

NUMERACION Y CALCULO

3

345

Bernardo
Gómez Alfonso

900

MATEMATICAS!
cultura y aprendizaje



EDITORIAL
SINTESIS

NUMERACION Y CALCULO

BERNARDO GÓMEZ ALFONSO

Colección:**MATEMATICAS: CULTURA Y APRENDIZAJE**

- 1. Area de conocimiento: didáctica de las matemáticas**
Enrique Vidal Costa
- 2. Números y operaciones**
Luis Rico Romero, Encarnación Castro Martínez, Enrique Castro Martínez
- 3. Numeración y cálculo**
Bernardo Gómez Alfonso
- 4. Fracciones. La relación parte-todo**
Salvador Llinares Ciscar, M.^a Victoria Sánchez García
- 5. Números decimales**
Julia Centeno Pérez
- 6. Números enteros**
José L. González Marí, M.^a Dolores Iriarte Bustós, Alfonso Ortiz Comas, Inmaculada Vargas-Machuca, Manuela Jimeno Pérez, Antonio Ortiz Villarejo, Esteban Sanz Jiménez
- 7. Divisibilidad**
Modesto Sierra Vázquez, Andrés Sánchez García, M.^a T. González Astudillo, Mario González Acosta
- 8. Problemas aritméticos escolares**
Luis Puig Espinosa, Fernando Cerdán Pérez
- 9. Estimación en cálculo y medida**
Isidoro Segovia Alex, Encarnación Castro Martínez, Enrique Castro Martínez, Luis Rico Romero
- 10. Aritmética y calculadora**
Frederic Udina i Abelló
- 11. Materiales para construir la geometría**
Carme Burgués Flamerich, Claudi Alsina Catalá, Josep M.^a Fortuny Aymemi
- 12. Invitación a la didáctica de la geometría**
Claudi Alsina Catalá, Josep M.^a Fortuny Aymemi, Carme Burgués Flamerich

13. Simetría dinámica

Rafael Pérez Gómez, Claudi Alsina Catalá, Ceferino Ruiz Garrido

14. Semejanza

Ricardo Luengo González

15. Poliedros

Gregoria Guillén Soler, Angel Salar Gálvez

16. Metodología activa y lúdica de la geometría

Angel Martínez Recio, Francisco Juan Rivaya, Francisco Javier Aguila Ruiz

17. El problema de la medida

Carmen Chamorro Plaza, Juan M. Belmonte Gómez

18. Circunferencia y círculo

Francisco Padilla Díaz, Arnulfo Santos Hernández, Fidela Velázquez Manuel, Manuel Fernández Reyes

19. Superficie. Volumen

M.^a Angeles del Olmo Romero, Francisca Moreno Carretero, Francisco Gil Cuadra

20. Proporcionalidad

M.^a Luisa Fiol Mora, Josep M.^a Fortuny Aymemi

21. Nudos y nexos: grafos en la escuela

Moisés Coriat Benarroch, Juana Sancho Gil, Antonio Marín del Moral, Pilar Gonzalvo Martínez

22. Por los caminos de la lógica

Inés Sanz Lerma, Modesto Arrieta Liarramendi, Elisa Pardo Ruiz

23. Iniciación al álgebra

Manuel Martín Socas Robayna, Matías Camacho Machín, M.^a Mercedes Palarea Medina, Josefa Hernández Domínguez

24. Ordenar y clasificar

Gaspar Mayor Forteza, Teresa Riera Madurell

25. Códigos, símbolos, representación y coordenadas

Francisco Vecino Rubio, Gerardo Montero García, Tomás Sierra Delgado

- 26. Funciones**
Jordi Deulofeu Piquet, Carmen Azcárate Giménez
- 27. Azar y probabilidad**
Juan Díaz Godino, Carmen Batanero Bernabéu, M.^a Jesús Cañizares Castellano
- 28. Encuestas y precios**
Andrés Nortes Checa
- 29. Heurística**
Fernando Cerdán Pérez, Luis Puig Espinosa
- 30. Ordenador y educación matemática: algunas modalidades de uso**
José A. Cajaraville Pegito
- 31. Prensa y matemáticas**
Antonio Fernández Cano, Luis Rico Romero
- 32. Juegos y pasatiempos para la enseñanza de la matemática elemental**
Josefa Fernández Sucasas, M.^a Inés Rodríguez Vela
- 33. Pensamiento algorítmico**
Candelaria Espinel Febles, Casiano Rodríguez León
- 34. Recursos en el aula de matemáticas**
Francisco Hernán Siguero, Elisa Carrillo Quintela

Consejo editor:

Luis Rico Romero, Josep M.^a Fortuny Aymemi, Luis Puig Espinosa

NUMERACION Y CALCULO

BERNARDO GÓMEZ ALFONSO

Profesor titular de Didáctica de las Matemáticas
de la Universidad de Valencia



EDITORIAL
SÍNTESIS

BIBLIOTECA

N.º

5438



62501 EGB 511 GOM (9915)

D 859740

L 859746

Primera reimpression: octubre 1989
Segunda reimpression: noviembre 1993
Tercera reimpression: noviembre 1998

Reservados todos los derechos. Está prohibido, bajo las sanciones penales y el resarcimiento civil previstos en las leyes, reproducir, registrar o transmitir esta publicación, íntegra o parcialmente por cualquier sistema de recuperación y por cualquier medio, sea mecánico, electrónico, magnético, electroóptico, por fotocopia o por cualquier otro, sin la autorización previa por escrito de Editorial Síntesis, S. A.

© Bernardo Gómez Alfonso

© EDITORIAL SÍNTESIS, S. A.
Vallehermoso, 34 - 28015 Madrid
Teléf.: 91 593 20 98
<http://www.sintesis.com>

Depósito Legal: M. 32.385-1998
ISBN: 84-7738-014-7

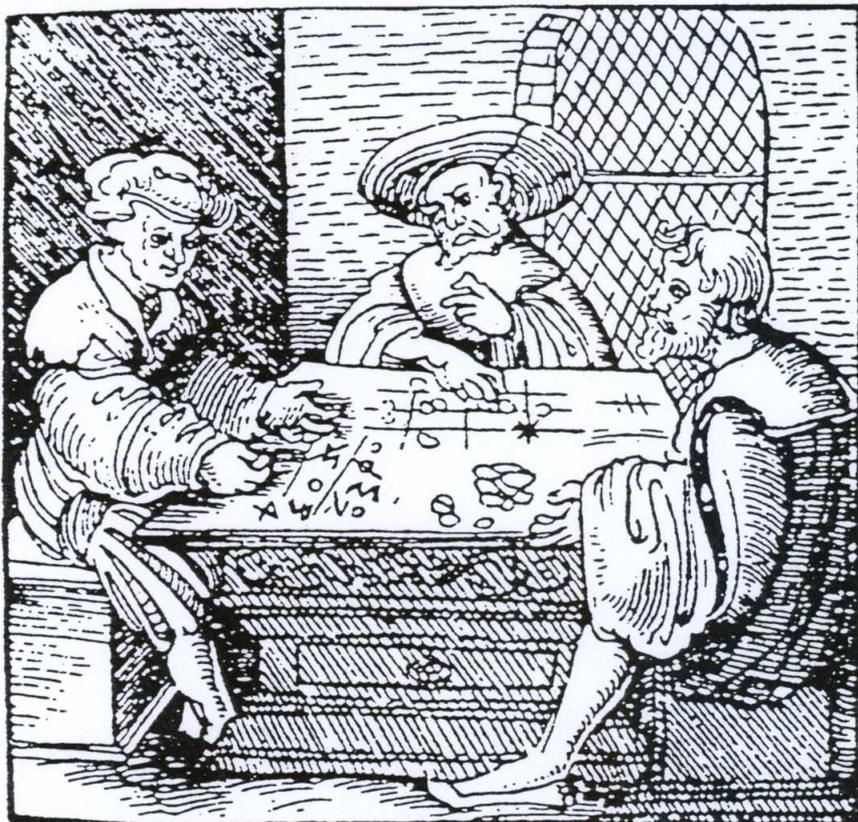
Impreso en España - Printed in Spain

Índice

Al lector	11
1. Introducción	17
1.1. ¿Qué es el número?	17
1.2. Caracterización	18
1.2.1. Usos	18
1.2.2. Invariantes	20
1.2.3. Nacimiento y evolución	21
• El sistema cardinal	21
La unicidad	21
La coordinabilidad	21
El registro	22
Las etiquetas	23
• El sistema ordinal	23
El orden	23
El sistema de numeración	24
Contar	25
Los adjetivos	26
• La historia real	27
• Contar con las partes del cuerpo	29
2. La numeración: evolución y comparación de sistemas	31
2.1. Ejercicios preliminares o de partida	31
2.2. Sistemas de numeración	31
2.2.1. Representación simple	32
2.2.2. Agrupamiento simple	32
2.2.3. Agrupamiento múltiple	33
• Sistema egipcio	34

2.2.4.	Sistemas multiplicativos	35
	• Sistema ático	35
	• Sistema chino-japonés	36
	• Nuestro sistema oral	37
	• Sistema babilónico	37
2.2.5.	Sistema multiplicativo ordenado	38
2.2.6.	Sistemas posicionales	39
	• Sistema maya	39
	• El cero	40
	• Las cifras	41
2.2.7.	Numeración y cálculo en los viejos sistemas	42
	• Egipto	42
	• Babilonia	43
	• Grecia	43
	• El sistema jónico	44
	• La numeración romana	46
2.2.8.	La herencia hindú	47
2.2.9.	Europa: un camino plagado de dificultades	50
	• La oscuridad	51
	• El alborear	53
	• Innovación contra conservadurismo	54
2.2.10.	El sistema decimal	55
	• Modo de leer un número de muchas cifras	56
	• Características	56
	• Desarrollo curricular	57
	• Uso de material estructurado	57
	• La integración del contexto	58
2.2.11.	Aritmética y sistemas de numeración	59
2.2.12.	Aritmética y enseñanza obligatoria	59
3.	Cálculo mental. Cálculo pensado	65
3.1.	Cálculo mental, cálculo pensado	65
3.2.	Cálculo mental: las tablas	68
3.2.1.	La tabla de sumar	70
	• Las tablillas de Lucas	75
3.2.2.	La tabla de multiplicar	76
3.3.	La multiplicación con los dedos	82
3.4.	Cálculo pensado	85
3.4.1.	Cálculo pensado aditivo	85
3.4.2.	Cálculo pensado multiplicativo	87
3.5.	Explorando en aritmética	91
3.6.	Las tablas de doble entrada	94

4. Los algoritmos	103
4.1. Los algoritmos	103
4.2. Los algoritmos de lápiz y papel	105
• Características	106
4.3. Los algoritmos en el currículo	106
4.3.1. Algoritmos para la suma	115
4.3.2. Algoritmos para la resta	119
4.3.3. Algoritmos para la multiplicación	125
• Las regletas o rodillos de Neper	135
• La multiplicación egipcia	136
• La multiplicación rusa o campesina	137
4.3.4. Algoritmos para la división	139
ANEXO 1. La raíz cuadrada	153
1.1. El algoritmo de la raíz cuadrada	153
1.1.1. Un tratamiento manipulativo. (Laboratorio, bloques) .	155
• Problema preliminar o de partida	155
• La situación de partida	155
• Trazando un plan	156
1.1.2. Un tratamiento aritmético. (Lápiz y papel)	159
• Problema preliminar o de partida	159
• La situación de partida	159
• Trazando un plan	159
1.1.3. Un tratamiento algebraico. (Lápiz y papel)	161
ANEXO 2. Los materiales manipulativos	163
2.1. Los ábacos	164
2.1.1. Abacos decimales	166
2.2. Los bloques multibase	167
2.2.1. Diferencias entre los bloques y los ábacos	169
2.2.2. Actividades	169
2.3. Los números en color	170
2.3.1. Estructura	171
2.3.2. Operaciones	172
Bibliografía	173



Grabado de la portada de una edición de uno de los *Rechenbücher* de Adam Riese, el famoso *Rechenmeister*, de 1529. En él se representa una competición entre un algorista y un abacista.



Tomado del grabado anterior. Reelaborado por el autor.

Al lector

Habrán ustedes notado que la gente nunca contesta a lo que se le dice. Contesta siempre a lo que uno piensa al hacer la pregunta, o a lo que se figura que está uno pensando. Supongan ustedes que una dama le dice a otra, en una casa de campo: «¿Hay alguien contigo?» La otra no contesta: «Sí, el mayordomo, los tres criados, la doncellas, etc.», aun cuando la camarera esté en el otro cuarto y el mayordomo detrás de la silla de la señora, sino que contesta: «No; no hay nadie conmigo», con lo cual quiere decir: «No hay nadie de la clase social a la que tú te refieres.» Pero si es el doctor el que hace la pregunta, en un caso de epidemia: «¿Quién más hay aquí?», entonces la señora recordará, sin duda, al mayordomo, a la camarera, etc. Y así se habla siempre. Nunca son literales las respuestas, sin que dejan por eso de ser verídicas.

(El candor del padre Brown. «El hombre invisible».

CHESTERTON.)

He escrito este libro con la intención de contestar en la medida de mis posibilidades y a la vista de la bibliografía actual, como yo pienso que el lector espera que se le conteste a algunas preguntas sobre la Numeración y el Cálculo, que yo creo que pueden haber pasado por su cabeza en relación con su actividad profesional o su formación como maestro.

¿Quiere ello decir que aquí va a encontrar alguna solución a sus problemas?

Puede que sí, puede que no. No me es posible saberlo, ni tampoco me es posible, honradamente, dar un recetario o un manual de instrucciones, como si el aula fuera un electrodoméstico. La libertad, el gusto y el estilo personal del profesor ni pueden ni deben ser soslayados. Debe ser él quien decida sobre las situaciones de aprendizaje que le permitan desarrollar las capacidades de sus alumnos, asumiendo la responsabilidad de su clase con todas sus consecuencias, consciente de que cualquier texto, por muy bien presentado, elaborado, escrito, programado, estructurado o divertido que sea, no puede realizar ninguna labor didáctica por sí mismo. Es imprescindible la criba y posterior actuación del profesor, y ésta no es programable de antemano de modo rígido: su ingenio y el de sus alumnos condicionarán el desarrollo de la

clase de modo imprevisible. Afortunadamente, porque ello significará que se está educando en matemáticas y que no se pierde de vista quién es el verdadero protagonista de la clase.

Dicho esto, ¿qué es este libro?

A veces es más fácil decir lo que no son las cosas. Este no es un libro de matemáticas en el sentido usual del término. No es para unos pocos. No es intimidatorio. No es para el fracaso. No es para la frustración. No es para la ansiedad.

Por el contrario, éste es un libro de recursos para la educación en matemáticas; un libro para la participación, para la integración y no para la selección. Para despertar sentimientos positivos, para desmitificar, para ser entendido.

Es criterio de este libro vencer el obstáculo emocional responsable del aburrimiento con que muchos maestros se plantean la aritmética; es convencerles de que debajo de la rutina de un algoritmo o de la perfección de la expresión numérica hay cientos y cientos de años de creación, de dificultades y bloqueos, de logros y avances, de retrocesos e incompresiones, de fatiga, sudor, esfuerzo e ilusión. Conocer algo de lo que ha ocurrido puede suponer un cambio en el tratamiento escolar de la aritmética, puede hacerla interesante como si de una novela de suspense se tratara y tan humanístico como pueda serlo cualquier otro campo de conocimiento. Esto es algo que muchos de nosotros no descubrimos en nuestra juventud, porque nadie fue capaz de explicárnoslo, aunque en cierto modo comenzábamos a sospecharlo.

Es un libro donde hallar puntos de partida para la reflexión, soportes para los deseos de cambio o fuentes para la inspiración pedagógica. Está pensado para los futuros maestros y maestros en ejercicio y aborda ese aspecto de la enseñanza de las matemáticas tan poco tratado en nuestro país (manuales escolares aparte): ideas para la clase, métodos y formas de presentación, secuencialización, fundamentación, materiales manipulativos, características y sugerencias para su utilización.

• **Objetivos**

El libro se articula en torno a los siguientes objetivos:

- Lograr un conocimiento más profundo de la numeración y de las razones que han conducido a su expresión y forma actual.
- Incidir sobre el material manipulativo, describirlo, analizarlo y mostrar sugerencias para su uso.
- Apoyar el uso de estrategias de cálculo mental y pensado. Describirlas, clasificarlas y presentar ejemplos que muestren cómo se utilizan.
- Presentar estrategias para la construcción, esquematización y abreviación progresiva de los algoritmos usuales de cálculo como recurso

didáctico. Sacar a la luz los pasos ocultos, mostrar los contextos en que se mueven, descubrir variantes y discutir sobre sus ventajas e inconvenientes. Se trata de dar sentido a las conexiones entre los pasos, establecer etapas con sus fases correspondientes y perfilar una adecuada secuencialización didáctica.

- Destacar el papel de la calculadora como herramienta para el trabajo rápido, para el cálculo seguro y para el razonamiento inteligente.

1. La numeración

Huelga extenderse sobre la importancia de una buena comprensión de la estructura multiplicativa del número y lo inútil que resulta hablar de algoritmos de cálculo si falla ésta.

Conocer la evolución histórica de los sistemas de numeración y saber las razones que provocaron los cambios y el abandono de unos sistemas por otros, contribuye a dar sentido a los conocimientos previos o ya adquiridos por el lector. Además, gracias a la motivación cultural que supone eliminar la sensación de «ya visto» el camino se anda sin dificultad y, por añadidura, los conocimientos quedan reforzados al ir emparejados con alguna narración, anécdota o curiosidad histórica.

2. Los materiales

Los conocimientos anteriores contribuyen, por añadidura, a facilitar el acceso a la estructura de los materiales manipulativos; ayudan a comprenderlos y sugieren las líneas para su utilización en el aula.

En el Anexo 2 se da una breve descripción del material más destacado y conocido en cada caso y además de sus características didácticas se muestran algunas vías de actuación acompañadas de ejemplos en situaciones concretas. Un desarrollo más detallado del material podrá encontrarse en la bibliografía que se acompaña.

3. El cálculo mental. El cálculo pensado

El cálculo mental, cálculo pensado, es el cálculo sin lápiz ni papel, es el cálculo callejero, cotidiano. El conocimiento de sus métodos y estrategias, sus condiciones más adecuadas de uso, etc., conforman un bagaje poco tratado en la Escuela. En este libro se aborda la descripción de los más corrientes, se organizan en función de sus características y, cómo no, se trabajan las formas de acercarse a las tablas, ya que son el soporte imprescindible para alcanzar un adecuado nivel de destreza.

Se hace hincapié en la observación de los números en relación con otros números sobre las tablas pitagóricas o de doble entrada de sumas, productos, dobles y cuadrados. Se busca habituar al niño a descubrir patrones, reglas y leyes, recurrencias, efectos sorprendentes, aspectos insólitos o chocantes, etc. Además esta forma de actuar tiene la ventaja que permite estimular el trabajo y el ingenio personal al tiempo que contribuye a un mejor conocimiento de los números y sus interrelaciones.

4. Los algoritmos de las operaciones elementales

Se hace un recorrido sobre las distintas formas de presentar los algoritmos y sobre sus justificaciones. Se suceden los planteamientos instrumentales, relacionales y constructivos. Se hace ver el trasfondo sacando a relucir sus pasos ocultos y los conocimientos previos que se necesitan para comprender lo que ocurre. Se trabajan los algoritmos históricos y la búsqueda de variantes. Se da entrada a la secuencialización didáctica, a la discusión sobre ventajas e inconvenientes, se rompe la tradicional rigidez, habitual en las presentaciones escolares de los algoritmos y se da lugar a formas personales, divertidas o ultrarrápidas de cálculo.

Una incursión a la búsqueda de conjeturas, explicaciones, analogías, extensiones y generalizaciones, hará ver que la Aritmética no sólo es cálculo, también es matemáticas. Por añadidura, al utilizar la calculadora como utilísima herramienta en esta incursión, se hace ver el inteligentísimo papel que tiene este instrumento en el lanzamiento y contrastación de conjeturas.

5. La raíz cuadrada

En el Anexo 1 se abordan los diversos tratamientos del algoritmo de la raíz cuadrada. No porque se considere importante por sí mismo, sino por la riqueza de posibilidades que encierra y, sobre todo, como muestra de lo que se ha hecho con los algoritmos y lo que se ha podido hacer y no se ha hecho.

• Agradecimientos

Cúmpleme revelar la colaboración que me ha prestado Luis Rico, director del Departamento de Didáctica de la matemática de la Universidad de Granada y miembro del consejo editor de la serie de la que este libro forma parte, cuya valiosa ayuda se ha plasmado en aportaciones concretas y acertadísimas correcciones que han contribuido a redondearlo sustancialmente.

Mi agradecimiento también al resto de mis compañeros de departamento

por su paciencia, y en particular a Luis Puig, por haberme embarcado en esta aventura; a Francisco Soto, por sus efluvios narrativos, y a Fernando Cerdán, por las ideas que me ha aportado.

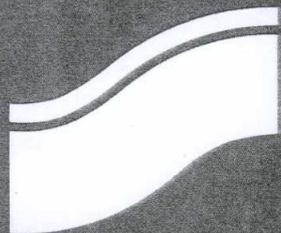
Quiero concluir significando que si algo tiene de bueno este libro es debido a una multitud de personas, los que han escrito las fuentes en donde he bebido y los que me han ayudado a organizarlas. Pero, sin embargo, todo lo mucho que tiene de malo sólo es achacable, naturalmente, a una persona; al autor.

Bernardo Gómez Alfonso es profesor titular del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Valencia. Durante los últimos años ha dedicado su trabajo al tratamiento de la Aritmética desde el punto de vista de la renovación pedagógica. Proyectos de investigación y diversos artículos y comunicaciones a congresos avalan su trayectoria profesional.

La mayoría de la gente cree que en Aritmética ya está todo dicho y, mientras ellos recurren a la calculadora para resolver la operación más sencilla, contemplan impertérritos cómo sus hijos dedican largas horas a efectuar divisiones de forma repetitiva, cometiendo siempre el mismo tipo de errores.

Numeración y cálculo es un libro de recursos para la educación en Matemáticas pensado para los futuros maestros y para los que ya están en ejercicio. Aporta ideas para el aula, métodos y formas de presentación, secuencialización y fundamentación de los contenidos aritméticos.

Esta obra, eminentemente práctica y novedosa, aborda los sistemas de numeración, el cálculo mental, los algoritmos, la utilización racional de la calculadora, los ejercicios y materiales más adecuados en cada caso, etc. Su autor pretende integrar plenamente a la Aritmética en el proceso de renovación educativa.



EDITORIAL
SÍNTESIS