
1. ARTICULOS

- 5 1.1. Homomorfismos continuos de los grupos aditivo y multiplicativo de los números reales: Funciones elementales.
Javier Pérez González. Departamento de Teoría de Funciones. Universidad de Granada.
- 21 1.2. Aspectos didácticos de la adición.
Bernardo Gómez Alonso. Escuela Universitaria del Profesorado de E.G.B. Universidad de Valencia.
- 27 1.3. Algunas aplicaciones del cálculo matricial en el campo de la óptica.
E. Hita y L. Jiménez del Barco. Departamento de óptica. Universidad de Granada.

2. PRACTICA

- 41 Aquilino Pérez de Madrid. I.B. Angel Ganivet Granada.
Carmen García Arribas. I.B. Padre Suárez. Granada.

3. INFORMATICA

- 67 3.1. Semejanzas del plano.
Adela Jaime Pastor y Angel Gutiérrez Rodríguez. Escuela Universitaria del Profesorado de E.G.B. Universidad de Valencia.
- 77 3.2. El ordenador en la "Junta de evaluación".
José M^a Quesada Teruel. I.B. "Santo Reino". Torredonjimeno. Jaén.

4. EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

- 91 4.1. Investigación sobre los criterios clasificatorios basados en características euclídeas de niños de 5 a 12 años.
Carlos Maza Gómez. Escuela Universitaria del Profesorado de E.G.B. Universidad de Sevilla.

5. EDUCACION Y CULTURA

- 99 5.1. Las Notas de José L. Hernández Rojo. I.B. "La Chana". Granada.
- 100 5.2. Simon Stevin. 4^a centenario de la invención de los decimales.
Enrique Castro Martínez e Isidoro Segovia Alex. Escuela Universitaria del Profesorado de E.G.B. Universidad de Granada.
- 104 5.3. Brook Taylor. 3^{er}. centenario de su nacimiento.
Antonio Cañada. Subdirector de Epsilon. Departamento de Ecuaciones Funcionales. Universidad de Granada.

6. RESEÑAS DE LIBROS Y REVISTAS

- 112 Equipo de Redacción de Epsilon.

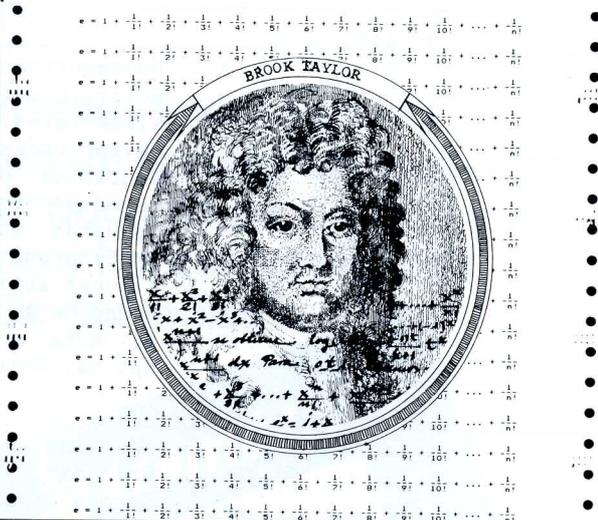
7. INDICE PUBLICITARIO

- 7.1. Editorial Andalucía c.p.
7.2. Eléctrica Mesones i.c.p. - 103
7.3. Informática y Electrónica ... 76
7.4. SANYO i.p.
7.5. Sánchez 75
-

*homenaje en el
tercer centenario
a Brook Taylor.*



epsilon 4



3^o CENTENARIO BROOK TAYLOR 3^o CENTENARIO BROOK TAYLOR 3^o CENTENARIO

DIRECTOR:

Rafael Pérez Gómez

SUBDIRECTOR:

Antonio Cañada Villar

REDACTOR JEFE:

Manuel Vela Torres

ADJUNTOS REDACCION:

Moisés Coriat Benarroch
Joaquín Valderrama Ramos

CONSEJO REDACCION:

Carmen García Arribas, Andrés González Carmona, José Luis Hernández Rojo, Aquilino Pérez de Madrid, Victoriano Ramírez González, Enrique Castro Martínez.

COLABORADORES:

Enrique Aznar García, Antonio Fernández Cano, Miguel de la Fuente Martos, José María García Abril, María Josefa García Hernández, Felipe López Fernández, Antonio Marín del Moral, Sebastián Montiel, Javier Pérez González, José Juan Quesada Molina, Antonio Rodríguez Garzón.

ADMINISTRACION:

Suscripciones: Josefina Olmos de Cara.
Distribución: Fernando López Expósito.

ASESORIA JURIDICA:

Juan Francisco Salamanca Ballesteros.

PUBLICIDAD:

Contratación: Armando Blanco Morón.
Diseño y Realización: Gilberto González Vazquez.

COMPOSICION:

Texto y Diseño Gráfico: Luis Orihuela Hervás y Fernando Hernández Rojo.
Portada. -José Avila Ballesteros

Imprime: GRAFSUR / Armilla (Granada)

Edita : ASOCIACION DE PROFESORES DE MATE-
MATICAS DE ANDALUCIA.

PRESIDENTE: Ramón Gutiérrez Jáimez

Deposito Legal: GR-147/84

Los trabajos para publicar en la Revista "EPSILON" deben enviarse a la Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía, Sección de Matemáticas, Facultad de Ciencias, GRANADA, y deben atenerse en lo posible a las siguientes normas:

-Ser inéditos.

-Tener una extensión aproximada de 15 folios a una cara y doble espacio.

-Ir encabezado del título, seguido de un pequeño resumen en el que se reflejen con claridad el contenido del trabajo y la aportación del (de los) autor(es).

-En caso de existir gráficas, éstas irán en hoja aparte, indicando su ubicación en el trabajo.

-Llevar al final la bibliografía exhaustiva usada, detallando autor, título, editorial, página, año...

-En un folio aparte: título del trabajo, autor(es), dirección y teléfono si es posible.

Aspectos didácticos de la adición

Bernardo Gómez Alonso

El estudiante que comprende la lógica subyacente en un algoritmo es mejor matemático que el estudiante que puede resolver un problema, pero no comprende por qué obtiene la respuesta correcta. (1)

¿Qué papel juegan nuestras operaciones elementales y sus algoritmos en la Escuela?

Pura rutina, apenas unas reglas que memorizar

- 1.¿ Se discute en el Aula sobre aspectos conceptuales, significados o connotaciones concretas?
- 2.¿ Se estudian las condiciones en que un algoritmo es aplicable, qué problemas resuelve y cómo?
- 3.¿ Se da opción entre las diversas técnicas y estrategias para el aprendizaje de las tablas?
- 4.¿ Se reflexiona sobre las razones de las instrucciones que se siguen, sobre la disposición práctica más conveniente, sobre cómo abreviar pasos y cuáles pueden ocultarse, o... sobre las variantes que admite?

Este artículo solo pretende ser un esbozo de algunos aspectos didácticos de la adición, no entra en cuestiones psicológicas del tipo de ¿qué se aprende antes y por qué, o cómo se aprende? Ni tampoco, sobre cómo actuar en el Aula. Valga, pues, como panorama y como fuente para un posterior trabajo.

1. ASPECTOS CONCEPTUALES

¿Qué diferencia hay entre adición y suma?

¿Qué expresión describe mejor a la suma: unir, juntar, añadir,..., o simplemente contar?

¿Cree que para sumar $7+4$, hace falta unir, juntar, añadir,..., algo?

En las primeras etapas del aprendizaje, la adición no es presentada como una operación que cambia dos números por un tercero llamado suma, sino como una situación en la que hay que efectuar uniones o composiciones que implican conservación de la cantidad y que están de acuerdo con la interpretación conjuntista del modelo unión:

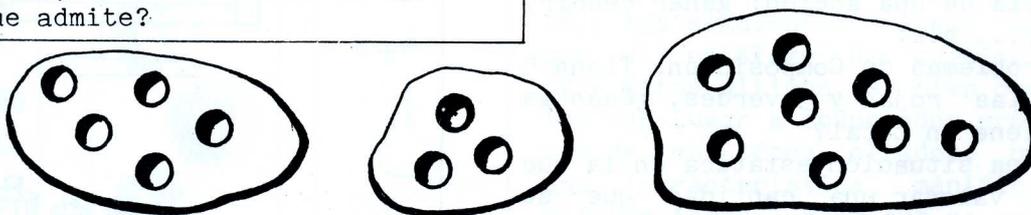
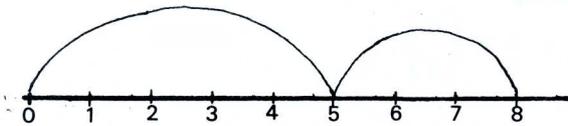


FIGURA 1

o bien con situaciones que implican seguir avanzando en la secuencia contadora, de acuerdo con modelos geométricos del tipo línea numérica:

FIGURA 2



Debido a la función que ejercen los modelos, de dotar de definiciones concretas a las operaciones (2), la adición queda identificada con la interpretación del modelo.

Ahora bien, la suma es una cuestión de estrategia contadora, en cualquiera de sus tres niveles básicos: contar con los dedos, contar mentalmente o recurrir a las tablas de sumar (3 y 4); y esto, es independiente del significado de la operación: "La suma de números no es unir conjuntos, ni desplazarse sobre una escala numérica, ni contar objetos, sino contar números" (5).

2. LOS PROBLEMAS

Puesto que el interés principal de la adición radica en su capacidad para resolver los problemas aditivos, esta operación no se considera aprendida en tanto no se esté en condiciones de reconocerla allá donde subyazca, y se sea capaz de resolverla con seguridad y cierta rapidez. Esto obliga a presentar una lista de problemas lo más exhaustiva posible.

Sin entrar en los criterios de clasificación y únicamente a título de ejemplo, valga la siguiente lista:

2.1 Problemas de cambio:

Tenía 5 bolas y ganó 3. ¿Cuántas tiene ahora?

Es una situación activa, en la que una cantidad inicial cambia como consecuencia de una acción: ganar reunir, añadir,... etc.

2.2 Problemas de Composición: Tiene 5 bolas rojas y 3 verdes. ¿Cuántas tiene en total?

Es una situación estática en la que hay que valorar una cantidad que se presenta compuesta de otras dos. Cabe imaginar una acción que ya ha finalizado.

2.3 Problemas de Comparación: Carlos tiene 5 bolas y Juan 3 más que Carlos. ¿Cuántas tiene Juan?

Es una situación híbrida; hay que imaginar la cantidad a evaluar compuesta de otras dos, una de ellas se obtiene por comparación:

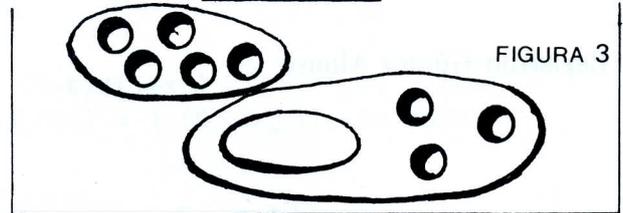


FIGURA 3

2.4 Problemas de Igualación: Carlos tiene 5 bolas, si gana 3 tendrá las mismas que Juan. ¿Cuántas tiene Juan?

Es también una situación híbrida; hay que valorar una cantidad que se presenta igual a otra obtenida mediante un cambio.

2.5 Problemas de sustitución:

- ¿Qué regleta mide lo mismo que la tercera adosada a la quinta?

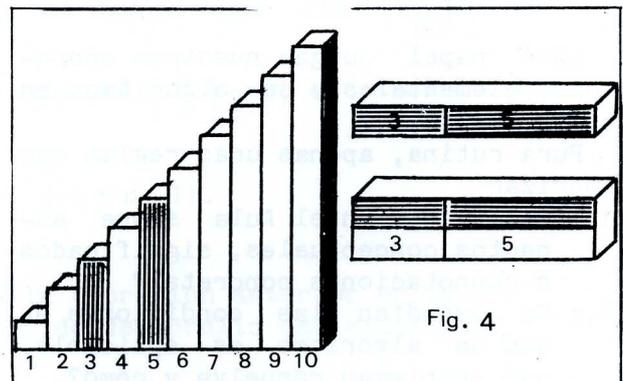


Fig. 4

- ¿Qué pesa hay que poner para equilibrar la báscula?

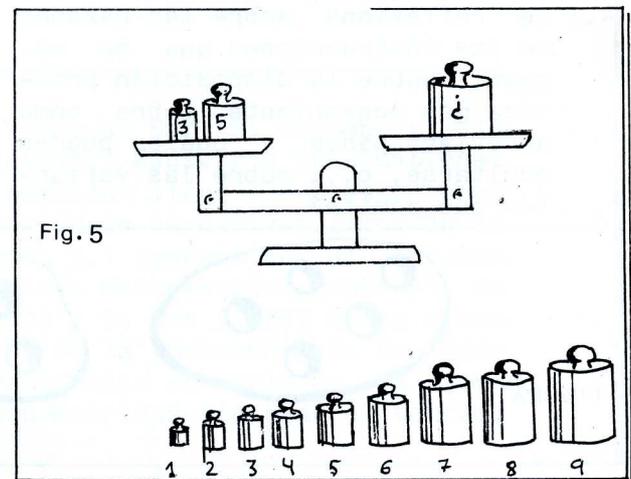
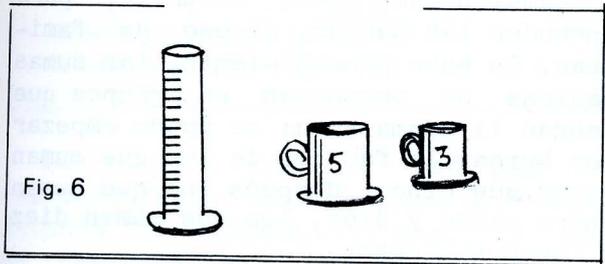


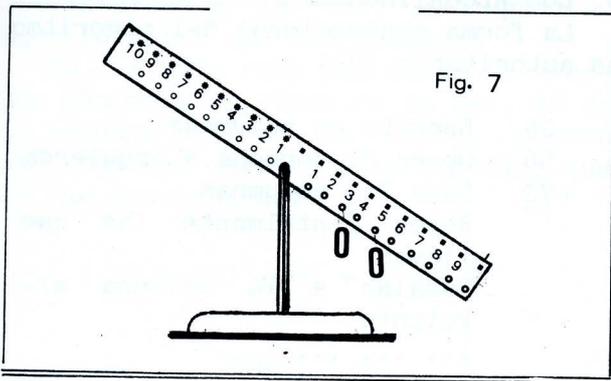
Fig. 5

- ¿Qué volumen resulta al mezclar el líquido de los dos recipientes?



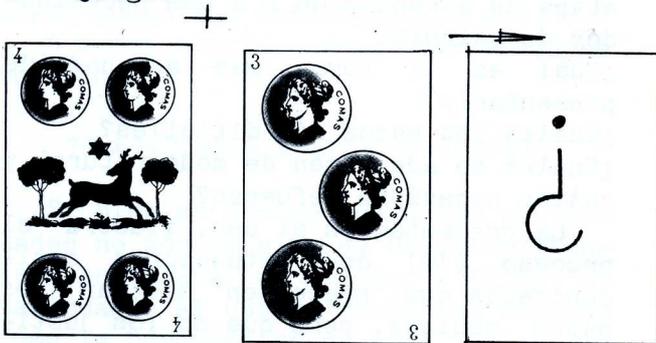
Es el caso de las regletas, las pesas y los volúmenes. Se trata de situaciones aditivas que pueden ser resueltas sustituyendo las magnitudes obtenidas por cambio o composición, por otra u otras (cuando es mayor que diez) de la misma medida.

2.6 Problemas Mecánicos: La balanza contadora tiene una masa colgada en el gancho número 5 y otra en el número 3. ¿En qué gancho hay que colgar el contrapeso?



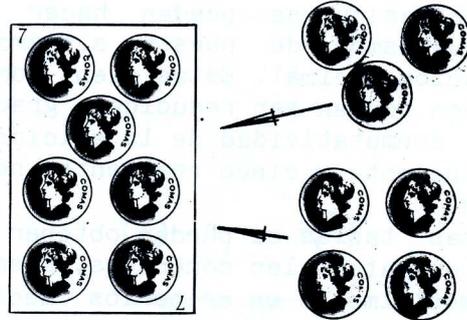
Son situaciones que implican experiencias físicas o mecánicas, en este caso equilibrio de fuerzas.

2.7 Problemas de Asociación Espacial: Jugando a las siete y media, un jugador se ha plantado con este juego:

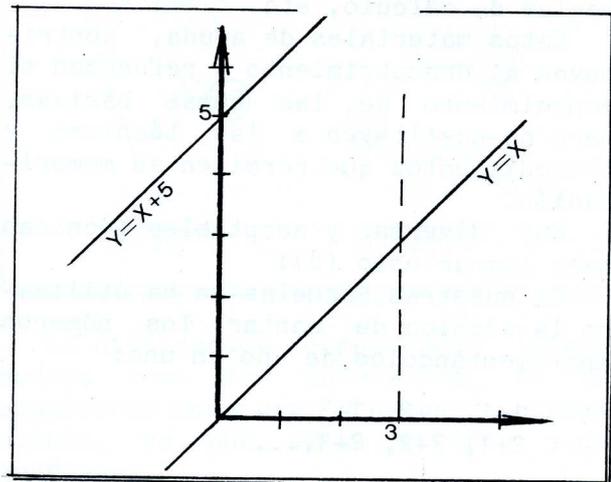


la banca gana si empata. ¿Qué carta necesita la banca?

Cada número esta asociado a un determinado "arreglo" lo que permite reconocerlo por su aspecto. Se puede averiguar el valor de la suma sin necesidad de contar, por simple asociación, buscando el arreglo que concuerda con los arreglos sumando.



2.8 Problemas gráficos: ¿Cuánto vale la ordenada a la curva $y = x + 5$, en el punto de abscisa 3?



Estos problemas pueden ser resueltos, con ayuda de gráficas, sin necesidad de efectuar ningún cálculo.

Los problemas de cambio, composición, comparación e igualación, corresponden a la clasificación de problemas adoptada por Carpenter y Moser (6); los siguientes vienen sugeridos por el catálogo de modelos de Vest (7). Estos últimos, si bien como modelos dan lugar a enunciados problemáticos de los tipos citados, presentan una característica manifiestamente diferenciadora, y es que no necesariamente hay que resolverlos como una suma en el sentido tradicional de

"conteo", sino que pueden ser resueltos por experimentación, ensayo y error o regla y papel graduado.

3. LAS TABLAS

Toda la estrategia aditiva se apoya en el aprendizaje y memorización de las tablas de sumar; entendemos por tales, a las diez por diez combinaciones básicas que se pueden hacer con los guarismos de nuestro sistema de numeración decimal. Estas cien combinaciones pueden ser reducidas, gracias a la conmutatividad de la adición, a las cincuenta y cinco realmente necesarias.

Estas tablas se pueden obtener con ayuda de materiales concretos, basados fundamentalmente en criterios mecánicos y contadores, como pueden ser: los ábacos, los bloques multibase, la balanza contadora, la minicalculadora de Papy, el geoplano de ciento, las reglas de cálculo, etc.

Estos materiales de ayuda, contribuyen al descubrimiento y refuerzan el conocimiento de las sumas básicas, pero no sustituyen a las técnicas y procedimientos que permiten su memorización.

Hay diversas y aceptables técnicas para lograr esto (8):

En nuestras Escuelas se ha utilizado la técnica de cantar los números incrementándolos de uno en uno:

$$\begin{array}{l} 1+1, 1+2, 1+3, \dots \\ 2+1, 2+2, 2+3, \dots \end{array}$$

Esta técnica viene sugerida por lo fácil que es conocer cualquiera de las sumas básicas, si se sabe la anterior; ya que prácticamente se trata de repetir la sucesión numérica natural.

Una estrategia habitual en las tablas consiste en recurrir a la utilización de los dobles:

Primero se aprenden las sumas dobles: $1+1, 2+2, 3+3, \dots$

Después las casi-dobles:

$$1+2, 2+3, 3+4, \dots \text{etc.}$$

Si la suma que buscamos no es de esta forma, se busca la más próxima y se añaden o quitan las unidades de diferencia.

Esta estrategia se apoya en la idea de que estas sumas son más fáciles de retener.

También se suele recurrir, para aprender las tablas, al uso de familias. En este procedimiento, las sumas básicas se organizan en grupos que tengan la misma suma; se puede empezar por buscar la familia de los que suman menos que cinco, después los que suman entre cinco y diez, los que suman diez y luego el resto.

Al enfatizar la familia de los que suman diez se está actuando de cara al algoritmo con sumas complejas, al mostrar las distintas descomposiciones de este número.

Lo que es innegable es que cada una de estas estrategias, contribuyen a desarrollar un mejor conocimiento y aprendizaje de las sumas primarias, por lo que no parece aconsejable prescindir de ninguna.

4. LOS ALGORITMOS

La forma convencional del algoritmo es autoritaria (9):

25	Escribe en columnas
56	Opera de derecha a izquierda
+72	Suma las columnas
	Retén mentalmente las que llevas
	Súmalas a la columna siguiente

¿De dónde vienen estas instrucciones?

¿Es ésta la disposición práctica más conveniente?

¿Qué razones nos permiten asegurar que éste es el mejor algoritmo?

¿No hay otros, o cuando menos, variantes que se adapten más y mejor a las peculiaridades de cada persona, a su etapa de aprendizaje o a sus necesidades de cálculo?

¿Cuál es la forma más adecuada de presentarlo?

¿Cuáles los pasos más difíciles?

¿Cuáles se adquieren de modo natural y cuáles necesitan refuerzo?

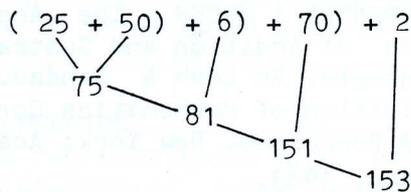
La presentación al uso, ilustra el proceso (10) con situaciones casi-concretas que pretenden mostrar los pasos ocultos, pero que no los justifican:

	25	—	2 decenas y 5 unidades	—	20 + 5
	56	—	5 decenas y 6 unidades	—	50 + 6
	+ 72	—	7 decenas y 2 unidades	—	70 + 2
Reordenando:	(14)(13)		14 decenas y 13 unidades		140 + 13
Reagrupando:	1(4+1)3		(1 cent.)(4 y 1 dec.)(3 unid.)		100+40+10+3

Las ideas a reforzar son las de reordenamiento: unidades con unidades, decenas con decenas,..., etc., y las de reagrupamiento: por cada diez unidades, una decena, por cada diez decenas,..., etc. Estas ideas se refuerzan con materiales de ayuda como las regletas, los ábacos o los bloques multibase.

Se admite sin discusión que el reordenamiento, que posibilita la suma de grandes números, es del tipo de unidades con unidades,..., etc.; de esa manera se dirige al aprendiz hacia nuestro algoritmo convencional. Pero, ¿por qué?... ¿Es necesario sumar todas las unidades a la vez? ¿Es preciso hacerlo antes que las decenas?

En la vida real las cosas no siempre son así: 25 ptas. de la sal, 56 de la lechuga y 72 de la leche, pueden ser sumadas mentalmente a medida que se van despachando:

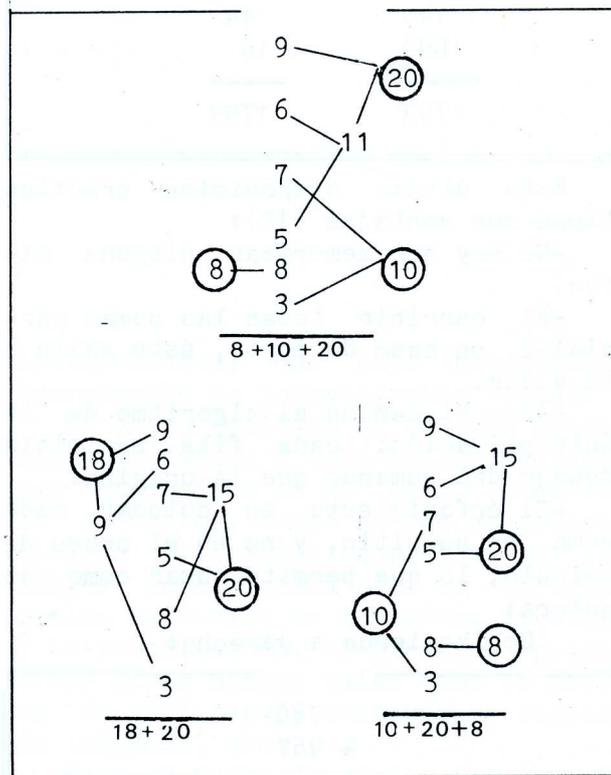


No hay por qué esperar a conocer todas las unidades que van a entrar en el juego, se puede empezar a sumar en cuanto se tiene el primer dato; primero un número, luego las decenas del otro, luego sus unidades,..., etc.

A veces conviene reagrupar antes de reordenar:

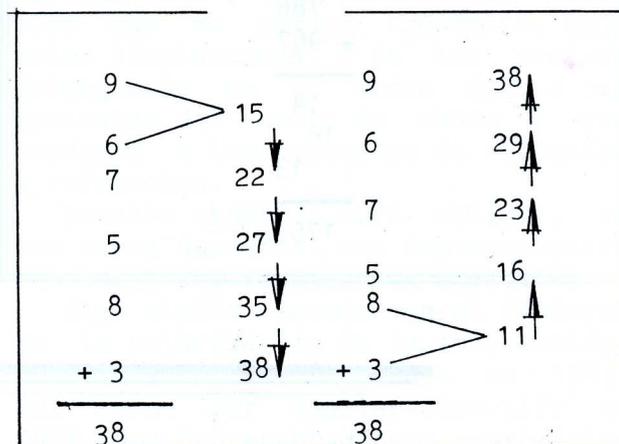
$$75+63+25+47+ = (75+25)+(63+47)$$

Si bien es cierto que estas habilidades no son propias de un principiante, se trata de llegar a ellas, de habituarle al uso de destrezas básicas como la búsqueda de decenas (11):



La utilización de registros intermedios como los anteriores, es de considerar como una pre-etapa conveniente, ya que evita errores y da confianza.

El ejemplo usual de adición con registros, es la anotación de las sumas parciales:



Cuando se trata de sumar números de varias cifras:

786	786
+ 967	+ 967
-----	-----
13	13
140	14
1600	16
-----	-----
1753	1753

Esta última disposición práctica tiene sus ventajas (12):

-No hay que memorizar ninguna cifra.

-Al escribir todas las sumas parciales, en caso de error, éste salta a la vista.

-Abre el camino al algoritmo de la multiplicación; cada fila se inicia debajo del sumando que la origina.

-El énfasis está en colocar cada suma en su sitio, y no en el orden de cálculo, lo que permite sumar como se quiera:

De izquierda a derecha:

786
+ 967

16
14
13

1753
Empezando por el centro:
786
+ 967

14
16
13

1753

Y también escribir de otra manera, por ejemplo en diagonal:

786
+ 967

111
643

1753

REFERENCIAS

1. PAIGE, D.D. et al., Elementary Mathematical Methods, New York: John Wiley & Sons, 1978.
2. VERST, F.R., A Catalog of Models for the Operations of Addition and Subtraction of Whole Numbers. Educational Studies in Mathematics, 1969, 2, 58-69.
3. PAIGE et al., Op. cit.
4. CARPENTER & MOSER. The Acquisition of Addition and Subtraction Concepts in Grades One through Three. Journal for Research in Mathematics Education, 1984, 15, 3, 180-202.
5. A.T.M. Notes on Mathematics for Children, Cambridge: Cambridge University Press, 1977.
6. CARPENTER & MOSER. The Acquisition of Addition and Subtraction Concepts. En Lesh & Landau. Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. New York: Academic Press, 1983.
7. VEST, F.R., Op. cit.
8. PAIGE et al., Op. cit.
9. GOMEZ, B., El cálculo Aritmético: Los Algoritmos, Valencia: Albatros, 1983.
10. N.C.T.M., Matemáticas Modernas para Profesores de Enseñanza Elemental, Madrid: Santillana, 1976.
11. A.T.M., Op. cit.
12. GOMEZ, B., Op. cit.