la libreta.
- Si se hacen gráficas a ordenador o medidas con un registrador gráfico, pegarlas a la libreta, pues nunca debe haber hojas sueltas.
- Tratar de interpretar y comentar los resultados a medida que se van obteniendo los datos experimentales. El control de los resultados permite detectar errores con antelación suficiente como para poder volver a tomar las medidas que se consideran incorrectas. Además, esto permitirá diseñar el proceso de adquisición de medidas teniendo en cuenta las peculiaridades de cada experimento.

3. Escritura de magnitudes y expresiones físicas

Además de las reglas sintácticas y ortográficas oficiales, comunes a cualquier documento escrito, existe una serie de normas básicas que definen en cierta medida el estilo utilizado en el lenguaje científico escrito. Si bien no todos los científicos utilizan las mismas normas, a continuación se recogen las de uso más corriente. Para un conocimiento más exhaustivo de este tema se recomienda consultar el libro de estilo de la [Sociedad Americana de Física](#).

3.1. Magnitudes físicas

Las magnitudes físicas tienen dimensiones físicas. Por ello, toda medida de una magnitud física debe expresarse con un valor numérico y una unidad. Esta norma básica nos lleva a plantearnos dos cuestiones importantes: (i) ¿qué unidad empleamos? y (ii) ¿cómo expresamos el valor numérico?

3.2. Unidades

Como norma general utilizaremos las unidades del Sistema Internacional (SI). La Tabla 1 recoge las unidades SI fundamentales y la Tabla 2 las unidades derivadas más comunes. Las unidades deben escribirse correctamente, utilizando exactamente los símbolos recogidos en estas tablas. Los símbolos de las unidades no se terminan con un punto, pues no son abreviaturas, y no tienen forma singular y plural, por lo que en ningún caso debe añadirse una "s" al final del símbolo para indicar plural. Por ejemplo, los símbolos °K, sg, Kg, gr, volt y ms ("metros") son incorrectos.

Tabla 1. Unidades fundamentales y suplementarias del SI

Magnitud física	Unidad	Símbolo
longitud	metro	m
masa	kilogramo	kg
tiempo	segundo	s
corriente eléctrica	amperio	A
temperatura	kelvin	K
cantidad de sustancia	mol	mol
intensidad luminosa	candela	cd
ángulo plano	radián	rd
ángulo sólido	estereorradián	sr

Tabla 2. Algunas unidades derivadas comunes del SI

Magnitud física	Unidad	Símbolo	Otro símbolo
volumen	metro cúbico	m ³	
densidad	kilogramo por metro cúbico	kg m ⁻³	
velocidad	metro por segundo	m s ⁻¹	
velocidad angular	radián por segundo	rad s ⁻¹	
frecuencia	hertz	Hz	s ⁻¹
aceleración	metro por segundo cuadrado	m s ⁻²	
fuerza	newton	N	kg m s ⁻²
energía	julio	J	N m
capacidad calorífica	julio por kelvin	J K ⁻¹	
potencia	vatio	W	J s ⁻¹
presión	pascal	Pa	N m ⁻²
viscosidad dinámica	pascal segundo	Pa s	
potencial eléctrico	voltio	V	W A ⁻¹
carga eléctrica	culombio	C	A s = J V ⁻¹
resistencia eléctrica	ohmio	Ω	V A ⁻¹
conductividad eléctrica	siemens	S	Ω ⁻¹
capacitancia	faradio	F	C V ⁻¹
flujo magnético	weber	Wb	V s
densidad de flujo magnético	tesla	T	Wb m ⁻²
intensidad de campo magnético	amperio por metro	A m ⁻¹	
inductancia	henrio	H	Wb A ⁻¹

Algunas unidades derivadas se forman como producto de dos o más unidades, como el pascal segundo en el caso de la viscosidad dinámica. En escritura mecánica o digital, las unidades se separan por espacios, como Pa s. En escritura manual, los espacios que separan

las unidades pueden no ser claramente visibles, y conviene separar las unidades por puntos a media altura, como el que denota producto escalar. Como norma de sentido común, los símbolos de las unidades derivadas deben escribirse de modo que se elimine cualquier posible ambigüedad en su lectura. Por ejemplo, no debemos escribir J/K mol o $J/K/mol$ porque crea ambigüedad sobre la posición de la unidad mol, y en su lugar escribiremos $J K^{-1} mol^{-1}$.

3.3. Prefijos

En muchas ocasiones resulta conveniente emplear múltiplos o submúltiplos de las unidades SI. Si se trata de una unidad fundamental o una unidad derivada con símbolo propio, es habitual usar los prefijos del SI que se recogen en la Tabla 3. Si se trata de una unidad formada como producto de otras unidades con símbolo propio, entonces es habitual usar notación científica, tal y como se explica más adelante. Por ejemplo, la constante de Stefan-Boltzmann se escribe preferentemente como $5.67 \times 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$ y no $56.7 nW m^{-2} K^{-4}$, aunque ambas sean correctas. En cualquier caso, los prefijos deben usarse para facilitar la escritura y su comprensión. Si una magnitud tiene un orden de magnitud típico, conviene elegir los prefijos de las unidades que correspondan a dicho orden de magnitud. Por ejemplo, la velocidad de sedimentación de una partícula se expresa mejor como $1.2 mm/s$ que no como $1.2 \times 10^{-3} m/s$ pues m/s no es un orden de magnitud típico para la velocidad de sedimentación.

Como la unidad fundamental de masa en el SI incluye el prefijo kilo, al utilizar sus múltiplos o submúltiplos este prefijo se sustituirá por otro. En ningún caso se recomienda emplear dos prefijos simultáneamente para la misma unidad. Si no existe prefijo disponible para el factor que nos interese, se recomienda el uso de la notación científica.

Aunque, en principio, cualquier prefijo puede emplearse con cualquier unidad, la norma general es elegir el prefijo de la unidad de tal modo que el valor numérico de la magnitud esté comprendido, aproximadamente, entre 1 y 1000. Por ejemplo, la presión (manométrica) del aire contenido en un neumático puede expresarse como $213 kPa$ y el diámetro de una molécula como $0.23 nm$.

Tabla 3. Prefijos del SI

Factor	Prefijo	Símbolo	Factor	Prefijo	Símbolo
10^{-1}	deci	d	10	deca	da
10^{-2}	centi	c	10^2	hecto	h
10^{-3}	mili	m	10^3	kilo	k
10^{-6}	micro	μ	10^6	mega	M
10^{-9}	nano	n	10^9	giga	G
10^{-12}	pico	p	10^{12}	tera	T
10^{-15}	femto	f	10^{15}	peta	P
10^{-18}	atto	a	10^{18}	exa	E

3.4. Notación científica

Los valores numéricos de las magnitudes físicas deben expresarse en *notación científica*, es decir, como un número entre 1 y 10 seguido de la potencia de 10 apropiada. Por ejemplo, la masa de la Tierra es $5.98 \times 10^{24} kg$ y la masa del protón en reposo es $1.672 623 \times 10^{-27} kg$. Para indicar el producto de dos números se usa el símbolo de multiplicación \times (no la letra x, ni el punto a media altura \cdot). En castellano, los decimales se denotan mediante una coma decimal y el punto se reserva para indicar miles, mientras que en inglés es a la inversa. Dada la confusión que esto genera, en escritura científica se evita el uso de cualquier símbolo (punto o coma) para indicar miles. El “punto decimal” es una falta de ortografía pero está tan generalizada en textos científicos que su uso queda a discreción del autor.

Del mismo modo que los prefijos de las unidades se eligen de modo que resulte un valor numérico entre 1 y 1000 aproximadamente, la notación científica será de uso preferente cuando las potencias resultantes sean mayores de 10^3 o menores de 10^{-3} . Por ejemplo, la temperatura del cuerpo humano la escribiremos como $37 ^\circ C$ y no como $3.7 \times 10^1 ^\circ C$.

El uso de la notación científica es conveniente para eliminar ambigüedades en la interpretación del número de cifras significativas. Por ejemplo, el valor de cierta resistencia eléctrica medida con un óhmetro que aprecia 100Ω puede expresarse como $12.1 k\Omega$, como $1.21 \times 10^4 \Omega$ pero no como $12 100 \Omega$, pues esta última expresión genera dudas sobre cuántas cifras significativas tiene la medida, es decir, no queda claro si la sensibilidad del aparato empleado es 100, 10 o 1Ω . Observa que los números con muchas cifras se separan mediante espacios en bloques de tres si hay más de cuatro cifras a uno u otro lado del punto decimal y que el punto decimal debe quedar siempre entre dos cifras. Si, por ejemplo, nos interesase expresar la resistencia anterior en $M\Omega$ escribiríamos $0.0121 M\Omega$ pero no $.0121 M\Omega$.

3.5. Cifras significativas

Las cifras significativas de un número son todos sus dígitos a excepción de los ceros previos al primer dígito distinto de cero. Por ejemplo, los números 23, 1.6, 0.0083 y 6.5×10^7 tienen dos cifras significativas y 1600, 23.78, 0.2313 y 1.012×10^4 tienen cuatro cifras significativas.

El número de cifras significativas de un valor numérico contiene una información muy importante para el científico: nos dice cuál es la precisión de dicho valor. Los números 5, 5.0 y 5.00 no significan lo mismo. El último tiene tres cifras significativas e implica una precisión mucho mayor que el primero, que sólo tiene una cifra significativa. Por esta razón hemos de tener especial cuidado en la escritura de números mucho mayores que la unidad, siendo recomendable el uso de potencias de diez (notación científica). Por ejemplo, si se mide una resistencia eléctrica y se obtiene el valor 2.000 en la escala de kilohmios, se debe expresar el resultado como $2.000 k\Omega$ o como $2.000 \times 10^3 \Omega$, pero no como 2000Ω , pues esta última expresión deja ambigua la precisión de la medida. La expresión del resultado como $2 k\Omega$ sería

del todo incorrecta pues muestra una sola cifra significativa, mientras que la medida se ha realizado con cuatro cifras significativas.

Carece de sentido utilizar números periódicos para expresar el valor numérico de una magnitud física, pues un número periódico tiene infinitas cifras significativas y ninguna magnitud física está medida con precisión infinita. Por ejemplo, al aplicar la ley de Ohm para determinar el valor de una resistencia eléctrica por la que pasan 3.0 A cuando la diferencia de potencial eléctrico entre sus extremos es de 5.0 V, se debe escribir $R = 5.0 \text{ V}/3.0 \text{ A} = 1.7 \Omega$.

El número de cifras significativas del valor numérico de una magnitud debe ser:

- i) Si se trata de una magnitud medida directamente: las cifras que resulten de dicha medida de acuerdo con la sensibilidad del aparato.
- ii) Si se trata de una magnitud determinada indirectamente a partir de otras medidas: con las que resulten del *análisis de propagación de incertidumbres*.
- iii) Si no sabemos de dónde se ha obtenido: las cifras que nos parezcan razonables y no todas las que obtengamos con la calculadora.

Por ejemplo, si queremos expresar el diámetro de una moneda de 5 céntimos € medido con un tornillo micrométrico, es correcto escribir 17.50 mm, $1.750 \times 10^4 \mu\text{m}$ o 1.750 cm. Si a continuación queremos expresar el área de esta moneda, sin realizar el cálculo de propagación de incertidumbres, es correcto escribir 2.4053 cm², 2.41 cm² o 2.405 cm² (siendo esta última la óptima), pero no es correcto escribir

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\overbrace{3.1415927}^{\text{calculadora}} \times (1.750 \text{ cm})^2}{4} = \overbrace{2.4052819}^{\text{calculadora}} \text{ cm}^2.$$

3.6. Cálculo de magnitudes

El cálculo científico se realiza en forma simbólica en términos de magnitudes físicas. Las magnitudes físicas tienen dimensiones físicas, a diferencia de las variables matemáticas, que son adimensionales. El argumento de funciones matemáticas como logaritmos, exponenciales, funciones trigonométricas, etc., ha de ser adimensional, pues dichas funciones están definidas sobre el espacio de números reales (o, en su caso, de los números complejos) pero no sobre magnitudes físicas con dimensiones. Del mismo modo, el valor de la función también es un número real (o complejo) y, por tanto, es adimensional.

Las ecuaciones físicas relacionan magnitudes físicas y deben ser *homogéneas*. Esto significa que las dimensiones físicas de los dos miembros de la ecuación han de ser iguales, y que los términos que aparecen involucrados en operaciones de adición o sustracción dentro de una ecuación también deben tener las mismas dimensiones. Esta propiedad de las ecuaciones debe explotarse siempre para comprobar que las expresiones con las que estamos trabajando son dimensionalmente correctas y para deducir las dimensiones físicas de alguna magnitud definida a través de dicha ecuación.

Consideremos, como ejemplo, la ecuación $\ln(p/\text{kPa}) = A + B/T + CT$ que podría describir una curva de equilibrio entre fases en un diagrama p - T . El cálculo simbólico que empleamos en física se basa en que los símbolos p y T representan a las magnitudes físicas presión y temperatura, respectivamente, y no a sus valores numéricos en ningunas unidades concretas. El argumento de la función matemática logaritmo debe ser adimensional y por ello debe expresarse como un cociente de dos presiones. Una de dichas presiones es la presión p del sistema y la otra es una presión de referencia que, en la expresión facilitada, se ha tomado como 1 kPa. El valor del logaritmo es un número adimensional y podemos concluir entonces que la variable A es adimensional. Del mismo modo, el cociente B/T debe ser adimensional y, por tanto, la variable B debe tener dimensiones de temperatura. Y el producto CT también debe ser adimensional y, por tanto, C debe tener dimensiones de inversa de temperatura.

Este ejemplo nos sirve además para ilustrar varios convenios importantes:

- (i) Los símbolos de las magnitudes físicas se escriben en cursiva.
- (ii) Los símbolos de las unidades físicas no se escriben en cursiva.
- (iii) Las funciones matemáticas no se escriben en cursiva.
- (iv) El producto de dos magnitudes no requiere de ningún símbolo de multiplicación.

3.7. Magnitudes exactas y magnitudes experimentales

Las magnitudes físicas pueden definirse mediante convenio, como la velocidad de la luz $c \equiv 2.997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m/s}$, o determinarse experimentalmente. En el primer caso los valores numéricos son exactos mientras que en el segundo los valores numéricos vienen afectados una *incertidumbre experimental* (también llamada, de forma no muy afortunada, error experimental) pues, por la naturaleza del proceso de medida, resulta imposible conocer su valor exacto. Toda magnitud física medida (directa o indirectamente) se ha de expresar especificando sus unidades, su valor numérico y la incertidumbre de este valor en la forma

$$x \pm \varepsilon(x) \text{ unidades} \quad [1]$$

La incertidumbre $\varepsilon(x)$ debe darse con una sola cifra significativa, a menos que ésta sea 1, en cuyo caso conviene emplear dos cifras significativas. Es también admisible emplear dos cifras significativas si la primera cifra es un 2 y la siguiente es menor que 5. Las cifras siguientes se suprimen, aumentando en una unidad la última cifra si la primera suprimida es ≥ 5 . El valor numérico debe tener el mismo orden de aproximación que su correspondiente incertidumbre, es decir, un valor y su incertidumbre deben tener su última cifra significativa en la misma posición (con referencia al punto decimal). Por ejemplo, son incorrectas las expresiones $3.418 \pm 0.123 \text{ cm}$, $46288 \pm 1553 \text{ J}$, $6.3 \pm 0.085 \Omega$, $54.10 \pm 0.1 \text{ cm}$, $121 \pm 4.0 \text{ s}$, $(7.632 \pm 0.12) \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, y son correctas las correspondientes expresiones $3.42 \pm 0.12 \text{ cm}$, $46.3 \pm 1.6 \text{ kJ}$, $6.3 \pm 0.1 \Omega$, $54.1 \pm 0.1 \text{ cm}$, $121 \pm 4 \text{ s}$ y $(7.63 \pm 0.12) \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

La incertidumbre de un valor numérico también puede expresarse en términos relativos. La *incertidumbre relativa* de un valor x es el cociente entre la incertidumbre

absoluta $\varepsilon(x)$ del valor y dicho valor, $\varepsilon_r(x) = |\varepsilon(x)/x|$, y suele expresarse en forma de porcentaje como $\varepsilon_r(x) = |\varepsilon(x)/x| \cdot 100\%$. Las incertidumbres relativas también se expresan con una sola cifra significativa, a menos que ésta sea un 1, en cuyo caso conviene utilizar dos cifras.

4. Estimación de las incertidumbres de las medidas

4.1. Origen de las incertidumbres

Al medir una magnitud utilizando diferentes métodos o también realizando diferentes medidas con el mismo método, se obtienen resultados diferentes: existe un cierto grado de incertidumbre que es necesario evaluar para determinar el grado de fiabilidad de la medida, en un proceso que se suele llamar *análisis de incertidumbres* o de errores.

Los *errores aleatorios* se ponen de manifiesto al repetir las medidas de una magnitud. Consisten en fluctuaciones estadísticas de las medidas debidas a causas imponderables y difíciles de controlar como las pequeñas vibraciones producidas por algún agente externo al experimento o la imperfección del método aplicado. Se dice que un resultado es *preciso* o *reproducible* si la incertidumbre de origen aleatorio es pequeña (Figura 1).

Los *errores sistemáticos* están presentes en todas las medidas y a menudo surgen porque las condiciones experimentales son diferentes a las consideradas en el modelo teórico. Un empleo erróneo de la instrumentación (incorrecta calibración, posición del cero, etc.) o no tener en cuenta fenómenos físicos que afectan a la medida son típicas fuentes de errores sistemáticos. Estos errores son más difíciles de detectar y es habitual que sólo puedan eliminarse modificando el instrumento de medida o el método experimental. Se dice que una medida es *exacta* cuando el error sistemático es muy pequeño.

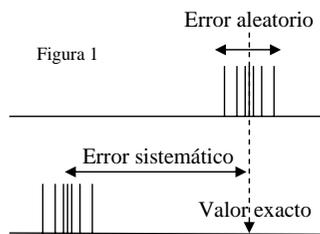


Figura 1. Error aleatorio: las medidas se distribuyen alrededor del valor exacto. Si, además, hay errores sistemáticos, las medidas se distribuyen alrededor de un valor desplazado.

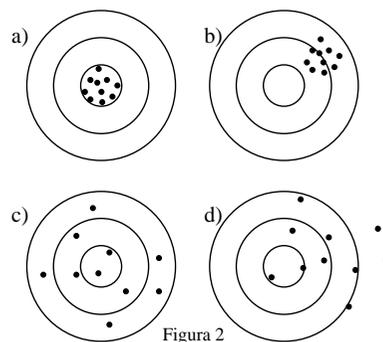


Figura 2. Tiro al blanco como símil de la medida. El centro de la diana representa el valor exacto de la magnitud: a) el error aleatorio y el sistemático son pequeños. b) error aleatorio pequeño y error sistemático grande, c) error aleatorio grande y error sistemático pequeño, d) errores aleatorio y sistemático grandes. En muchos experimentos reales no se conoce el valor de la magnitud que se desea medir (no se dispone de la diana) por lo que es difícil evaluar la entidad del error sistemático.

En los laboratorios de Física la incertidumbre de las medidas proviene fundamentalmente de:

- *Sensibilidad de un instrumento* (aleatorio): es la variación más pequeña que éste puede medir, y suele corresponder a la división más pequeña de la escala de medida. En ocasiones el observador puede apreciar una fracción de la división más pequeña y queda a su criterio estimar la incertidumbre. Por ejemplo, en la Figura 3 la lectura debe darse como 16.25 ± 0.05 cm en lugar de 16.2 ± 0.1 cm. El primer intervalo abarca desde 16.2 hasta 16.3 cm, donde con total seguridad está situado el índice del aparato al que corresponde la escala, mientras que el segundo intervalo abarca desde 16.1 hasta 16.3 cm, que es excesivo.

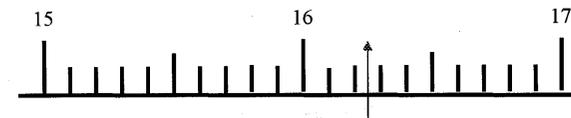


Figura 3. Ilustración esquemática de la lectura con una regla milimétrica.

- *Resolución del procedimiento de medida* (aleatorio): en algunos métodos de medida la capacidad del experimentador para apreciar cambios determina la incertidumbre. Por ejemplo, cuando (girando un dial) se mide el valor de la frecuencia para la que se observa la mayor amplitud de otra magnitud, la resolución está determinada por la sensibilidad del experimentador para apreciar variaciones de amplitud y no por la sensibilidad del generador de frecuencias. Denominaremos genéricamente *sensibilidad* a la *sensibilidad del instrumento de medida* o a la *resolución del procedimiento de medida*.
- *Falta de calibración de la instrumentación o del valor de cero* (sistemático): Generalmente la instrumentación electrónica está bien calibrada y el valor de cero es correcto. No obstante, el método experimental puede necesitar del establecimiento del valor de cero, o puede convenir verificarlo antes de la medición (en ocasiones también durante o al concluir la medida).
- *Paralaje* (sistemático o aleatorio): cuando el observador se encuentra a una cierta distancia de lo que tiene que medir u observar y su línea de visión cambia o produce un sesgo.
- *Despreciar o no controlar factores influyentes en la medida* (sistemático): Por ejemplo, no tener en cuenta el campo magnético terrestre al medir el campo en las proximidades de un imán o el rozamiento de un cuerpo con el aire al medir la aceleración de la gravedad en caída libre. En ocasiones es posible corregir la medida a posteriori y a menudo es necesario reconsiderar el modelo teórico para tener en cuenta los factores en cuestión.
- *Factores ambientales* (sistemático o aleatorio): como vibraciones, desplazamientos, cambios de temperatura, ruido electrónico, etc.
- *Variaciones físicas* (aleatorio): de la magnitud que se mide o de factores que influyen en ella. Una forma de reducir esta fuente de incertidumbre es acumular medidas y dividir por el número total de acumulaciones (por ejemplo, medir el tiempo correspondiente a 10 o 20 periodos de un péndulo en lugar de un solo periodo).

- *Tiempo de espera e histéresis* (sistemático): algunos dispositivos tardan un tiempo en alcanzar el equilibrio, por lo que al medir antes de que lo hayan alcanzado se obtiene una magnitud afectada por una incertidumbre mayor (por ejemplo, medidas de temperatura). Lo mismo sucede cuando hay efectos de “memoria”.
- *Falta de cuidado del experimentador* en el procedimiento experimental o sesgo de las medidas debido a que el experimentador “force” la obtención de ciertos resultados en la medida en que concuerdan con las expectativas.

4.2. Determinación de incertidumbres de magnitudes medidas directamente

El criterio adoptado para estimar la incertidumbre de una medida debe ser mencionado y justificado. Algunas recomendaciones para realizar dicha estimación son las siguientes.

Si la incertidumbre asociada a la sensibilidad es grande comparada con la incertidumbre aleatoria (como en la medida de una longitud de varios centímetros con una regla graduada en milímetros o en las medidas de magnitudes eléctricas en condiciones estacionarias) basta realizar una sola medida, aunque se puede repetir para detectar posibles errores. La incertidumbre de esta medida es la asociada a la sensibilidad.

En otras ocasiones la incertidumbre aleatoria es mayor que la asociada a la sensibilidad. Un ejemplo típico es la medida de un intervalo de tiempo con un cronómetro digital que aprecia centésimas de segundo y es accionado manualmente. La velocidad de reacción del experimentador introduce una incertidumbre aleatoria mayor de una centésima de segundo. En estos casos hay que realizar N de medidas, x_1, x_2, \dots, x_N , y considerar que la mejor estimación del valor de x es la media

$$\bar{x} = \langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad [2]$$

La incertidumbre de dispersión se evalúa como la *desviación estándar de la media*

$$\varepsilon(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad [3]$$

donde $s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$ es la desviación estándar, la cual suele estar implementada en

las calculadoras científicas. Si, tal y como hemos supuesto inicialmente, esta incertidumbre de dispersión es mayor que la sensibilidad, la medida se expresará como $\bar{x} \pm \varepsilon(\bar{x})$ unidades. Para reducir la incertidumbre aleatoria se podría realizar un gran número N de medidas. Los resultados tendrían una distribución gaussiana y la incertidumbre de la media se reduciría al aumentar N como $N^{-1/2}$, de modo que para mejorar la precisión de las medidas en un orden de magnitud sería necesario incrementar N en un factor 100. Es evidente que las características del trabajo en los laboratorios de primer ciclo no hacen recomendable realizar altos números

de medidas y, salvo que el guión de prácticas indique lo contrario, bastará con realizar cinco medidas. Cuando N es bajo, $\varepsilon(\bar{x})$ se puede estimar como $(x_{\max} - x_{\min})/4$.

Por ejemplo, imaginemos que se realizan cinco medidas de una distancia con un sistema cuya sensibilidad es de 0.1 cm y que se obtienen los valores: 71.5, 72.3, 72.0, 73.3, 71.3 cm. La media es $\bar{x} = 72.08$ cm, la desviación estándar es $s = 0,79$ cm y la desviación estándar de la media es $\varepsilon(\bar{x}) = 0.35$ cm, de modo que la medida se expresa como 72.1 ± 0.4 cm.

4.3. Determinación de incertidumbres de magnitudes medidas indirectamente

En muchos experimentos, las magnitudes a determinar no se miden directamente, sino que se obtienen a través de su relación con otras magnitudes que sí se miden directamente. Consideremos una magnitud problema, q , que se determina a partir de tres magnitudes x, y, z , cuya incertidumbre es conocida. En general, la forma de la ecuación que relaciona dichas magnitudes puede escribirse como $q = q(x, y, z)$. Si las incertidumbres son aleatorias e independientes, para calcular la incertidumbre absoluta de q utilizaremos la *regla de la propagación cuadrática de incertidumbres*, la cual establece que

$$\varepsilon(q) = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)_{y,z} \varepsilon(x) \right]^2 + \left[\left(\frac{\partial q}{\partial y} \right)_{x,z} \varepsilon(y) \right]^2 + \left[\left(\frac{\partial q}{\partial z} \right)_{x,y} \varepsilon(z) \right]^2} \quad [4]$$

Por ejemplo, si $q = \pm ax \pm by \pm \dots$ entonces $\varepsilon(q) = \sqrt{[a\varepsilon(x)]^2 + [b\varepsilon(y)]^2 + \dots}$ y si $q = kx^\alpha y^\beta \dots$ entonces $\varepsilon(q) = q\sqrt{[\alpha\varepsilon_r(x)]^2 + [\beta\varepsilon_r(y)]^2 + \dots}$

Como las incertidumbres se escriben por lo general con sólo una cifra significativa, resulta que si hacemos un cálculo de $\varepsilon(q)$ en función de $\varepsilon(x), \varepsilon(y), \varepsilon(z), \dots$, muchos de los sumandos asociados a las incertidumbres de las variables independientes serán despreciables y sólo unos pocos (uno o dos, habitualmente) determinan el valor de $\varepsilon(q)$. Por ejemplo, consideremos que $q = xyz$, siendo $x = 12 \pm 2$ mm, $y = 51 \pm 1$ mm, y $z = 821 \pm 3$ mm. Aplicando directamente las ecuaciones anteriores resulta $q = 12 \times 51 \times 821 \text{ mm}^3 = 502452 \text{ mm}^3$ y $\varepsilon(q) = q\sqrt{[\varepsilon_r(x)]^2 + [\varepsilon_r(y)]^2 + [\varepsilon_r(z)]^2} = 502452\sqrt{0.028 + 0.00038 + 0.000013} \text{ mm}^3 \approx 80000 \text{ mm}^3$ de modo que el resultado final se expresa como $q = (50 \pm 8) \times 10^4 \text{ mm}^3$. Si hubiésemos analizado las magnitudes x, y, z antes de realizar el cálculo, observaríamos que la primera tiene una incertidumbre relativa $\varepsilon_r(x) = \varepsilon(x)/x = 2/12 = 17\%$ considerablemente mayor que la de las otras dos variables $\varepsilon_r(y) = \varepsilon(y)/y = 1/51 = 2\%$, $\varepsilon_r(z) = \varepsilon(z)/z = 3/821 = 0.4\%$. Esto nos permite considerar, a los efectos del cálculo de $\varepsilon(q)$, que sólo x tiene incertidumbre pues $\varepsilon(q) = yz\varepsilon(x) = 51 \times 821 \times 2 \text{ mm}^3 \approx 80000 \text{ mm}^3$.

Una consecuencia importante de lo anterior es que antes de aplicar la regla de propagación cuadrática de incertidumbres hay que determinar las dos variables con mayor incertidumbre relativa y, a los efectos del cálculo de $\varepsilon(q)$, supondremos irrelevantes las imprecisiones del resto de variables. Esta forma de proceder simplifica el cálculo de $\varepsilon(q)$, y reduce consecuentemente la probabilidad de cometer errores en dicho cálculo, y además nos

ayuda a entender, como los distintos tipos de aparatos de medida tienen distintas sensibilidades y algunas medidas son más difíciles que otras, las distintas magnitudes físicas se suelen determinar con distintas precisiones relativas. Tras la formación en el laboratorio, deberíamos conocer las imprecisiones relativas típicas con las que somos capaces de determinar las distintas magnitudes físicas. Por ejemplo, mientras que es relativamente fácil medir masas o presiones con cinco cifras significativas, las diferencias de temperatura raramente se pueden determinar con más de dos cifras significativas (Figura 4).

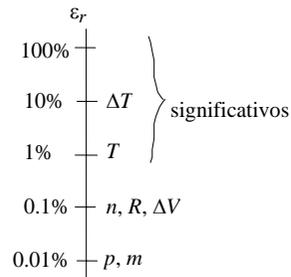


Figura 4. Incertidumbres relativas típicas de algunas magnitudes físicas.

4.4. Buen uso y limitaciones de los criterios de errores

En las páginas anteriores se han resumido los criterios más extendidos en la presentación de datos experimentales. Cabría incidir en el buen uso de dichos criterios y en las limitaciones a los que estos están sujetos. Comencemos con el **buen uso**: como ya se ha expuesto, cuando se mide una magnitud lo que en realidad tenemos es una colección de datos que se deben presentar proporcionando un valor central y una estimación de la dispersión de los valores, que suele ser la desviación estándar. Para considerarla una estimación aceptable, es preferible disponer de al menos 10 datos. Ahora bien, existen medidas en las que el error de sensibilidad es superior al de dispersión estándar o a cualquier otro que se quiera emplear. Por ejemplo, si se mide la anchura de un papel A4 con una regla de 30 cm graduada en milímetros, es absurdo realizar 10 medidas que, tomadas con cuidado, serán prácticamente idénticas. Basta tomar una medida y asignarle el error de sensibilidad. Un caso distinto sería si con la misma regla quisiéramos medir las dimensiones de la habitación. Se deja, pues, al buen juicio del alumno la asignación del error en cada caso.

En la toma de medidas se pueden cometer equivocaciones de distinta índole que den lugar a algún dato erróneo. Dicho dato "sospechoso" se puede identificar siguiendo el siguiente criterio: aquel que aparezca fuera del intervalo $[\bar{x} - 3\varepsilon(\bar{x}), \bar{x} + 3\varepsilon(\bar{x})]$. La probabilidad de que un dato quede fuera de dicho intervalo es del 0.3% (suponiendo que la distribución de nuestras medidas sea de tipo gaussiano). Por lo tanto si tenemos, por ejemplo,

60 datos, sólo 0.18 datos pueden estar fuera. Si aparecen uno o dos, su eliminación está justificada (se procedería a recalcular la media y la desviación sin el dato equivocado). Este criterio es válido siempre que el número de datos no sea excesivamente grande (por ejemplo, el 0.3% de $N = 1000$ supone 3 datos que pueden estar razonablemente fuera del intervalo de semiamplitud 3ε y que no serían despreciables).

Sigamos con las **limitaciones**. Hemos dicho que la distribución de los errores casuales tiende a la distribución gaussiana o normal. Tal distribución es ideal y en la práctica se dispone de pocos datos reales que raramente se distribuyen "normalmente". O nunca. Por ejemplo, en medidas obtenidas mediante el conteo de sucesos el error sigue la distribución de Poisson, que da más peso a la cola de la distribución. Otras veces las desviaciones de la distribución normal no se comprenden tan bien. Es el caso de la aparición de puntos poco probables (fuera del intervalo de semiamplitud máxima 3ε) con más frecuencia de la esperada. En tal caso, el modelo gaussiano no es bueno y hay que recurrir a alternativas como la *estadística robusta*.

Finalmente, una limitación importante viene impuesta a veces por la naturaleza propia del experimento o por la limitación de tiempo. Si el experimento, por sus características, sólo puede repetirse una o unas pocas veces en un tiempo razonable, tendrán que seguirse criterios no estadísticos para la estimación del error de la medida.

4.5. Interpolación

Es frecuente que se necesite obtener valores de una magnitud q a partir de tablas numéricas (de simple entrada) que recogen su dependencia con una variable independiente x . Nuestro objetivo es determinar el valor de q para un valor de $x \pm \varepsilon(x)$. Si x no es uno de los valores de la tabla, se comienza por encontrar aquellos valores tabulados x_1 y x_2 entre los que se encuentra x . Así pues, si $x_1 < x < x_2$, la tabla presentará la forma de la Tabla 4. Considerando que para el intervalo $x_1 < x < x_2$ la relación $q = f(x)$ es aproximadamente lineal, podemos determinar q en función de x como

$$q = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \tag{5}$$

y la incertidumbre aproximada de q es

$$\varepsilon(q) = \left| \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} \right| \varepsilon(x) \tag{6}$$

Tabla 4. Tabla de simple entrada

	x			
	...	x_1	x_2	...
q	...	q_1	q_2	...

Si x es uno de los valores recogidos en la tabla, entonces el correspondiente valor de q se puede leer directamente en la tabla y su imprecisión se estima de nuevo con la Ec. [6]. Es decir, si llamamos $x = x_1$ debemos fijarnos también en el valor siguiente en la tabla, x_2 , y observar que el valor x de interés está afectado de una incertidumbre $\varepsilon(x)$ de modo que no es exactamente x_1 . Del mismo modo el valor que leemos de q a partir de la tabla no es exactamente q_1 sino $q_1 \pm \varepsilon(q)$.

También hay que comprender que, al igual que x está afectado de imprecisión, la tabla en la que estamos interpolando recoge valores que también tienen sus incertidumbres, aunque a menudo no aparezcan explícitamente en la tabla. Si no aparecen deberemos entender que los valores de la tabla se recogen con las cifras que son significativas experimentalmente y que la incertidumbre de los valores de la tabla afecta a su última cifra. Si $\varepsilon(x)$ es muy pequeño, podría ocurrir que al aplicar la Ec. [6] obtuviésemos un valor de $\varepsilon(q)$ menor que la incertidumbre de los valores de la tabla. En este caso se debe asignar al valor de q interpolado la misma imprecisión que los valores de q tabulados, pues un valor de q interpolado a partir de medidas tabuladas no puede ser más preciso que dichas medidas.

5. Ajuste por mínimos cuadrados

5.1. Ajuste lineal

Es frecuente que la relación entre dos magnitudes físicas, x e y , sea lineal y, por tanto, que la representación de sus medidas dé como resultado una distribución de puntos experimentales aproximadamente rectilínea. Para determinar dicha relación lineal entre las magnitudes físicas, debemos deducir la ecuación de la línea recta que mejor se ajusta a todos los puntos experimentales. Supongamos que hemos realizado un experimento y hemos medido N pares de valores experimentales (x_i, y_i) y que buscamos los valores de la pendiente A y la ordenada en el origen B , junto con sus incertidumbres, de una recta

$$y = Ax + B \quad [7]$$

tal que los puntos experimentales queden lo más cercanos posible a ésta, es decir, tal que la suma de distancias a la recta

$$S(A, B) = \sum_{i=1}^N [y_i - (Ax_i + B)]^2 \quad [8]$$

sea mínima. Derivando S respecto a A y B y aplicando la condición de mínimo se obtiene que

$$A = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad B = \bar{y} - A\bar{x} \quad [9]$$

donde $\bar{x} \equiv (1/N) \sum_{i=1}^N x_i$, $\bar{y} \equiv (1/N) \sum_{i=1}^N y_i$, $\overline{xy} \equiv (1/N) \sum_{i=1}^N x_i y_i$ y $\overline{x^2} \equiv (1/N) \sum_{i=1}^N x_i^2$. La segunda de las ecuaciones [9] es muy importante porque nos dice que la recta de regresión siempre

debe pasar por el centro (\bar{x}, \bar{y}) de la distribución de datos experimentales (Figura 5a).

En algunas ocasiones, a especificar explícitamente en el guión de prácticas, puede convenir imponer que la recta de regresión pase por el origen de coordenadas, $B = 0$. En estos casos el análisis de regresión es distinto y, por ejemplo, la pendiente es $A = \overline{xy} / \overline{x^2}$.

Lo más importante a la hora de hacer un ajuste por mínimos cuadrados a una recta de regresión es asegurarnos de que los datos experimentales muestran, en efecto, una distribución lineal en el rango de medidas en que se realiza el ajuste. Las Figuras 5b y 5c ilustra algunos ejemplos de ajustes erróneos.

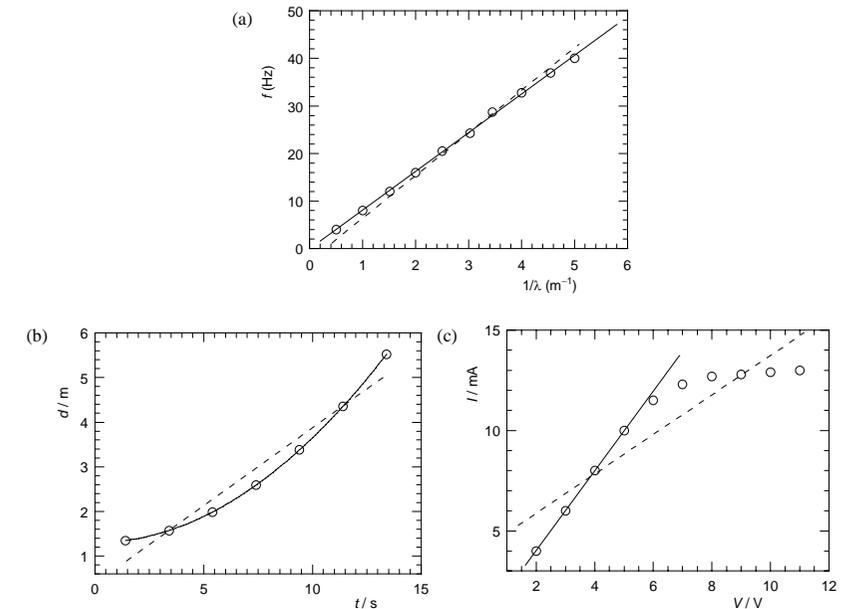


Figura 5. La línea continua representa un ajuste correcto de los datos, la recta discontinua un ajuste incorrecto por diferentes motivos: (a) la recta discontinua no es la que minimiza la suma S de la ecuación [8], (b) los puntos experimentales no tienen una dependencia lineal y no deben ajustarse a la recta discontinua, y (c) la relación entre corriente y voltaje es lineal sólo en el rango de pequeños voltajes y no debe realizarse un ajuste lineal en un rango que incluya también los voltajes mayores.

Las incertidumbres estadísticas de A y B vienen dadas por las expresiones

$$\varepsilon(A) = |A| \sqrt{\frac{1}{N-2} \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right)} \quad \varepsilon(B) = \sqrt{x^2} \varepsilon(A) \quad [10]$$

donde

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \bar{x}^2)(\overline{y^2} - \bar{y}^2)}} \quad [11]$$

es el *coeficiente de correlación* $e \bar{y}^2 \equiv (1/N) \sum_{i=1}^N y_i^2$. Este coeficiente nos dice si la recta de regresión es una buena descripción estadística de la nube de puntos. Su valor está comprendido entre ± 1 . Cuanto más lejos se halle del cero, y por tanto más próximo a uno en valor absoluto, mejor será el ajuste.

Es muy importante comprender que hay dos fuentes de imprecisión de A y B : (i) la que resulta de la propagación de las imprecisiones de las medidas (x_i, y_i) y (ii) el error estadístico debido a la dispersión de las medidas respecto al comportamiento lineal. Las Ecs. [10] sólo describen este último y, por tanto, sólo deberían aceptarse como estimaciones de las incertidumbres de A y B si la dispersión de las medidas es la fuente de imprecisión dominante. Aunque existen métodos para hacer una evaluación global de la imprecisión de A y B , son algo complicados* y no se emplearán en este nivel. De un modo práctico, sin embargo, se puede efectuar un análisis visual de la gráfica y decidir cuál es la principal fuente de imprecisión. Por ejemplo, la gráfica de la izquierda en la Figura 6 muestra un caso típico donde la mayor fuente de error de A y B es la propagación de las imprecisiones de las medidas. Al contrario, en la gráfica de la derecha la mayor fuente de error es la dispersión respecto del comportamiento lineal. Si nos encontramos con una gráfica como la de la izquierda, la estimación de la incertidumbre de A y B debe hacerse trazando sendas rectas que pasen por el centro (\bar{x}, \bar{y}) de la distribución y con pendientes lo más grande y la más pequeñas posibles tales que estas rectas pasen por el interior de los rectángulos de error. La semidiferencia de las pendientes de estas rectas puede considerarse como estimación de la incertidumbre de A . Del mismo modo, la semidiferencia de las ordenadas en el origen de estas dos rectas puede considerarse como estimación de la incertidumbre de B .

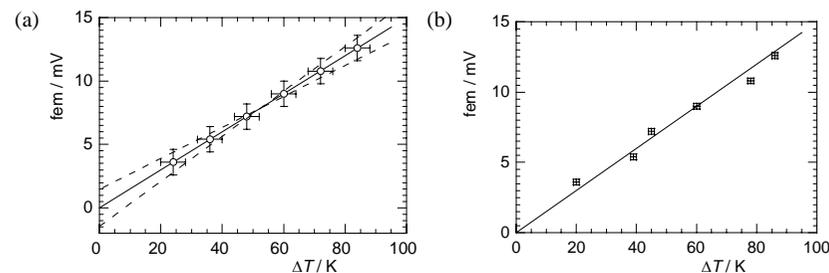


Figura 6. (a) Las incertidumbres de A y B vienen determinadas por las incertidumbres de las medidas. (b) Las incertidumbres de A y B vienen determinadas por la dispersión de las medidas respecto de la recta de regresión.

* J.R. Macdonald, W.J. Thompson, "Least-squares fitting when both variables contain errors: Pitfalls and possibilities", *Am. J. Phys.*, 60 (1992) 66.

Es interesante efectuar los ajustes por mínimos cuadrados con detalle, lo que nos permitirá comprobar si los datos experimentales obtenidos presentan alguna anomalía, si hay algún valor incorrecto, si hay comportamientos no lineales, etc. Por ello, no es aconsejable introducir los datos en una calculadora y tomar, sin más, los valores de A y B que aquella nos proporcione. Mucho más instructivo es efectuar los cálculos "a mano" o mediante una hoja de cálculo o un programa específico de representación gráfica. Esto nos permitirá representar en cada caso gráficamente la recta resultante sobre los datos experimentales con el fin de poder comparar ambos resultados y detectar posibles errores.

5.2. Ajuste no lineal

Cuando los datos experimentales no se ajustan a una recta, sino a una función arbitraria, la determinación de la curva que mejor se ajusta a los datos es más compleja que en el caso de la recta, pero el fundamento matemático es el mismo: se trata de encontrar una curva tal que su distancia a los puntos sea mínima. En algunos casos, se puede hacer una transformación de variables para obtener una relación lineal. Por ejemplo, como la relación entre presión y temperatura en una curva de equilibrio entre fases es del tipo $p = C \exp(B/T)$ se puede hacer un ajuste de los datos (T, p) a esta relación no lineal o se puede hacer un ajuste lineal a los datos $(1/T, \ln[p/Pa])$ que cumplen una relación del tipo $\ln[p/Pa] = A + B/T$. Hoy en día muchos programas de análisis gráfico realizan ajustes no lineales multiparamétricos. Para utilizarlos correctamente hay que tener en cuenta que, dependiendo de la función de que se trate, del número de parámetros a determinar y del número de datos experimentales, la condición de mínimo puede tener varias soluciones. Es por lo tanto necesario dar valores iniciales de los parámetros dentro de un rango razonable para el experimento de que se trate.

6. Presentación de gráficas

El dicho popular "una imagen vale más que mil palabras" aplica también en el campo de la ciencia. Los resultados científicos se recogen de forma cuantitativa en términos de expresiones matemáticas, pero una buena figura puede contribuir decisivamente a la comprensión de las ideas que se deseen exponer. La complejidad de la presentación de las figuras radica en que se trata al mismo tiempo de una presentación donde se requiere cierta técnica (ya sea en el manejo de las aplicaciones informáticas adecuadas o en su elaboración manual) y al mismo tiempo se exige la precisión y exactitud científicas. Es decir, una gráfica no sólo tiene que estar bien trazada sino además ser exacta en la información que recoge.

Por ser las más comunes en los laboratorios de Física de primer ciclo, nos centraremos en las gráficas bidimensionales con dos ejes coordenados y representación de resultados por medio de puntos y líneas. Es importante tener en cuenta que si empleáis una aplicación

informática, la responsabilidad de que la gráfica producida se ajuste a las normas siguientes es vuestra y no del ordenador. Las normas básicas de elaboración de gráficas son:

- **Papel:** milimetrado si se elabora a mano o blanco sin trama (líneas de rejilla) si se elabora a ordenador.
- **Tinta:** rotulador negro de punta fina si se elabora a mano o color negro en alta resolución si se elabora a ordenador. El uso de colores en gráficas científicas debe estar muy bien justificado.
- **Tamaño de la gráfica:** Si se hace a ordenador, un tamaño típico del rectángulo definido por los ejes podría ser de 8×6 cm. A mano podría ser un 50% mayor, es decir, 12×9 cm.
- **Pie de figura:** las figuras deben tener una breve descripción en su parte inferior, fuera de la zona de representación. El objetivo de este pie de figura es hacer la figura *autosuficiente* de modo que ésta pueda comprenderse totalmente sin necesidad de recurrir al texto principal.
- **Leyenda:** es preferible incorporar la información de los símbolos y trazos en el pie de figura y no mostrar leyenda en su interior. Del mismo modo, otro tipo de información, como los valores de los datos experimentales no deben aparecer en el interior de la figura.
- **Rangos de los ejes:** el rango de cada eje coordenado ha de elegirse de modo que se cubra ligeramente por exceso el rango de datos experimentales (incluidas sus imprecisiones). Es decir, no deben quedar zonas no usadas en ninguno de los ejes, a menos que por alguna razón sea especialmente relevante incluir el origen de coordenadas o algún otro punto.
- **Divisiones de los ejes y marcas sobre las divisiones:** los rangos de los ejes deben tener divisiones mayores y menores. Los espaciados entre las divisiones mayores deben ser de 1, 2, 5, 10,... unidades. Si el espaciado es 1 o 10, cada división mayor se subdivide en 10 divisiones menores. Si el espaciado es 2, en 4 divisiones menores. Si el espaciado es 5, en 5 divisiones menores. El número total de divisiones mayores en cada eje debe estar entre 3 y 10. Todas o algunas de estas divisiones mayores se marcarán con un valor numérico. El número total de marcas en cada eje debe estar entre 2 y 6. En cualquier caso, el número de marcas y de divisiones se ha de escoger de modo que la gráfica resulte nítida y de fácil lectura. Por ejemplo, un rango de 16 unidades se puede dividir con 4 divisiones mayores a un intervalo de 4 unidades, con marcas sobre todas ellas y cuatro subdivisiones menores por intervalo (para que el intervalo entre subdivisiones menores sea de 1 unidad). También podríamos dividir este rango con 3 subdivisiones mayores de 5 unidades, con marcas sobre las tres divisiones mayores, y 16 subdivisiones menores de 1 unidad. Lo que no debemos hacer con este rango de 16 unidades es, por ejemplo, dividirlo en 10 divisiones mayores de 1.6 unidades pues los intervalos entre divisiones mayores no deben ser fraccionarios.
- **Etiquetas sobre los ejes coordenados:** en los ejes se representan los valores de las magnitudes físicas, empleándose habitualmente el eje de abscisas para la variable independiente y el de ordenadas para la dependiente. Las magnitudes deben describirse correctamente, especificando sus unidades y los posibles factores empleados. Por ejemplo, si en un eje se representan valores de presión en el rango de 100 a 300 kPa, podemos

describir el eje como p/kPa o $p(\text{kPa})$ y marcar las divisiones como 100, ..., 300 o describir el eje como $10^{-5}p/\text{Pa}$ o $p/10^5 \text{ Pa}$ y marcar las divisiones como 1, ..., 3. Así, la división 1 cumple $10^{-5}p/\text{Pa} = 1$ o bien $p/10^5 \text{ Pa} = 1$. Todas las marcas (números) sobre un mismo eje deben usar el mismo número de cifras decimales.

- **Uso del marco (cuatro ejes coordenados):** con objeto de facilitar la lectura de datos de la figura, es recomendable el uso de un marco con las mismas divisiones en los dos ejes horizontales y las mismas divisiones en los dos verticales.
- **Puntos y cuadros de error:** los puntos experimentales han de verse bien (es decir, deben ser lo suficientemente grandes) y tendrán sus barras de error en ambas direcciones. Además, los datos (x, y) del punto no deben aparecer ni sobre el punto ni en los ejes. El tamaño de los símbolos ha de ser proporcionado al tamaño de la figura y de las cifras que marcan las divisiones de los ejes.
- **Líneas:** las curvas trazadas sobre los puntos han de ser suaves, no quebradas. No deben aparecer más líneas que las correspondientes a ajustes (como regresión lineal) o las curvas suaves trazadas para guiar a la vista y observar mejor el comportamiento de los datos, pero no líneas de los ejes a los puntos.

Como primer ejemplo, la Figura 7 muestra dos representaciones gráficas de los mismos datos experimentales. La gráfica (a) es incorrecta, mientras que la (b) sigue las pautas descritas anteriormente. Si nos fijamos un poco encontraremos los siguientes errores: la figura carece de pie, con lo que no puede comprenderse su contenido. El eje de ordenadas no está bien aprovechado y hace que más de la mitad de la gráfica esté en blanco. El descriptor de la magnitud representada en este eje debería leerse de abajo hacia arriba. El descriptor de la magnitud representada en el eje de abscisas es incompleto y ambiguo. Los símbolos son tan pequeños que casi no se diferencian. Los intervalos de error no habían sido representados. El uso del marco en la figura de la derecha hace más fácil la lectura de datos de la gráfica. Las líneas no deben ser quebradas sino suaves.

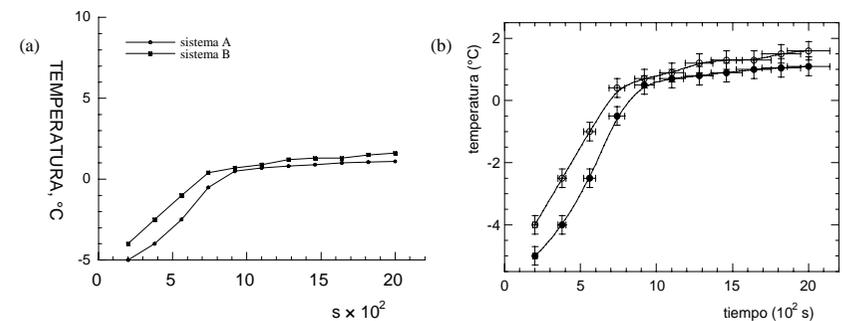
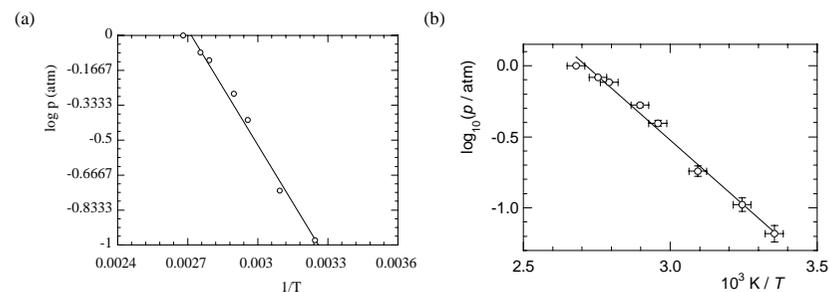


Figura 7. Variación temporal de la temperatura de los sistemas A (\square) y B (\circ) durante los primeros treinta minutos de contacto térmico con el sistema C.

La Figura 8 ilustra otro tipo de dificultades. Como antes, la gráfica incorrecta es la de la izquierda y la correcta la de la derecha. Los problemas que presenta la gráfica de la izquierda son: el pie de figura no es suficientemente informativo. Faltan las unidades en el eje de abscisas. Las unidades del eje de ordenadas no están bien expresadas, pues “atm” no es la unidad de “log10p”. Los símbolos de p y T deben estar en cursiva. Las divisiones de los ejes son de difícil lectura y tienen un número distinto de cifras significativas.



Calor de vaporización de la sustancia X.

Figura 8. Variación de la presión de vapor de la sustancia X con la temperatura. El calor de vaporización se puede determinar a partir de la pendiente del ajuste lineal (recta en trazo discontinuo) de los datos experimentales (\circ).

7. Memoria de una práctica

Un texto científico, como puede ser la presentación de los resultados de una práctica, la evaluación experimental de un sistema, o un trabajo de control de calidad, va más allá de una relación o lista de manipulaciones efectuadas en el laboratorio. La finalidad de la actividad experimental no se limita a trazar una serie de gráficas y dar valores a ciertas magnitudes. Lo que se busca son características genéricas, conexiones entre fenómenos y relaciones entre magnitudes físicas. Los trabajos prácticos están siempre seguidos de un proceso de reflexión y de elaboración en el que ordenamos los resultados de las diversas experiencias, las ideas y las interpretaciones hasta llegar a una visión global coherente.

Cuando el trabajo experimental está terminado es necesario interpretarlo, comprenderlo y transmitirlo, para compartir nuestras conclusiones con otras personas. En la organización del trabajo escrito es muy habitual que el autor tenga la tentación de presentar sus resultados en un orden cronológico, tal y como los fue obteniendo. Esto nos lleva a la estructura usual de un informe: motivación, cuerpo del trabajo, conclusiones. Sin embargo, para que el documento escrito llegue de forma adecuada al público, es necesario romper en cierta medida esta cronología. Todo documento debe estar elaborado para resaltar aquello que al lector más le va a interesar, de forma que aseguremos su atención. Para poder destacar lo

más relevante rompiendo el orden cronológico usual es conveniente incluir en todo informe un resumen inicial. Si el resumen capta adecuadamente la atención del lector, éste no dudará en leer la memoria completa con la intención de entender los detalles del trabajo y, quizá llegar a sus propias conclusiones.

De forma general, una memoria tiene las siguientes secciones:

- **Portada:** Las memorias tendrán una portada que especifique el nombre y número de la práctica, los nombres de los autores, el subgrupo, el profesor y el curso.
- **Resumen:** El resumen suele incluir dos partes, un pequeño prólogo y el resumen propiamente dicho. El prólogo sitúa brevemente el tema del que se va a tratar y, de manera sucinta (unas pocas líneas), describe los objetivos que se pretenden cubrir; no se trata de explicar la práctica sino de decir simplemente qué se pretende medir o qué ley se quiere estudiar junto con una motivación de su interés. A continuación se resalta el trabajo realizado destacando los logros principales.
- **Introducción:** Se tiene que describir el fenómeno que se quiere estudiar en la práctica. Se deben presentar aquellas expresiones o ideas que se quieren analizar experimentalmente, aportando referencias bibliográficas adecuadas para las mismas. Por ejemplo, si queremos estudiar la ley de Ohm en un circuito eléctrico no es necesario deducir la ley de Ohm, sino simplemente presentarla y explicar de qué forma se puede estudiar: midiendo diferencias de potencial e intensidades, o intensidades y resistencias, etc. No se trata de copiar lo que dice un libro o el guión de prácticas sino de explicar el fenómeno que se va a estudiar con vuestras propias palabras. Se debe evitar copiar largas introducciones teóricas de los libros y debe comprenderse todo lo que se incluya.
- **Método experimental:** Se detallará el procedimiento experimental, explicando cómo se utiliza cada aparato relevante, así como sus características más destacadas. En él se indicarán de forma explícita las sensibilidades de los aparatos.
- **Resultados y discusión:** Se presentarán las medidas realizadas y los cálculos que proceda hacer con ellas. Los resultados se deben presentar siguiendo las normas explicadas en esta guía. En concreto, todas las magnitudes deben tener sus unidades y la estimación de su incertidumbre, indicando explícitamente cómo se realiza dicha estimación. La presentación de los resultados se hará mediante tablas, gráficos o incorporados en el texto de modo que queden claramente destacados, si bien se preferirán las gráficas siempre que sea posible. En la discusión hay que ser crítico con los resultados: hay que interpretarlos y si sale un resultado absurdo o desmesurado hay que indicarlo y, si es posible, explicarlo. Siempre debe intentarse la comparación de los resultados obtenidos con los resultados recogidos en la bibliografía. Si el resultado obtenido no es compatible, dentro del margen de incertidumbre, con los valores de la bibliografía será necesario discutir los posibles errores sistemáticos de la medida. Es decir, hay que ser crítico con el cuidado que uno ha puesto en realizar las medidas del modo más correcto posible e identificar las

principales fuentes de error (aleatorio y sistemático) del método experimental y los aparatos empleados.

- **Conclusiones:** En este apartado se indicará si se han cumplido los objetivos marcados al comienzo de la práctica explicando el porqué, así como cualquier comentario que se considere oportuno. Conviene evitar que este apartado se convierta en una queja permanente por la falta de tiempo o, en su caso, el lamentable estado de determinado aparato. Se trata de interpretar los resultados en un contexto amplio.
- **Bibliografía:** Se reseñaran aquí las referencias de los libros de los que se han extraído las figuras, datos, fórmulas, texto, etc. La forma de escribir dichas referencias debe garantizar que cualquiera que las lea debe ser capaz de encontrar exactamente el material que se ha empleado de las referencias citadas.

8. Presentación oral de una práctica

La presentación oral de una práctica tiene una doble finalidad. Por una parte, profundizar en los contenidos de la práctica que se va a exponer, comprendiendo y explicando tanto sus aspectos físicos como técnicos. Por otra, desarrollar la capacidad de comunicación oral en el ámbito científico. En base a estas dos metas, dividiremos estos consejos básicos para la presentación oral en dos partes: la que respecta a la información que se quiere transmitir y la que atañe a la forma de comunicación oral. Para terminar, hemos añadido unos consejos sobre cómo elaborar las transparencias, puesto que ilustrar la exposición mediante proyección gráfica de los resultados utilizando un ordenador y un cañón proyector es la forma más habitual de exponer los resultados científicos. Los consejos en cuanto la extensión se basan en un tiempo de exposición de diez minutos (aproximadamente diez transparencias).

8.1. Organización de la presentación

Las presentaciones, orales o escritas, tienen tres partes: introducción, cuerpo y conclusiones.

- **Introducción** (dos transparencias): Debe incluir el objetivo o idea básica (expresada en forma de frase breve) del trabajo desarrollado y su motivación. Además, se puede captar la atención del oyente empelando una “*llamada de atención*”, como una pregunta, una analogía o una anécdota que nos acerque al contenido de la práctica; también es posible cambiar el título de la práctica por otro que parezca más adecuado. Esta “*llamada de atención*” puede desarrollarse posteriormente en el cuerpo de la exposición o en las conclusiones. Una vez situado el problema a desarrollar, se le da a la audiencia una idea de cómo va a ser la estructura del cuerpo de la exposición. Este pequeño esquema se puede utilizar a lo largo de la charla para que la audiencia tenga claro en cada momento de qué se ha hablado y qué es lo que falta por abordar. Dado que la introducción es lo primero que se

expone, será la parte donde más pueden traicionar los nervios. La única forma de superarlos es preparar muy bien la introducción, ensayándola repetidamente en voz alta.

- **Cuerpo** (siete transparencias): Incluye la información básica y conviene estructurarla en dos o tres partes, según sea la práctica. En esta parte lo más importante es elegir adecuadamente la información que se quiere transmitir, puesto que es imposible contar todos los detalles en el tiempo de que se dispone. De forma general, cada una de esas partes puede constar a su vez de dos: una explicando el procedimiento de medida y otra donde se analizan los resultados obtenidos. Por lo general, en esta parte de la exposición los oyentes están más atentos y el orador está más tranquilo, sobre todo si ha preparado la presentación a conciencia y domina lo que presenta.
- **Conclusiones** (una transparencia): Cierran el discurso recogiendo las ideas principales desarrolladas en el cuerpo (a modo de resumen). Se debe dejar claro si se han cumplido los objetivos indicados en la introducción, o resaltar si se ha encontrado algún problema en el desarrollo de la práctica. Esta parte de la charla es lo último que oye la audiencia, por lo que tiene gran importancia en el discurso. Un buen final puede recuperar gran parte de lo que hemos hecho mal en una mala exposición. Y, al contrario, un mal final puede estropear una buena exposición. No se debe llegar con prisas a las conclusiones y si durante la exposición prevemos que va a faltar tiempo, es recomendable saltarse parte del cuerpo y detenerse con calma para resaltar lo principal en la parte de conclusiones.

8.2 Comunicación oral

Por lo general, las presentaciones orales tienen más impacto que los documentos escritos. Permiten una comunicación directa con la audiencia (tus compañeros y el profesor ahora, la directiva de una empresa, un tribunal de oposiciones o el público en general, en el futuro) que, para que sea efectiva, debe saberse gestionar adecuadamente. El control de la atención de la audiencia se consigue mediante diversos mecanismos, entre los que destacan los siguientes:

- Los mensajes orales son más directos que los escritos, pero su duración es limitada (en este caso, dispones únicamente de diez minutos). Es por tanto imposible detenerse en los detalles. Por su naturaleza, el mensaje oral tendrá menos información que su contrapartida escrita. Los detalles se encuentran ya en el documento escrito y su discusión puede aflorar en el turno de preguntas (unos cinco minutos).
- Al tener el tiempo limitado, el orador debe seleccionar aquello que quiere contar, y transmitirlo con coherencia, como si fuera una historia con una introducción, el desarrollo de una idea y unas conclusiones. La meta es conseguir guiar a la audiencia hacia las conclusiones, de forma que las comprenda y valore adecuadamente.
- Si se utilizan transparencias para apoyar la exposición, es conveniente contar con un máximo de una transparencia por minuto hablado, incluyendo el título y las conclusiones.

Dependiendo del orador y de la densidad de las transparencias elaboradas, las diez transparencias (máximo) recomendadas se transformarán en sólo siete.

- Toda presentación oral gana fuerza si comienza y termina con decisión. Si tu discurso se desarrolla con dudas, tu audiencia también dudará. Son estas dos partes (introducción y conclusiones) las que más hay que trabajar desde el punto de vista de la comunicación.
- La mejor forma de practicar un discurso es, precisamente, haciéndolo: búscate a alguien que te escuche con paciencia y no tenga miedo de decirte lo que piensa. Si pertenece al ámbito de la Física podrá juzgar los contenidos, mientras que si es una persona ajena a la Física se fijará principalmente en la forma de transmitir el mensaje. Si quieres, puedes ayudar tu discurso con unas notas donde resaltes los puntos más importantes de cada transparencia, para no olvidarlos, pero ten en cuenta que a la hora de la exposición quizá te sea difícil o embarazoso consultarlas, a no ser que las hayas usado en los ensayos.
- Se deben utilizar recursos de comunicación oral como el contacto visual con la audiencia, para reafirmar las frases, y los gestos y cambios en el tono de voz, para resaltar los puntos principales y los cambios de tema. Además, conviene ensayar varias veces el discurso antes de la exposición final para evitar “tics orales” como mmmmm, ahhhh, ehhhh,...

8.3 Transparencias

En general, en la elaboración de las transparencias hay una fuerte tendencia a recargarlas de datos que luego no da tiempo a explicar. Piensa en la información que quieres transmitir en la transparencia y estructúrala, identificando claramente los distintos mensajes o ideas que quieres transmitir a tu audiencia. Cada mensaje o idea requiere normalmente de un elemento visual independiente. Habrá un máximo de cuatro ideas en una transparencia (lo normal es introducir sólo dos). Piensa que hemos estimado un minuto por transparencia. 15 segundos por idea es realmente poco.

La transparencia debe incluir únicamente aquello de lo que realmente se va a hablar. Las imágenes o el texto que no estén directamente relacionados con el discurso se deben eliminar. Constituyen lo que se conoce como “ruido visual”, y su única utilidad es desviar innecesariamente la atención de la audiencia. No sirve para nada que “quede bonito” si no ilustra una idea que se vaya a comentar.

Los elementos visuales de la transparencia deben resaltar el lenguaje oral y no competir con él mostrando un mensaje complementario. Deben ofrecer elementos en los que apoyar nuestro discurso. Esto se consigue utilizando muy poco texto, y éste debe ser redundante, es decir, tiene que transmitir el mismo mensaje que intentamos comunicar oralmente. En el texto escrito, por tanto, se utilizarán sólo frases cortas o palabras que transmitan las ideas básicas. Las frases elaboradas las dejaremos para recalcar estas ideas con el lenguaje oral. El desafío consiste en mostrar visualmente la información sin ambigüedades, pero utilizando tan poco texto como sea posible.

Las gráficas no hablan por sí solas. Un comentario a una gráfica no puede despacharse con un “en la gráfica se representan los datos” y cambiar a otro tema. Deben describirse en detalle, indicando lo que representan los ejes de ordenadas y abscisas y las conclusiones principales que se obtienen.

Debe evitarse el uso de tablas, sustituyéndolas por gráficas siempre que sea posible. En el caso de que sea inevitable su uso, no deben estar recargadas de información, y ésta debe estar ordenada siguiendo algún criterio lógico que facilite su comprensión.

Finalmente hay que resaltar que la actitud durante la exposición es importante. Se debe prestar atención a tres aspectos simultáneamente: lo que se dice, cómo se dice y cómo se presenta (tanto mediante el lenguaje corporal como mediante las transparencias). Una actitud que demuestre interés por la información presentada e interés por contarla ayuda a establecer una relación más directa con la audiencia y a ser más natural.

Agradecimientos

Material Didáctico elaborado en el proyecto “Grupo inter-departamental para la elaboración de una guía básica de laboratorios” del Programa de Innovación Educativa “Finestra Oberta” de la Universidad de Valencia.

Lecturas recomendadas

Se puede profundizar sobre algunos de los temas tratados en esta guía en los siguientes textos.

- J.R. Taylor, *An Introduction to Error Analysis*, 2ª ed., University Science Books, Sausalito (CA), 1997.
- G.L. Squires, *Practical Physics*, 3ª ed., Cambridge U.P., Cambridge, 1985.
- Joint Committee for Guides in Metrology, *Evaluation of Measurement Data. An Introduction to the “Guide to the Expressions of Uncertainty in Measurement” and Related Documents*, 2009, www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html.