

# **El número y la forma. Libros e impresos para la enseñanza del cálculo y la geometría.**

**Modesto Sierra Vázquez. Universidad de Salamanca**

**Luis Rico Romero. Universidad de Granada**

**Bernardo GÓmez Alfonso. Universidad de Valencia**

Las matemáticas, y en particular sus ramas más populares, la aritmética y la geometría, han estado siempre presentes en los planes para la formación de los ciudadanos. En lo que sigue expondremos la evolución de los libros escolares de estas dos materias en nuestro país, desde la aparición de la imprenta hasta la guerra civil española. Siguiendo el espíritu de este libro vamos a detallar la historia "material" de los libros de texto. Las referencias a métodos de enseñanza y planes de estudio son secundarias en este trabajo, aunque configuran un marco explicativo en el que los datos, informaciones e interpretaciones que se presentan adquieren plenitud de sentido.

Nuestra reflexión se va a desarrollar teniendo en cuenta tres componentes para el análisis de los libros. En primer lugar, las formas de presentación del conocimiento matemático: selección de contenidos, estilo, formato, tipos de letras, símbolos, uso de esquemas, tablas y gráficos, entre otros aspectos. En segundo lugar, las funciones cognitivas que los autores se proponen desarrollar o estimular en los escolares. En tercer lugar, las aplicaciones a las que se orientan los conceptos estudiados.

## **Las aritméticas escolares**

El término aritmética no siempre ha tenido el mismo significado. La tradición griega impuso la distinción entre el arte de calcular, llamado logística, y el estudio teórico, llamado aritmética. Como heredero de la tradición grecolatina, Isidoro de Sevilla, en sus Etimologías (1), presenta una organización de los saberes de su época que va a mantenerse vigente durante toda la Edad Media y que articula un plan de formación para clérigos e intelectuales en este periodo. En la división clásica de las disciplinas del trivium y quadrivium, corresponde a las matemáticas, y por tanto a la aritmética y la geometría, una de estas parcelas. A comienzos del Renacimiento, coincidiendo con la aparición de la imprenta, se produce una auténtica revolución intelectual y una gran expansión y difusión de los conocimientos, integrándose el pensamiento matemático de esta época en los usos y costumbres económicos y sociales con una potencia desconocida hasta el momento. Surge así la denominada aritmética práctica, que sustituye a la noción clásica de logística; en consecuencia, para referirse a la otra rama, se comenzó a hablar de aritmética teórica o especulativa. A partir del siglo XIX esta diferenciación entre las aritméticas teórica y práctica desaparecerá, unificándose ambas bajo el nombre común de aritmética, reservándose las coletillas de teórica y práctica para lo que es el planteamiento teórico de conceptos y propiedades, junto con la fundamentación, cuando es posible, de algunos procedimientos en el primer caso, y lo que es la aplicación o ejecución de los procedimientos y las reglas prácticas, en el segundo.

## **Las aritméticas anteriores al siglo XIX**

Desde los árabes los métodos de cálculo derivados del sistema de numeración decimal están esencialmente configurados como los conocemos hoy en día (2). En el largo período que llega hasta el final del siglo XVIII, los libros de aritmética apenas muestran diferencias remarcables en cuanto a la forma de presentación del conocimiento, más allá de la mayor o menor exhaustividad que requería el carácter de manual o de tratado, de libro, comercial o erudito. La tónica dominante consistía en presentar de modo reglado varios modos de calcular para una misma operación, ilustrándolos con ejemplos; llama la atención la ausencia de argumentaciones que se parezcan a lo que hoy entendemos por fundamentación; coexisten unos junto a los otros los algoritmos generales con los particulares y los más populares con los menos conocidos, con el fin de ofrecer al lector la posibilidad de "que cada uno haga lo que mejor le pareciere" (3). La razón por la que un autor opta por una u otra selección de métodos de cálculo no es otra que la tradición y su libre albedrío, emulando en su texto, las más de las veces, a sus predecesores.

La aritmética se divulgaba por dos caminos, uno de carácter elitista, reflejado en libros escritos en latín y otro de carácter comercial, escrito en lengua vulgar (4). La primera aritmética impresa es la denominada de Treviso, en el año 1478; se trata de un manual práctico que incluye una buena cantidad de orientaciones comerciales derivadas de la aritmética (5). El primer autor español que edita libros de aritmética es el aragonés Pedro Sánchez Ciruelo (6), que publica una Aritmética práctica y una edición completa de la Aritmética especulativa de Bravardino en 1495. Otro autor afamado de la época es Juan de Ortega (7), que publica en 1512, también en latín, una aritmética de orientación práctica.

A partir del siglo XVI se produce un crecimiento considerable de libros de aritmética escritos en lengua romance. Aunque muchas de estas aritméticas no son propiamente libros escolares, nos referiremos a ellas por su influencia explícita en los primeros textos de enseñanza y porque parece razonable suponer que en ellas aprendían los Maestros de las escuelas de niños durante el Antiguo Régimen. Meavilla (1990) da constancia de más de cuarenta aritméticas escritas en castellano entre 1498 y 1624 (8). Algunas de ellas como la de Juan Pérez de Moya, titulada Arithmética práctica o especulativa, o la de Miguel Gerónimo de Santa Cruz, titulada Dorado contador. Arithmética especulativa y práctica, continuaron editándose hasta muy entrado el siglo XVIII. Comprendían esencialmente las cuatro operaciones elementales con números naturales, las fracciones (quebrados) y sus operaciones, la regla de tres, la regla de aligación y el cálculo con los números "denominados" que son los números complejos escritos con los sistemas de unidades utilizados antes de la implantación del sistema métrico decimal. Rey Pastor, refiriéndose a Pérez de Moya, califica de "excelente la parte de Aritmética práctica, muy clara y agradablemente escrita, lo cual revela el conocimiento de varios libros extranjeros, cuya huella no aparece en otros escritores" (9).

Avanzado el siglo XVII se comienzan a publicar aritméticas dirigidas expresamente a la enseñanza; destaca, a nuestro juicio, la Arithmética Universal (10) del jesuita P. José de Zaragoza, publicada en Valencia, en 1669. El

propósito educativo está expresado en el prólogo en el que el autor afirma que escribe " en romance" para beneficiar a la Patria; el hecho de que el libro se escriba en castellano, y no en latín, prueba la intención didáctica que el P. Zaragoza quería conceder a este libro, contrastando con el resto de su producción científica, escrita en latín. Se trata de un libro muy cuidado en la edición, con especial preocupación por la simbolización correcta, como lo prueba las afirmaciones del mismo Zaragoza: "Hice por mi mano los punzones, matrices y llaves. Fundí todos los caracteres enteros y quebrados que juzgué necesarios, sin perdonar a trabajo ni gastos, por conseguir toda perfección" ( 11)

El libro contiene toda la aritmética más una parte dedicada al álgebra; al final aparecen 191 problemas resueltos que el autor llama "enigmas" . Como cualquier libro actual de matemáticas tiene un Índice explicativo de los símbolos usados.

Durante el siglo XVIII los libros dedicados a la aritmética suelen incorporar además la enseñanza de la escritura, la gramática y la ortografía, como por ejemplo el de Torío de la Riva y Herrero Arte de escribir con reglas y con muestras, según la doctrina de los mejores autores, acompañado de unos principios de Aritmética, Gramática y Ortografía castellana, publicado en Madrid en 1798. Asimismo constatamos la publicación de libros autónomos de aritmética para las Escuelas Pías, que como es bien conocido tuvieron una importancia decisiva en el proceso de escolarización durante esta época. Así, por ejemplo, la Arithmetica especulativa y practica para alivio de los Maestros y aprovechamiento de los discípulos de las Escuelas Pías de Cataluña, escrita por un "sacerdote de la misma religión", según aparece en su portada. Esta obra consta de tres partes, dedicadas respectivamente a las cuatro operaciones básicas, quebrados y números denominados, siendo esta última la más extensa. No hay ninguna alusión a los números decimales, ya que en la práctica, con las medidas tradicionales, estos números no eran necesarios. De la importancia de las aritméticas publicadas por esta orden religiosa da fe el hecho de que la titulada Principios Generales de Aritmética para uso de las Escuelas Pías de Castilla fue señalada como libro obligatorio de texto en el Plan y Reglamento de Escuelas de primeras Letras de 16 de Febrero de 1825, siendo Calomarde primer ministro ( 12).

### **Los comienzos del XIX. Innovaciones en los libros de aritmética**

En los comienzos del siglo XIX se produce, a nuestro juicio, un cambio importante en la configuración de las aritméticas escolares, al que no son ajenas las influencias recibidas de la Revolución francesa. En efecto, la Revolución situó a las matemáticas en una elevada posición, lo que se tradujo en una amplia difusión social, sin precedentes históricos. El establecimiento de un curriculum obligatorio común para los estudiantes de un mismo nivel educativo hizo preciso la producción de libros escolares. Estos libros se caracterizaron por un espíritu elementalizador, lo que se entendió como la exposición de lo más sustancial, es decir, de los elementos básicos del conocimiento (compendio), puestos en el mejor orden (metódico), de la manera más simple (breve) y del modo más claro (fácil) para "hacer enseñable " ese conocimiento. Aunque esta connotación del término elemental llegará a

pervertirse más adelante, pasando a considerarse como texto abreviado o texto que condensa uno voluminoso en otro más corto a base de recortarlo y de prescindir de rigor y coherencia, lo cierto es que supuso una selección y organización del saber que se plasmó en una propuesta de enseñanza para los niños en la que se incluía la aritmética y se establecía que había que enseñarles a contar y las primeras reglas. A raíz del Informe Arbogast ante la Convención Nacional francesa (13), ésta convocó un concurso público para la selección de obras elementales para la instrucción pública. De los cuatro textos seleccionados, destaca por su trascendencia histórica el de Condorcet, obra clave para entender lo que han sido las aritméticas escolares, ya que marcó las pautas que siguieron los autores franceses y españoles más renombrados. Condorcet aportó tres novedades importantes : la primera es el deseo de poner de manifiesto la lógica de las reglas de cálculo y el análisis de los motivos que la sustentan; la segunda es la inclusión en el texto de sugerencias para los profesores; la tercera es un programa dividido en lecciones, las cuales, según él mismo, encierran cada una lo que es posible presentar en una sola sesión y no conviene separar en trozos. Estas lecciones eran:

- 1.- La numeración escrita y en cifras y los signos  $+$  e  $=$ .
- 2.- El sistema de numeración oral.
- 3.- El sistema de numeración escrito (el valor de la posición y el papel del cero).
- 4.- Adición.
- 5.- Sustracción.
- 6.- Pruebas de la suma y de la resta.
- 7.- Multiplicación, significado y productos de números de una cifra.
- 8.- El algoritmo para multiplicar números de varias cifras.
- 9.- División, significado y uso. División por una cifra
- 10.- El algoritmo de la división por números de varias cifras.
- 11.- División inexacta. Representación del resto en forma de fracción. Forma de leer una fracción.
- 12.- Pruebas de la multiplicación y división.

Este programa se convertirá con el paso del tiempo en un clásico, y se acabará por identificar la aritmética con el contar, las cuatro reglas y algo de quebrados ( fracciones).

En el caso español, la caída del Antiguo Régimen y el triunfo de la ideas liberales permitió abordar la reforma de la escuela tal y como se expresa en la Constitución de 1.812, uno de cuyos artículos decía:

"En todos los pueblos de la Monarquía se establecerán escuelas de primeras letras, en las que se enseñará a los niños a leer, escribir y contar, y el catecismo de la religión católica, que comprenderá también una breve exposición de las obligaciones civiles " (Art. 366)

A partir de este momento la aritmética aparecerá de forma explícita en todos los planes y programas escolares hasta nuestros días.

Si en Francia es importante la obra de Condorcet en cuanto a la aritmética escolar, en España destaca la del ilustrado José Mariano Vallejo, catedrático de matemáticas del Seminario de Nobles de Madrid, cuya Aritmética de niños

para uso de las Escuelas del Reino, publicada en 1.804, fijará el currículo para nuestras escuelas, que se mantendrá inalterable (con la excepción de la introducción del sistema métrico decimal) hasta la publicación de los primeros programas escolares por materias en 1.953. El autor expresa en el prólogo el fin para el que está escrito este libro, que es proporcionar a los niños de una manera correcta los elementos de aritmética para que "lo que aprendan lo aprendan bien" .

Tenemos constancia de siete ediciones de esa obra, que consta (en la edición de 1.845) de trece capítulos y cuatro apéndices (14). Además de las cuatro operaciones elementales y de las fracciones, introduce las operaciones con números denominados y las reglas de interés, aligación y compañía. Pero quizás lo más importante es la introducción de los números decimales. Como hemos señalado más arriba los números decimales estaban ausentes de las aritméticas escolares, aunque aparecían en los de aritmética superior desde mediados del siglo XVIII. El propósito de la inclusión de esta cuestión está señalada por el autor: "He conseguido el principal propósito que me propuse al componerla, cual era el que se extendiese a toda clase de personas el conocimiento del cálculo de las decimales, que hasta entonces sólo se reservaba para las cátedras de Matemáticas " ( Prólogo)

El texto, con 155 páginas, se estructura en 257 preguntas y su correspondientes respuestas; en letra bastarda se destaca lo que tienen que aprender los niños. A lo largo de texto no hay demostraciones, sino reglas con su justificación correspondiente, practicándose esas reglas con ejemplos concretos. No se proponen problemas para resolver por los niños, aunque presenta dos Apéndices con problemas resueltos: "Problemas relativos a las ocupaciones del Bello Sexo" y "Problemas relativos a los haberes de soldados, cabos y sargentos", que no aparecían en las primeras ediciones.

La influencia de Vallejo en esta época fue notoria. El autor tenía un pensamiento matemático original y publicó diversos libros de matemáticas, con varias reimpressiones, que merecieron el reconocimiento de los especialistas españoles y europeos de la época. Participó activamente en la elaboración del Plan Metódico que desarrollaba el Reglamento General de Instrucción Pública aprobado por Decreto de las Cortes de 29 de Junio de 1821. Las orientaciones para la enseñanza de la aritmética que preconizan la comprensión del concepto de número por el niño, el aprendizaje comprensivo del sistema de numeración, el uso de material didáctico, la introducción de los decimales, son prescripciones muy avanzadas para su época, que no desdichan de lo que se practica hoy en cualquier escuela activa, ya que tratan de tener en cuenta, en términos generales, la formación intelectual y el desarrollo de las capacidades de los escolares.

### **La introducción del sistema métrico decimal y su influencia en las aritméticas escolares**

Es bien conocido que la creciente expansión del comercio durante el siglo XVIII se veía entorpecida por la diversidad de unidades de medida. Se sentía la necesidad de unificar el sistema legal de medidas, enfrentándose dos tendencias. Inglaterra abolió todos los sistemas de medidas , excepto el de

Londres, que fue obligatorio para toda la nación a partir de 1824. Francia decidió inventar un nuevo sistema de medidas cuyas unidades estuvieran relacionadas de manera fácil y de modo que los múltiplos y divisores fuesen potencias de diez; además se creyó indispensable tomar como fundamento del sistema una dimensión simple, invariable y susceptible de nueva determinación caso de que pudiera extraviarse o desaparecer. En un principio se consideró la adopción como unidad de longitud la del péndulo simple que bate segundos en la latitud media de  $45^{\circ}$  al nivel del mar, pero finalmente esta idea fue desechada. En 1791 la Comisión francesa nombrada por la Academia de Ciencias presentó a la Asamblea Nacional una memoria en la que se proponía adoptar como unidad fundamental la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre y dar a esta longitud el nombre de metro. Se encargó a Méchain y Delambre medir el arco de meridiano comprendido entre Dunquerque y Barcelona. Cumplida esta misión se nombró otra Comisión que finalmente en 1799 estableció el patrón definitivo de longitud, los nombres de todas las unidades de medida, la relación entre ellas y los nombres y notación de sus múltiplos y divisores. La adopción oficial del sistema métrico decimal se produce en Francia mediante un Decreto del rey Luis Felipe de 1837, en el que estableció que a partir de Enero de 1840 entrase en vigor el nuevo sistema de medidas ( 15).

En España cada provincia tenía sus propias unidades de medida e incluso localidades muy próximas las tenían diferentes, por lo que las operaciones comerciales resultaban muy complejas y difíciles, con numerosos engaños y abusos. La preocupación de los gobernantes por instaurar un sistema unificado de medidas fue muy grande, siendo enviados Gabriel Ciscar y Agustín Pedrayes como representantes españoles de la Comisión que se reunió en París en 1799. Ciscar redactó la Memoria elemental sobre los nuevos pesos y medidas decimales fundados en la naturaleza, editada en 1800 por la Imprenta Real (16). Pero Carlos IV no se atrevió a introducir el nuevo sistema, aunque dictó la Pragmática de 20 de Febrero de 1801 de unificación de pesas y medidas por la que se deberían utilizar las más usadas en Castilla (17). Después de muchos intentos fallidos, finalmente los gobernantes españoles decidieron adoptar el sistema métrico decimal por Ley de 19 de julio de 1849, que establece el 1 de Enero de 1860 como fecha oficial de su entrada en vigor. Respecto a su enseñanza el Artículo 11 de la Ley establecía que desde el 1 de Enero de 1852 sería obligatoria su estudio en todas las escuelas públicas o particulares, quedando facultado el Gobierno para cerrar los establecimientos que no cumplieran con esta obligación. ( 18)

Al asumir el sistema métrico decimal los libros de texto tuvieron que ser reelaborados, lo que condujo a una reestructuración de los programas que obligó a introducir los números decimales ganándose en simplificación y brevedad como consecuencia de la pérdida de importancia de los tediosos capítulos dedicados a los diferentes sistemas de pesas y medidas y el cálculo con los números denominados correspondientes. A partir de este momento se produce una nueva expansión en la producción de libros de texto de aritmética con diversos subtítulos como "aplicada al nuevo sistema métrico", "puramente métrica", "con el nuevo sistema de pesas y medidas", etc. (19). Por ejemplo en la Bibliografía pedagógica de Castilla y León (1808- 1836) del Prof. Hernández

Díaz hemos contado una veintena entre 1852 y 1900 en esta región (20). La forma de presentación va desde libros a breves cartillas. Algún autor, como por ejemplo Benot, completa su Aritmética con un nuevo libro dedicado íntegramente al sistema métrico decimal. En general se sigue manteniendo la estructura y el contenido preconizada por Vallejo, añadiendo el sistema métrico decimal con las unidades, múltiplos y submúltiplos de longitud, capacidad, peso y volumen y el sistema monetario, que se presentan mediante tablas, dedicándose una parte extensa al cambio y transformación de unas unidades a otras dentro del sistema métrico y del antiguo sistema al nuevo. Los autores recalcan este modo de presentación mediante tablas. Como muestra de ello citamos la Aritmética de Ramos Dominguez, publicada en Madrid en 1851 y que lleva por título Compendio de Aritmética aplicada al nuevo sistema métrico de pesas monedas y medidas, y como subtítulo Acompañado de diez y siete tablas de reducción de las pesas y medidas antiguas de España a las modernas y de éstas a aquellas. La realidad es que durante mucho tiempo, incluso en algunas zonas rurales hasta hace pocos años, subsistieron en España los dos sistemas de medidas, lo que se reflejó en los libros de texto de aritmética por la coexistencia de lecciones relativas al sistema antiguo de medidas y al moderno. En efecto, la mayoría de las aritméticas continuaron dedicando un buen número de páginas a la descripción de los sistemas tradicionales y al cálculo con números denominados.

Hay que señalar brevemente, por no ser objeto de este trabajo, que durante esta época comienzan a publicarse igualmente libros de aritmética dedicados a la formación de los Maestros en los que se presenta el nuevo sistema de pesas y medidas.

Durante el siglo XIX los cambios mencionados relativos a nuevos conceptos y procedimientos en aritmética se acompañan de una ampliación del campo de aplicaciones sobre las que utilizar los nuevos conocimientos. Pero también se producen otros cambios que son clave para entender la evolución de las matemáticas escolares y, en particular, la de las aritméticas. Estos se refieren a la consideración explícita por parte de los especialistas y autores de libros del aprendizaje de los escolares como tareas a realizar eficazmente. En este sentido hay que destacar:

i) La incorporación de nuevas ideas pedagógicas, basadas fundamentalmente en las de Pestalozzi y Froebel, que hacen que la enseñanza deje de mirar únicamente al contenido y tenga en cuenta la psicología del niño.

ii) El mayor recurso al razonamiento para explicar la lógica que sustenta las ideas matemáticas y la mayor preocupación por el modo de presentación de las ideas.

iii) La asunción de los medios del álgebra con el consiguiente aumento de la brevedad y la pérdida de la retórica.

Además de estos fenómenos hay otros que imprimen un giro a la enseñanza de las matemáticas escolares como el espectacular avance de la ciencia, el abandono de la finalidad "práctica" de las matemáticas, la polémica de los fundamentos y el convencimiento de que las matemáticas ocupan un lugar esencial en el conjunto de las ciencias. La conjunción de todos ellos provocará un cambio gradual en la aritméticas, que se manifiesta en una mejor constitución de su contenido como un sistema de proposiciones organizadas

siguiendo un discurso lógico, que unificará la vieja diferenciación entre aritmética teórica y práctica. Los libros de esta época continúan con el modelo de "diálogo", con una sucesión de preguntas y respuestas con dos tipos de letras, una en bastardilla y la otra normal (21).

### **Las aritméticas escolares en el primer tercio del siglo XX**

Un factor importante para entender la evolución de las aritméticas en el cambio de siglo es la asunción de la vieja teoría de la Psicología de las "facultades", que considera que la mente está constituida por diversas facultades como imaginación, memoria, percepción y razonamiento y que estas facultades son en cierto modo análogas a los músculos, y que como tales se fortalecen y forman con el entrenamiento. En este marco de pensamiento se explica la creencia de que la "disciplina mental" es un objetivo educativo, dando lugar a una propuesta de enseñanza consistente en un programa de duro trabajo intelectual en torno a aquellas materias que se consideraban más apropiadas para entrenar la mente. A estos efectos se consideró que los cálculos aritméticos eran buenos ejercicios para fortalecer y madurar la mente. Por esta razón las aritméticas de los comienzos de siglo tomarán esta idea del entrenamiento mental y presentarán largas listas de ejercicios para ser realizados por el estudiante, muchos de los cuales están planteados para ser resueltos mentalmente ("de cabeza"), sin que se permita el recurso al lápiz y papel. La aritmética oral pasará a ser algo común en los libros escolares, suponiendo un cambio radical con las aritméticas precedentes en las que el cálculo era solamente escrito.

Otro hecho determinante en la estructura de los libros escolares durante esta época, y en particular en la estructura de las aritméticas, es el nacimiento de la escuela graduada, como modelo para organizar y planificar la actividad escolar. Durante el primer tercio del siglo XX se irá implantando progresivamente un modelo de instrucción dividido en grados conforme a la edad y condiciones intelectuales de los discípulos. En el caso español, el Real Decreto de 26 de Octubre de 1.901, que reorganiza la primera enseñanza, la dividió en tres grados: párvulos, elemental y superior, estableciendo un plan de estudios con doce asignaturas de modo que cada grado de enseñanza "abrazará todas las materias indicadas, distinguiéndose únicamente por la amplitud del programa y por el carácter pedagógico y la duración de los ejercicios". El Real Decreto de 8 de Junio de 1.910 estableció la graduación de la enseñanza en todas las escuelas.

Esto influirá en la configuración de los libros de aritmética, que atenderán a esta graduación de la escuela primaria. Así, por ejemplo, en la "Advertencia" de la Aritmética de los Programas de Primera Enseñanza de Carlos Yeves, en 1906, se escribirá lo siguiente:

"Adquirir primero un idea muy sencilla y general de la ciencia que se va a aprender, idea que permita considerarla en su conjunto; descender luego al estudio de los detalles más importantes, y ampliar, en fin, con los que no sean de tanto interés y con los conocimientos complementarios la idea fundamental que se adquirió al principio, es, en efecto, el procedimiento más lógico que

puede adoptarse, y el más conforme a la naturaleza de los individuos y las cosas"(22).

Bajo este modelo de enseñanza cíclica, que repite los temas aumentando el grado de dificultad en cursos sucesivos, la información que lleva el libro se organiza con diferentes tamaños y tipos de letras. Como muestra de ello, sirva el siguiente texto de la Introducción de la Aritmética de Castro y Legua, publicada en 1911:

"Empeñándonos en llevar al libro la graduación cíclica de la asignatura, creemos puede distribuirse este Cursillo de Aritmética en cuatro partes o grados que son: Grado 1<sup>o</sup>, letra gruesa de las 15 lecciones que la llevan. Grado 2<sup>o</sup>, las 18 lecciones primeras con extensión o profundidad moderada. Grado 3<sup>o</sup>, todo el cursillo menos las lecciones 20, 21, 22, 30 y alguna otra a juicio del profesor y Grado 4<sup>o</sup> el cursillo completo como se presenta en el libro, y como el profesor comprenda deba ensancharlo con prácticas y aplicaciones " (23).

Más adelante se hará esto mismo, pero usando además un libro diferente para cada grado (24).

Paradigma de los libros de aritmética escolares será la obra del catalán Dalmáu Carles publicada por primera vez en la última década del XIX y reeditada decenas de veces, incluso después de la guerra civil. Se trata de una aritmética que ha estado presente en la escuela española durante casi medio siglo, por lo que merece la pena detenernos en ella. Consta esta aritmética de tres libros destinados, respectivamente, al grado elemental, medio y superior. Si la obra destinada al grado elemental se titula Rudimentos de Aritmética, las dedicadas al grado medio y superior llevan por título Lecciones de Aritmética aplicadas a las diferentes cuestiones mercantiles, como si el autor quisiera resaltar el sentido práctico que quería imprimir a sus textos. El programa desarrollado en estas obras no dista mucho del establecido por Vallejo a comienzos de siglo, con el añadido del sistema métrico decimal. Para el grado elemental comprende una primera parte con las tablas de sumar, restar, multiplicar y dividir y el sistema usual de pesas y medidas; una parte teórica con la numeración, las cuatro operaciones elementales con problemas para resolver mentalmente, divisibilidad, quebrados o números decimales; y una parte práctica con problemas. El grado medio añade a lo anterior el cálculo con los números denominados, el sistema métrico decimal con la escritura de los números métricos, razones, regla de tres, interés, descuento, compañía y aligación, e incluye una colección de más de 2.000 problemas. El grado superior se divide en dos tomos; la primera parte comprende una introducción muy extensa acerca de pesas y medidas usadas en las diferentes provincias españolas antes de ser obligatorio el sistema métrico decimal, seguida de las cuatro operaciones elementales, números denominados, sistema métrico decimal, quebrados y decimales, potencias y raíces, números primos, máximo común divisor y mínimo común múltiplo, con una colección de más de 2.500 problemas y un breve apéndice sobre geometría; la segunda parte trata de

cuestiones mercantiles con una extensa parte práctica, seguida de unas nociones de álgebra acompañada también de su parte práctica. Dos puntos llaman la atención de este programa; en primer lugar, la extensión dada al sistema de pesas y medidas antiguas, lo que evidencia el sentido práctico del autor, ya que aunque el orden legal era el sistema métrico decimal, en las ciudades, y sobre todo en los medios rurales continuaban usándose las medidas antiguas; en segundo lugar la extensa colección de problemas colocados al final de la obra, con un fin "educativo" como señala el propio autor.

En cuanto a la forma de presentación la obra, el texto se estructura en preguntas y respuestas, con distintos tipos de letras, cuya función señala el propio autor en el prólogo:

"A fin de facilitar el estudio de la materia, se han empleado tipos de mayor tamaño para la impresión de toda lo que podemos llamar esencia de las lecciones; la letra bastardilla para determinadas definiciones y palabras sobre las que conviene llamar particularmente la atención del alumno, y tipos de menor tamaño, para la solución razonada de los problemas que se intercalan en el cuerpo de la obra aplicando los principios teóricos y para cuanto podemos considerar como secundario, aunque, a menudo, indispensable, para ver claramente lo esencial"(25).

Volviendo de nuevo a la presencia de los problemas en las aritméticas escolares, la obra de Dalmáu Carles presenta una importante innovación con la introducción de problemas al final de la misma. En algunas aritméticas anteriores aparecen problemas, pero siempre para ejemplificar el contenido del texto. En la del P. Zaragoza, como ya se ha señalado, aparecen al final una colección de problemas resueltos (enigmas ). Pero con Dalmáu Carles es la primera vez que un autor presenta al final de la obra una colección de problemas para ser resueltos por los alumnos, que son calificados por el propio autor como "educativos", frente al sentido de desafío que tenían los ejemplos propuestos en las aritméticas escolares hasta entonces, tal y como marcaba la tradición. Desde este primer caso aparecerán problemas en las aritméticas. Así, por ejemplo, en las Lecciones de Aritmética de Ezequiel Solana, obra editada en 1908, encontramos los problemas al final de un conjunto de lecciones que desarrollan unas mismas ideas (26); en la Aritmética de L. Gutiérrez, de 1916, aparecen relaciones más extensas de ejercicios después de cada uno de los bloques de contenidos en los que se organiza la obra (27). Más adelante, la Editorial Bruño, redistribuirá los problemas llevándolos al final de cada lección, estableciendo así un formato que ya no se perderá hasta nuestros días.

Durante el primer tercio el siglo XX la teoría de la "disciplina mental" caerá en desgracia. Comenzará su declive cuando Thorndike (1922) presentó los resultados de su investigación con test de inteligencia comparando estudiantes que habían estudiado "disciplinas" con estudiantes de educación física, sacando como conclusión que las puntuaciones obtenidas eran similares. Esto supuso un cambio de énfasis en los ejercicios orales, que se verán reducidos a los de cálculo mental, en un enfoque en el que se buscaba satisfacer las necesidades de la vida diaria. Así, la práctica de la aritmética se organizará en ejercicios de

cálculo mental, ejercicios de aplicación de la teoría y problemas para resolver por escrito. El papel de los problemas en las aritméticas adquirirá una importancia creciente, hasta llegar a ser utilizados, en algunas, como situación de partida cuyo análisis conduce a la presentación de un determinado tema (28).

Además, a lo largo del primer tercio del siglo XX se consolidará la asunción de la sintaxis del álgebra, el formato horizontal, simbólico y contraído por medio del cual se unifica la descripción, el ejemplo y la fundamentación de los métodos al considerar las propiedades fundamentales de las operaciones. Los avances tecnológicos suponen otros cambios en la presentación del contenido apareciendo las ilustraciones para la modelización gráfica con pictogramas y diagramas, combinándose el formato horizontal algebraico y el vertical de columnas de los algoritmos estándar. Muchas de estas innovaciones las podemos apreciar en aritméticas tan populares como las de la Editorial Edelvives, conocida también como F.T.D., que alcanzaron gran difusión, pero también en otras obras. Este es el caso de las Nociones de Aritmética y Geometría, obra escrita por Rey Pastor y Puig Adam en 1931, dentro de la Colección Elemental Intuitiva preparada para alumnos de enseñanza de secundaria de primer ciclo, pero con repercusiones en la escuela primaria. Se trata de una obra muy bien construida y ambiciosa. En ella los autores se proponen "desarrollar en la mente del niño los conceptos básicos del número y medida, en razonar las reglas fundamentales del cálculo y en exponer las construcciones geométricas más sencillas, hasta llegar a los problemas de medidas de áreas". Cada capítulo utiliza sistemáticamente ilustraciones en la presentación de los conceptos numéricos básicos, incluye ejercicios y suele ir acompañado de unas notas en las que se proporciona información histórica.

Una innovación que se produce durante el periodo republicano es la publicación de textos interdisciplinares, en los que se incluyen los contenidos de aritmética junto con otras disciplinas. Este es el caso del texto Concentraciones de J. Xandri, publicado en 1932 para el grado medio de la Escuela Primaria (29). La obra, de 190 páginas, contiene un apartado sobre Números, Medidas y Formas, y un segundo apartado sobre Naturaleza e Industria. En el de Números, Medidas y Formas se van alternando los contenidos de aritmética con los de geometría, incluyéndose 116 grabados. Es interesante señalar que hay ilustraciones en la presentación de algunos conceptos numéricos como en los referentes a contar y a fracciones ordinarias.

### **Las geometrías escolares**

Se suele decir que la geometría es la ciencia que estudia las figuras geométricas. En las figuras se estudian tres aspectos principales: extensión, posición y forma, atribuyéndose a los egipcios y caldeos el primer ensayo para precisar estos aspectos. Así pues, las primeras consideraciones geométricas son muy antiguas y parece que tienen su origen en las observaciones simples que provienen de la habilidad del ser humano para reconocer y comparar formas y tamaños.

Ahora bien, como se ha dicho tantas veces, la geometría surgió de la necesidad práctica, como ciencia para ayudar a quienes se ocupaban de la ingeniería y la agrimensura. Este aspecto continuó siendo cada vez más importante con el paso del tiempo, puesto que era esencial para delineantes, ingenieros, arquitectos, albañiles, topógrafos y otras muchas profesiones. Otro aspecto de la geometría que constituyó un atractivo especial para los griegos fue que el cuerpo de conocimientos geométricos no sólo podía obtenerse empíricamente por ensayo y error, sino que podía deducirse mediante una cadena de razonamientos en una secuencia lógica. Esta era la geometría deductiva cuyo paradigma, como es bien conocido, son los Elementos de Euclides, que han influido en los libros escolares durante dos mil años (30).

### **Geometrías escolares anteriores al siglo XIX**

Si desde la invención de la imprenta hasta los comienzos del siglo XIX hay una producción sostenida de libros de aritmética en castellano, muchos de los cuales estaban concebidos como libros para la enseñanza, no ocurre lo mismo con los de geometría, lo que puede explicarse por el distinto papel social de ambas materias, con ventaja para la aritmética, necesaria para desenvolverse en la vida cotidiana, frente a la geometría, materia especializada propia de diversas profesiones como sastres, albañiles, canteros, carpinteros y agrimensores, entre otros, pero no imprescindible para la vida diaria. Dejamos aparte la "geometría superior", donde la influencia de los Elementos de Euclides es determinante. Hay esencialmente dos tipos de libros de geometría: los producidos en latín y los escritos en castellano que van dirigidos, en general, a las distintas profesiones, destacando los destinados a los sastres. Todos estos libros llevan habitualmente en su título la expresión "geometría práctica", con un claro intento de desmarcarse de la otra geometría, la de Euclides (31). Mediado el siglo XVIII comienzan a aparecer geometrías propiamente escolares como la de Rosell, titulada La geometría de los niños, publicada en 1784, o la de Hijosa, publicada el mismo año en la Imprenta Real de Madrid con el largo título Compendio de la geometría práctica con un breve tratado para medir terrenos, dividirlos y levantar planos arreglados a ellos. Una mirada a esta última obra puede ilustrarnos sobre el tenor de este tipo de geometrías. Va dirigida, según declara su autor en el prólogo "a instruir en la geometría práctica a los niños que concurren a estudiarla en las escuelas de Medina de Rioseco y Palencia," pero también juzga útil su obra para los que se dedican a oficios como carpinteros, canteros y albañiles. Se divide en dos libros con sus correspondientes capítulos, comenzando con una retahíla de 49 definiciones a las que siguen construcciones de distintas figuras, técnicas para medir terrenos y levantamiento de planos; al final de la obra aparecen cinco láminas con 114 figuras, distribuidas en cinco láminas desplegables, que corresponden a las construcciones realizadas en el texto (32).

### **Evolución de las geometrías escolares**

Durante el siglo XIX, con el inicio y progresiva consolidación de nuestro sistema escolar, la geometría aparece en el currículum de la educación primaria, pero no como algo sustancial a la formación de todos los ciudadanos (como sucedía con la aritmética), sino principalmente para aquellos que iban a

dedicarse a ciertos oficios. Así se propone en el conocido Informe Quintana (1814), en el que, al admitir una ampliación del programa con vistas al futuro ejercicio profesional del alumno, se dice: "Una aritmética más extensa, una geometría elemental sucinta y unos principios de dibujos aplicables a las artes y oficios son de utilidad más conocida en aquellos pueblos en los que por su vecindario y otras circunstancias es mayor el número de niños que han de dedicarse a las ocupaciones de artesanos, menestrales y fabricantes". En los sucesivos informes o planes de estudio se hablará de esta ampliación del programa siempre en términos de "unos elementos sucintos de geometría". Con la división posterior de la enseñanza primaria en elemental y superior, la geometría aparecerá en la superior. La Ley Moyano determinará en el currículum de la educación primaria unos "Principios de geometría, dibujo lineal y agrimensura" para las escuelas superiores de niños, desapareciendo de la formación de las niñas, donde son sustituidos por "Elementos de dibujo aplicados a las labores propias del sexo". Finalmente el plan enciclopédico de Romanones de 1901 también incluirá como materia de estudio la geometría. Para nuestro propósito es interesante destacar que estas disposiciones producen el alumbramiento de libros dedicados a la enseñanza de la geometría, bien exclusivamente, bien combinados con el dibujo lineal y la agrimensura, a nuestro juicio intentando adaptarse a las prescripciones de los distintos planes. En muchos casos la geometría se presenta como un apéndice de los libros de aritmética, con la idea de sucintos elementos.

Un ejemplo de libro exclusivamente de geometría es el de Valcárcel y Sánchez Cumplido, de 1855. El contenido está especificado por los propios autores en el prólogo, comprendiendo "1º) Propiedades de las líneas, de las figuras planas y de los cuerpos sólidos. 2º) Modo de hallar las áreas de las figuras planas y de las caras o superficies de los cuerpos sólidos, 3º) Modo de hallar el volumen de estos mismos cuerpos" (33). La exposición se hace precisamente en este orden, es decir, se comienza definiendo el concepto de línea recta, ángulos y figuras del plano con sus propiedades, se continúa con el área de estas figuras planas y se concluye con los volúmenes de los cuerpos geométricos más habituales, como prismas, pirámides, cilindro, cono y poliedros regulares, añadiéndose un apéndice dedicado a unas breves nociones de topografía. Las 49 lecciones que se presentan se desarrollan a lo largo de 54 páginas con 58 figuras, insertándose al pie de cada lección un conjunto de preguntas, por lo que el libro puede considerarse como hecho por el sistema de preguntas y respuestas.

A lo largo de la segunda mitad del siglo XIX asistimos a una producción más bien escasa de libros de este tipo, aunque desde nuestro punto de vista se trataría de una producción razonable dado el papel asignado a la geometría en el currículum escolar. Además hemos podido constatar la reedición sucesiva de algunas de estas obras (34). Algunas de las características de estos libros son :

i) No hay demostraciones, sino una serie de definiciones y propiedades para cuya comprensión se ayudan de figuras. Se sigue implícitamente el esquema de los Elementos de Euclides aunque sin hablar de postulados, axiomas, definiciones y teoremas. El siguiente texto del prólogo del libro ya citado de Valcárcel y Sánchez Cumplido nos da cuenta del espíritu de la época:

"Las demostraciones son de suma importancia cuando tienen por objeto hacer que el discípulo forme un íntimo convencimiento de las verdades matemáticas, y educar y robustecer su juicio y raciocinio... Pero cuando el objeto es sólo enseñar ciencia, entonces las demostraciones fatigan, entorpecen, son inútiles. El profesor dice a sus discípulos que los ángulos opuestos por el vértice son iguales, y después de que se cansa en demostrar la verdad, el alumno no sabe más que lo que antes sabía; porque la demostración no añade ninguna idea nueva; forma sí, el convencimiento pero no aumenta la ciencia " (35).

ii) Aparecen numerosas figuras acompañando al texto. Se trata de figuras para explicar el texto o figuras mediante las cuales se resuelven los problemas. En las primeras ediciones suelen presentarse en láminas plegables que se colocan al final de texto. Posteriormente las figuras se intercalarán en el texto

iii) En cuanto a los problemas, las geometrías que los tienen son esencialmente de construcciones geométricas; más adelante, con la generalización del sistema métrico decimal aparecerán problemas numéricos.

Un segundo modo de presentación de la geometría eran los libros que incluían esta materia junto con el dibujo lineal y la agrimensura. Aquí nos encontramos con que además de algunos libros de autores españoles hay traducciones de autores extranjeros. Así por ejemplo el libro de Henry titulado Elementos de Dibujo lineal, Geometría y Agrimensura dispuesto para todos los sistemas de enseñanza, publicado en Madrid en 1863 y señalada de texto por el Consejo de Instrucción Pública. El libro está "expresamente escrito para las Escuelas de Instrucción primaria y las diferentes profesiones que necesitan el dibujo" y comprende: Dibujo lineal a simple vista, Dibujo lineal gráfico, Agrimensura y Cubatura, Arquitectura, Albañilería, Marmolista, Carpintería de obras de armar, Carpintería de taller, Ebanistería, Cerrajería, Quincalla, Mecánica, Diversos instrumentos y Adorno.

Estos dos tipos de libros representan dos visiones complementarias de la geometría en la educación primaria; por un lado, la visión más teórica intentando elementalizar a Euclides, y por otro, la vertiente práctica en la que el énfasis está puesto en la aplicaciones a los diversos oficios.

Sin lugar a dudas, la nueva ordenación de la enseñanza primaria llevada a cabo al comienzo de nuestro siglo, con la división en grados a la que hemos hecho referencia, trajo como consecuencia una nueva generación de libros de geometría, en los que el contenido se adecúa a las edades y capacidades de los alumnos. De hecho, este contenido casi no varía entre la enseñanza elemental y superior, pero sí cambia la extensión y los modos de presentación. Desde que Pestalozzi y Froebel enfatizaron el papel del aprendiz y de los principios psicológicos en la enseñanza, se asiste a un cambio en el modelo educativo. La obra de ambos apuesta por la enseñanza de las ideas geométricas al estar enteramente involucradas en su enfoque del aprendizaje. Pestalozzi defendía el dibujo de las figuras geométricas como base del aprendizaje y proponía empezar por la geometría del plano; en cambio, Froebel consideraba que era mejor empezar por los cuerpos sólidos como el cubo y la esfera. Estas dos

posiciones aparecerán reflejadas en las geometrías escolares de autores españoles.

Buen ejemplo de estos libros de geometría son las obras de Saturnino Calleja, múltiples veces reeditadas, pionero en la producción de libros adecuados a los distintos grados de enseñanza (36). Es muy interesante el modo de presentación de su texto de Geometría para la enseñanza primaria superior, primero de su prestigiosa colección Biblioteca de las Escuelas. El libro está escrito siguiendo el siguiente plan :

- 1º) Dedicar un párrafo de cada capítulo a un asunto, sin intercalar preguntas.
- 2º) Colocar a pie de página las preguntas de cada párrafo.
- 3º) Poner en letra bastardilla la respuesta sucinta a los asuntos tratados.
- 4º) Hacer al final de cada párrafo un resumen abreviadísimo de su contenido.

Por tanto, según señala el propio autor, hay en realidad tres libros: abreviado, formado por el conjunto de los resúmenes; el segundo más completo, con el texto escrito en bastardilla; finalmente, el tercero completo, constituido por todo el texto. La obra se estructura en dos partes, geometría plana y de espacio, comprendiendo 18 capítulos e incluyendo 186 figuras.

A lo largo del primer tercio del siglo XX se observa un cierto cambio de rumbo en algunas obras dedicadas a la enseñanza de la geometría. Es posible que las ideas defendidas desde el Boletín de la Institución Libre de Enseñanza, en el sentido de hacer una geometría más experimental, tuvieran su influencia en este cambio (37). De hecho, ya desde el comienzo de la producción de libros de geometría, algunos autores habían reflexionado sobre el orden de presentación de los contenidos. Así, por ejemplo, en el prólogo del Manual de Geometría de Faustino de la Vega, se escribía lo siguiente :

"La mayor dificultad que se presenta en el estudio de la Geometría elemental consiste en la circunstancia de haberlo de hacer en un orden inverso de aquel en que se adquirieron los primeros conceptos geométricos (...); la naturaleza no nos presenta en ninguna parte más que cuerpos y superficies, y nosotros por medio de la abstracción hemos tenido que formarnos las ideas de línea y punto. Tal es la marcha que indudablemente se ha seguido en la adquisición de los conceptos geométricos: marcha enteramente contraria a la que se sigue en su transmisión, en la que se empieza considerando la línea y el punto. De aquí nace sin duda el trabajo que experimentan los jóvenes en retener en su memoria una porción de proposiciones, aisladas las más de ellas, y cuya utilidad y aplicaciones les son absolutamente desconocidas" (38).

Este problema didáctico, planteado pero no resuelto, va a ser retomado de nuevo por algunos autores durante la década de los veinte. Destaca aquí la obra de Palau Vera titulada Geometría ( Estudio de las Formas), en la que se produce una inversión en el orden de los contenidos, basándose en los avances de la Psicología y la Pedagogía. Ya el subtítulo de la obra, estudio de las formas, sugiere un cambio metodológico, representando un cambio importante sobre los modelos anteriores de enseñanza de la geometría.

"El estudio de las formas, según el criterio moderno, no puede, pues, empezar por puntos y líneas que son puras abstracciones, sino por cuerpos, y mejor todavía, por objetos, todos ellos más o menos familiares al niño. Las superficies, las líneas, los puntos, los irá conociendo del alumno al hacer el análisis de los sólidos geométricos en que se hallan comprendidos.

El estudio de cada forma geométrica típica consiste en observarla, analizarla, hallar las aplicaciones utilitarias o decorativa de que es objeto en la vida, calcularla y, por último, representarla reconstruyéndola." (39)

Con esta concepción la obra de Palau Vera presentará cambios importantes en los modos de presentación de los contenidos y en el aspecto material del libro. En cuanto al orden del contenido, dividirá su obra en dos grandes partes: cuerpos y figuras rectilíneas y cuerpos y figuras curvilíneas. En la primera parte comenzará estudiando un cuerpo singular, el cubo y continuará con el cuadrado, rombo, paralelepípedo, rectángulo, paralelogramos, pirámide, triángulo, trapecio, prisma y polígonos regulares. En la segunda parte comenzará con el estudio del cilindro y a partir de aquí estudiará la circunferencia y el círculo, cilindro, cono, esfera, superficies, líneas y puntos, elipse, parábola, hipérbola, polígonos y poliedros regulares, figuras semejantes, escalas, levantamiento de planos, teorema de Pitágoras, problemas. Hay una tercera parte en este libro dedicada a diversas construcciones para la vida cotidiana como papeleras, cajas, bandejas, marcos para fotografías y sobres. Con esta forma de presentación el autor tratará de asociar distintas materias como el cálculo aritmético, el dibujo, el modelado y el trabajo manual.

Las figuras abundarán a lo largo del texto, pero con un sentido distinto del utilizado habitualmente. Ya no serán figuras que le acompañan con el único fin de ilustrarlo, sino figuras que se utilizan para examinarlas, reproducirlas, experimentar con ellas. Se tratará en definitiva de superar los planteamientos existentes hasta el momento, donde predominaba un aprendizaje memorístico de la geometría, para sustituirlo por una geometría en la que el alumno llega al conocimiento experimentando, observando y construyendo.

Al lado de esta concepción de Palau Vera seguimos encontrando en esta época geometrías escolares que continúan con los planteamientos anteriores.

Es preciso señalar, aunque brevemente por ser objeto de otro capítulo de esta obra, que a partir de finales de los años veinte, entra en escena un modelo de libro escolar que tendrá una extraordinaria repercusión. Nos estamos refiriendo a las enciclopedias escolares. En este tipo de texto, la geometría aparece inserta como una materia más del conjunto de disciplinas que acogen los nuevos manuales.

Por último, hay que señalar que desde el establecimiento del sistema público de enseñanza se ha aceptado que la geometría elemental debe formar parte del curriculum de la escuela primaria. En favor de la inclusión ha habido tres tipos de defensores: los que hablan de su aplicación práctica, los que dicen que contribuye a los objetivos generales de la educación y los que afirman que su estudio permite sentar las bases para la enseñanza de la geometría superior. Pero, en general, los autores de libros escolares han considerado que en los cursos elementales era poca la geometría que había que enseñar, reservándola

para la educación secundaria. De hecho, como ya hemos señalado en muchos casos, la geometría se ha presentado como un apéndice de los libros de aritmética, con la idea de sucintos elementos. Esto ocurre por ejemplo en la Aritmética para el Grado Medio de Dalmáu Carles, de 1908, que dedica once páginas a la geometría o en la Aritmética para el curso elemental de Bruño, con cuatro páginas. Por eso la geometría elemental ha sido considerada la geometría de la forma y de la medida y no la geometría de la observación, construcción, representación y clasificación, llamada habitualmente geometría intuitiva, la cual emergerá con fuerza al finalizar el periodo que acabamos de reseñar en este capítulo.

Notas.-

(1) Isidoro de Sevilla: Etimologías, Madrid, B.A.C., 1982 (Edición bilingüe de J. Oroz)

(2) Smith, D. E.: History of Mathematics , New York , Dover P, 1923 (Reeditada en 1958)

Sánchez Pérez, J. A: La Aritmética en Roma, en India y en Arabia, Madrid, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 1949

(3) Pérez de Moya, J.: Tratado de Mathematica en que se contienen cosas de Arithmetica, Cosmografía y Philosophia natural, Alcalá de Henares, 1563

(4) Como quiera que los cálculos se efectuaban en la Edad Media con ayuda de los ábacos, el nombre de este instrumento se utilizó con frecuencia para referirse a los libros o manuscritos dedicados a la aritmética práctica o arte de calcular. El más conocido de todos es el Liber Abaci de Leonardo de Pisa (Fibonacci). Dedicaban una gran parte de sus páginas a la resolución de una multitud de ejemplos concretos propios de las situaciones en las que se podían encontrar los comerciantes.

(5) Un estudio muy detallado de la Aritmética de Treviso es el de Swetz, F. J.: Capitalism and Arithmetic, La Salle, Illinois, Open Court, 1987. En este trabajo se contextualiza el periodo histórico en el que surgen las primeras aritméticas comerciales.

(6) Rey Pastor, J.: Los matemáticos españoles del siglo XVI, Madrid, Junta de Investigaciones Histórico Bibliográficas, 1934. Uno de los capítulos está dedicado a Pedro Sánchez Ciruelo.

(7) Rey Pastor, J.: Op. cit., p. 71, dice del dominico Fray Juan de Ortega: "su Aritmética alcanzó merecida fama en toda Europa como prueba los elogios de sus contemporáneos y las numerosas ediciones que alcanzó. Esta favorable estimación se refiere al carácter práctico del libro. "

(8) Meavilla, V.: Addenda a la Ponencia titulada " Una aproximación al Libro primero de la Arithmetica Algebraica de Marco Aurel ", Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática (Sección : Historia de las Ideas Algebraicas), Universidad de Valencia, 1991.

(9) Rey Pastor, J.: Op. cit.

(10) La portada del libro de Zaragoza dice: "Aritmética Universal que comprende el Arte menor y maior, Algebra vulgar y especiosa. Valencia, por Geronimo Vilagrafa, junto al Molino de Rovella, año 1.669. Author : El M.R.P. Joseph Zaragoza de la Compañía de Jesús, Maestro en Filosofía, Catedrático de

Teología Escolástica en los Colegios de la Compañía de Jesús de Mallorca, Barcelona y Valencia, Calificador del Santo Oficio de la Inquisición."

(11) Zaragoza, J.: Op. cit., prólogo.

(12) Para la labor realizada por los Escolapios puede verse Faubell, V.: Acción educativa de los Escolapios en España (1.733-1.845), Madrid, Fundación Santa María, 1987. Además de este libro, el Decreto prescribía para la enseñanza de la aritmética el titulado Lecciones de Aritmética para el uso de las Reales Escuelas del sitio de S. Ildefonso y demás Escuelas Reales

(13) "El 12 de diciembre de 1.792, el matemático L.F. Arbogast presentó a la Convención Nacional francesa el informe y el proyecto de decreto el Comité de la instrucción pública sobre la composición de los libros elementales, explicando la necesidad del comenzar el establecimiento e un sistema escolar con la producción de manuales", Schubring, G. : "Un savant des lumières un livre élémentaire pour la république. La fonction des manuels dans l'instruction publique", en H. y A. Deledicq (ed.) Condorcet. Moyens d'apprendre a compter sûrement et avec facilité, París, Art, Culture, Lecture, 1988

(14) Los capítulos de que consta la obra de Vallejo son los siguientes :

Cap. I.- Nociones preliminares, numeración, división y subdivisión de las unidades de pesas y medidas.

Cap. II.- De la operación de sumar o de la adición.

Cap. III.- De la operación de restar o de la sustracción.

Cap. IV .- De la multiplicación.

Cap. V .- De la operación de dividir o de la división.

Cap. VI .- De los quebrados.

Cap. VII.- Sumar, restar, multiplicar y dividir quebrados.

Cap. VIII.- De las decimales.

Cap. IX.- De las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir decimales, ya vayan acompañados de enteros o ya vayan solos.

Cap. X.- De la operación de sumar, restar, multiplicar o dividir números denominados.

Cap. XI.- De la regla de tres.

Cap. XII.- De las reglas de compañía, aligación e interés.

Cap. XIII.- Nociones generales acerca de la elevación a potencias y extracción de raíces, contrayéndose más particularmente a elevar números al cuadrado y cubos y a extraer la raíz cuadrada.

Apéndice I.- Sobre las razones y proporciones

Apéndice II.- Sobre la correspondencia de unidades de pesas, medidas y monedas de Francia con las de España.

Apéndice III.- Problemas relativos a las ocupaciones del Bello Sexo.

Apéndice IV.- Problemas relativos a los haberes de soldados, cabos y sargentos.

(15) Para la historia de las medidas antiguas, adopción del sistema métrico decimal y medida de diversos cuadrantes del meridiano se puede consultar Benot, E: Sistema métrico. Complemento a la Aritmética general, Madrid, Mariano Núñez Samper, editor.

(16) La memoria de Ciscar tiene 62 páginas y está dividida en cinco capítulos, estructurados en artículos. En el capítulo I se hace una exposición del origen de las medidas de la época y de las "nulidades que resultan de su

arbitrariedad". En el Capítulo II explica las relaciones que tienen entre sí las unidades nuevas y propone nombres específicos para ellas. En el Capítulo III explica las denominaciones grecolatinas de las nuevas unidades y los motivos por los que deben modificarse sus denominaciones en castellano. El Capítulo IV indica las razones para adoptar el nuevo sistema métrico y , finalmente, el Capítulo V trata de responder a las objeciones que pueden hacerse al nuevo sistema.

(17) Las unidades más usadas en Castilla eran: para la longitud la vara, cuyo patrón se guardaba en Burgos; para la capacidad de líquidos, el cuartillo, cuyo patrón estaba en Toledo; para la capacidad de áridos, la media fanega, cuyo patrón se guardaba en Avila; y para el peso, el marco, cuyo patrón se archivaba en el Consejo de Castilla.

(18) A pesar de lo estipulado en esta Ley, se continuó utilizando el sistema antiguo, especialmente en las zonas rurales. Eduardo Benot, en su ya citado Sistema métrico. Complemento a la Aritmética general, dice: "Hostilidad contra el sistema métrico nunca verdaderamente la hubo; pero sí una desobediencia mansa contra lo dispuesto, tal y tan insistente, que de ella únicamente puede formarse idea teniendo alguna noticia de las leyes, Reales decretos y Reales órdenes dictadas por los poderes públicos en lo referente al ramo de la Instrucción pública" (p.10). Y a continuación presenta una retahíla de decretos, órdenes y reglamentos, en los que se recuerda sucesivamente la obligatoriedad de enseñar y utilizar el nuevo sistema de medidas.

(19) Algunos de estos libros son : Alvarez Fiol, B.: Explicación del nuevo sistema de pesas y medidas llamado sistema métrico decimal, Palma de Mallorca, Imp. F. Ramis, 1852; Benot, E.: Sistema métrico. Complemento a la Aritmética general, Madrid, Mariano Núñez Samper, ed.; Dios, J. F. de: Resúmenes de los sistemas métricos y monetarios destinados a las escuelas de instrucción primaria , Trujillo , Imp. Moreno, 1856; García de Berazalice, J: Cartilla métrica para uso de los niños y toda clase de personas, Béjar, 1856; González Bazo, M.: Cuaderno de Aritmética puramente métrico, Salamanca, Imp. Telesforo Oliva, 1863; Martín, M.: El nuevo sistema legal de pesas y medidas puesto al alcance de todos, Madrid, 1858; Redondo Población, P.: Nociones de Aritmética y sistema métrico. Valladolid, Imp. Gaviria, 1880; Ruiz León, M.: Nociones generales de Aritmética teórico-práctica con el nuevo sistema de pesas y medidas, Soria, Imp. Agapito Gómez, 1885; Vázquez, G.: Sistema métrico de pesas y medidas, Salamanca, Imp. de Telesforo Oliva, 1853.

(20) Hernández Díaz, J. M<sup>TM</sup>.: Bibliografía pedagógica de Castilla y León (1.808-1.936). Salamanca, Ediciones Universidad de Salamanca (Microfichas), 1993.

( 21) Por ejemplo en la ya citada Aritmética de Ramos puede leerse: "He adoptado la forma de diálogo por ser ( en mi opinión) la más a propósito para que los niños aprendan fácilmente las definiciones y reglas, dejando a la prudencia de los profesores la parte que toca al desenvolvimiento de las facultades intelectuales para la más exacta comprensión de esas mismas reglas, evitando así la manera rutinaria de decir sin saber lo que se dice, escollo del que debe apartarse todo buen profesor".

(22) YEVES, C.: Programas de primera enseñanza. Aritmética, Madrid, Librería de los sucesores de Hernando, 1916, 15<sup>TM</sup> ed.

(23) CASTRO Y LEGUA, V.: Aritmética y sistema métrico, Madrid, Imp. G. López del Horno, 1911.

(24) Algunas editoriales dieron nombres propios a los libros de cada sección. Por ejemplo la Editorial Calleja, designó con Epítomes los libros para la primera sección, Compendios par la segunda y Tratados para la tercera.

(25) DALMAU CARLES, J.: Lecciones de Aritmética (grado superior). Libro del alumno, Gerona, Dalmau Carles, 1916, 61<sup>TM</sup> ed., p.6.

(26) Solana, E.: Lecciones de Aritmética Segundo grado, Madrid, El Magisterio Español, 1908. Se trata de una pequeña obra de 64 páginas, estructurada en 49 lecciones. En cada página hay una serie de ejercicios, orales y escritos, de aplicación inmediata de la teoría expuesta. El autor señala tres características de su obra: importancia concedida a la numeración como base del cálculo, no emplear apenas nombres de medidas antiguas y carecer de originalidad imitando lo mejor de otros libros.

(27) GutiÉRrez, L: Aritmética Tercer Grado, Madrid, Espasa- Calpe, 1916

(28) Véase por ejemplo por ejemplo la Aritmética (Segundo Grado) de L. Gutiérrez del Arroyo, Espasa-Calpe, en la que introduce, por ejemplo la suma a través del planteamiento de tres problemas.

(29) Xandri, J.: Concentraciones. Cuarto y quinto grado o grado medio de la Escuela Primaria. Segundo tomo, Madrid, Tipografía Yag.es, 1932.

(30) La estructura de los Elementos de Euclides se mantendrá con el paso el tiempo, con mayor o menor extensión, hasta que Legendre publicó sus Elementos en 1794 (con veintiuna ediciones en vida del autor), versión actualizada y perfeccionada pedagógicamente de la obra de Euclides, con gran influencia en Francia y a través del vecino país en España. La obra de Legendre presentaba algunas diferencias con la de Euclides, entre las que destacamos: i) los números se asociaban a los segmentos lineales, con lo que la aritmética y el álgebra podían usarse para simplificar el trabajo; ii) el grado de rigor exigido era menor; iii) la secuencia de teoremas se presentaba de modo diferente .

( 31) Por ejemplo Alcega: Geometría práctica y traza tocante al officio de sastre, 1.580 ; La Rocha: Geometría y traza ... de sastres..., 1.618; Anduxar: Geometría y trazas pertenecientes al oficio de sastre, 1.640.

(32) El contenido del libro de Hijosa es el siguiente :

Libro Primero : De las definiciones

Capítulo I .- De las definiciones . Cap. II .- Construcción de figuras planas.

Cap. III.- Del círculo y los polígonos inscritos en él. Cap. IV.- Reducción de figuras. Cap. V.- De la planimetría. Cap. VI.- De la estereometría.

Libro II : Geometría práctica sobre el terreno.

Cap. I.- Descripción de la escuadra. Cap. II.- De la división de posesiones.

Cap. III.- De la construcción del semicírculo. Cap. IV.- Uso del semicírculo

Cap. V.- Prácticas curiosas para trazar sobre el terreno figuras regulares, medir alturas y distancias con piquetes y cuerdas.

(33) Valcárcel, A. y Sánchez Cumplido, R.: Compendio de Geometría con nociones de Topografía , para uso de las Escuelas Primarias, Madrid, Librería de Hernando, 1879, 8<sup>TM</sup> ed.

(34) Algunos de estos libros son: Giró, A. y Miró, J.B.: Elementos de geometría acompañados de algunos ejercicios prácticos, Madrid, 1871; Paluzie, F.: Elementos de geometría puestos al alcance de los niños, Barcelona, 1891,

Nueva edición; Planella, M.: Geometría elemental ampliada para uso de las escuelas de primera enseñanza, Barcelona, Tipolitografía de Celestino Verdaguer, 1879; Soler, S.: Geometría: curso abreviado. Castellón, 1.89- , 15<sup>TM</sup> ed.; Vallín, A.: Principios y ejercicios de Geometría, para uso de los alumnos de segundo año, Madrid, 1866, 6<sup>TM</sup> ed.

(35) VALCARCEL, A. y SANCHEZ CUMPLIDO, R.: Op. cit., prólogo

(36) Otras obras publicadas son las siguientes: F. T. D.: Nociones elementales de geometría práctica: primer grado, Barcelona ,F.T. D. , 1918 , 2<sup>TM</sup> ed.; Puig, J.B.: Geometría, geometría intuitiva : grado elemental, Gerona, Dalmáu Carles,1908; Puig, J.B.: Geometría y nociones de agrimensura y arquitectura: grado medio. Geometría didáctica, Gerona, Dalmáu Carles, 1914; Ruiz Romero, J.: Nociones de geometría y agrimensura para las escuelas de primera enseñanza, Barcelona, Sucesores de J. Bastinos, 1909, 10 ed. ; Viñas y Cusí, J.: Geometría razonada para los alumnos y alumnas de las escuelas elementales y superiores, Barcelona, Antonio J. Bastinos, 1904; Vivens, F.: Nociones de geometría al alcance de los alumnos de la escuela de primera enseñanza de ambos sexos y adultos, Valencia, Librería Pascual M. Villalaba, 22 ed.; Geometría plana y del espacio..., escrita por un salesiano, Sevilla, Escuela tipográfica y Librería salesiana, 1900.

(37) Véase por ejemplo Lázaro, B.: "La enseñanza de la geometría". Boletín de la Institución Libre de Enseñanza, IX, 1885, 316 - 318.

(38) Vega, F. de la: Manual de Geometría, Madrid , Boix Editor, 1845

(39) Palau Vera, J.: Geometría ( Estudio de las formas), Barcelona , Seix y Barral, 1927.

## TEXTO DE LAS DIAPOSITIVAS

Diapositivas 1 y 2 :

Juan Pérez de Moya y Miguel Gerónimo de Santa Cruz publicaron durante el Antiguo Régimen dos aritméticas en castellano que tuvieron numerosas reediciones. Aquí aparecen recogidas las portadas de las ediciones respectivas de 1619 y 1594 (esta última es la primera edición) que se conservan en la Biblioteca General de la Universidad de Salamanca .

Diapositiva 3:

José Mariano Vallejo es el típico ejemplo de ilustrado español que trató de elevar el nivel de los conocimientos científicos de los estudiantes de las Universidades, Academias Militares y Escuelas Superiores, escribiendo importantes tratados de matemáticas. Se preocupó también de la formación de los niños publicando dos obras (Aritmética y Geometría) para uso de las Escuelas del Reino. (Portada de la séptima edición de Vallejo, J.M.: Aritmética de niños escrita para uso de las Escuelas del Reino, Madrid, Imprenta Garrasayaza, 1845, 7<sup>TM</sup> edición, depositada en la Biblioteca General de la Universidad de Salamanca).

Diapositiva 4 :

Formato pregunta-respuesta propia de las aritméticas de esta época. Se aprecia los distintos tipos de letra utilizados, escribiendo en bastardilla el texto que se quiere enfatizar. (Torrecilla , G.: Aritmética de niños (Razonada), Madrid, Imp. Garrasayaza,1856, p. 35) .

Diapositiva 5 :

La Aritmética de Dalmáu Carles (Grado Medio) es posiblemente el libro escolar de Matemática que más ediciones ha tenido y que más años se ha mantenido. En el año 1936 apareció su 150 edición y continuó editándose después de la guerra civil, es decir, casi cincuenta años después de su aparición. Su colección de problemas, como se resalta en la portada, representó una novedad en este tipo de libros. (Portada de Dalmáu Carles, J.: Resumen de las lecciones de Aritmética ( grado medio): Libro del alumno, Gerona, Dalmáu Carles, 1908, 25<sup>TM</sup> ed. )

Diapositiva 6 :

Tratamiento de la división en Dalmáu Carles. Se observa la presentación en la forma pregunta-respuesta, numerando las preguntas y utilizando tres tipos distintos de letra. (Dalmáu Carles, J.: Lecciones de Aritmética (grado superior). Libro del Alumno, Gerona, Dalmáu Carles, 61<sup>TM</sup> ed., p.48)

Diapositiva 7:

La evolución en la forma de presentación de los ejercicios se muestra en este libro e en ejercicios de cálculo mental, cálculo escrito y problemas. Aparecen grabados que son ilustraciones no significativas para resolver el problema. ( S.T.J : Aritmética. Segundo grado, Barcelona, Ed. Altés, pp 84 -85)

Diapositiva 8 :

Al final del periodo considerado aparecen aritmética en las que se introducen grabados significativos acerca de los conceptos presentados. Igualmente se comienza a introducir el color en los libros de aritmética, dando lugar a unos textos mucho más agradables para aprender. (F.T.D: Cartilla moderna de Aritmética, Barcelona, 1928, 2<sup>TM</sup> ed.)

Diapositiva 9 :

Frente a los libros más elaborados de aritmética continuaron existiendo al final de este periodo "cartillas" donde se presentaba de modo sucinto las cuestiones más fundamentales, incluyendo problemas y ejercicios de cálculo mental y escrito. Como ejemplo de este tipo, presentamos la portada de la Aritmética de Ezequiel Solana. ( Solana, E, : Nociones de Aritmética, Madrid, El Magisterio Español, 1928, 30 ed.)

Diapositiva 10 :

Entre los pocos libros de geometría para niños editados durante el siglo XVIII aparece el de Hijosa, que pretende también ser útil a diversas profesiones, aunque el autor manifestase en el prólogo que "bien quisiera, y sería lo mejor, que los que se dedican a este estudio, no se contentasen con solo la práctica". ( Portada de Hijosa, M. : Compendio de la geometría práctica con un breve tratado para medir terrenos, dividirlos y levantar planos arreglados a ellos, Madrid, Imprenta Real, 1784, depositado en la Biblioteca General de la Universidad de Salamanca)

Diapositiva 11:

Figuras que acompañan al texto, para explicar el concepto de ángulo. (Valcárcel,A. y Sánchez Cumplido, R.: Compendio de Geometría, Madrid, Gregorio Hernando, 1879, p.9 )

Diapositiva 12:

Además de la producción de libros nacionales, se tradujeron y editaron libros del extranjero. Muestra de ello es el de Henry, citado en el texto.

(Portada de Henry, J.R.: Elementos de dibujo lineal, geometría y agrimensura dispuesto para todos los sistemas de enseñanza, Madrid, Librería de Pompart, 1863 , depositado en la Biblioteca General de la Universidad de Salamanca)

Diapositivas 13 y 14

Portadas de las geometrías de Calleja y Paluzie muy utilizadas en las escuelas durante el primer tercio del siglo XX y múltiples veces reeditadas.

(Calleja, S.: Bibliotecas de las Escuelas. Textos de las asignaturas de la enseñanza primaria superior Tomo V. Geometría, Madrid, S. Calleja, 1898; Paluzie, F.: Elementos de Geometría puestos al alcance de los niños, Barcelona, F. Paluzie, 1891).

Diapositiva 15

La figura que acompañaba al texto para explicarlo pasa a ser considerada como elemento sobre el que se experimenta y se razona. El rombo ya no es un elemento estático en el que están dibujadas las diagonales, sino una figura viva sobre la que se trabaja, identificando además sus aplicaciones. ( Palau Vera, J.: Geometría ( Estudio de las formas), Barcelona, Seix y Barral, 1927, 5<sup>TM</sup> ed.)

Relación de ilustraciones (diapositivas)

- 1.- Portada de Pérez de Moya, J.: Arithmetica practica y speculativa
- 2.- Portada de Gerónimo de Santa Cruz, M.: Arithmetica especulativa y practica, Madrid, 1594
- 3.- Portada de la séptima edición de Vallejo, J.M. : Aritmética de niños escrita para uso de las Escuelas del Reino, Madrid, Imprenta Garrasayaza, 1845, 7<sup>TM</sup> edición.
- 4.- Torrecilla, G. : Aritmética de niños (Razonada), Madrid, Imp. Garrasayaza, 1856, p. 35 .
- 5.- Portada de Dalmáu Carles , J.: Resumen de las lecciones de Aritmética (grado medio) : Libro del alumno, Gerona , Dalmáu Carles, 1908, 25<sup>TM</sup> ed.
- 6.- Dalmáu Carles, J.: Lecciones de Aritmética (grado superior). Libro del Alumno, Gerona, Dalmáu Carles, 61<sup>TM</sup> ed., p.48.
- 7.- S.T.J : Aritmética. Segundo grado, Barcelona, Ed. Altés, 192\_ , pp 84 -85).
- 8.- F.T.D. : Cartilla moderna de Aritmética, Barcelona, 1928, 2<sup>TM</sup> ed..
- 9.- Solana, E.: Nociones de Aritmética, Madrid, El Magisterio Español, 1928, Tirada 30 .
- 10.- Portada de Hijosa, M. : Compendio de la geometría práctica ....., Madrid, Imprenta Real, 1784.
- 11.- Valcárcel, A.: Compendio de Geometría, Madrid, Gregorio Hernando, 1879. , p.9
- 12.- Portada de Henry, J.R.: Elementos de dibujo lineal, geometría y agrimensura dispuesto para todos los sistemas de enseñanza, Madrid, Librería de Pompart, 1863 .
- 13.- Calleja, S.: Bibliotecas de las Escuelas. Textos de las asignaturas de la enseñanza primaria superior Tomo V. Geometría, Madrid, S. Calleja editor, 1898 .
- 14.- Paluzie, F. : Elementos de Geometría puestos al alcance de los niños, Barcelona, F. Paluzie ed., 1891.

15.- Palau Vera, J. : Geometría ( Estudio de las formas). Barcelona, Seix and Barral Herms, 1927 , 5<sup>TM</sup> ed.

#### Bibliografía sucinta

Alvarez Fiol, B.: Explicación del nuevo sistema de pesas y medidas llamado sistema métrico decimal , Palma de Mallorca , Imp. F. Ramis,1852

Benot, E.: Sistema métrico. Complemento a la Aritmética general, Madrid , Mariano Núñez Samper, ed., s.f.

Calleja, S.: Bibliotecas de las Escuelas. Textos de las asignaturas de la enseñanza primaria superior Tomo V. Geometría, Madrid, S. Calleja editor, 1898

Castro y Legua, V.: Aritmética y sistema métrico, Madrid, Imp. G. LÓpez del Horno, 1911

Dalmáu Carles , J.: Resumen de las lecciones de Aritmética (grado medio): Libro del alumno, Gerona , Dalmáu Carles, 1908, 25<sup>TM</sup> ed.

Dalmáu Carles, J.: Lecciones de Aritmética (grado superior). Libro del Alumno, Gerona, Dalmáu Carles, 61<sup>TM</sup> ed.

Dios, J. F. de.: Resúmenes de los sistemas métricos y monetarios destinados a las escuelas de instrucción primaria, Trujillo , Imp. Moreno, 1856.

F.T.D. : Cartilla moderna de Aritmética, Barcelona, 1928, 2<sup>TM</sup> ed..

F. T. D. : Nociones elementales de geometría práctica: primer grado, Barcelona, F.T. D. , 1918 , 2<sup>TM</sup> ed.

García de Berazalice, J.: Cartilla métrica para uso de los niños y toda clase de personas, Béjar , s.i, 1856

Geometría plana y del espacio...., escrita por un salesiano, Sevilla, Escuela tipográfica y Librería salesiana, 1900.

Gerónimo de Santa Cruz, M.: Arithmetica especulativa y practica, Madrid, 1594

González Bazo, M.: Cuaderno de Aritmética puramente métrico, Salamanca, Imp. Telesforo Oliva, 1863

Henry, J.R.: Elementos de dibujo lineal, geometría y agrimensura dispuesto para todos los sistemas de enseñanza, Madrid, Librería de Pompart, 1863 .

Hijosa, M. : Compendio de la geometría práctica con un breve tratado para medir terrenos, dividirlos y levantar planos arreglados a ellos, Madrid, Imprenta Real, 1784.

Martín, M. : El nuevo sistema legal de pesas y medidas puesto al alcance de todos, Madrid,1858

Palau Vera, J. : Geometría ( Estudio de las formas). Barcelona, Seix y Barral, 1927, 5<sup>TM</sup> ed.

Paluzie, F.: Elementos de Geometría puestos al alcance de los niños, Barcelona, F. Paluzie, 1891.

Pérez de Moya, J.: Arithmetica practica y speculativa , Alcalá, 1619

Puig, J.B.: Geometría, geometría intuitiva: grado elemental, Gerona, Dalmáu Carles,1908 .

Puig, J.B. : Geometría y nociones de agrimensura y arquitectura : grado medio. Geometría didáctica, Gerona , Dalmáu Carles, 1914 .

Redondo Población, P. : Nociones de Aritmética y sistema métrico. Valladolid, Imp. Gaviria, 1880

Ruiz León, M. : Nociones generales de Aritmética teórico -práctica con el nuevo sistema de pesas y medidas, Soria, Imp. Agapito Gómez, 1885

Vázquez, G.: Sistema métrico de pesas y medidas, Salamanca, Imp. de Telesforo Oliva, 1853.

Ruiz Romero, J.: Nociones de geometría y agrimensura para las escuelas de primera enseñanza, Barcelona, Sucesores de J. Bastinos, 1909, 10 ed..

Solana, E. : Nociones de Aritmética, Madrid, El Magisterio Español, 1928 , Tirada 30 .

S.T.J : Aritmética. . Segundo grado, Barcelona, Ed. Altés.

Valcárcel, A.: Compendio de Geometría, Madrid, Gregorio Hernando, 1879.

Torrecilla , G. : Aritmética de niños (Razonada), Madrid, Imp. Garrasayaza,1856

Vallejo, J.M. : Aritmética de niños escrita para uso de las Escuelas del Reino, Madrid, Imprenta Garrasayaza, 1845, 7<sup>TM</sup> edición.

Viñas y Cusí, J. : Geometría razonada para los alumnos y alumnas de las escuelas elementales y superiores, Barcelona, Antonio J. Bastinos, 1904 .

Vivens, F. : Nociones de geometría al alcance de los alumnos de la escuela de primera enseñanza de ambos sexos y adultos, Valencia, Librería Pascual M. Villalaba, ,22 ed..