Revista de Investigación en Educación, nº 8, 2010, pp. 97-107 ISSN: 1697-5200
http://webs.uvigo.es/reined/ eISSN: 2172-3427

ARTÍCULO ORIGINAL

Concepciones de los números decimales

Bernardo Gómez Alfonso
bernardo.gomez@uv.es
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Valencia

RESUMEN. En este artículo se describen las principales concepciones de los números decimales, a la luz de lo que está reflejado en los libros de texto representativos de los últimos cien años. Se da cuenta de las implicaciones educativas más sobresalientes de estas concepciones y se hace un breve recorrido por sus antecedentes históricos.

PALABRAS CLAVE. Didáctica de las Matemáticas, Formación de Profesores, Aritmética, Decimales, Concepciones.

Conceptions of decimal numbers

ABSTRACT. This article describes the main concepts of decimal numbers, in Light of what reflected in the texbooks are representative of the last hundred years. He realizes the most significant educational implications of these concepts and a brief tour of its historical background.

KEYWORDS. Teaching of Mathematics, Teacher Education, Arithmetic, Decimals, Conceptions.

Fecha de recepción 20/10/2010 · Fecha de aceptación 29/10/2010
Dirección de contacto:
Bernardo Gómez Alfonso
Escuela Universitaria de Magisterio "Ausias March"
C/ Alcalde Reig, 8. 46006 – Valencia (España)

1. INTRODUCCIÓN

Las concepciones que los estudiantes construyen de los conceptos matemáticos dependen de los acercamientos o enfoques escolares con que la enseñanza los pone a su alcance. La palabra concepción se usa aquí en el sentido de Artigue (1984), para establecer una distinción entre el objeto matemático que es único y las significaciones variadas que le pueden asociar los estudiantes, a medida que su conocimiento va evolucionando hacia un estatus superior.

La identificación y caracterización de las concepciones que los estudiantes construyen a medida que avanzan en el estudio de las matemáticas es un tema que ha despertado el interés de los investigadores en didáctica de las matemáticas porque, como se ha señalado (Brousseau, 1998: 142), son conocimientos que, en algunos casos, se constituyen en obstáculos para el aprendizaje, en torno a los cuales se reagrupan los errores recurrentes.

Además, el estudio de las concepciones permite conocer el efecto de la enseñanza al determinar qué es lo que realmente están aprendiendo los estudiantes y tomar decisiones al respecto.

2. CONCEPCIONES PETRIFICADAS DE LOS DECIMALES

También son muy importantes las concepciones destiladas en los libros de texto o, por usar la terminología de Puig (2006), las *cogniciones petrificadas*. Él considera la búsqueda de cogniciones petrificadas una manera de examinar los textos de matemáticas de épocas pasadas propia de la Didáctica de las Matemáticas y explica el término *cogniciones petrificadas* de la siguiente manera:

> "Petrificadas porque están ahí, en el texto que nos ha legado la historia, como en los monumentos de piedra de los que no cabe esperar que digan más de lo que ya está en ellos. Cogniciones porque lo que queremos leer en esos textos no es el despliegue de un saber, las matemáticas, sino el producto de las cogniciones (matemáticas) de quien se declara como su autor" (Puig, 2006:113).

En la investigación afín precedente sobre las concepciones de los decimales, quizá el trabajo más relevante sea el de Brousseau (1983, 1998), quien señala que la presentación actual de los decimales en el nivel elemental es el resultado de una larga evolución, conforme a una concepción inicial que se remonta al mismo Stevin (1585); teniendo en cuenta su utilidad, los decimales iban a ser enseñados a todo el mundo lo más pronto posible, asociados a un sistema de medida, y refiriéndose a las técnicas operatorias de los enteros (Brousseau, 1983: 177).

Con el paso del tiempo, las prácticas de enseñanza han utilizado diversos contextos para introducir los decimales y estos han dado lugar a concepciones o cogniciones sobre los mismos que constituyen maneras diferentes de entenderlos.

3. PRINCIPALES CONTEXTOS EN LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS DECIMALES

Una revisión de una muestra representativa de los libros de texto vigentes desde la implantación y generalización del sistema público de enseñanza permite distinguir tres contextos principales en la enseñanza de los números decimales y un cuarto subsidiario de los anteriores. Aquí, usamos la denominación números decimales sin más pretensión que la de referirnos a las expresiones numéricas con coma decimal, evitando así entrar en el debate de si son verdaderos números o no lo son.

3.1. Contexto de la numeración

Los números decimales se originan al prolongar el principio del valor relativo del sistema de numeración posicional de base diez en el sentido opuesto al de los números naturales.

Para un número, cada cifra tiene asignado un valor relativo que es el valor de orden de unidad. El valor de un orden de unidad es diez veces el valor del orden de unidad de la cifra inmediata de su derecha, o la décima parte del valor de orden de unidad de la cifra inmediata de su izquierda.

La coma decimal se introduce como marca, "para prevenir el equívoco y no dar lugar a tomar las unidades por decenas" (Bézout, 1788: 7). Es decir, a fin de poder distinguir las cifras que corresponden a un orden de unidad inferior a la unidad natural, lo que en notación científica significa pasar de las potencias positivas a las potencias negativas de la base.

0'03 = 3x10-2 de la misma manera que 300 = 3x102

El sistema de escritura decimal recuerda un poco a la recta numérica; aquí, como allí, hay un «punto medio fijo» que marca el cambio de sentido: en la recta numérica, el cero, y en los decimales, la coma, a partir de ésta hacia la izquierda comienzan los números «grandes», y, hacia la derecha, los números «pequeños» (Seiffert, 1978: 141).

Un ejemplo ilustrativo del acercamiento escolar a los decimales en el contexto de las reglas de numeración es el que se recoge en el siguiente extracto de un libro de enseñanza del siglo XX:

> "NÚMEROS DECIMALES.- Si a la derecha de las unidades simples escribimos una cifra cualquiera, esta cifra representará unidades diez veces menores que las unidades enteras.
>
> Esas unidades se llaman décimas.
>
> Si a la derecha de las décimas escribimos otra cifra, representará unidades diez veces menores que las décimas, y se denominan centésimas.
>
> Si a la derecha de las centésimas escribimos otra cifra, representa unidades diez veces menores que las centésimas, y se llaman milésimas.
>
> Continuando de este modo tendremos, diezmilésimas, cienmilésimas, millonésimas, etc.…

Estos números se llaman decimales, y para distinguir la parte entera de la propiamente decimal se coloca a la derecha de las unidades simples una coma en esta forma 4,35" (Ascarza, 192?: 24).

3.2. Contexto de medida

Los números decimales se construyen a partir de la expresión numérica de cantidades en términos de unidades y subunidades de medida en el Sistema Métrico Decimal. La coma decimal es la marca que sirve para diferenciar la unidad principal de medida de las subunidades convencionales de medida, y actúa como el indicador que señala el paso de la una a las otras. El siguiente ejemplo extraído de un libro, también del siglo XX, ilustra este acechamiento a los decimales en el contexto de medida:

Escritura de números que expresan longitudes
Escribamos en una tabla el resultado de medir tres longitudes:

	km	hm	dcm	m	dm	cm	mm
1ª longitud			2	7	3	2	5
2ª		1		5		4	3
2ª					2	5	

Podemos, igual que con los números enteros, suprimir las columnas a condición de saber reencontrar el rango de cada múltiplo o submúltiplo. Por eso
1º Se pone una coma después de la cifra de los metros, siendo aquí el metro la unidad principal.
2º Se pone un cero en las columnas donde no hay cifra entre la primera cifra significativa de la izquierda o el cero de las unidades, y la última cifra significativa de la derecha.
Los números que figuran en la tabla de arriba se escriben:
27m,325 105m,043 0m,25
Y se leen:
27 metros 325 milímetros; 105 metros, 43 milímetros; 0 metros 25 centímetros.
A estos números se les llama decimales (Millet, 1923: 12-13).

3.3. Contexto de las fracciones decimales

Los números decimales se presentan como una nueva forma de escritura de las fracciones decimales, $a/10^n$, consideradas éstas como un caso particular de las fracciones a/b. Así: 0'2 es otra manera de decir 2/10.

¿Qué son quebrados decimales?

R. Son unos quebrados que tienen por denominador la unidad seguida de ceros.

P. ¿Cómo nos formaremos una idea exacta de los decimales?

R. Concibiendo la unidad dividida en diez partes iguales, que se llama cada una décimas de la unidad: Cada décima dividida en diez partes que se llaman centésimas. Cada centésima …

P. ¿Cómo se diferencian los enteros y los decimales en la escritura?

R. Poniendo entre los enteros y los decimales una coma, y esta da a entender que lo que se halla a la izquierda son enteros, y lo que se halla a la derecha decimales (Carrillo, 1849)

3.4. Contexto de la ampliación de los campos numéricos

Cabe un considerar un cuarto contexto que es subsidiario de los anteriores. En el contexto de la ampliación de los campos numéricos se usan los decimales como idea intuitiva de número real: los números decimales para los números racionales y las expresiones decimales infinitas no periódicas para los números irracionales.

Al considerar los números racionales como clases de equivalencia de fracciones, el conjunto formado por las fracciones 1/2, 2/4, 3/6, …, determina un número racional, que puede ser representado por cualquiera de esas fracciones. Pero ese mismo conjunto de fracciones expresa una relación invariante que cuantifica la relación entre el numerador y el denominador independientemente de cuál sea la fracción elegida. Esta relación es una razón numérica, que da lugar al concepto de "mitad", y que puede representarse mediante el número decimal 0'5. Vistos de esta manera los números decimales encierran el concepto de razón numérica que define a los números racionales, o lo que determina, usando la terminología conjuntista las clases de equivalencia que definen Z/~.

Por otra parte, al calcular el valor numérico de los radicales, como por ejemplo $\sqrt{2}$, se obtiene una expresión decimal infinita, y no periódica. Estas expresiones decimales no son fracciones, aunque cualquier estudiante las consideraría como un número determinado, naturalmente no racional, y por tanto irracional. Vistos de esta manera los números decimales infinitos no periódicos encierran la idea de número irracional.

Ahora bien, ya que los números racionales y los irracionales quedan determinados mediante expresiones decimales (finitas, periódicas o infinitas no periódicas) y admitiendo que juntos constituyen los números reales, se puede entender que los decimales son la expresión numérica de la recta real.

Bajo estas consideraciones, se puede decir que los números son aquello que viene expresado mediante decimales o aproximaciones decimales, y sin pararse a pensar que sólo se trata de aproximaciones, los decimales se constituyen en concepto intuitivo del número real.

4. IMPLICACIONES EDUCATIVAS

Los ejemplos anteriores muestran enfoques diferentes para organizar la enseñanza de los números decimales. Estos enfoques están condicionados por decisiones curriculares que afectan al orden y enlace de las ideas matemáticas. Así, por ejemplo, si la medida se enseña antes que las fracciones, como ocurre en Rey Pastor y Puig Adam (1936), los decimales se enseñan antes que las fracciones y en el contexto de la medida; y recíprocamente, si las fracciones se enseñan antes que la medida, como en la mayoría de los libros de texto actuales, los decimales se enseñan en el contexto de las fracciones decimales y antes que la medida.

En cualquier caso, todas las opciones tienen sus implicaciones educativas, algunas de las cuales se resaltan a continuación.

4.1. Enfoque de las reglas de numeración

Introducidos en el contexto de las reglas de la numeración, los decimales surgen de un modo de designación que no dota a estos objetos de estatus de verdaderos números, distintos de los ya conocidos, necesarios porque permiten resolver problemas que sería imposible resolver en el dominio de los números naturales.

Así, los números con coma decimal, aparecen como números abstractos, que se incorporan al universo de los números naturales, pero de los que se desconoce su razón de ser, ya que se obvian los problemas reales que permitirían dar cuenta de la necesidad de su incorporación al sistema numérico. Es decir, se presenta un modelo matemático de un fenómeno, pero no los fenómenos que modeliza: los problemas donde encuentra su origen y a los que permite dar solución.

Bajo este enfoque, la secuencia de enseñanza de los números decimales se limita a extender las reglas de la numeración, incorporar la coma decimal y ampliar el papel del cero, que adquiere nuevos significados, como se muestra en el siguiente ejemplo:

> Y a fin de poder distinguir unas de otras las distintas unidades numerales que con el mismo signo 1 han de consignarse, se ha establecido.
>
> a) Marcar con una coma invertida el 1 que designe unidad fundamental, así 1□; coma que se llama *signo decimal*.
>
> b) Que cada 1 represente unidad fundamental del orden que designe el lugar que ocupe, respecto al 1□ fundamental, colocando a la izquierda los que hayan de marcar unidades numerales superiores o

mayores que la fundamental; y a la derecha los que tengan que expresar unidades inferiores o menores que aquella …

c) *Del signo cero, 0.* Para expresar aisladamente alguna unidad numeral, distinta de la fundamental, se emplea un signo auxiliar, 0, para fijar el lugar que a la izquierda o a la derecha de la fundamental le corresponde por su orden superior o inferior. Y al mismo *0* se le coloca el signo decimal, cuando haya de ocupar el lugar de la unidad fundamental. Escrito dicho signo a la derecha 10 hace que el 1 designe el orden primero superior, *diez*, y puesto a la izquierda hace que el 1 designe el orden primero inferior, *décimo*; 100 y 0’01 denotan respectivamente las unidades segundas numerales, ciento y centésimo, …
Tres son, pues, los signos que se requieren para la notación de todas las unidades numerales: el uno, 1, el signo decimal y el cero (Suárez, 193?:12-13)

En relación con los nuevos significados del cero, obsérvese que, así como con los enteros, los ceros a la izquierda de la cifra significativa de orden superior no alteran su valor posicional: 2, 02, 002, 0002, …, con los decimales ocurre lo contrario, los ceros a la izquierda de la cifra significativa de mayor orden después de la coma decimal si que modifican su valor posicional: 0’2, 0’02, 0’002, …

A la recíproca, con los enteros, los ceros a la derecha de la última cifra significativa modifican su valor posicional: 2, 20, 200 … ; mientras que los ceros a la derecha de la última cifra decimal no modifican su valor: 0’2, 0’20, 0’200, 0’2000, …

Un efecto perverso de este enfoque de presentación de los números decimales es que induce a pensar que sólo es decimal la parte a la derecha de la coma. Esta idea se ve reforzada cuando se dice que las cifras a la derecha de la coma se llaman decimales, como así se desprende del comentario del siguiente ejemplo:

Las cifras a la derecha de la coma se llaman cifras decimales, o simplemente decimales (Bruño, 1933).

En la práctica escolar también se refuerza esta idea inconscientemente por el uso cotidiano de los algoritmos de la suma y de la resta, donde se operan entre sí y por separado las partes enteras y decimales.

También refuerza esta idea la forma de leer los decimales, como por ejemplo cuando 3’25 se lee “tres veinticinco”, o incluso la práctica con las calculadoras por su introducción temprana y excesivamente mecánica; una consecuencia de ello es la reticencia de los estudiantes a abreviar los resultados obtenidos de acuerdo con las reglas de posición, y que les lleva a escribir $0'4 \times 10^{-2}$ en vez de 4×10^{-3}.

4.2. Enfoque de la medición

Al introducir los números decimales como una forma de codificar la medida en el Sistema Métrico Decimal, se asimilan a otra manera de escribir los números naturales concretos, que no se puede desligar de la unidad de medida, ni del modo de codificar la medida de magnitudes en el Sistema Métrico Decimal.

Esta presentación de los números decimales como medidas en el S. M. D. tiene la ventaja de que promueve un manejo temprano de las unidades convencionales. Su funcionamiento operatorio es idéntico al de los naturales, pero tiene restricciones, como por ejemplo que el producto de cantidades de longitudes da como resultado una cantidad de área, donde intervienen otras nuevas unidades de medida.

Bajo este enfoque, la secuencia de enseñanza se limita a mostrar cómo se reduce un número compuesto de unidades de diversos órdenes de unidad a una sola unidad; pero no a la unidad inferior, sino a la unidad fundamental. Así es como se dice en el siguiente ejemplo:

Reducción de complejos decimales. Números decimales.- Antes de ahora hemos hablado, por ejemplo, de una longitud, como 8 dam. 3 m. 4 dm., cuya medida está compuesta de unidades de diversos órdenes. Salta a la vista la incomodidad de manejar en la escritura práctica números complejos de esta forma. Más cómodo será poner 834 dm., es decir, reducir a incomplejo de la unidad inferior, como vimos; pero aún tiene esto sus inconvenientes.

Supongamos que con aparatos de mayor precisión llegáramos a determinar la longitud 8 dam. 3 m. 4 dm. 7 cm. 5 mm. La reducción a incomplejo nos daría ahora 83475 mm. La unidad de la notación reducida sería, pues, distinta según la precisión de los aparatos de medida. Se evita esto tomando la misma unidad de referencia fundamental, única que se consigna .... Así, tomando como unidad el metro, expresaremos aquellas longitudes de este modo: 83,4 m. ; 83,475 m. (Rey Pastor y Puig Adam, 1936: 154).

4.3. Enfoque de las fracciones decimales

Al introducir los números decimales como una nueva forma de escritura de las fracciones decimales, los decimales aparecen como un caso particular de las fracciones y todas sus proposiciones se obtienen derivadas de las proposiciones de las fracciones en general.

Los números decimales se construyen aquí de un modo intra-numérico, ya que utilizan las fracciones decimales de la unidad 1/10; 1/100 … , o unidades decimales, que son elementos abstractos desligados de la medida. Estas unidades decimales generan por iteración y mediante el conteo el nuevo conjunto numérico de las fracciones decimales. El proceso es similar al que se sigue en la construcción de los números fraccionarios que se generan por iteración de las unidades fraccionarias, como se ilustra en el ejemplo siguiente:

Número fraccionario. – Así como de la reunión de unidades enteras, por ejemplo: un árbol + un árbol + un árbol, resulta un número entero: 3 árboles, del mismo modo de la reunión de unidades fraccionarias, por ejemplo, 1/5 + 1/5 + 1/5: resulta el número fraccionario o quebrado: 3/5, … (Textos E. P., 1959: 256).

Este proceso, que es el mismo que ocurre con los números naturales cuando se generan por iteración de la unidad, permite decir definir el número decimal como el que consta de unidades decimales:

Número decimal es el que consta de unidades decimales (Bruño, 1933: 16).

Puesto que los números formados por la unidad seguida de ceros son potencias de 10, esto es la base de nuestro sistema de numeración, y las unidades decimales son las que tienen por denominador potencias de diez, los nombres de las unidades decimales se forman de los nombres de las unidades enteras cambiando su terminación por "ésima". Así de diez, décima; de cien, centésima; de mil, mil-ésima; de millón de millón-millón-ésima, etc.

Además, como la relación entre cada dos unidades decimales sucesivas es análoga a las de las unidades enteras y toda fracción decimal admite una descomposición en unidades decimales se pueden utilizar los mismos principios del sistema de numeración posicional para representarlas. Así es como se justifica lo que se llama la forma entera de un decimal, como se ve en el siguiente ejemplo:

Se llaman fracciones decimales aquellas cuyo denominador es una potencia de 10, es decir, la unidad seguida de ceros …

Unidades decimales. Cuando el numerador de la fracción es 1, la fracción se llama unidad fraccionaria decimal. Según que el denominador sea la unidad seguida de 1, 2, 3, … m, … ceros, las unidades decimales se llaman de primer orden, de segundo orden, de tercer orden. … de enésimo orden, o también: décimas, centésimas, milésimas …

Forma entera de las fracciones decimales. Puesto que la relación entre cada dos unidades decimales sucesivas es análoga a las de las unidades enteras y toda fracción decimal admite una descomposición en unidades decimales, podemos ampliar el principio del valor relativo de la numeración entera representando cada fracción decimal por el símbolo que se obtiene escribiendo de izquierda a derecha las cifras que representan las unidades de órdenes sucesivos decrecientes y poniendo una señal (coma o punto) para separar la parte entera de la parte decimal (Rey Pastor y Puig Adam, 1936, p. 60).

El proceso concluye explicando cómo se leen los números decimales. Ahora se ofrecen tres alternativas:

Para leer los números decimales se enuncia primero la parte entera y después la decimal. Esta última se lee de tres modos:

a) enunciando solo el orden de la última cifra
b) enunciando el orden de cada cifra
c) enunciándola por grupos de 3 en 3 cifras

Ejemplos:
7'25 se lee: 7 enteros y 25 centésimas
43'54897 se lee de tres modos

a) 43 enteros y 54897 cienmilésimas
b) 43 enteros, 5 décimas, 4 centésimas, 8 milésimas, 9 diezmilésimas y 7 cienmilésimas.
c) 43 enteros, 548 milésimas y 97cienmilésimas (Edelvives, 1949: 90).

5. LA CONCEPCIÓN PRIMITIVA

Las concepciones de los números decimales son el resultado de un largo proceso de evolución histórica que, aunque se remonta a la publicación de "La Disme" de Stevin (1585), tiene antecedentes cuyo rastro se pierde en el legado matemático hindú. Seguramente, su antecedente más inmediato sea el proceso conocido como la "valuación numérica".

5.1. La "valuación" numérica mediante fracciones decimales

Antes de usar la coma decimal era un problema práctico trabajar con expresiones como 1/3 o √3, cuando se requería conocer el valor numérico de la cantidad que representan de una manera más reconocible.

Mientras se podía se recurría a usar con nombres propios unidades que son submúltiplos de otras unidades mayores. Esto es lo que hacía, por ejemplo, cuando se usa el gramo en vez de la fracción 1/1000 de kilo. De esta manera no se tenía que calcular con fracciones porque se disponía de expresiones enteras equivalentes. En efecto, pudiendo sumar como 2 y 3 gramos qué necesidad había de sumar como 2/1.000 y 3/1.000 de kilo. Esta artimaña que se basaba en expresar una cantidad en unidades de especie inferior, permitía "valuar" de la cantidad.

Pero cuando esta artimaña no era posible se podía recurrir a una vieja técnica hindú que se apoyaba en las fracciones decimales. Al aplicar esta técnica se conseguía "valuar" cantidades, como √3, o 2/7. La técnica consistía en reescribir el radicando o la fracción en forma de fracción decimal.

Por ejemplo, para "valuar" √3, se puede usar cualquiera de las siguientes equivalencias:

$$\sqrt{3} = \sqrt{\frac{300}{100}} = \sqrt{\frac{30.000}{10.000}} = \sqrt{\frac{3.000.000}{1.000.000}} = ... = \sqrt{\frac{3 \times 10^{2n}}{10^{2n}}}$$

Estas raíces, tienen en el denominador una potencia par de de 10, que es un cuadrado perfecto y por tanto con raíz exacta. La raíz del numerador, en cambio, no tiene un valor exacto, pero tiene una parte entera que es mayor cuanto mas ceros se utilicen. Al calcular esta parte entera se logra aproximar el valor de √3 tanto como se quiera, acotándolo mediante fracciones decimales en un proceso de encaje sucesivo, de modo que cuántos más ceros se tomen más cifras se podrán obtener para aproximar la raíz original dada:

$$\frac{17}{10} \prec \sqrt{3} = \sqrt{\frac{300}{100}} \prec \frac{18}{10};$$
$$\frac{173}{100} \prec \sqrt{3} = \sqrt{\frac{30.000}{10.000}} \prec \frac{174}{100};$$
$$\frac{1732}{1000} \prec \sqrt{3} = \sqrt{\frac{3000.000}{1000.000}} \prec \frac{1733}{1000};$$
$$\ldots$$

De modo análogo se valúan las fracciones. Por ejemplo, para valuar 2/7, se comienza por reescribir la fracción en forma de fracción decimal, como antes, pero ahora cuidando de convertir las equivalencias:

$$\frac{2}{7} = \frac{20}{70} = \frac{200}{700} = \frac{2000}{7000} = \ldots = \frac{2 \times 10^{2^n}}{7 \times 10^{2^n}}$$

en estas otras:

$$\frac{2}{7} = \frac{20/7}{10} = \frac{200/7}{100} = \frac{2000/7}{1000} = \ldots = \frac{2 \times 10^{2^n}/7}{10^{2^n}}$$

Al hacer las divisiones que aparecen en los numeradores no se obtiene, como antes, un valor exacto, pero sí se obtiene un cociente con una parte entera que es mayor cuanto mas ceros se utilicen. Se logra así aproximar el valor de 2/7 tanto como se quiera, acotándolo mediante fracciones decimales, en un proceso de encaje sucesivo, de modo que cuántos más ceros se tomen más cifras se podrán obtener para aproximar la fracción original dada:

$$\frac{2}{10} \prec \frac{2}{7} = \frac{20/7}{10} \prec \frac{3}{10};$$
$$\frac{28}{100} \prec \frac{2}{7} = \frac{200/7}{100} \prec \frac{29}{100};$$
$$\frac{285}{1000} \prec \frac{2}{7} = \frac{2000/7}{1000} \prec \frac{286}{1000};$$
$$\ldots$$

5.2. La división decimal

Al transformar la fracción 2/7 en una división que se puede proseguir a discreción sin más que ir añadiendo ceros: 20:7, 200:7, 2000:7, … se llega al proceso conocido como división decimal que se aprende en la escuela. Bien entendido que para obtener la fracción decimal equivalente a 2/7, hay que tener la precaución de dividir los cocientes obtenidos en la divisiones: 20:7, 200:7, 2000:7, …, por la unidad seguida de tantos ceros como ceros se han añadido al numerador 2. Es decir, 20:7/10, 200:7/100, 2000:7/1000, …, o lo que es lo mismo:

```
 2,000000 … : 7
-14              285714 … /1000000…
  60
 -56
   40
  -35
    50
   -49
     10
     -7
      30
     -28
       2
```

Y ese es el proceso de división decimal para “sacar decimales” mediante el algoritmo usual de la división, cuya formulación matemática queda encerrada en la siguiente igualdad:

$$\frac{D}{d} = \frac{10^n \frac{D}{d}}{10} = \frac{\frac{D \times 10^n}{d}}{10^n}$$

5.3. Una notación mejor que la fraccionaria

Llegados a este punto, los antiguos matemáticos estaban a un paso de lograr una expresión más cómoda como respuesta a la “valuación” numérica de las cantidades. Sólo les faltaba interpretar las fracciones decimales bajo los principios del sistema de numeración posicional de base diez. Es decir, solo les faltaba cambiar una forma de escritura por otra, como se muestra a continuación:

$$0'2 = 2/10 < 2/7 = \frac{20/7}{10} < 3/10 < 0'3$$
$$0'28 = 28/100 < 2/7 = \frac{200/7}{100} < 29/100 = 0'29$$
$$0'285 = 285/1000 < 2/7 = \frac{2000/7}{1000} < 286/1000 = 0'286$$

El paso decisivo a la notación con coma decimal se produjo a finales del siglo XVI. En ese siglo ya se defendía el uso de las fracciones decimales en vez de las sexagesimales para evaluar los resultados de determinados cálculos. El reconocimiento de la importancia de lo que hoy conocemos como expresión decimal, se debe a Stevin, quien publicará "La disme" (1585), un libro donde defendió una notación mejor que la fraccionaria, porque "permite efectuar los cálculos con fracciones, propios de los negocios, usando las mismas reglas de los enteros".

Aunque Stevin presenta por primera vez las reglas para operar con decimales, no recoge la notación del punto o la coma para separar la parte entera de la parte decimal. En su notación escribía los números con parejas de símbolos formadas por una cifra en el papel de multiplicador y un círculo con un número que indicaba el orden de unidad.

$$27\,⓪\,8\,①\,4\,②\,7\,③ \quad \text{para indicar} \quad 27\,\frac{847}{1.000}$$

$$\text{o lo que es lo mismo } 27+8\,\frac{1}{10}+4\,\frac{1}{100}+7\,\frac{1}{1000}$$

Con el tiempo y en aras de mayor abreviación los círculos indicativos de las fracciones decimales unitarias dejaron de escribirse, una vez admitido un signo para separar la parte entera de la fraccionaria.

La generalización de la notación decimal estuvo impulsada por el mayor uso de los valores trigonométricos para facilitar su uso y operación, especialmente tras la invención de los logaritmos (S. XVII). Pero el hecho más relevante en este camino fue el establecimiento de un sistema unificado de pesas y medida conocido como Sistema Métrico Decimal.

5.4. La concepción de lo periódico: Llevando la notación decimal al límite

Con las fracciones que no equivalen exactamente a una fracción decimal, como es por ejemplo el caso de 1/3, al hacer las divisiones 1:3, 10.3, 100.3, … 10^k : 3 no se puede obtener un número entero, ya que 3 no es divisor de 10^k. Por lo tanto, en el cociente no podrá aparecer un número de cifras significativas finito; o lo que es lo mismo, el proceso de división debe ser interminable, con un número infinito de pasos, con infinitas cifras en el cociente y con infinitos restos parciales.

Pero los restos, por el hecho de serlos han de ser enteros menores que el divisor, luego sólo hay d-1 valores posibles para cada uno de esos infinitos restos. Al cabo de d cifras decimales, a lo sumo, algún resto k deberá repetirse, pero además todos los restos se repetirán en el mismo orden en que aparecieron a partir de este primer resto k. Si los restos se repiten, se han de repetir las cifras del cociente, dando lugar a un grupo de cifras cíclico que se denomina periodo.

Como se ha mostrado antes en el proceso de "valuación" realizado acotando con fracciones decimales mediante encajes sucesivos, resulta que una fracción, como por ejemplo 1/3, se puede aproximar tanto como se quiera

$$0 < 1/3 < 1$$
$$0'3 = 3/10 < 1/3 < 4/10 = 0'4$$
$$0'33 = 33/100 < 1/3 < 34/100 = 0'34$$

Este proceso da lugar a una doble sucesión ilimitada de términos, la de la arriba es la de los cocientes por defecto y la de la abajo la de los cocientes por exceso:

0´3, 0'33, 0,333, …, 0'333...33

y

0´4, 0'34, 0,334, … , 0´333...34

Esta doble sucesión acota por arriba y por abajo a la fracción, 1/3, encajándola en una sucesión de intervalos cada vez más pequeños, ya que cada uno está contenido en el precedente:

Pero 1/3 no coincidirá nunca con ninguno de las fracciones decimales que la acotan. No obstante, esta sucesión de “intervalos encajados” verifica que su longitud es tan pequeña como se quiera sin más que avanzar lo suficiente en su construcción, es decir, tiende a cero. Lo razonable es pensar que en el límite entre estos intervalos encajados sólo quedará el punto 1/3. Si hubiera otro punto distinto Q la distancia entre ellos dos, |1/3-Q|, sería un valor numérico distinto de cero, lo que entraría en contradicción con la tendencia a cero de la distancia entre los extremos de los intervalos que encajan a 1/3.

También es razonable pensar que el límite de cualquiera de las dos sucesiones laterales, por ejemplo 0'333... debe ser 1/3, porque en otro caso, si fuera un punto distinto de 1/3, entre el límite de 0'333... y 1/3 cabrían otros puntos, y esto iría en contra de la forma en que se ha construido 0'333.... Luego hemos de aceptar que el limite de 0'333... define perfectamente a 1/3 y decimos que 1/3 = limite de 0'333..., escrito abreviadamente $0'\overline{3}$.

En la práctica los estudiantes no conciben que las expresiones como $0'\overline{3}$ o $0'\overline{9}$ sean un límite, sino que las consideran como el resultado de una división que nunca se acaba. Por eso, no aceptan que $0'\overline{9}$ pueda ser igual a 1 y creen que aunque esa expresión tiene tantos ceros como se quiera, infinitos, nunca llegaran a alcanzar al uno.

6. EPÍLOGO

A lo largo de este documento se mostrado que la enseñanza de los números decimales se puede hacer desde diversos enfoques, cada uno con sus correspondientes sutilezas e implicaciones educativas.

Unas sutilezas afectan al orden de presentación de los decimales y de las fracciones, según que se enseñe antes las fracciones o la medida; otras a las cogniciones petrificadas reflejadas en los libros de texto y otras a las cogniciones que desarrollan los estudiantes cuando están intentando aprender lo que son los números decimales.

Parece una buena idea que sutilezas e implicaciones educativas como las mencionadas aquí puedan ser usadas en la formación de profesores, para facilitar su conocimiento acerca de la naturaleza de las matemáticas y de su enseñanza, contestando a cuestiones como, por ejemplo: ¿cuáles son las razones que hay detrás de la elección de una cierta definición?, ¿qué implicaciones tiene? o ¿qué decisiones explican el orden de las ideas matemáticas o por qué se presentan unas nociones antes o después que otras?

Pero lo que parece aún más importante es aprovechar el valor que tiene observar las diferencias de estas concepciones, para señalar que en matemáticas el aprendizaje no debe confiarse exclusivamente a lo que está escrito en un determinado manual o libro de texto, porque hay concepciones, como las que se han discutido aquí, que producen confusión por omisión de información o por la misma información que reproducen.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M (1984). *Contribution a l’étude de la reproductibilité des situations didactiques. divers travaux de mathématiques et de didactique des mathématiques*. Thése de Doctorat d’Etat. Université Paris VII.

Ascarza, V. F. (193?). *Tratado de Aritmética*. 3ª ed (para E. Normales). Madrid: El magisterio Español

Bézout, M. (1788). *Cours de Mathématiques à l’usage du Corps Royal de L’Artillerie*. Tome premier. Paris : De L’Imprimerie de Ph. Pierres.

Bruño (1933). *Primeras nociones y primeros ejercicios de Aritmética*. Libro del alumno. Sexta edición. Madrid, Barcelona : La instrucción popular, S. Author.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problémes en Mathématiques. *Recherches en didactique des Mathématiques. 4, (2)*, 164-198.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

Carrillo, D. (1849). *Aritmética de niños*. Arreglada para el uso de las escuelas. Tenerife: Imprenta, Lithografía y Librería Isleña

Edelvives (1949). *Aritmética de primer grado*. Zaragoza: Ed. Luis Vives.

García Roca, R. (1965). *Matemáticas. Primer curso*. Valencia: Editorial Bello (Plan 1957).

Millet, A. (1923). *Arithmétique 1re, 2e, 3e Années. Brevet Elementaire*. Programmes de 1920. Paris: Hachette.

Puig, L. (2006). *Vallejo Perplejo*. En Maz, A., Rodríguez, M. y Romero, L., *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la Educación Matemática,* (pp.113-138). Córdoba: Servicio de Publicaciones, Universidad de Córdoba.

Rey Pastor, J. y Puig Adam, P. (1936). *Matemáticas 4º curso*. Madrid: Unión Poligráfica, S. A.

Seiffert, H. (1978). *Introducción a la matemática*. Barcelona: Herder

Stevin, S. (1585). La Disme. En Girard (ed.) *Les oeubres mathematiques*. Leyden.1625 ó 1634.

S.T.J. *Aritmética. Segundo grado. Tercero y cuarto curso*. Barcelona: Editorial Altés.

Suárez D. A. (192?). *Nociones de Aritmética y Geometría*. Valencia: Tipografía moderna.

Textos E. P. (1959). *Enciclopedia. Grado segundo*. Madrid: Compañía bibliográfica Española S. A. para ingreso de Bachillerato. De diez a doce años (1961). Barcelona: Vicens Vives.