Treball Fi de Grau - Curs 2022/ 2023

Les classes de Stiefel-Whitney

Autor: **José Galindo Jiménez**

Tutor: Guillermo Peñafort Sanchis

Grau en Matemàtiques

Resum

Les classes de Stiefel-Whitney són uns invariants topològics dels fibrats vectorials associant a cada fibrat una única classe de cohomologia de l'espai de la base. L'objectiu d'aquest treball és estudiar les tres maneres d'entendre les classes de Stiefel-Whitney: la definició axiomàtica, la construcció com a classes característiques i la construcció directa mitjançant l'isomorfisme de Thom, per a després vore que són equivalents. A més, vorem importants aplicacions a la topologia i a l'àlgebra.

Abstract

Stiefel-Whitney classes form a topological invariant for vector bundles, taking each bundle to a unique cohomology class of the base space. The goal of this project will be to study the equivalence between three interpretations of Stiefel-Whitney classes: the axiomatic approach, the construction as characteristic classes and direct construction using Thom's isomorphism. Furthermore, we will see some important applications on topology and algebra.

Resumen

Las clases de Stiefel-Whitney definen un invariante topológico de los fibrados vectoriales asociando a cada fibrado una única classe de cohomologia del espacio de la base. El objetivo de este trabajo es estudiar las tres maneras de entender las clases de Stiefel-Whitney: la defincíón axiomática, la construcción como clases características y la construcción directa mediante el isomorfismo de Thom, para después ver que son equivalentes. Además, veremos importantes aplicaciones a la topología y al álgebra.

Índex

Introducció **1**

1 Fibrats Vectorials **3**

1.1 Fibrats vectorials . . . 3

1.1.1 Fibrats Vectorials Euclidians . . . 10

1.1.2 Grassmannià i fibrat tautològic . . . 11

1.2 Construcció de fibrats i suma Whitney . . . 15

1.3 Fibrats Universals . . . 20

1.3.1 Grassmannià infinit . . . 23

2 Cohomologia **29**

2.1 Introducció a l'àlgebra commutativa . . . 29

2.2 Complexos de Cadenes . . . 37

2.3 Homologia d'espais topològics . . . 42

2.3.1 Homologia Simplicial . . . 42

2.3.2 Homologia Singular . . . 43

2.4 Cohomologia . . . 48

2.4.1 R-mòdul de cohomologia . . . 48

2.4.2 Cohomologia singular . . . 52

2.4.3 Cohomologia com a àlgebra anticommutativa . . . 57

2.5 CW-complexos . . . 67

2.5.1 Estructura cel·lular del Grassmannià . . . 69

2.6 Cohomologia de fibrats . . . 76

2.6.1 Producte en creu i cohomologia de l'espai producte . . . 77

2.6.2 Teorema de l'isomorfisme de Thom . . . 80

2.6.3 Operacions de Quadrats de Steenrod . . . 83

3 Classes de Stiefel-Whitney **85**

3.1 Axiomes i existència de les classes de Stiefel-Whitney . . . 85

3.1.1 Existència de les classes de Stiefel Whitney . . . 86

3.2 Cohomologia del Grassmannià $H^*(G(n,k),\mathbb{Z}/2)$ . . . 91

3.2.1 Unicitat de les classes de Stiefel-Whitney 93
3.3 Classes característiques 94
3.4 Conseqüències i aplicacions de les classes de Stiefel-Whitney 95
3.4.1 Existència de $\mathbb{R}$-àlgebres de divisió en $\mathbb{R}^n$ 99
3.4.2 Immersions 100
3.4.3 Nombres de Stiefel-Whitney i cobordisme 101

Apèndix **104**

A Varietats Diferenciables **105**
A.1 Definició de varietat i espai tangent 106
A.2 Teoremes i definicions auxiliars de varietats 109

B Espais paracompactes **113**

C Teoria de categories elemental **117**
C.1 Categories 117
C.2 Functors 119
C.3 Límits i colímits 122

Bibliografia **128**

Introducció

Les classes de Stiefel-Whitney són uns invariants topològics dels fibrats vectorials associant a cada fibrat una única classe de cohomologia de l'espai de la base. Encara que difícil de definir com ja vorem més tard, tenen gran interés ja que s'han pogut aplicar de formes variades i sorprenents:

- Un dels primers problemes per als quals es van aplicar va ser el problema de la immersió. Aquest consisteix en trobar la menor k tal que existeix una immersió d'una varietat M de dimensió n a $\mathbb{R}^{n+k}$. Whitney va provar que si era compacta $k \leq n-1$, ara bé mirant la classe de Stiefel-Whitney del tangent dels espais projectius $\mathbb{R}P^{2^r}$ es comprova que aquesta fita és exacta i per tant no es podria millorar en general.

- Altre problema és l'existència d'àlgebres de divisió reals, una qüestió purament algebraica. Doncs, les classes de Stiefel-Whitney ens proporcionen un criteri per saber si una varietat diferenciable no és paral·lelitzable. Es pot demostrar que si existeix un àlgebra de divisió en $\mathbb{R}^n$ (no necessàriament associativa) aleshores $\mathbb{R}P^{n-1}$ és paral·lelitzable. Amb això, Whitney va donar la primera demostració[1] que no existeixen àlgebres de divisió reals més enllà dels octonions. Un teorema d'àlgebra provat amb tècniques de topologia.

- Amb les classes de Stiefel-Whitney i la classe fonamental d'homologia es defineixen els nombres de Stiefel-Whitney, amb aquestos es soluciona el problema del cobordisme de comprovar si dos varietats diferenciables compactes de la mateixa dimensió són vora d'una varietat diferenciable amb vora de dimensió superior. Això passarà si i només si els seus nombres de Stiefel-Whitney són iguals.

A banda de moltes altres aplicacions com en teoria K, teoria de l'obstrucció, teoria de singularitats...
L'estudi de les classes característiques comença a fer-se en 1935 per Hassler Whitney i Eduard Stiefel de manera quasi simultània però independent. Stiefel estudiant els camps vectorials sobre el tangent de S^n va considerar unes classes d'homologia "característiques".

[1] Simultàniament, de forma independent i també gastant la topologia algebraica Michel Kervaire va arribar a la mateixa conclusió.

Whitney considerava el fibrat arbitrari d'una esfera i va definir un homomorfisme entre grups d'homologia que intuïa la correspondència de les classes, ja en 1937 va gastar la recentment inventada cohomologia per definir les classes característiques de cohomologia i en 1940 va enunciar el teorema del producte de Whitney.
L'estudi de les classes característiques va ser continuat principalment per Wu Wen-Tsün i Chern Shiing-Shen que van provar la majoria de resultats bàsics i amb l'estudi del càlcul de Schubert de l'escola italiana i les aportacions de Lev Potrjagin es va donar forma a la teoria de les classes característiques (per a més informació sobre la història vore [Die89]).

L'objectiu d'aquest treball és estudiar les tres maneres d'entendre les classes de Stiefel-Whitney, la definició axiomàtica, la construcció com a classes característiques i la construcció directa mitjançant l'isomorfisme de Thom, per a després vore que les tres són equivalents. L'estructurarem de la següent manera:

1. El primer capítol es centrarà en definir els fibrats vectorials i provar que el Grassmannià infinit és un fibrat universal amb el qual poder definir classes característiques.

2. El segon capítol tractarà de construir la maquinària tècnica de cohomologia necessària, provar l'existència de l'isomorfisme de Thom i definir les operacions de quadrats de Steenrod.

3. Al tercer capítol definirem l'axiomàtica de les classes de Stiefel-Whitney, provarem que unes classes de cohomologia definides amb l'isomorfisme de Thom i les operacions de quadrats de Steenrod satisfan l'axiomàtica anterior i vorem que defineixen unes classes característiques.

Finalment vorem algunes aplicacions immediates i algunes aplicacions clàssiques, en particular les tres primeres que hem citat al principi de la introducció.
En la mesura del possible hem intentat desenvolupar tots els conceptes i definicions de manera que tot lector amb el nivell de coneixement del grau puga seguir els raonaments, a pesar de l'amplària de requeriments tècnics necessaris per fer algunes de les construccions.

Capítol 1

Fibrats Vectorials

La motivació d'aquest capítol és primerament definir els fibrats vectorials reals i vore alguns exemples i propietats elementals, en particular construir el Grassmannià finit com a varietat diferenciable i definir el fibrat tautològic sobre el Grassmannià.
Finalment definirem la noció de fibrat universal, definirem el Grassmannià real infinit i provarem que per als $\mathbb{R}^n$-fibrats vectorials amb una base paracompacta i Hausdorff el fibrat tautològic sobre el Grassmannià infinit és un fibrat universal. Aquest capítol hem gastat com a referència principalment [MS74], les seccions 1.1, 1.2 i 1.3 als capítols (2), (6) i (3 i 6) respectivament.

Nota 1.1. Per a aquest capítol es gastaran alguns conceptes sobre varietats diferenciables amb els quals s'assumeix que el lector està familiaritzat, no obstant això, en cas contrari pot consultar l'apèndix A on trobarà les propietats elementals per tal de seguir les demostracions. També es gastarà un poc el vocabulari de teoria de categories, el lector que no estiga familiaritzat es pot referir a l'apèndix C.

1.1 Fibrats vectorials

Siga B un espai topològic anomenat com **espai base**. Aleshores definim:

Definició 1.2 (Fibrat vectorial topològic real)**.** *Un **fibrat vectorial** real topològic ξ sobre B és una aplicació $E \xrightarrow{\pi} B$, complint el següent:*

1. *$E = E(\xi)$ és un espai topològic anomenat **espai total**.*
2. *$\pi : E \to B$ és una aplicació contínua, li direm **projecció**.*
3. *Per a cada $b \in B$ tenim que $\pi^{-1}(b)$ té estructura de $\mathbb{R}$-espai vectorial. Aquest l'anomenarem **fibra** sobre b i la denotarem $F_b(\xi)$.*

4. *Per a cada $b \in B$ existeix $U \subset B$ obert, $b \in U$, $n \in \mathbb{N}$ i un homeomorfisme*

$$\varphi : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U) \tag{1.1.1}$$

*de manera que, per a tot $b \in U$, la secció $\varphi_b(x) = \varphi(b, x)$ és un isomorfisme entre $\mathbb{R}^n$ i $\pi^{-1}(b)$. Aquesta condició es coneix com **trivialitat local**, a l'homeomorfisme φ com a **trivialització local** i a l'obert U li direm **obert trivialitzant**.*

Nota 1.3. Li diem topològic per diferenciar del fibrat vectorial suau que es defineix de la mateixa manera però afegint les condicions de que E i B són varietats diferenciables i a més π i les trivialitzacions locals són suaus.
La distinció de real és per la possibilitat de definir un fibrat vectorial complex exigint que les fibres siguen $\mathbb{C}$-espais vectorials i el domini de les trivialitzacions siga amb $\mathbb{C}$.
En aquest treball anem a treballar sempre amb fibrats vectorials topològics reals i per economia del llenguatge els direm simplement fibrats vectorials.

La condició de ser localment trivial ens assegura que la dimensió de F_b és localment constant en funció de b però per a la majoria de casos que ens interessen la dimensió serà constant en tot B, en eixe cas parlarem d'un $\mathbb{R}^n$-fibrat si la dimensió és sempre n. Direm que n és la dimensió o el rang del fibrat.
Anem a vore com podem relacionar dos fibrats els fibrats entre ells.

Definició 1.4. *Considerem dos fibrats $\xi = E(\xi) \xrightarrow{\pi} B$ i $\eta = E(\eta) \xrightarrow{\pi'} B'$. Un **morfisme de fibrats vectorials** és una aplicació contínua $f : E(\xi) \to E(\eta)$ que de manera que*

1. *$f(F_b(\xi)) \subset F_{f(b)}(\eta)$ per a tot $b \in B$.*

2. *$f|_{F_b(\xi)}$ és una aplicació lineal entre espais vectorials.*

Notem a més que al ser f lineal entre fibres això ens determina unívocament una $\overline{f} : B \to B'$ de manera que fa commutar el següent diagrama:

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{f} & E(\eta) \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ B & \xrightarrow{\overline{f}} & B' \end{array} \tag{1.1.2}$$

A més per continuïtat de les projeccions es dedueix que $\overline{f}$ és contínua. Fent un abús de notació escriurem $f : \xi \to \eta$.
Amb les condicions anteriorment esmentades:

- *Si f actua com a monomorfisme entre fibres direm que és un **transformació de fibrats**.*

- *Si f és un homeomorfisme i actua com a isomorfisme entre fibres direm que és un* ***isomorfisme de fibrats****, a més direm que ξ i η són isomorfs denotat com $\xi \cong \eta$.*

De manera natural es defineix la composició entre morfismes, a més veiem que es pot definir una identitat que a més és isomorfisme. Aleshores, definim la categoria dels fibrats vectorials, que té com a objectes els fibrats vectorials i com a fletxes els morfismes entre fibrats vectorials. A falta de trobar bibliografia que la definisca com a tal, la denotarem nosaltres com a $TopBundle_{\mathbb{R}}$. A partir d'aquesta categoria podem definir la subcategoria $\mathscr{T}Bundle_{\mathbb{R}}$, com la subcategoria ampla amb els morfismes sent només transformacions de fibrats.

Definició 1.5. *Siga ξ un fibrat vectorial de dimensió n, si existeix una trivialització local que té com a domini $B \times \mathbb{R}^n$, direm que ξ és un* ***fibrat trivial****.*

Exemple 1.6. *El* ***fibrat trivial canònic*** *sobre B denotat com ε_B*

Si definim $E = B \times \mathbb{R}^n$ i $\pi : B \times \mathbb{R}^n \to B$ on $\pi(b, v) = b$ amb l'estructura d'espai vectorial donada per

$$t_1(b, x_1) + t_2(b, x_2) = (b, t_1x_1 + t_2x_2) \tag{1.1.3}$$

és clar que aquest és un fibrat trivial, el denotem com a ε_B^n.
A més, un altre $\mathbb{R}^n$-fibrat trivial sobre B és isomorf a ε_B^n, simplement cal considerar l'isomorfisme induït per la trivialització local que compleix que el seu domini és $B \times \mathbb{R}^n$.

Exemple 1.7. *El* ***fibrat tangent*** *τ_M.*

Donada una varietat diferenciable M de dimensió k, a l'apèndix A vam demostrar que era una varietat diferenciable, gastant l'estructura suau allà definida i la nomenclatura d'eixa s podem introduir: $\pi : TM \to M$ de manera que $\pi(v) = \alpha(0)$ on $[\alpha] = v$. L'estructura d'espai vectorial a $\pi^{-1}(x) = T_xM$ l'òbvia.
Aplicant la representació local, amb la notació de A.26 podem vore que és suau i per tant contínua:

$$\overline{\pi} = \varphi \circ \pi \circ \phi^{-1}(u, a) = \varphi \circ \pi \left(\sum_{i=1}^{k} a_i \left. \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right|_{\varphi^{-1}(u)} \right) = \varphi(\varphi^{-1}(u)) = u \tag{1.1.4}$$

Faltaria demostrar que és localment trivial. Gastant la notació de A.26, si considerem $\psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to V_\alpha$ definida com $\phi_\alpha^{-1} \circ (\varphi_\alpha \times id_{\mathbb{R}^n})$, és homeomorfisme perquè és composició d'homeomorfismes. A més, la restricció és lineal, perquè donats $x \in U_\alpha \subseteq M$, $v, w \in \mathbb{R}^n$,

$a \in \mathbb{R}$, tenim que:

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha(x, av+w) &= \phi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(x), av+w) = \\
&= (av_1+w_1)\left.\frac{\partial}{\partial\varphi_\alpha^1}\right|_{\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_\alpha(x)} + \dots + (av_n+w_n)\left.\frac{\partial}{\partial\varphi_\alpha^n}\right|_{\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_\alpha(x)} = \\
&= a\left(v_1\left.\frac{\partial}{\partial\varphi_\alpha^1}\right|_x + \dots + v_n\left.\frac{\partial}{\partial\varphi_\alpha^n}\right|_x\right) + w_1\left.\frac{\partial}{\partial\varphi_\alpha^1}\right|_x + \dots + w_n\left.\frac{\partial}{\partial\varphi_\alpha^n}\right|_x = \\
&= a\psi_\alpha(x,v) + \psi_\alpha(x,w) \quad (1.1.5)
\end{aligned}$$

Per tant és localment trivial. Notem que no només hem demostrat que continuïtat sinó també suau, aquest és de fet un fibrat vectorial suau.

Exemple 1.8. *El **fibrat normal** ν d'una subvarietat diferenciable $M \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Si considerem $E \subset M \times \mathbb{R}^n$ el conjunt dels parells (x, v) on $x \in M$ i $v \in T_xM^\perp$. Aleshores podem definir:

$$\pi : E \to M, \quad \pi(x, v) = x, \quad \pi^{-1}(x) = \{x\} \times T_xM^\perp \tag{1.1.6}$$

amb $\{x\} \times T_xM^\perp$ amb l'estructura d'espai vectorial donada per:

$$t_1(x, v_1) + t_2(x, v_2) = (x, t_1v_1 + t_2v_2) \tag{1.1.7}$$

És clar que π és contínua per ser projecció només falta comprovar la condició de trivialitat local. Aquesta la comprovarem més endavant a l'exemple 1.36.

Exemple 1.9. *El **fibrat tautològic** γ_n^1 sobre $\mathbb{R}P^n$.*

Amb pla projectiu real $\mathbb{R}P^n := S^n/(-x \sim x)$ amb la topologia com a quocient de $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, definim γ_n^1 de la següent manera:
Triem $E(\gamma_n^1) = \{(\{\pm x\}, \lambda x) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} /\ \lambda \in \mathbb{R}, \{\pm x\} \in \mathbb{R}P^n\}$ i definim

$$\pi : E(\gamma_n^1) \to \mathbb{R}P^n \quad \pi(\{\pm x\}, v) = \{\pm x\} \tag{1.1.8}$$

aleshores $\pi^{-1}(\{\pm x\}) = \{(\{\pm x\}, \lambda x) /\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ li podem donar l'estructura d'espai vectorial com als exemples anteriors. La continuïtat de π és trivial per ser una projecció, queda demostrar que és localment trivial.
Siga $U \subseteq S^n$ un entorn obert de $x \in S^n$ de manera que no conté cap parell de punts antipodals i siga V la projecció de U sobre el quocient. Aleshores definim:

$$\varphi : V \times \mathbb{R} \to \pi^{-1}(V), \quad \varphi(\{\pm x\}, t) = (\{\pm x\}, tx) \tag{1.1.9}$$

Ara que ja coneixem uns pocs fibrats anem a continuar estudiant la seua estructura i propietats.

Definició 1.10. *Direm que $s : B \to E(\xi)$ és una* ***secció*** *si és una funció contínua de manera que $\pi \circ s(b) = b$, és a dir, $s(b) \in F_b(\xi)$.*
Direm que s és no nul·la si $s(b)$ és diferent de $0_{F_b(\xi)}$ per a tot $b \in B$. Si ξ és el fibrat tangent d'una varietat diferenciable una secció rebrà el nom de ***camp vectorial****.*

Exemple 1.11. *Si n és senar aleshores S^n admet un camp vectorial no nul.*

Per l'exemple A.25 tenim que $T_xS^n = (x_1, ..., x_n)^\perp$ aleshores si considerem

$$v(x) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, ..., x_{n+1}, x_n) \tag{1.1.10}$$

Aquest és un camp vectorial no nul.

Teorema 1.12. *El fibrat γ_n^1 sobre $\mathbb{R}P^n$ és no trivial per a $n \geq 1$.*

Demostració. És clar que donat B un espai topològic aleshores ε_B^1 té una secció no nul·la, simplement $s(b) = (b, 1)$. El que anem a demostrar és que de fet γ_n^1 no admet cap secció no nul·la i per tant no poden ser isomorfs. Siga

$$s : \mathbb{R}P^n \longrightarrow E(\gamma_n^1) \tag{1.1.11}$$

una secció qualsevol, i considerem la projecció $S^n \xrightarrow{p} \mathbb{R}P^n$. Aleshores existeix una funció contínua $t : S^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$s \circ p(x) = s(\{\pm x\}) = (\{\pm x\}, t(x)x) \tag{1.1.12}$$

Com que s és una secció tenim que $s \circ p(x) = s \circ p(-x)$, aleshores $-t(-x) = t(x)$ i per tant tenim que t és una funció senar. Com a conseqüència del teorema de Borsuk-Ulam (vore el corol·lari A.27) en tenim que existeix $x_0 \in S^n$ de manera que $t(x_0) = 0$ i per tant $s(\{x_0\}) = (\{\pm x_0\}, 0)$, aleshores la secció no és no nul·la i per tant γ_n^1 és no trivial. $\square$

Definició 1.13. *Direm que les seccions $s_1, ..., s_n$ són* ***independents*** *si per a cada $b \in B$ els vectors $s_1(b), ..., s_n(b)$ són linealment independents. Si només n'hi ha una li exigirem que siga no nul·la.*

Lema 1.14. *Siguen ξ i η fibrats vectorials sobre B i siga $f : E(\xi) \to E(\eta)$ una funció contínua de manera que actua com a isomorfisme entre $F_b(\xi)$ i $F_b(\eta)$. Aleshores f és un isomorfisme i $\xi \cong \eta$*

Demostració. Siga $b_0 \in B$, siga $g : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$ una trivialització local de ξ i $h : V \times \mathbb{R}^n \to \pi_*^{-1}(V)$ una trivialització local de η, de manera que $b_0 \in U \cap V$. Aleshores si demostrem que $h^{-1} \circ f \circ g : U \times \mathbb{R}^n \to V \times \mathbb{R}^n$ és homeomorfisme ja el tindríem.
Si definim $h^{-1}(f(g(b, x))) = (b, y)$, com que f era isomorfisme lineal entre $F_b(\xi)$ i $F_b(\eta)$ tenim que y es pot expressar com:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(b)x_j \tag{1.1.13}$$

amb $f_{ij}(b)$ una matriu real $n \times n$ invertible, a més f és contínua per tant $f_{ij}(b)$ canvia de manera contínua. Ara veiem que la inversa siga contínua, si considerem la matriu inversa definida per $F_{ji}(b)$, tenim que és contínua component a component ja que l'operació les entrades depenen de manera contínua de $f_{ij}(b)$ i el càlcul de la inversa per Crammer. Per tant si definim:

$$x_j \mapsto \sum_{i=1}^{n} F_{ij}(b) y_i \tag{1.1.14}$$

sabem que és contínua i per tant tenim que $(g^{-1} \circ f^{-1} \circ h)(b, y) = (b, x)$ és contínua, QED □

Teorema 1.15. *Un $\mathbb{R}^n$-fibrat ξ és trivial sii admet n seccions independents.*

Demostració. ($\Longleftarrow$) Siguen $s_1, ..., s_n$ seccions independents de ξ. Definim la funció:

$$\begin{array}{rccc} f\colon & B \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & E \\ & (b, x) & \longmapsto & x_1 s_1(b) + ... + x_n s_n(b) \end{array} \tag{1.1.15}$$

Per definició les seccions són contínues i per tant f és contínua i és clar per a cada fibra de ε^1_n actua com a isomorfisme sobre les fibres de ξ. Com a conseqüència del lema 1.14 tenim que f és isomorfisme i per tant ξ és trivial.

($\Longrightarrow$) Suposem que ξ és trivial i per tant existeix una trivialització local definida en tot B $h : B \times \mathbb{R}^n \to E(\xi)$. Si definim:

$$s_i(b) := h(b, e_i) \in F_b(\xi), \quad e_i = (0, ..., 0, \overset{i)}{1}, 0, ..., 0) \tag{1.1.16}$$

És clar que s_i és contínua i que a més són independents entre elles pel fet que h actua como isomorfisme entre $\mathbb{R}^n$ i les fibres.

□

Exemple 1.16. El fibrat normal d'una esfera és trivial. Sabem que $T_x S^n = \{x\}^\perp$ és clar que $v(x) = x$ és una secció no nul·la i al ser de dimensió 1, per la proposició anterior és trivial.

Definició 1.17. *Si M és una varietat diferenciable i el fibrat tangent τ_M és un fibrat trivial, aleshores direm que M és* ***paral·lelitzable****.*

Exemple 1.18. Si $M \subseteq \mathbb{R}^n$ un obert, aleshores $TM = M \times \mathbb{R}^n$ és trivial i per tant, M és paral·lelitzable.

Exemple 1.19. Les varietats S^1 i S^3 són paral·lelitzables.

Aplicant la proposició d'abans podem considerar S^1, com a secció $s(x) = (x, (-x_2, x_1))$ és no nul·la i $\dim S^1 = 1$ tenim que el fibrat tangent és trivial i per tant S^1 és paral·lelitzable. Al cas de S^3 considerem:

$$\begin{aligned} s_1(x) &= (-x_2, x_1, -x_4, x_3) \\ s_2(x) &= (-x_3, x_4, x_1, -x_2) \\ s_3(x) &= (-x_4, -x_3, x_2, x_1) \end{aligned} \tag{1.1.17}$$

És clar que són no nul·les i al fer el producte escalar usual de $\mathbb{R}^4$ es comprova que com a vectors són ortogonals i per tant linealment independents per a tot $x \in S^3$.

Exemple 1.20. $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ no és paral·lelitzable, per a $n \geq 2$ si n és parell.
Anem a dividir la prova en dos passos, primer que si S^n admet un camp vectorial no nul aleshores l'aplicació antipodal és homotòpica a la identitat.
Suposem que S^n admet un camp vectorial no nul aleshores considerem:

$$\begin{array}{rccc} F: & S^n \times [0,\pi] & \longrightarrow & S^n \\ & (x,t) & \longmapsto & xcos(t) + \frac{s(x)}{||s(x)||} sin(t) \end{array} \tag{1.1.18}$$

Vejam que està ben definida, per això recordem que $T_x S^n = \{x\}^\perp$ i per tant $x \cdot s(x) = 0$ per a tot $x \in S^n$:

$$\begin{aligned} \left(xcos(t) + \frac{s(x)}{||s(x)||} sin(t) \right) \cdot \left(xcos(t) + \frac{s(x)}{||s(x)||} sin(t) \right) &= \\ = (x \cdot x) cos^2(t) + (s(x) \cdot x)(...) + (x \cdot s(x))(...) + \frac{s(x) \cdot s(x)}{||s(x)||^2} sin^2(t) &= \\ = cos^2(t) + sin^2(t) = 1 \end{aligned} \tag{1.1.19}$$

Per tant està definida i és trivial que és una homotopia entre id_{S^n} i $-id_{S^n}$.
Ara bé si n és parella aleshores l'aplicació antipodal és homotòpica a la reflexió

$$r(x_1, ..., x_n) = (-x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \tag{1.1.20}$$

que té grau -1 i per tant l'aplicació antipodal té grau -1 i no pot ser homotòpica a la identitat (comparar amb [GP74, Capítol 2, secció 3]).
Si n és parella, definim r_i i θ_i com les coordenades polars de (x_i, x_{i+1}) i amb això considerem l'homotopia:

$$\begin{array}{rccc} F: & S^n \times [0,1] & \longrightarrow & S^n \\ & (x,t) & \longmapsto & (-x_1, r_2 cos(t\pi - \theta_2), r_2 sin(\theta_2 - t\pi), ..., r_n cos(t\pi - \theta_n), r_n sin(\theta_n - t\pi) \end{array} \tag{1.1.21}$$

Aquesta té sentit perquè $n+1$ és senar. Per propietats elementals de la trigonometria es comprova fàcilment que està ben definit sobre S^n i que $F(x,0) = r(x)$ i que $F(x,1) = -id_{S^n}$

1.1.1 Fibrats Vectorials Euclidians

La majoria de fibrats que anem a estudiar resulta que les fibres són espais euclidians, això ens dóna unes propietats interessants que ens seran útils per a treballar sobretot als fibrats derivats de varietats.

Recordem ràpidament el concepte de mètrica euclidiana.
Siga V un $\mathbb{R}$-espai vectorial i $\mu : V \to \mathbb{R}$ direm que μ és quadràtica si existeixen $l_i, l'_i : V \to \mathbb{R}$, $i = 1, .., dim(V)$ funcions lineals de manera que:

$$\mu(v) = \sum_i l_i(v) l'_i(v) \tag{1.1.22}$$

A partir d'aquesta podem definir el producte:

$$v \cdot w = \frac{1}{2}(\mu(v + w) - \mu(v) - \mu(w)), \quad v, w \in V \tag{1.1.23}$$

es comprova que $\cdot$ és una forma bilineal i simètrica, a més direm que si $\mu(v, v) \geq 0$ és definida positiva.

Definició 1.21. *Un **espai vectorial euclidià** és un espai vectorial real V i una funció quadràtica definida positiva $\mu : E(\xi) \to \mathbb{R}$ tal que la restricció de μ a cada fibra és definida positiva i quadràtica. μ rebrà el nom de **mètrica euclídea**.*

Exemple 1.22. Al cas d'un fibrat tangent τ_M d'una varietat diferenciable una mètrica euclidiana $\mu : TM \to \mathbb{R}$ és diu mètrica riemanniana i el parell de M i la mètrica es diu varietat riemanniana, aquestes són un dels objectes d'estudi de la geometria diferencial.

Exemple 1.23. El fibrat trivial ε^n_B es pot definir en la mètrica euclidiana

$$\mu(b, x) = x_1^2 + ... + x_n^2 \tag{1.1.24}$$

Exemple 1.24. Pel teorema d'encaix de Whitney tota varietat diferenciable es pot considerar com a subvarietat de $\mathbb{R}^N$ per a algun $N \in \mathbb{N}$ suficientment gran, és a dir, $TM \leq T\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N$. Com que el tangent de $\mathbb{R}^N$ és trivial, podem dotar de una mètrica riemanniana a qualsevol varietat al considerar l'heretada de $\mathbb{R}^N$

Teorema 1.25. *Siga ξ un fibrat trivial de dimensió n sobre B i μ una mètrica euclidiana sobre ξ Aleshores existeixen n seccions que són ortogonals en el sentit que*

$$s_i(b)s_j(b) = \delta_{ij}, \quad \forall b \in B \tag{1.1.25}$$

Demostració. És trivial sii admet $s_1, ..., s_n$ seccions independents, si apliquem l'algorisme d'ortonormalització de Gramm-Schmidt obtenim $s'_1, ..., s'_n$ seccions ja que el procés és continu i a més resulten ser una base ortogonal de $F_b(\xi)$. □

1.1.2 Grassmannià i fibrat tautològic

Anem a vore un exemple de fibrat vectorial especial que cobrarà gran importància durant tot el treball.

Definició 1.26. *Definim el* ***Grassmannià****, $G(n,k)$, on $n,k \in \mathbb{N}$, com al conjunt dels espais vectorials de dimensió n a $\mathbb{R}^{n+k}$*[1]*. És a dir,*

$$G(n,k) := \{V \leq \mathbb{R}^{n+k} / \dim V = n\} \tag{1.1.26}$$

Anem a vore que aquest és una varietat diferenciable i per a això primerament anem a dotar-lo d'una topologia.
Primerament definim un **n-marc** en $\mathbb{R}^{n+k}$ com una n-tupla de vectors linealment independents de $\mathbb{R}^{n+k}$. Si considerem $\mathbb{R}^{n+k} \times ... \times \mathbb{R}^{n+k}$, el conjunt de tots els n-marcs en $\mathbb{R}^{n+k}$ és un subconjunt obert en $\mathbb{R}^{n+k}$ que es coneix com la **varietat no compacta de Stiefel** i la denotarem com a

$$V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \tag{1.1.27}$$

El subconjunt de la varietat no compacta de Stiefel donat pels n-marcs ortonormals es coneix com a **varietat de Stiefel**.

$$V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) \subset V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \tag{1.1.28}$$

Per definició de Grassmannià és clar que podem definir la funció:

$$q : V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \to G(n,k) \tag{1.1.29}$$

que a cada n-marc li fa correspondre el subespai generat per eixos vectors. Definim la topologia de $G(n,k)$ com la mínima topologia de manera que q és una aplicació contínua. És a dir $U \subseteq G(n,k)$ és obert sii $q^{-1}(U)$ és obert.
Notem que si restringim q a $V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})$ obtenim una aplicació $q_0 := q|_{V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})}$ que ens permet identificar la varietat de Stiefel amb el Grassmannià. Les dues maneres ens donen la mateixa topologia obtenint el diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd} V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \arrow[rr, "Gramm-Schmidt"] \arrow[dr, "q"'] & & V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) \arrow[dl, "q_0"] \\ & G(n,k) & \end{tikzcd} \tag{1.1.30}$$

Com que $V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})$ és compacte, ja que $V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) \subset S^{n+k+1} \times \overset{n)}{\cdots} \times S^{n+k+1}$, per tant fitat i tancat, ja que si tenim una successió de n-marcs ortogonals $\{((v_i)_{i=1}^n)_k\}_{k=1}^\infty$, per la continuïtat del producte escalar:

$$\lim_{k\to\infty} < v_i^k, v_i^k >= 1, \quad \lim_{k\to\infty} < v_i^k, v_j^k >= 0, \quad i \neq j \tag{1.1.31}$$

[1] En alguns llibres $G(n,k)$ fa referència al conjunt d'espais vectorials de dimensió n en $\mathbb{R}^k$ amb $k \geq n$

Per tant és tancat per successions. Aleshores com que q_0 és contínua i

$$q_0(V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})) = G(n,k) \tag{1.1.32}$$

tenim que $G(n,k)$ és compacte.

Teorema 1.27. *El Grassmannià $G(n,k)$ és una varietat diferenciable de dimensió nk i és un espai normal.*

Per a aquesta demostració hem gastat com a referències [Lee12, Exemple 1.36] i [MS74, Lema 5.1].

Demostració. Siga $X \in G(n,k)$ aleshores tenim que $X \oplus X^\perp = \mathbb{R}^{n+k}$. Si considerem $T : X \to X^\perp$ una aplicació lineal qualsevol, aleshores la gràfica, ens indueix un espai vectorial:

$$\Gamma(T) = \{(x, Tx)/x \in X\} \mapsto \Gamma_T := \{x + Tx/x \in X\} \tag{1.1.33}$$

És clar que $\Gamma_T \leq \mathbb{R}^{n+k}$ de dimensió k i a més, $\Gamma_T \cap X^\perp = \{0\}$.
Per altra banda, considerem les projeccions ortogonals $\pi_1 : \mathbb{R}^{n+k} \to X$ i $\pi_2 : \mathbb{R}^{n+k} \to X^\perp$. Siga $Y \leq \mathbb{R}^{n+k}$ tal que $Y \cap X^\perp = \{0\}$, aleshores tenim que $\pi_1(Y) = X$. Com que π_1 és sobrejectiva i lineal i $\dim X = \dim Y$ tenim que $\pi_1|_Y$ és isomorfisme. Donat $y \in Y$, per ser $X \oplus X^\perp = \mathbb{R}^{n+k}$, existeixen $x \in X$ i $w \in X^\perp$ tals que $y = x + w$ aleshores $\pi_1|_Y^{-1}(x) = y = x + w$ on $w \in X^\perp$. Podem definir:

$$\begin{array}{rcccccc} T_Y: & X & \xrightarrow{\pi_1|_Y^{-1}} & Y \subseteq \mathbb{R}^{n+k} & \xrightarrow{\pi_2|_Y} & X^\perp \\ & x & \longmapsto & x + w & \longmapsto & w \end{array} \tag{1.1.34}$$

És clar que aquesta està ben definida, és lineal i a més

$$\Gamma_{T_Y} = \{x + T_Y x/\ x \in X\} = \{x + w_x/x \in X\} = Y \tag{1.1.35}$$

El conjunt $U_X \subset G(n,k)$ dels $Y \leq \mathbb{R}^{n+k}$ espais vectorials tals que $Y \cap X^\perp = \{0\}$ és obert en $G(n,k)$. Acabem de demostrar que $\phi_X : U_X \to \mathrm{Hom}(X, X^\perp)$, $\phi_X(Y) = \Gamma_{T_Y}$ és una bijecció. Ara bé podem identificar $\mathrm{Hom}(X, X^\perp)$ amb $\mathbb{R}^{nk}$, de manera que si provem que ϕ_X és homeomorfisme tindrem que el podem gastar com a carta.
Primer mirem si ϕ és contínua, fixem una base ortonormal de $\mathbb{R}^{n+k}$ $\{x_1, ..., x_{n+k}\}$, de manera que $\{x_1, ..., x_n\}$ és base de X i $\{x_{n+1}, ..., x_{n+k}\}$ és base de $X^\perp$. Per definició de la topologia de $G(n,k)$ tenim que ϕ és contínua sii $\phi_X \circ q : V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \to \mathrm{Hom}(X, X^\perp)$ és contínua. Donat $Y \in U_X$ existeixen $\{u_1, ..., u_n\} \in V_n(\mathbb{R}^{n+k})$ tal que $q(u_1, ..., u_n) = Y$. Aquestos vectors els podem escriure en la base que hem fixat $\left\{\sum_{j=1}^{n+k} a_{1j}(u_1)x_j, ..., \sum_{j=1}^{n+k} a_{nj}(u_n)x_j\right\}$.

$$\pi_1|_Y : Y \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k} \xrightarrow{\pi_1} X \quad \Longrightarrow \pi_1|_Y = \pi_1 \circ i_Y \tag{1.1.36}$$

i_Y és simplement un canvi de base de la base $u_1, ..., u_n$ a la base de $x_1, ..., x_{n+k}$, per tant podem escriure'l en forma matricial:

$$\pi_1|_Y = \pi_1 \circ i_Y = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_n & 0_{n\times k} \end{array} \right) \begin{pmatrix} a_{1,1}(u_1) & \cdots & a_{1,n+k}(u_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}(u_n) & \cdots & a_{n,n+k}(u_n) \end{pmatrix} = \Pi_1 A(u) \tag{1.1.37}$$

On Π_1 és la primera matriu i $A(u)$ la segona. Anàlogament,

$$\pi_2|_Y = \pi_2 \circ i_Y = \left(\begin{array}{c|c} 0_{k\times n} & \mathbb{I}_k \end{array} \right) \begin{pmatrix} a_{1,1}(u_1) & \cdots & a_{1,n+k}(u_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}(u_n) & \cdots & a_{n,n+k}(u_n) \end{pmatrix} = \Pi_2 A(u) \tag{1.1.38}$$

I per tant

$$\phi_X \circ q(u_1, ..., u_n) = \pi_2|_Y \circ \pi_1|_Y^{-1} = (\Pi_2 A(u))(\Pi_1 A(u))^{-1} \tag{1.1.39}$$

Ara bé com que $a_{ij}(u)$ depén contínuament de u, el producte de matrius és continu i regla de Crammer és contínua també per tant tenim que $\phi_X \circ q(u)$ és contínua. Aleshores ϕ_X és contínua.
Si considerem $\phi^{-1} : \mathrm{Hom}(X, X^\perp) \to U_X$, donat T considerem el pla generat pels vectors $y_i = x_i + Tx_i$ $i = 1, ..., n$ és clar que y_i depén de forma contínua de T i per tant $Y = \Gamma_T$ depén contínuament de T. Per tant, ϕ_X és un homeomorfisme.
Són compatibles les cartes? Siguen $X_\alpha, X_\beta \in G(n, k)$ i siguen $U_\alpha = U_{X_\alpha}$ i $U_\beta = U_{X_\beta}$ definits com abans. $\phi_i := \phi_{X_i} : (X_i, G(n, k)) \to \mathbb{R}^{nk}$, $i = \alpha, \beta$ les cartes associades que hem definit abans. Anem a vore que $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : (\phi_\beta(X_2), \mathbb{R}^{nk}) \to \mathbb{R}^{nk}$ és suau. . Siga $x_1, ..., x_{n+k}$ i $u_1, ..., u_{n+k}$ les bases associades de $\mathbb{R}^{n+k}$, de manera que $\{x_1, ..., x_n\}$ és base de X_α i $\{y_1, ..., y_n\}$ és base de X_β on P^{-1} és el canvi de base entre les dos. Donat $B \in \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ veiem que podem identificar

$$\Gamma(B) \;\mapsto\; V := \phi_2^{-1}(B) =< y_1 + By_1, ..., y_n + By_n > \tag{1.1.40}$$

Aleshores $\{v_1 = P^{-1}(y_1 + By_1), ..., v_n = P^{-1}(y_n + By_n)\}$ és una base de V expressada en termes de la base $\{x_1, ..., x_{n+k}\}$.
Tenim que $B' = \phi_\alpha(\phi_\beta^{-1}(B)) = \phi_\alpha(V) = \pi_2^\alpha|_V \circ (\pi_1^\alpha|_V)^{-1}$. Com que ja en tenim una base de V en la base $\{x_1, ..., x_{n+1}\}$, seguint la nomenclatura matricial que hem gastat a 1.1.37 i 1.1.38, $B' = (\Pi_2 A(v_1, ..., v_n))(\Pi_1 A(v_1, ..., v_n))^{-1}$ i per tant:

$$B' = \Pi_2 \begin{pmatrix} a_{1,1}(v_1) & \cdots & a_{1,n+k}(v_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}(v_n) & \cdots & a_{n,n+k}(v_n) \end{pmatrix} \left[\Pi_1 \begin{pmatrix} a_{1,1}(v_1) & \cdots & a_{1,n+k}(v_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}(v_n) & \cdots & a_{n,n+k}(v_n) \end{pmatrix} \right]^{-1} \tag{1.1.41}$$

Com que $v_i = P^{-1}(y_i + By_i)$ és clarament suau respecte de les components de B, tenim que $a_{ij}(v_j)$ és suau respecte de les components de B i a més el producte i la regla de Crammer són funcions suaus podem concloure que B' és diferenciable respecte de B. Per tant $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ és suau, raonant igual obtenim que la inversa és suau i per tant és un difeomorfisme.
És 2AN? Com que $G(n,k)$ és compacte al considerar el recobriment $\{U_X\}_{X \in G(n,k)}$ per oberts existirà un subrecobriment finit $\{U_{X_i}\}_{i=1}^n$ i cadascun d'eixos és homeomorf a $\mathbb{R}^{nk}$ com que $\mathbb{R}^{nk}$ és 2AN, siga $\mathcal{B} = \{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ la base d'oberts numerable, aleshores $\mathcal{B}' = \{\phi_1^{-1}(A_i)\}_{i\in\mathbb{N}} \cup ... \cup \{\phi_n^{-1}(A_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ és una base d'oberts numerable de $G(n,k)$.
És Hausdorff perquè donats $X, Y \in G(n,k)$ podem trobar $P \in G(k,n)$ de manera que $X \cap P = \{0\} = Y \cap P$, aleshores $Y, X \in U_{P^\perp}$ l'obert trivialitzant de $P^\perp$, com que $U_{P^\perp}$ és homeomorf a $\mathbb{R}^{nk}$ que és Hausdorff, podem trobar dos oberts que separen a X i Y. Per tant, $G(n,k)$ és una varietat diferenciable de dimensió nk. Notem que al ser compacta en particular és paracompacta, a més és Hausdorff aleshores per la proposició B.6 tenim que és normal. □

Ens adonem que el cas particular $G(1,k) = \mathbb{R}P^k$, igual que vam definir el fibrat γ_k^1 sobre $\mathbb{R}P^k$, definim el **fibrat tautològic** sobre $G(n,k)$

$$\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k}) \tag{1.1.42}$$

Primerament definim l'espai total:

$$E(\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})) = \{(V,v) \in G(n,k) \times \mathbb{R}^{n+k} / v \in V\} \tag{1.1.43}$$

La topologia que li donem és la del producte, definim la projecció $\pi : E \to G(n,k)$ com a $\pi(V,v) = V$ que és contínua per ser una projecció de un producte. L'estructura d'espai vectorial, és la del subespai $t_1(V,v_1) + t_2(V,v_2) = (V, t_1v_1 + t_2v_2)$.

Proposició 1.28. *El fibrat tautològic $\gamma_n(\mathbb{R}^{n+k})$ sobre $G(n,k)$ és localment trivial*

Demostració. Siga $X \in G(n,k)$ i U l'entorn obert que hem gastat en la demostració de la proposició anterior, com que X és difeomorf a $\mathbb{R}^n$, és indiferent que el domini de la trivialització siga $U \times X$, aleshores podem definir directament:

$$\begin{aligned} h\colon \quad U \times X &\longrightarrow \pi^{-1}(U) \\ (Y,x) &\longmapsto (Y, p^{-1}(y)) \end{aligned} \tag{1.1.44}$$

on $p : \mathbb{R}^{n+k} \to X$ és la projecció sobre X. Raonant com a la proposició anterior ens adonem que $h(Y, x + T(Y)x)$ que per la demostració de l'anterior proposició sabem que és contínua. A més, la inversa ve donada per $h^{-1}(Y,y) = (Y, p(y))$ que és contínua per ser la projecció una aplicació contínua. □

Per tant tenim que el fibrat tautològic és un fibrat vectorial.

1.2 Construcció de fibrats i suma Whitney

A la secció anterior hem definit els fibrats vectorials, el que anem a vore en aquesta secció és com relacionar fibrats i crear-ne nous. En particular la suma Whitney serà especialment important ja que es necessita per al tercer axioma de les classes de Stiefel-Whitney.

Restringir la base d'un fibrat

Suposem que tenim el fibrat ξ definit per $\pi : E \to B$ si considerem $\tilde{B} \subset B$, podem definir $\tilde{E} = \pi^{-1}(\tilde{B})$ i l'aplicació $\tilde{\pi} = \pi|_{\tilde{E}}$. El que obtenim és un fibrat vectorial anomenat restricció de ξ a $\tilde{B}$ i denotat com $\xi|_{\tilde{B}}$. És clar que $F_b(\xi|_{\tilde{B}}) = F_b(\xi)$ per a tot $b \in \tilde{B}$.

Exemple 1.29. Siga M una varietat diferenciable i N subconjunt obert de M, aleshores tenim que $\tau_N = \tau_M|_N$.

Exemple 1.30. Siga ξ un fibrat vectorial i U un obert trivialitzant de ξ aleshores $\xi|_U$ és un fibrat trivial.

Ens adonem que estem en el cas en què tenim l'aplicació $i : \tilde{B} \hookrightarrow B$, però que passa si tenim una aplicació qualsevol? Això ens du al següent apartat:

Fibrats induïts

Siga ξ un fibrat de la forma $\pi : E \to B$, $f : X \to B$ una aplicació on X és un espai topològic. Aleshores definim el fibrat induït

$$f^*\xi \tag{1.2.1}$$

Definim l'espai total:

$$E^* := \{(x, e) \in (X, E) / \ f(x) = \pi(e)\} \tag{1.2.2}$$

Definim $\pi^* : E^* \to X$ com a $\pi(x, e) = x$. Aleshores, a partir del següent diagrama:

$$\begin{array}{ccc} E^* & \xrightarrow{\hat{f}} & E \\ {\scriptstyle \pi^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array} \tag{1.2.3}$$

podem definir $\hat{f}(x, e) = e$, aleshores el diagrama serà commutatiu, perquè $\pi(\hat{f})(x, e) = \pi(e) = f(x) = \pi^*(x, e)$. Definim l'estructura d'espai vectorial de $\pi^{-1}(b)$ com solem fer:

$$t_1(x, e_1) + t_2(x, e_2) = (b, t_1e_1 + t_2e_2) \tag{1.2.4}$$

Aleshores $\hat{f}$ actua com a isomorfisme entre $F_x(f^*\xi)$ i $F_{f(x)}(\xi)$.

Ens queda provar que és localment trivial, donat $\varphi : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$ una trivialització local de ξ podem definir $U^* = f^{-1}(U)$ i:

$$\begin{aligned} \psi\colon \quad U^* \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow (\pi^*)^{-1}(U^*) \\ (x, v) &\longmapsto (b, \varphi(f(x, v))) \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

Com que φ és una trivialització local és clar que ψ també ho és i per tant $f^*\xi$ és localment trivial.
El diagrama commutatiu d'abans, és igual al de la definició de morfisme de fibrats aleshores que passa si en comptes de $f : X \to B$ en tinguérem $f : E(\eta) \to E(\xi)$ una transformació entre fibrats? Anem a vore quina relació en té amb el fibrat induït.

Proposició 1.31. *Si $f : E(\eta) \to E(\xi)$ és una transformació de fibrats sobrejectiva, i g és l'aplicació induïda per f de manera que commute amb les projeccions, aleshores*

$$\eta \cong g^*\xi \tag{1.2.6}$$

Demostració. Definim l'aplicació:

$$\begin{aligned} h\colon \quad E(\eta) &\longrightarrow E(g^*\xi) \\ e &\longmapsto (\pi(e), f(e)) \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

on π és la projecció de η. Tenim que h és contínua perquè cada component és contínua i a més com que f actua com isomorfisme h també. A més, per definició de $g^*\xi$ tenim que és bijectiva per tant pel lema 1.14 tenim que h és homeomorfisme i per tant $\eta \cong g^*\xi$. $\square$

Producte Cartesià

Si tenim dos fibrats vectorials ξ_1, ξ_2, definits com $\pi_i : E_i \to B_i$ $i \in \{1, 2\}$ aleshores podem definir el fibrat producte cartesià

$$\xi_1 \times \xi_2 \tag{1.2.8}$$

Aquest el definim mitjançant:

$$\pi_1 \times \pi_2 \colon E_1 \times E_2 \longrightarrow B_1 \times B_2 \tag{1.2.9}$$

cada fibra $(\pi_1 \times \pi_2)^{-1}(b_1, b_2) = F_{b_1}(\xi_1) \times F_{b_2}(\xi_2)$ té l'estructura d'espai vectorial del producte d'espais vectorials. Aleshores $\xi_1 \times \xi_2$ és clarament un fibrat vectorial, ja que la condició de trivialitat local es comprova de manera immediata.

Suma Whitney

Considerem dos fibrats vectorials ξ_1, ξ_2 sobre B i l'aplicació $\Delta : B \to B \times B$, amb $\Delta(b) = (b, b)$. Aleshores definim la suma Whitney com:

$$\xi_1 \oplus \xi_2 := d^*(\xi_1 \times \xi_2) \tag{1.2.10}$$

Per definició $E(\xi_1 \oplus \xi_2) = \{(b, e_1, e_2) \in (B, E_1, E_2)/\ (\pi_1(e_1), \pi_2(e_2)) = (b, b)\}$ i aleshores $\pi_1^{-1}(b) \times \pi_2^{-1}(b) = F_b(\xi_1) \times F_b(\xi_2) \cong F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$. Per tant,

$$F_b(\xi_1 \oplus \xi_2) \cong F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2) \tag{1.2.11}$$

Definició 1.32. *Siguen ξ i η fibrats vectorials sobre B tals que $E(\xi) \subset E(\eta)$, tals que $F_b(\xi) \leq F_b(\eta)$, aleshores ξ és un subfibrat de η i el denotem com a $\xi \subset \eta$.*

Lema 1.33. *Siga η un fibrat vectorial i $\xi_1, \xi_2 \subset \eta$ tals que $F_b(\eta) = F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$ aleshores $\eta \cong \xi_1 \oplus \xi_2$.*

Demostració. Definim

$$\begin{array}{rccc} f: & E(\xi_1 \oplus \xi_2) & \longrightarrow & E(\eta) \\ & (b, e_1, e_2) & \longmapsto & e_1 + e_2 \end{array} \tag{1.2.12}$$

És contínua i actua com isomorfisme entre fibres per tant pel lema 1.14 és un isomorfisme. □

Corol·lari 1.34. *Siguen $\xi_1, ..., \xi_n$ fibrats sobre una base B aleshores, $\xi_1 \times ... \times \xi_n$ és isomorf a $\pi_1^*(\xi_1) \oplus ... \oplus \pi_n^*(\xi_n)$*

Aleshores si tenim dos subfibrats de manera que la fibra del total és la suma directa de les fibres tenim que el fibrat és isomorf a la suma Whitney però que passa si tenim només un fibrat? Podríem d'alguna manera trobar un subfibrat que actue com a complement?

Complement Ortogonal

Si η és un fibrat amb una mètrica euclidiana, i $\xi \subset \eta$ anem a construir el complement ortogonal de ξ:

$$\xi^\perp \tag{1.2.13}$$

Com que η té una mètrica euclidiana, donat $F_b(\xi) \leq F_b(\eta)$ podem definir $F_b(\xi^\perp) := (F_b(\xi))^\perp$ a partir del complement ortogonal i l'espai total com $E(\xi^\perp) \subset (\eta)$ com a unió de les fibres $F_b(\xi^\perp)$.

Teorema 1.35. *$E(\xi^\perp)$ és l'espai total d'un subfibrat $\xi^\perp \subset \eta$ i a més $\eta \cong \xi \oplus \xi^\perp$.*

Demostració. Per definició és clar que $F_b(\eta) = F_b(\xi) \oplus F_b(\xi^\perp)$. Voldríem aplicar el lema 1.33, aleshores només cal comprovar que $\xi^\perp$ és un subfibrat de η, si definim com a projecció $\pi' := \pi|_{E(\xi^\perp)}$ és clar que és contínua i que $\pi'(F_b(\xi^\perp)) = b$, l'estructura d'espai vectorial ve donada per la del complement ortogonal, per tant només caldria comprovar la condició de trivialitat local.
Siga $b_0 \in B$ i U un entorn obert de b_0 suficientment xicotet com per a que siga trivialitzant per a ξ i η. Aleshores $\xi|_U$ i $\eta|_U$, són trivials pel teorema 1.25 existeixen $s_1, ..., s_k$ i $s'_1, ..., s'_n$ seccions ortonormals de $\xi|_U$ i $\eta|_U$ respectivament, amb m i n les dimensions respectives.
Definim la matriu:

$$M_{ij} = s_i(b_0) \cdot s'_j(b_0) \tag{1.2.14}$$

Sabem per àlgebra lineal que aquesta matriu té rang m, aleshores fent una reordenació dels s'_j podem assumir que les primeres m columnes són linealment independents.
Com que el determinant és una funció contínua sabem que existeix $V \subseteq U$ entorn obert de b_0 de manera que les primeres m columnes continuen sent linealment independents. Com a conseqüència les seccions $s_1, ..., s_m, s'_{m+1}, ..., s'_n$ de $\eta|_U$ són independents. Si apliquem l'algorisme d'ortonormalització de Gramm-Schmidt a aquestes obtenim $s_1, ..., s_m, s''_{m+1}, s''_n$ seccions ortonormals de $\eta|_U$. Amb això definim l'aplicació:

$$\begin{aligned} \varphi \colon \quad E(V \times \mathbb{R}^{n-m}) &\longrightarrow E(\xi^\perp) \\ (b, x) &\longmapsto x_1 s''_{m+1}(b) + ... + x_{n-m} s''_n(b) \end{aligned} \tag{1.2.15}$$

Aquesta és contínua per ser contínues les seccions i a més si fixem b és un isomorfisme lineal per ser $s''_{m+1}(b), ..., s''_n(b)$ una base de $F_b(\xi)^\perp$. A més es comprova a simple vista que

$$\varphi^{-1}(e) = (\pi(e), (e \cdot s''_{m+1}(\pi(e)), ..., e \cdot s''_n(\pi(e)))) \tag{1.2.16}$$

és la seua inversa i també és contínua. Aleshores φ és un homeomorfisme, per tant $\xi^\perp$ és localment trivial i per tant un fibrat. Pel raonat abans hem acabat la prova. □

Exemple 1.36. Siga N varietat diferenciable, M subvarietat de N, sabem que per ser varietat diferenciable N podem donar-li una mètrica riemanniana. Sabem també pel principi de la secció que $\tau_M = \tau_N|_M$. Aleshores podem definir el complement ortogonal $\tau_M^\perp \subset \tau_N|_M$ i l'anomenem com a fibrat normal ν de M en N, aquest coincideix amb el que hem vist a la secció anterior i pel teorema anterior sí satisfà la condició de ser localment trivial que no havíem verificat. A partir del teorema anterior tenim que està ben definit i que a més:

$$\tau_M \oplus \nu \cong \tau_N|_M \tag{1.2.17}$$

De forma més general:

Exemple 1.37. Si tenim una immersió entre dos varietats diferenciables $f: M \to N$ si N és una varietat riemanniana. Aleshores $df_x(T_xM) \leq T_{f(x)}N$ i té un complement ortogonal. Per tant, al fibrat $f^*\tau_N$ sobre M, li podem aplicar el teorema anterior i obtenim:

$$f^*\tau_N \cong \tau_M \oplus \nu_f, \quad \text{on } \nu_f = \tau_M^\perp \subset f^*\tau_N \tag{1.2.18}$$

Exemple 1.38. Si tenim una submersió $f: M \to N$ entre varietats diferenciables. Podem construir el subfibrat $\kappa_f \subset \tau_M$ a partir de $\ker(df_x)$. A més si M riemanniana

$$\tau_M \cong \kappa_f \oplus f^*\tau_N \tag{1.2.19}$$

Si $\pi': TM \to M$ és la projecció de l'espai tangent definim

$$E(\kappa_f) = \bigcup_{x \in M} \ker df_x, \quad \pi := \pi'|_{E(\kappa_f)} \tag{1.2.20}$$

Tenim que π és contínua per ser restricció de contínua, que $\pi^{-1}(x)$ té l'estructura d'espai vectorial heretada de TM, per demostrar que és un fibrat només falta vore que és localment trivial.
Com que f és submersió, en particular té rang constant aleshores pel teorema del rang constant (Teorema A.19) tenim que existeixen cartes $\phi: (M, x) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ i $\psi: (N, f(x)) \to (\mathbb{R}^k, 0)$ tals que el representant de f

$$\begin{array}{rccc} \overline{f}\colon & (\mathbb{R}^n, 0) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^k, 0) \\ & (u_1, ..., u_n) & \longmapsto & (u_1, ..., u_k) \end{array} \tag{1.2.21}$$

És a dir la matriu jacobiana és de la forma $\begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix}$, aleshores si les funcions coordenades de ϕ són $x_1, ..., x_n$ tenim que

$$df_x\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in \{1, .., k\} \\ 0, & \text{si } i \in \{k+1, ..., n\} \end{cases} \tag{1.2.22}$$

Per tant $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x \right\}_{i=k+1}^n$ és una base de $\ker df_x$, per tant, si U és un entorn obert suficientment xicotet com per a que estiguem en el domini de les cartes del teorema, podem definir:

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & U \times \mathbb{R}^{n-k} & \longrightarrow & \pi^{-1}(U) \\ & (x, v_1, ..., v_{n-k}) & \longmapsto & v_1 \left.\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}\right|_x + ... + v_{n-k} \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_x \end{array} \tag{1.2.23}$$

Aquesta funció és un contínua i actua com a isomorfisme entre $\mathbb{R}^{n-k}$ i $\ker df_x$. Finalment té com a inversa:

$$\varphi^{-1}\left(v_1 \left.\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}\right|_x + ... + v_{n-k} \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_x\right) = (x, v_1, ..., v_{n-k}) \tag{1.2.24}$$

que és contínua.
Aleshores κ_f és un fibrat vectorial. A més, pel primer teorema d'isomorfia sabem que $\tau_N = df_x(T_xM) \cong T_xM/\ker df_x$ i per tant si M és riemanniana:

$$T_xM = \ker df_x \oplus F_x(f^*\tau_N) = F_x(\kappa_f) \oplus F_x(f^*\tau_N) \tag{1.2.25}$$

$$\tau_M \cong \kappa_f \oplus f^*\tau_N \tag{1.2.26}$$

1.3 Fibrats Universals

Ara que ja tenim ferramentes de sobra per tractar els fibrats anem a per la missió principal d'aquest capítol és trobar un fibrat universal, és a dir un fibrat vectorial de manera que qualsevol fibrat el puguem "inserir" de manera "única" i aleshores poder treballar sobre el fibrat universal per després "tornar" al fibrat inicial.
A què ens referim al dir de manera "única", això va resultar ser llevat d'homotopia, i així que hem de definir-lo.

Definició 1.39. *Donades $f, g : \xi \to \eta$ transformacions de fibrats direm que són **homotòpiques** o **fibrat-homotòpiques**, denotat com $f \simeq g$, si existeix*

$$h : E(\xi) \times [0,1] \longrightarrow E(\eta) \tag{1.3.1}$$

tal que h_t és una transformació entre fibrats per a tot $t \in [0,1]$ i h és contínua respecte de les dos variables. Al igual que l'homotopia en espais topològics l'homotopia de fibrats defineix una relació d'equivalència.

Amb aquesta definició podem definir la categoria $\mathscr{H}Bundle_{\mathbb{R}}$, la qual té com a objectes els fibrats vectorials reals i com morfismes les classes d'homotopia de transformacions de fibrats, amb la composició $[f] \circ [g] = [f \circ g]$. És clar que aquesta és una categoria.
A més si considerem la categoria $\mathscr{T}Bundle_{\mathbb{R}}$ obtenim un functor $Htp : \mathscr{T}Bundle_{\mathbb{R}} \to \mathscr{H}Bundle_{\mathbb{R}}$, que deixa els fibrats vectorials invariants i a cada transformació de fibrats li associa la seua classe d'homotopia.
Notem que si tenim una subcategoria S de $\mathscr{T}Bundle_{\mathbb{R}}$ li podem aplicar el functor Htp i obtenim una subcategoria de $\mathscr{H}Bundle_{\mathbb{R}}$, que igual que abans tindrà els mateixos fibrats que S però els morfismes seran les classes d'homotopia, el denotem com $Htp(S)$.

Definició 1.40. *Direm que ξ és un **fibrat universal** de S, subcategoria $\mathscr{T}Bundle_{\mathbb{R}}$, si ξ és terminal en $Htp(S)$, és a dir, si per a tot fibrat $\eta \in Ob(S)$ existeix una única classe d'homotopia de transformació de fibrat $f : \eta \to \xi$.*

Definició 1.41. *Direm que $\xi, \eta \in Ob(\mathscr{T}Bundle_{\mathbb{R}})$ són **homotòpicament equivalents** si són isomorfs en $\mathscr{H}Bundle_{\mathbb{R}}$. Això és equivalent a dir que existeixen $f \in \mathscr{T}Bundle_{\mathbb{R}}(\xi, \eta)$ i $g \in \mathscr{T}Bundle_{\mathbb{R}}(\eta, \xi)$ tals que:*

$$f \circ g \simeq id_\eta, \quad g \circ f \simeq id_\xi \tag{1.3.2}$$

Com a conseqüència d'aquesta definició per la proposició C.10 tenim que dos fibrats universals d'una subcategoria completa són homotòpicament equivalents.
L'objectiu d'aquesta secció serà trobar-ne una subcategoria de $\mathscr{T}Bundle_{\mathbb{R}}$ de manera que trobem també el seu fibrat universal.
Recordem que en geometria diferencial es definia l'aplicació de Gauss a partir d'una 2-superfície, $N : S \to S^2$ que a cada punt li associava el vector normal al pla tangent en cada punt. De forma més general, si tenim $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ varietat diferenciable de dimensió n definim l'aplicació generalitzada de Gauss:

$$\begin{array}{rccc} g\colon & M & \longrightarrow & G(n,k) \\ & x & \longmapsto & T_xM \end{array} \tag{1.3.3}$$

Aquesta aplicació ens indueix una transformació de fibrats sobre $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$ el fibrat tautològic sobre $G(n,k)$,

$$\begin{array}{rccc} f\colon & TM & \longrightarrow & \gamma^n(\mathbb{R}^{n+k}) \\ & (x,v) & \longmapsto & (T_xM, v) \end{array} \tag{1.3.4}$$

Aquesta f indueix com a aplicació entre les bases que commuta amb les projeccions a g. Si consideràrem la subcategoria de $\mathscr{T}Bundle_{\mathbb{R}}$ donada pels fibrats tangents de les n-varietats diferenciables de $\mathbb{R}^{n+k}$ i $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$. Tindríem que $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$ és el fibrat universal d'aquesta categoria (si comprovàrem que aquesta aplicació és única llevat d'homotopia).
Encara podem fer-ho més general, anem a generalitzar a espais paracompactes i Hausdorff.

Nota 1.42. A l'apèndix B tenim algunes definicions i propietats sobre els d'axiomes de separació i sobre espais paracompactes i Hausdorff, aquestes cobren especial utilitat en les pròximes pàgines de manera que si el lector està interessat en la deducció d'aquestes propietats o no està familiaritzat amb aquestes definicions pot consultar-les.

Definició 1.43. *Donat un espai topològic normal X direm que la seua **dimensió topològica** és $n \in \mathbb{N}$ si n és el menor natural per al qual tot recobriment per oberts té un refinament de manera que cap punt $x \in X$ està contingut en més de $n+1$ oberts del refinament.*

Per la proposició B.6 sabem que un espai Hausdorff i paracompacte és normal aleshores té sentit considerar que siga de dimensió finita. En particular, els espais compactes són d'aquest tipus.

Teorema 1.44. *Donat ξ un $\mathbb{R}^n$-fibrat sobre una base B paracompacta, Hausdorff i de dimensió topològica finita, aleshores existeix $k \in \mathbb{N}^*$ i una transformació de fibrats $f : \xi \to \gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$. En particular és cert quan B és compacta.*

Aquesta demostració junta les idees de [MS74, Lema 5.3] i [MS74, Lema 5.9] per donar una versió més general del primer, que és el cas de que fos compacta.

Demostració. Com que ξ és localment trivial sabem que existeixen $\{U_i\}_i \in I$ oberts que recobrixen B tals que $\xi|_{U_i}$ són trivials per a tot $i \in I$. Com que B és paracompacte i Hausdorff podem aplicar el teorema B.9, aleshores existeix $\{V_i\}_{i\in I}$ refinament obert localment finit de $\{U_i\}_{i\in I}$ amb $\overline{V}_i \subset U_i$ i una partició de la unitat subordinada $\{\lambda_i : B \to [0,1]\}_{i\in I}$ de manera que per a cada $i \in I$, existeix un obert W_i amb

$$\overline{W}_i \subset V_i, \quad \lambda_i|_{\overline{W}_i} = 1, \quad \lambda_i|_{B\setminus V_i} = 0 \tag{1.3.5}$$

Com que la dimensió topològica és finita, $\dim X = m$, podem suposar que $\{U_i\}_{i\in I}$ és suficientment fina com per a que donat $x \in X$ com a màxim $U_{i_1}, ..., U_{i_m}$ interseguen a x, és a dir que com a màxim $\lambda_{i_1}, ..., \lambda_{i_m}$ són no nul·les.
Siga $S \subset I$ tal que $|S| \leq m$ i considerem:

$$U(S) := \left\{ b \in B / \min_{i\in S} \lambda_i(b) > \max_{i\notin S} \lambda_\alpha(b) \right\} \tag{1.3.6}$$

Cada $U(S)$ és clarament obert, a més és trivialitzant perquè si $i \in S$ aleshores $U(S) \subset V_i \subset U_i$ que és trivialitzant. A més, $U(S)$ és disjunt a altre $U(S')$ amb $S' \subset I$, $|S'| = |S|$ i $S \neq S'$, ja que si en tingueren un punt x_0 en comú existirien almenys $a, b \notin S \cap S'$ i per tant tindríem simultàniament que $\lambda_a(x_0) > \lambda_b(x_0) > \lambda_a(x_0)$ que seria una contradicció. Per tant si definim,

$$A_j = \cup_{S\subset I,\, |S|=j} U(S) \tag{1.3.7}$$

És obert unió d'oberts disjunts trivialitzants i per tant $A_0, ..., A_m$ són oberts trivialitzants. A més, $B = A_0 \cup ... \cup A_m$ ja que en un punt com a màxim són no nul·les m particions de la unitat, si $S = \{i_1, ..., i_l\}$ són els índexs de les particions no nul·les en x aleshores $x \in A_l$ i $l \leq m$.
Aplicant el teorema B.9 al recobriment $\{A_0, ..., A_m\}$, tenim que existeix un partició de la unitat subordinada finita (al ser subordinada i el recobriment finit tenim que serà finita la partició). És a dir, $\{V_j'\}_{j=0}^m$ i $\{W_j'\}_{j=0}^m$, recobriments oberts de manera que $\overline{W}_j' \subset V_j'$, $\overline{V}_j' \subset A_j$ i funcions contínues:

$$\{\mu_j : X \to [0,1]\}_{j=0}^m, \text{ tals que } \sum_{j=0}^m \mu_j = 1, \quad \mu_j|_{\overline{W}_j'} = 1, \quad \mu_j|_{B\setminus V_j'} = 0 \tag{1.3.8}$$

Ara siguen $h_j : \pi^{-1}(A_j) \to B \times \mathbb{R}^n$ les trivialitzacions en cada entorn A_j, podem definir:

$$\begin{aligned} f_j \colon \quad E(\xi) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ e &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } \pi(e) \notin V_j \\ \mu_j(\pi(e)) \cdot p(h_j(e)) & \text{si } \pi(e) \in A_j \end{cases} \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

on $p : B \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ és la projecció. És clar que f_j és contínua i també que és un lineal en cada fibra per ser h_j isomorfisme en cada fibra. Definim:

$$\begin{array}{rccl} \tilde{f}\colon & E(\xi) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{(m+1)n} \\ & e & \longmapsto & (f_0(e), ..., f_m(e)) \end{array} \tag{1.3.10}$$

Aquesta és contínua i actua com a monomorfisme entre fibres.
Per tant si definim:

$$\begin{array}{rccl} f\colon & E(\xi) & \longrightarrow & \gamma^n(\mathbb{R}^{(m+1)n}) \\ & e & \longmapsto & (\tilde{f}(\pi^{-1}(\{\pi(e)\})), \tilde{f}(e)),) \end{array} \tag{1.3.11}$$

és una transformació de fibrats. Siga $k = (m+1)n - n = mn$ aleshores tenim la hipòtesi del teorema. $\square$

Aquest teorema és prou més fort que l'aplicació de Gauss generalitzada, es podria comprovar la condició d'homotopia, però veiem que encara tenim un límit el de forçar que la dimensió siga finita i també està el problema que la k és diferent per a cada fibrat aleshores per definir el fibrat universal tenim que afitar les dimensions topològiques. Si poguérem fer tendir la k a infinit segurament podríem fer el mateix procés per a tots els fibrats Hausdorff i paracompactes. Això és el que anem a fer en la secció següent.

1.3.1 Grassmannià infinit

Siga $\mathbb{R}^\infty$ el conjunt de les successions $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ que són sempre 0 llevat d'un nombre finit de x_i, és clar que té estructura de $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió infinita. A més, si fixem un k es pot identificar de forma natural el subespai:

$$\{(x_1, ..., x_k, 0, 0, ...)/x_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., k\} \cong \mathbb{R}^k \tag{1.3.12}$$

Aleshores, observem que $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset ....$ i la unió de tots serà $\mathbb{R}^\infty$. Anem a definir el Grassmannià sobre aquest espai vectorial.

Definició 1.45. *La varietat topològica del **Grassmannià infinit***

$$G_n = G_n(\mathbb{R}^\infty) := \{V \leq \mathbb{R}^\infty / \; dim \; V = n\} \tag{1.3.13}$$

li donem la topologia del **límit directe** o **topologia de Whitehead** donada per:

$$G(n, 0) \subset G(n, 1) \subset G(n, 2) \subset G(n, 3) \subset ... \tag{1.3.14}$$

és a dir que un conjunt de G_n és obert sii la intersecció amb $G(n, k)$ és oberta per a tot $k \in \mathbb{N}$, anàlogament per als tancats[2]. Sabíem que $G(n, k) = \mathbb{R}P^k$, doncs resulta que $G_1 = \mathbb{R}P^\infty$.

[2] A l'exemple C.28, comprovem que la topologia del límit directe d'una família dirigida d'espais topològics encaixats amb la inclusió com a fletxes coincideix amb la topologia de Whitehead.

Observació 1.46. Igual que hem fet amb el Grassmannià, podem dotar a $\mathbb{R}^\infty$ d'una topologia aplicant el límit directe a la família dirigida: $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \subset ....$

El nostre objectiu continua sent la cerca del fibrat universal tal com hem proposat abans hem fet tendir la k a infinit ara queda vore si això ens proporciona el fibrat universal que buscàvem.

Definició 1.47. *Definim el **fibrat tautològic** γ^n sobre G_n:*

- *Com a espai total considerem $E(\gamma^n) = \{(V, v) \in G_n \times \mathbb{R}^\infty / \ v \in V\}$, amb la topologia del producte.*
- *La projecció $\pi : E(\gamma^n) \to G_n$ com $\pi(V, v) = V$, la qual és contínua per ser una projecció.*
- *L'estructura d'espai vectorial en les fibres com $t_1(V, v_1) + t_2(V, v_2) = (V, t_1v_1 + t_2v_2)$*

Per a que siga un fibrat vectorial tenim que demostrar que és localment trivial per a això abans necessitem un lema, per poder treballar millor amb la topologia de $E(\gamma^n)$.

Lema 1.48. *Siguen $A_1 \subset A_2 \subset ...$ i $B_1 \subset B_2 \subset ...$ famílies dirigides d'espais localment compactes amb límits directs A i B respectivament. Aleshores, la topologia del producte cartesià $A \times B$ coincideix amb la topologia del límit directe associada a la família dirigida $A_1 \times B_1 \subset A_2 \times B_2 \subset ...$*

Demostració. Siga W un obert en la topologia del límit directe i $(a, b) \in W$. Si $(a, b) \in A_i \times B_i$, com que són localment compactes, tenen una base d'entorns compacta i per tant, existeixen K_i i L_i entorns compactes de a i b respectivament, tals que $K_i \times L_i \subset W \cap (A_i \times B_i)$. Ara construïm K_{i+1} de la següent manera, considerem el recobriment compacte de K_i donat per $\{U_x^i\}_{x \in K_i}$ de manera que $U_x^i \subset A_{i+1}$, que existeix per ser A_{i+1} localment compacte, ara bé com que K_i és compacte en A_i i $K_i \subset A_i$, serà compacte en A_{i+1}, per tant, existeix un subrecobriment finit $U_{x_1}^i, ..., U_{x_k}^i$ de K_i en A_{i+1}, ara si definim $K_{i+1} = \cup_{j=1}^k U_j^i$, és clar que és un entorn compacte de a i que $K_{i+1} \subset A_{i+1}$. Anàlogament, podem construir L_{i+1} entorn compacte com abans i $K_{i+1} \times L_{i+1} \subset W \cap (A_{i+1} \times B_{i+1})$. Recursivament podem construir entorns compactes $K_i \subset K_{i+1} \subset ...$ i $L_i \subset L_{i+1} \subset ....$
Siguen U i V la unió dels K_i i L_i respectivament, tenim que són entorns de a i b respectivament i que

$$(a, b) \in U \times V \subset W \tag{1.3.15}$$

Per tant W és obert en la topologia producte. □

Proposició 1.49. *γ^n satisfà la condició de ser localment trivial.*

Demostració. Siga $X_0 \subset \mathbb{R}^\infty$, siga $p : \mathbb{R}^\infty \to X_0$ la projecció ortogonal sobre X_0 i siga $U \subset G_n$ el següent:

$$U = \{Y \in G_n / p(Y) = X_0\}, \quad U_k := U \cap G(n,k) \tag{1.3.16}$$

Sabem que U_k és obert com a la demostració de la proposició 1.27, per tant $U = \cup_{k\in\mathbb{N}} U_k$ és obert. Si ara definim:

$$\begin{aligned} h \colon \quad U \times X_0 &\longrightarrow \pi^{-1}(U) \\ (Y, x) &\longmapsto (Y, p^{-1}(y)) \end{aligned} \tag{1.3.17}$$

hem demostrat que $h|_{U_k \times X_0}$ és una trivialització en $G(n,k)$, en particular contínua, pel lema anterior tenim que h és contínua.
Es comprova que té inversa i que aquesta ve donada per $h^{-1}(Y, y) = (Y, py)$, pel mateix raonament és contínua. Per tant, h és un homeomorfisme, finalment h actua com a isomorfisme entre fibres perquè $h|_{U_k \times X_0}$ actua com a isomorfisme i per tant el límit també és lineal i a més hem vist que és bijectiva. Aleshores, és una trivialització. □

Ja per fi hem construït el fibrat tautològic γ^n queda demostrar que de fet és universal, per a això el primer que hauríem de demostrar és que G_n és Hausdorff i localment compacte. Per a això anem a gastar els resultats auxiliars:

Teorema 1.50. *Si un espai topològic regular és la unió numerable de subconjunts compactes i Hausdorff, aleshores és paracompacte.*

Vore [Mor56] per a la demostració.

Corol·lari 1.51. *El límit directe de la successió $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ d'espais compactes és paracompacte i Hausdorff. En particular G_n és paracompacte i Hausdorff.*

Per aplicar el teorema de Morita només cal comprovar el que G_n és regular, per [Whi49, p. 204] tenim que si K_i és tancat en K_{i+1} i tots són Hausdorff i paracompactes aleshores el límit directe és normal (en particular regular), les hipòtesi del teorema de Morita es satisfan i obtenim el resultat automàticament.

Definició 1.52. *Denotem a la subcategoria plena de $\mathscr{T}Bundle_{\mathbb{R}}$ que té com a objectes els $\mathbb{R}^n$-fibrats sobre una base paracompacta i Hausdorff com $ParaBundle_{\mathbb{R}^n}$. Aplicant el functor $Htp : \mathscr{T}Bundle_{\mathbb{R}} \to \mathscr{H}Bundle_{\mathbb{R}}$ sobre $ParaBundle_{\mathbb{R}^n}$ obtenim una subcategoria de $\mathscr{H}ParaBundle_{\mathbb{R}^n} := Htp(ParaBundle_{\mathbb{R}^n})$.*

Teorema 1.53. *Qualsevol $\xi \in Ob(ParaBundle_{\mathbb{R}^n})$ admet una transformació de fibrats $f : \xi \to \gamma^n$. A més, qualsevol parell de transformacions de fibrats $f, g : \xi \to \gamma^n$ són homotòpiques. És a dir, γ^n és terminal en $\mathscr{H}ParaBundle_{\mathbb{R}^n}$, el qual és equivalent a dir que és universal en $ParaBundle_{\mathbb{R}^n}$.*

Nota 1.54. Tal com hem fet a la prova del teorema 1.44. Observem que donada una transformació de fibrats $f : \xi \to \gamma^n$ determina unívocament una aplicació $\tilde{f} : E(\xi) \to \mathbb{R}^\infty$ contínua i que actua com a monomorfisme entre fibres. Recíprocament donada $\tilde{f} : E(\xi) \to \mathbb{R}^\infty$ contínua determina unívocament f un morfisme de fibrats definit com:

$$f(e) = (\tilde{f}(\pi^{-1}(\{\pi(e)\})), \tilde{f}(e)) \tag{1.3.18}$$

Demostració. Teorema 1.53.
Existència.
Fent exactament el mateix raonament que en la demostració del teorema 1.44, simplement que a l'hora de definir A_j ja no tenim fitada la j, aleshores arribem a que existeixen $A_0, ..., A_k, ...$ un nombre numerable d'oberts trivialitzants que recobreixen B. Igual que abans, al estar en una base Hausdorff i paracompacta, existeix una partició de la unitat localment finita subordinada al recobriment $A_0, ..., A_j, ...$ Aleshores, existeixen $\{V_j'\}_{j=0}^\infty$ i $\{W_j'\}_{j=0}^\infty$, recobriments oberts de manera que $\overline{W}_j' \subset V_j'$, $\overline{V}_j' \subset A_j$ i funcions contínues:

$$\{\mu_j : X \to [0,1]\}_{j=0}^\infty, \quad \sum_{j=0}^\infty \mu_j = 1, \quad \mu_j|_{\overline{W}_j'} = 1, \quad \mu_j|_{V_j'} = 0 \tag{1.3.19}$$

Ara siguen $h_j : \pi^{-1}(A_j) \to B \times \mathbb{R}^n$ les trivialitzacions en cada entorn A_j, podem definir:

$$\begin{aligned} f_j \colon \quad E(\xi) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ e &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } \pi(e) \notin V_j \\ \mu_j(\pi(e)) \cdot p(h_j(e)) & \text{si } \pi(e) \in A_j \end{cases} \end{aligned} \tag{1.3.20}$$

on $p : B \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ és la projecció. És clar que f_j és contínua i també que és lineal i injectiva en cada fibra per ser h_j isomorfisme en cada fibra. Definim:

$$\begin{aligned} \tilde{f} \colon \quad E(\xi) &\longrightarrow \mathbb{R}^\infty \\ e &\longmapsto (f_0(e), ..., f_m(e), ...) \end{aligned} \tag{1.3.21}$$

Aleshores aquesta és contínua per ser cada component contínua i a més actua com a monomorfisme sobre cada fibra.
Per tant si definim:

$$\begin{aligned} f \colon \quad E(\xi) &\longrightarrow \gamma^n \\ e &\longmapsto (\tilde{f}(\pi^{-1}(\{\pi(e)\})), \tilde{f}(e)),) \end{aligned} \tag{1.3.22}$$

és una transformació de fibrats.

Unicitat de la classe d'homotopia
Siguen $f, g : \xi \to \gamma^n$ dos transformacions entre fibrats qualssevol. Per la nota 1.54, ens defineixen $\tilde{g}, \tilde{f} : E(\xi) \to R^\infty$.
Primerament suposem que $\tilde{f} \neq \lambda\tilde{g}(e)$ per a tot $\lambda \in]-\infty, 0[$ i per a tot $0 \neq e \in E(\xi)$. Aleshores, anem a vore que la següent aplicació defineix una homotopia:

$$\tilde{h}_t(e) = (1-t)\tilde{f}(e) + t\tilde{g}(e), \quad 0 \leq t \leq 1 \tag{1.3.23}$$

Com que $\tilde{g}, \tilde{f}$ són contínues per hipòtesi només cal vore que la suma i la multiplicació per escalars en $\mathbb{R}^\infty$ són contínues però pel lema 1.48 al ser contínues en $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ per a tot $k \in \mathbb{N}$ deduïm que són contínues en $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$.
Aleshores, considerem $h : E(\xi) \times [0,1] \to E(\eta)$ definida com en la nota 1.54. Per tal de provar que és contínua és suficient provar que la induïda en les bases és contínua

$$\overline{h} : B(\xi) \times [0,1] \to G_n \tag{1.3.24}$$

Si considerem $x \in B(\xi)$ aleshores existeix U un obert trivialitzant que el conté, siguen $s_1, ..., s_n$ les seccions independents de $\xi|U$ aleshores tenim que si $V_n(\mathbb{R}^\infty)$ és el límit directe de $V_n(\mathbb{R}^{n+k})$ les varietats de Stiefel aleshores

$$\begin{array}{lcccc} \overline{h}|_{U\times[0,1]}: & U \times [0,1] & \longrightarrow & V_n(\mathbb{R}^\infty) & \xrightarrow{q} & G_n \\ & (b,t) & \longmapsto & (\tilde{h}_t(b)s_1(b), ..., \tilde{h}_t(b)s_n(b)) & \longmapsto & <\tilde{h}_t(b)s_1(b), ..., \tilde{h}_t(b)s_n(b)> \end{array} \tag{1.3.25}$$

La primera aplicació és contínua perquè $\tilde{h}$ és contínua i les seccions són contínues, finalment al ser q contínua en dimensions finites pel lema s'estén a tot el domini. Per tant $\overline{h}$ és contínua, aleshores h és contínua. Per altra banda com que f i g actuen com a monomorfismes entre fibres i per a una t fixa l'homotopia és lineal, aleshores tenim que per a cada $t \in [0,1]$ h_t és una transformació de fibrats.
Ara llevem la hipòtesi que havíem posat sobre $\tilde{f}(e)$ i $\tilde{g}(e)$. Considerem la transformació $d_1 : \gamma^n \to \gamma^n$, que mana la component i-èssima a la $(2i-1)$-èssima. i $d_2 : \gamma^n \to \gamma^n$ que mana la component i-èssima a la $2i$-èssima. Aleshores és clar que

- f i $d_1 \circ f$.
- $d_1 \circ f$ i $d_2 \circ g$.
- $d_2 \circ g$ i g.

compleixen la hipòtesi del cas que ja hem provat.
Com a conseqüència tenim que $f \sim d_1 \circ f \sim d_2 \circ g \sim g$ i per tant $f \sim g$ □

Corol·lari 1.55. *Per a tot $\xi \in Ob(ParaBundle_{\mathbb{R}^n})$ existeix un única classe d'homotopia d'aplicacions:*

$$\overline{f}_\xi : B(\xi) \to G_n \tag{1.3.26}$$

Demostració. Pel teorema anterior tenim $f_\xi : \xi \to \gamma^n$ transformació entre fibrats única tret d'homotopia, siga $\overline{f}_\xi$ l'aplicació induïda sobre les bases. □

Hem trobat ja el fibrat universal que estàvem buscant ara el següent pas seria definir les classes característiques associant al fibrat universal una classe de cohomologia, ara bé encara no sabem què és la cohomologia, aleshores haurem d'esperar un poc més per definir les classes característiques.

Capítol 2

Cohomologia

Aquest capítol es centra en l'estudi de la cohomologia tant la seua definició i propietats com les aplicacions necessàries per després construir les classes de Stiefel-Whitney i provar la seua unicitat.
Primerament anem a treballar un poc d'àlgebra homològica i ja en això passarem a l'estudi de complexos de cadenes i l'homologia. Després passarem a considerar l'homologia d'espais topològics prestant especial atenció a l'homologia singular.
El plat fort serà definir la cohomologia i la cohomologia singular, estudiar algunes de les seues propietats i dotar a la cohomologia singular d'un producte per tal de donar-li estructura d'anell, comprovant que és un àlgebra anticommutativa.
Finalment vorem dos principals aplicacions necessàries,

1. Estudiar l'estructura cel·lular del Grassmannià i calcular la cohomologia de $\mathbb{R}P^\infty$, provant les propietats de cohomologia/homologia de CW complexos que faça falta.

2. Definir el producte en creu, demostrar el teorema de l'isomorfisme de Thom i descriure les operacions de quadrats de Steenrod, els ingredients claus per construir les classes de Stiefel-Whitney.

Nota 2.1. Al lector que no estiga familiaritzat amb la teoria de categories recomanem que consulte l'apèndix C sobretot la secció de límits i colímits que és lo més tècnic que es gastarà.

Notació. D'ací endavant durant tot el capítol anem a considerar sempre que R és un **anell commutatiu unitari**.

2.1 Introducció a l'àlgebra commutativa

Aquesta secció va estar dedicada a estudiar les propietats dels R-mòduls i les successions exactes, ferramentes algebraiques imprescindibles per tractar l'homologia i la cohomologia.

Per a aquesta secció hem gastat com a referències principals [AM94, Capítol 2], [Alu09, Capítol III], [Lan02, Capítol 3] i [Hat01, pp. 120-130].

Definició 2.2. *Donat R un anell, definim un R-**mòdul** a esquerra, com un grup abelià $(M,+)$ i una correspondència $\cdot : R\times M \to M$ tal que per a qualsevol $r,s\in R$ i $x,y\in M$ es satisfà:*

$$\begin{aligned} r(x+y) &= rx+ry \\ (r+s)x &= rx+sx \\ (rs)x &= r(sx) \\ 1r &= r \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Anàlogament es defineix un R-mòdul a dreta.

Per commutativitat tindrem que els R-mòduls a esquerra i a dreta coincideixen i per tant direm simplement R-mòduls.

Definició 2.3. *Definim un **homomorfisme de R-mòduls** o R-**homomorfisme** com una aplicació $f : M \to M'$, que actua como homomorfisme grups entre $(M,+)$ i $(M',+')$ i tal que:*

$$f(rx) = rf(x), \quad \forall r\in R, \forall x\in M \tag{2.1.2}$$

Podem definir la categoria Mod_R, que té com a objectes R-mòduls i com a morfismes els homomorfismes de R-mòduls amb la composició habitual d'aplicacions.

Definició 2.4. *Un **submòdul** N de M és un subgrup de N tal que $rn\in N$ per a tot $r\in R$ i $n\in N$, denotarem N és submòdul de M com $N\le M$*

A més, si considerem el quocient M/N, aquest hereta l'estructura de R-mòdul de M definida per $r(m+N) = rm+N$ on $m\in M$ i $r\in R$. A més, la projecció al quocient és un homomorfisme de R-mòduls.

Teorema 2.5 (1^{er} teorema d'isomorfia)**.** *Siga $f : M\to N$ un homomorfisme de R-mòduls,* $\ker(f) = f^{-1}(0)$ *i* $\operatorname{Im} f = f(M)$. *Aleshores:*

$$M/Kerf \cong \operatorname{Im} f \tag{2.1.3}$$

La demostració és un exercici elemental, sinó vore [AM94, pg. 19].

Definició 2.6. *Donat un conjunt arbitrari I, definim el R-**mòdul lliure** generat per I, denotat com $\bigoplus_{i\in I} R$, com el conjunt*

$$\{(r_i)_{i\in I} / \quad r_i\in R\ \forall i\in I \text{ on } r_i = 0 \text{ llevat d'un nombre finit de } i\} \tag{2.1.4}$$

Amb la suma definida com:

$$(r_i)_{i\in I} + (r'_i)_{i\in I} = (r_i + r'_i)_{i\in I}, \quad r_i, r'_i \in R,\ \forall i \in I \tag{2.1.5}$$

i el producte $\cdot$ definit com:

$$r \cdot (r_i)_{i\in R} = (rr_i)_{i\in I}, \quad r, r_i \in R,\ \forall i \in I \tag{2.1.6}$$

Un R-mòdul M direm que és lliure si existeix un conjunt tal que $i \in I$ tal que $M \cong \bigoplus_{i\in I} R$. En particular, tot espai R-espai vectorial és un R-mòdul lliure.

Definició 2.7. *Donat un anell R direm que és anell d'ideals principals si tot ideal és de la forma xR per algun $x \in R$.*

Proposició 2.8. *Si M és un mòdul lliure i R un anell d'ideals principal aleshores tot submòdul N de M és lliure.*

Per a la demostració consultar [Kap54, Lema 15].

Exemple 2.9.
- $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ són anells d'ideals principals, per a tot $m \in \mathbb{N}$-
- Tot anell commutatiu que siga domini d'ideals principal és anell d'ideals principal.

Definició 2.10 (**Successió exacta**). *Donats uns R-mòduls, M_n, $n \in \{0, ..., n\}$, i uns homomorfismes $f_n : M_{n-1} \to M_n$, $n \in \{1, ..., n\}$ direm que la següent successió:*

$$M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} M_2 \longrightarrow \ldots \xrightarrow{f_n} M_n \tag{2.1.7}$$

és exacta finita si $\mathrm{Im}(f_i) = \ker f_{i+1}$, $\forall i \in \{1, ..., n-1\}$.
*En el cas en què $n = 4$ i $M_0 = M_4 = 0$ direm que és una **successió exacta curta**:*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0 \tag{2.1.8}$$

Com que és exacta observem que f serà injectiva, g sobrejectiva i $\mathrm{Im}\, f = \ker g$.

Exemple 2.11. Si $H \leq M$ la successió següent és exacta curta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} H \xrightarrow{\pi} M/H \longrightarrow 0 \tag{2.1.9}$$

on i denota la inclusió i π la projecció sobre el quocient.

En el cas general d'una successió exacta curta 2.1.8, si definim $A = \mathrm{Im}\, f_1 = Ker f_2$, aleshores $B \leq M_2$ amb $A \cong M_1$ i pel primer teorema d'isomorfia (2.5) $M_2/A \cong M_3$.

Definició 2.12. *Si M_n $n \in \mathbb{Z}$ són R-mòduls i $f_n : M_{n-1} \to M_n$ $n \in \mathbb{Z}$ homomorfismes, direm que aquesta **successió** és **exacta llarga***

$$... \xrightarrow{f_{-1}} M_{-1} \xrightarrow{f_0} M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} ... \tag{2.1.10}$$

si es compleix que $\operatorname{Im} f_n = Ker f_{n+1}, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Proposició 2.13. *Si $... \overset{f_{-1}}{\to} A \overset{f_0}{\to} B \overset{f_1}{\to} ...$ és una successió exacta aleshores f_0 és un monomorfisme sii $f_{-1} = 0$ i f_0 és un epimorfisme sii $f_1 = 0$ i per tant f_0 és isomorfisme sii $f_{-1} = f_1 = 0$.*

És trivial per l'exactitud de la cadena. Aquest resultat és tan bàsic i comú que no el citarem.
Per acabar aquesta secció vorem un parell de resultats ben coneguts i molt útils de les successions exactes.

Lema dels 5

Ara anem a considerar un teorema molt útil i conegut:

Lema 2.14 (Lema dels 5)**.** *Considerem el diagrama commutatiu d'homomorfismes:*

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\gamma_1"] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\gamma_2"] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\gamma_3"] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\gamma_4"] & A_5 \arrow[d, "\gamma_5"] \\ B_1 \arrow[r, "g_1"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & B_3 \arrow[r, "g_3"] & B_4 \arrow[r, "g_4"] & B_5 \end{tikzcd} \tag{2.1.11}$$

Si les files són exactes i $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4$ i γ_5 són isomorfismes aleshores γ_3 és un isomorfisme.

Demostració. Anem a provar:

1. γ_3 és epimorfisme si γ_2 i γ_4 ho són i γ_5 és monomorfisme.

2. γ_3 és monomorfisme si γ_2 i γ_4 ho són i γ_1 és epimorfisme.

és clar que si això és cert aplicant les hipòtesi del teorema obtenim que γ_3 és isomorfisme.
(1). Siga $b_3 \in B_3$, aleshores com que γ_4 és epimorfisme existeix $a_4 \in A_4$ tal que $g_3(b_3) = \gamma_4(a_4)$. Aplicant la commutativitat del diagrama $\gamma_5(f_4(a_4)) = g_4(\gamma_4(a_4)) = g_4(g_3(b_3)) = 0$ l'última igualtat és per exactitud de les files, ara bé com que γ_5 és injectiva tenim que $f_4(a_4) = 0$, aleshores per exactitud de la fila de dalt existeix $a_3 \in A_3$ tal que $a_4 = f_3(a_3)$. Ara bé,

$$g_3(b_3 - \gamma_3(a_3)) = g_3(b_3) - g_3(\gamma_3(a_3)) = g_3(b_3) - \gamma_4(f_3(a_3)) = \gamma_4(a_4 - a_4) = 0 \tag{2.1.12}$$

Aleshores, per exactitud tenim que existeix $b_2 \in B_2$ tal que $b_3 - \gamma_3(a_3) = g_2(b_2)$. Com que γ_2 és epimorfisme existeix $a_2 \in A_2$ tal que $\gamma_2(a_2) = b_2$, aleshores

$$\begin{aligned}\gamma_3(a_3 + f_2(a_2)) = \gamma_3(a_3) + \gamma_3(f_2(a_2)) = \\ = \gamma_3(a_3) + g_2(\gamma_2(a_2)) = \gamma_3(a_3) + g_2(b_2) = \\ = \gamma_3(a_3) + b_3 - \gamma_3(a_3) = b_3\end{aligned} \tag{2.1.13}$$

Per tant, γ_3 és sobrejectiva.
(2). Suposem que existeix $a_3 \in A_3$ tal que $\gamma_3(a_3) = 0$. Per commutativitat del diagrama $g_3(\gamma_3(a_3)) = \gamma_4(f_3(a_3)) = 0$, per ser γ_4 injectiva tenim que $f_3(a_3) = 0$, aleshores per exactitud existeix $a_2 \in A_2$ tal que $f_2(a_2) = a_3$. Notem que $g_2(\gamma_2(a_2)) = \gamma_3(f_2(a_2)) = \gamma_3(a_3) = 0$, per tant existeix $b_1 \in B_1$ tal que $g_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Com que γ_1 és epimorfisme existeix $a_1 \in A_1$ tal que $\gamma_1(a_1) = b_1$. Observem el següent:

$$\gamma_2(f_1(a_1) - a_2) = \gamma_2(f_1(a_1)) - \gamma_2(a_2) = g_1(\gamma_1(a_1)) - \gamma_2(a_2) = g_1(b_1) - \gamma_2(a_2) = 0 \tag{2.1.14}$$

Com que γ_2 és monomorfisme tenim que $f_1(a_1) = a_2$. Per tant $a_3 = f_2(a_2) = f_2(f_1(a_2)) = 0$ per exactitud, aleshores tenim que γ_3 és injectiva. $\square$

Lema de la Serp (*Snake Lemma*)

Siguen M, M', N, N' R-mòduls de manera que tenim el següent diagrama commutatiu de R-homomorfismes:

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow{\scriptstyle d'} & & \downarrow{\scriptstyle d} \\ N' & \xrightarrow{h} & N \end{array} \tag{2.1.15}$$

Aleshores f indueix un homomorfisme $f|_{\ker d'} : \ker d' \to \ker d$. Està ben definit perquè donat $x' \in M'$ tal que $d'(x') = 0$ aleshores $df(x') = hd'(x') = 0$.

Definició 2.15. *Donada $f : M \to N$ on M i N R-mòduls, aleshores definim*

$$\operatorname{coker}(f) = N / \operatorname{Im} f \tag{2.1.16}$$

Al igual que hem raonat abans h indueix un homomorfisme $\operatorname{coker} d' \to \operatorname{coker} d$. Donat $y' \in N'$ projectem sobre coker, aleshores $hy' \mod dM$ no depén de l'elecció de y'. Això és perquè donat $y'' = y' + d'x' \in$ coker d' aleshores:

$$hy'' = hy' + hd'x' = hy' + dfx' \equiv hy' \; mod \; dM \tag{2.1.17}$$

Aleshores ens queda una aplicació $h^* : N'/d'M' =$ coker $d' \to N/dM =$ coker d. És clar que és un homomorfisme per ser h homomorfisme.
Ara considerem un cas més general, donat pel següent lema:

Lema 2.16 (Lema de la serp)**.** *Donat un diagrama commutatiu amb files exactes:*

$$
\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[r, "f_M"] \arrow[d, "d'"] & M \arrow[r, "g_M"] \arrow[d, "d"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "d''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "f_N"] & N \arrow[r, "g_N"] & N'' &
\end{tikzcd}
\tag{2.1.18}
$$

Aleshores l'aplicació

$$\delta : \ker d'' \longrightarrow \text{coker } d' \tag{2.1.19}$$

$\delta z'' = p' \circ f_N^{-1} \circ d \circ g_M^{-1}(z'')$*, on* p' *és la projecció sobre* $\operatorname{coker} d'$*, està ben definida, és un homomorfisme i la successió:*

$$\ker d' \to \ker d \to \ker d'' \xrightarrow{\delta} \text{coker } d' \to \text{coker } d \to \ker d'' \tag{2.1.20}$$

és exacta, on els homomorfismes entre els ker *i* coker *són els que hem definit prèviament.*

Podem vore l'enunciat d'aquest lema com que a partir del diagrama 2.1.18 obtenim el diagrama commutatiu amb files exactes:

$$
\begin{tikzcd}
 & \ker d' \arrow[r, "f_M^*"] \arrow[d, "i'"] & \ker d \arrow[r, "g_M^*"] \arrow[d, "i"] & \ker d'' \arrow[d, "i''"] \arrow[dddll, rounded corners, "\delta"] & \\
 & M' \arrow[r, "f_M"] \arrow[d, "d'"] & M \arrow[r, "g_M"] \arrow[d, "d"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "d''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "f_N"] \arrow[d, "p'"] & N \arrow[r, "g_N"] \arrow[d, "p"] & N'' \arrow[d, "p''"] & \\
 & \operatorname{coker} d' \arrow[r, "f_N^*"] & \operatorname{coker} d \arrow[r, "g_N^*"] & \operatorname{coker} d'' &
\end{tikzcd}
\tag{2.1.21}
$$

on les fletxes que ixen dels ker són les inclusions i les que arriben als coker són les projeccions sobre el quocients.

Demostració. Primer comprovem que està ben definit, donat $z'' \in \ker d''$ com que la primera fila és exacta tenim que g_M és sobrejectiva aleshores qualsevol element de $\ker d''$ té antiimatge en M, $g_M(z) = z''$. Apliquem d i per commutativitat tenim que $g_N d(z) = d'' g_M(z) = d'' z'' = 0$, per tant, $dz \in \ker g_N$, aleshores per exactitud $dz \in \operatorname{Im}(f_N)$, aleshores com que és injectiva té una única antiimatge i després projectem sobre el quocient.
En aquest procés només hem fet una decisió que no estiga a priori unívocament determinada que és triar l'antiimatge de z'', suposem que tenim $z_1, z_2 \in g_M^{-1}(z'')$. Aleshores, tenim

que $g_M(z_1) = g_M(z_2)$ i per tant $g_M(z_1 - z_2) = 0$, aleshores $z_1 - z_2 \in \ker g_M = \operatorname{Im} f_M$ i per tant, aplicant que és exacta existeixen $m' \in M'$ tal que $f(m') = z_1 - z_2$ ara aplicant la commutativitat del diagrama $f_N d'(m') = df_M(m) = dz_1 - dz_2$. Per altra banda, fent el raonament del paràgraf anterior tenim que existeixen n'_1, n'_2 tals que $f_N(n'_1) = dz_1$ i $f_N(n'_2) = dz_2$. Aleshores, $f_N d'(m') = f_N(n_1) - f_N(n_2) = f_N(n'_1 - n'_2)$. Com que f_N és injectiva tenim que $d'm' = n'_1 - n'_2$, aleshores $n'_1 - n'_2 \in \operatorname{Im} d'$ i per tant $n'_1 + \operatorname{Im} d' = n'_2 + \operatorname{Im} d'$, aleshores $p'(n_1) = p'(n_2)$. Per tant l'aplicació està ben definida.
És δ un homomorfisme? Siguen $z''_1, z''_2 \in \ker d''$ per a tot $m_1 \in g_M^{-1}(z''_1)$, $m_2 \in g_M^{-1}(z''_2)$, ara $g_M(m_1 + m_2) = z''_1 + z''_2$ i per tant $m_1 + m_2 \in g^{-1}(z''_1 + z''_2)$. Per altra banda, com que f_N és monomorfisme,

$$\begin{aligned} p' f_N^{-1} d(m_1 + m_2) = p' f_N^{-1}(d(m_1) + d(m_2)) = \\ = p'(f_N^{-1} d(m_1) + f_N^{-1} d(m_1)) = \\ = p' f_N^{-1} d(m_1) + p' f_N^{-1} d(m_2) \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

Aleshores com que δ no depén de l'elecció de m_1 i m_2

$$\delta(z''_1) + \delta(z''_2) = p' f_N^{-1} d(m_1) + p' f_N^{-1} d(m_2) = p' f_N^{-1} d(m_1 + m_2) = \delta(z''_1 + z''_2) \quad (2.1.23)$$

La commutativitat del diagrama 2.1.21 és trivial per ser projeccions i inclusions. Ara provem l'exactitud de 2.1.20.

- $\ker d' \overset{f_M^*}{\to} \ker d \overset{g_M^*}{\to} \ker d''$ exacta
  1. Considerem $z_1 \in \ker g_M^*$ aleshores per commutativitat $g_M(z_1) = g_M^*(z_1) = 0$ per tant $z_1 \in \ker g_M$ per exactitud existeix $m' \in M'$ tal que $f_M(m') = z_1$, ara per commutativitat tenim $f_N d'(m') = df_M(m') = d(z_1) = 0$, com que f_N és injectiva $d'(m') = 0$ i per tant $m' \in \ker d'$ aleshores $\ker g_M^* \leq \operatorname{Im} f_M^*$.
  2. Ara considerem, $z \in \operatorname{Im} f_M^*$, aleshores existeix $z' \in \ker d'$ tal que $f_M^*(z') = z$ per commutativitat del diagrama $f_M(z') = z$, ara per exactitud tenim que $z \in \ker g_M$ aleshores $g_M(z) = 0$, i per tant, $g_M^*(z) = 0$. Concloem que $\operatorname{Im} f_M^* \leq \ker g_M$.

- $\operatorname{coker} d' \overset{f_N^*}{\to} \operatorname{coker} d \overset{g_N^*}{\to} \operatorname{coker} d''$ exacta
  1. Siga $z \in \ker g_N^*$ i n un representant de z, és a dir n. Per commutativitat del diagrama $p'' g_N(n) = g_{N*} p(n) = g_{N*}(z) = 0$ aleshores $g_N(n) \in \operatorname{Im} d''$, aleshores existeix $m'' \in M''$ tal que $d'' m'' = g_N(n)$ com que g_M és sobrejectiva tenim que existeix $m \in M$ tal que $g_M(m) = m''$ ara aplicant la commutativitat del diagrama $g_N d(m) = d'' g_M(m) = g_N(n)$, aleshores pel fet anterior i l'exactitud $n - d(m) \in \ker g_N = \operatorname{Im} f_N$, per tant existeix $n' \in N'$ tal que $f_N(n') = n - d(m)$. Notem que $d(m) \in \operatorname{Im} d$ i per tant $p(n - d(m)) = p(n) - pd(m) = z + 0 = z$.

Aleshores aplicant commutativitat $z = p(n - d(m)) = pf_N(n') = f_N^*(p'(n'))$. Concloem que $\ker g_N^* \leq \operatorname{Im} f_N^*$

2. Siga $z \in \operatorname{Im} f_N^*$, aleshores existeix $z' \in \operatorname{coker} d$ tal que $f_N^*(z') = z$, siga n' un representant de z', considerem $n := f_N(n')$, per commutativitat del diagrama $z = f_N^* p'(n') = pf_N(n')$. Per altra banda, per exactitud $n \in \operatorname{Im} d = \ker g_N$ aleshores, per commutativitat $0 = p''(0) = p'' g_N(n) = g_N^* p(n) = g_N^* p f_N(n') = g_N^*(z)$. Aleshores, $\operatorname{Im} f_N^* \leq \ker g_N^*$.

- $\xrightarrow{\delta}$ coker $d' \xrightarrow{f_N^*}$ coker d exacta

1. Considerem $z' \in \ker f_N^*$, siga n' un representant d'aquest. Per commutativitat, tenim que $pf_N(n') = f_N^* p'(n') = f_N^*(z') = 0$ per tant, tenim que $f_N(n') \in \operatorname{Im} d$. Aleshores existeix $m \in M$ tal que $d(m) = f_N(n')$. Per commutativitat, $d'' g_M(m) = g_N(d(m)) = 0$ perquè $d(m) \in \operatorname{Im} f_N = \ker g_N$. Per tant $g_M(m) \in \ker d''$. Aleshores,
$$\delta(g_M(m)) = p' \circ f_N^{-1} \circ d \circ g_M^{-1}(g_M(m)) = p' \circ f_N^{-1} \circ d(m) = p' \circ f_N^{-1} f_N(n') = p'(n') = z' \tag{2.1.24}$$
Concloem que $\ker f_N^* \leq \operatorname{Im} \delta$

2. Considerem $c' \in \operatorname{Im} \delta$, aleshores existeix $z'' \in \ker d''$ tal que $\delta(z'') = c'$, per a tot $m \in g_M^{-1}(z'')$ per commutativitat, $g_N d(m) = d'' g_M(m) = d''(z'') = 0$, per tant $d(m) \in \ker g_M$. Per exactitud existeix, $n' \in N'$ tal que $f_N(n') = d(m)$. Per commutativitat, $f_N^*(p'(n')) = pf_N(n') = pd(m) = 0$, aleshores $p'(n') \in \ker f_N^*$. Ara bé, com que δ no depén de l'elecció de $g_M^{-1}(z'')$:
$$p'(n') = p' \circ f_N^{-1} \circ d(m) = p' \circ f_N^{-1} \circ d \circ g_M^{-1}(z'') = \delta(z'') \tag{2.1.25}$$
Aleshores, $\delta(z'') \in \ker f_N^*$ i per tant $\operatorname{Im} \delta \leq \ker f_N^*$.

- $\ker d \xrightarrow{g_M} \ker d'' \xrightarrow{\delta}$ coker d' exacta

1. Siga $z'' \in \ker \delta$. Aleshores, $p' \circ f_N^{-1} \circ d \circ g_M^{-1}(z'') = 0$, per tant, per a tot $m \in g_M^{-1}(z'')$, $p' \circ f_N^{-1} \circ d(m) = 0$, aleshores $f_N^{-1} \circ d(m) \in \operatorname{Im} d'$. Aleshores existeix $m' \in M'$ tal que $d'(m') = f_N^{-1} d(m)$, per commutativitat, $d(m) = f_N d'(m') = df_M(m')$. Per tant, $m - f_M(m') \in \ker d$. Ara bé, per exactitud $\ker g_M = \operatorname{Im} f_M$ i per tant $g_M^*(m - f_M(m')) = g_M(m - f_M(m')) = g_M(m) = z''$, per tant $\ker \delta \leq \operatorname{Im} g_M^*$.

2. Siga $z'' \in \operatorname{Im} g_M^*$, aleshores per a tot $z \in \ker d$ tal que $g_M^*(z) = z''$. Per tant $g_M(z) = z''$, ara $d(z) = 0$ i per tant com que f_N és injectiva $f^{-1}(z) = 0$, aleshores $p'(0) = 0$. És a dir, com que δ no depén de l'elecció de $g_M^{-1}(z'')$:
$$\delta(z'') = p' \circ f_N^{-1} \circ d \circ g_M^{-1}(z'') = p' \circ f_N^{-1} \circ d(z) = p' \circ f_N^{-1}(0) = p'(0) = 0 \tag{2.1.26}$$
Aleshores, $z'' \in \ker \delta$, concloem que $\operatorname{Im} g_M^* \leq \ker \delta$.

$\square$

Exemple 2.17. Siguen $M'' \leq M' \leq M$ R-mòduls. Aleshores tenim la successió exacta curta:

$$0 \longrightarrow M'/M'' \longrightarrow M/M'' \longrightarrow M/M' \longrightarrow 0 \tag{2.1.27}$$

Aquesta direm que és la successió exacta curta de la terna (M, M', M'').[1]

Considerem el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & M'' \arrow[r, "id_{M''}"] \arrow[d, "i'"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "i''"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "p"] & M/M' & \end{tikzcd} \tag{2.1.28}$$

on les i són les inclusions respectives i p és la projecció sobre el quocient, és clar que el diagrama commuta.
A més la primera fila és clarament exacta i la segona fila també per l'exemple 2.11. Si ara apliquem el lema anterior obtenim la successió exacta curta:

$$... \ker 0 = 0 \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} i' = M'/M'' \xrightarrow{i^*} \operatorname{coker} i'' = M/M'' \xrightarrow{p^*} \operatorname{coker} 0 = M/M'' \rightarrow 0 \tag{2.1.29}$$

2.2 Complexos de Cadenes

En aquesta secció definim els complexos de cadenes i estudiem algunes propietats, aquestos ens serviran per definir tant l'homologia com la cohomologia. Per a aquesta secció hem gastat com a referència principal [Dol80, Capítol II].

Definició 2.18. *Direm que M és un R-**mòdul graduat** si és una col·lecció ordenada de R-mòduls $\{M_n / n \in \mathbb{Z}\}$. També el podem denotar com $M = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$.*

Si M és un R-mòdul graduat podem considerar-lo com la suma formal d'elements en tots els grups, és a dir donat $m \in M$.

$$m = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r_n m_n, \quad r_n \in R, m_n \in M_n \tag{2.2.1}$$

Donats dos R-mòduls graduats M i N direm que $f : M \rightarrow N$ és un homomorfisme si és una col·lecció d'homomorfismes

$$f_n : M_n \rightarrow N_{n+r}, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{2.2.2}$$

on $r \in \mathbb{Z}$ està fix i es diu grau de f.

[1]Comprovar que aquesta successió és exacta curta per la definició és molt trivial però l'hem fet així per vore un exemple simple de com gastar el *Snake lemma*

Definició 2.19. *Un* ***complex de cadenes*** *és un parell* (C, ∂)*, on* C *és un* R*-mòdul graduat i* $\partial : C \to C$ *és un homomorfisme de grau* -1 *tal que* $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ *per a tot* $n \in \mathbb{Z}$ *al qual li direm* ***vora****. El complex el podem expressar com la successió:*

$$... \xleftarrow{\partial_{n-1}} C_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} C_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} C_{n+1} \xleftarrow{\partial_{n+2}} ... \tag{2.2.3}$$

Notem que l'última condició implica que $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \leq \ker \partial_n$*. Quan no hi haja risc de confusió escriurem* ∂ *en comptes de* ∂_n*.*

Definició 2.20. *Donat un complex de cadenes* (C, ∂) *definim, els* n*-****cicles****:*

$$Z_n(C; R) := \ker \partial_n \tag{2.2.4}$$

Definim les n*-****vores*** *com les* n*-cadenes que són la vora d'alguna* $(n + 1)-$*cadena:*

$$B_n(C; R) := \operatorname{Im} \partial_{n+1} \tag{2.2.5}$$

Gastant el fet de que C_n *és abelià i que* $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \leq \ker \partial_n$ *definim el* ***mòdul*** n*-****èssim d'homologia****:*

$$H_n(C; R) := \ker \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1} = Z_n(C; R)/B_n(C; R) \tag{2.2.6}$$

Notació. Si no existeix risc de confusió sobre quin anell és R l'ometrem.

Definició 2.21. *Siguen* (C, ∂) *i* (C', ∂') *dos complexos de cadenes, direm que* $f : C \to C'$ *és una* ***aplicació de cadenes*** *si és una successió d'homomorfismes* $\{f_n : C_n \to C'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$*, és a dir de grau 0, de manera que el següent diagrama commuta:*

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\partial"'] & C'_n \arrow[d, "\partial'"] \\ C_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] & C'_{n-1} \end{tikzcd} \tag{2.2.7}$$

Donats $C \xrightarrow{f} C' \xrightarrow{f'} C''$ *aplicacions de cadenes definim* $f \circ f'$ *com* $(f \circ f')_n = f_n \circ f'_n$ *per a tot* $n \in \mathbb{Z}$*.*

Per tant, és clar que $\mathscr{C} = Ch_R$ la categoria que té com a objectes els complexos de cadenes i com a fletxes les aplicacions de cadenes és de fet una categoria.
La commutativitat del diagrama 2.2.7 implica que $f_n(Z_n(C)) \subseteq Z_n(C')$ i que $f_n(B_n(C)) \subset B_n(C')$ per tant, al prendre quocients f_n indueix un homomorfisme:

$$(f_n)_* : H_n(C) \to H_n(C'), \quad (f_n)_*([z]) := [f_n(z)] \tag{2.2.8}$$

és clar que:

$$(ff')_* = f_*(f')_*, \quad (id_C)_* = id_{H_n(C)} \tag{2.2.9}$$

Per tant, podem definir el functor d'homologia:

$$\mathcal{H}_* : Ch_R \to GrMod_R \tag{2.2.10}$$

Donat per $H_*(C) := \mathcal{H}_*(C) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n(C)$ i $H_*(f) = f_*$

Definició 2.22. *Si (C, ∂) és un complex de cadenes i tenim un R-mòdul graduat C' tal que $C'_n \leq C_n$ per a tot $n \in \mathbb{Z}$ aleshores:*

$$... \xleftarrow{\partial'_{n-1}} C'_{n-1} \xleftarrow{\partial'_n} C'_n \xleftarrow{\partial'_{n+1}} C'_{n+1} \xleftarrow{\partial'_{n+2}} ... \quad \partial' = \partial|_{C'} \tag{2.2.11}$$

*és un complex de cadenes. A més, la inclusió $i : C' \hookrightarrow C$ és una aplicació de cadenes. Direm que (C', ∂') és un **subcomplex** de (C, ∂).*

Si passem als quocients, ∂ indueix un homomorfisme:

$$\tilde{\partial}_n : C_n/C'_n \to C_{n-1}/C'_{n-1} \tag{2.2.12}$$

i al ser induït per ∂ és trivial que $\tilde{\partial}_n \tilde{\partial}_{n+1} = 0$. Per tant obtenim un complex de cadenes $(C/C', \tilde{\partial})$:

$$... \xleftarrow{\tilde{\partial}_{n-1}} C_{n-1}/C'_{n-1} \xleftarrow{\tilde{\partial}_n} C_n/C'_n \xleftarrow{\tilde{\partial}_{n+1}} C_{n+1}/C'_{n+1} \xleftarrow{\tilde{\partial}_{n+2}} ... \tag{2.2.13}$$

A més, pel que ja hem comentat en l'exemple 2.11 tenim que:

$$0 \longrightarrow C'_n \xrightarrow{i} C_n \xrightarrow{p} C_n/C'_n \longrightarrow 0 \tag{2.2.14}$$

és una successió exacta curta.
De forma més general, siguen i i p aplicacions entre cadenes, tal que aquesta successió $0 \longrightarrow C \xrightarrow{i} C' \xrightarrow{p} C'' \longrightarrow 0$, és exacta curta. Pel que hem vist en l'exemple 2.11 es pot vore com una successió de la forma de 2.2.14 llevat d'isomorfia. Però a més, com que tenim que les aplicacions entre cadenes commuten en l'homomorfisme vora obtenim el diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, "\partial'"] & {} \arrow[d, "\partial"] & {} \arrow[d, "\partial''"] & \\
0 \arrow[r] & C'_n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial'"] & C_n \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\partial"] & C''_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{n-1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial'"] & C_{n-1} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\partial"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''"] & 0 \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd} \tag{2.2.15}$$

Voldríem, que aquestes successions exactes curtes d'alguna traslladar-les a l'homologia. Es pot demostrar que en tindríem la successió exacta:

$$H_*(C) \xrightarrow{i_*} H_*(C') \xrightarrow{p_*} H_*(C'') \tag{2.2.16}$$

però aquesta no és exacta curta, ja que en general i_* no té perquè ser injectiva ni p_* sobrejectiva. No obstant això, si fem un poc de memòria el diagrama commutatiu anterior es pareix molt al del lema de la serp (*Snake lemma*, 2.16), el podem gastar per obtenir una successió exacta llarga d'homologia.

Teorema 2.23. *Donada una successió exacta curta entre cadenes* $0 \longrightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} C'' \longrightarrow 0$ *existeix* $\Delta : H_n(C'') \to H_{n-1}(C')$ *de manera que la successió*

$$... \longrightarrow H_{n+1}(C'') \xrightarrow{\Delta} H_n(C') \xrightarrow{i_*} H_n(C) \xrightarrow{p_*} H_n(C'') \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(C') \longrightarrow ... \tag{2.2.17}$$

és exacta llarga. A l'homomorfisme Δ *li diem homomorfisme de connexió.*

Per a aquesta prova hem gastat com a referència [Rog16]

Demostració. Ens adonem que per ser successions entre cadenes tenim el diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C'_n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial'"] & C_n \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\partial"] & C''_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C'_{n-1} \arrow[r, "i"] & C_{n-1} \arrow[r, "p"] & C''_{n-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{2.2.18}$$

Aleshores aplicant el lema de la serp 2.16 i recordant que $\ker \partial_n^* = Z_n^*$ i que $\operatorname{coker} \partial_n^* = C_{n-1}^*/\operatorname{Im}(\partial_n) = C_{n-1}^*/B_n^*$ ens queda la successió exacta:

$$Z'_n \xrightarrow{\tilde{i}} Z_n \xrightarrow{\tilde{p}} Z''_n \xrightarrow{\delta} C'_{n-1}/B'_{n-1} \xrightarrow{\tilde{i}} C_{n-1}/B_{n-1} \xrightarrow{\tilde{p}} C''_{n-1}/B''_{n-1} \tag{2.2.19}$$

Ara bé com que $i : C'_n \to C_n$ és injectiva també ho és $i : Z'_n \to Z_n$ i ara com que p és sobrejectiva i el diagrama commuta tenim que $p : C_{n-1}/B_{n-1} \to C''_{n-1}/B''_{n-1}$ és sobrejectiva. Aleshores la successió anterior la podem completar com:

$$0 \to Z'_n \xrightarrow{\tilde{i}} Z_n \xrightarrow{\tilde{p}} Z''_n \xrightarrow{\delta} C'_{n-1}/B'_{n-1} \xrightarrow{\tilde{i}} C_{n-1}/B_{n-1} \xrightarrow{\tilde{p}} C''_{n-1}/B''_{n-1} \to 0 \tag{2.2.20}$$

Es dedueix el diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd} & C'_n/B'_n \arrow[r, "\tilde{i}"] \arrow[d, "\tilde{\partial}'"] & C_n/B_n \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, "\tilde{\partial}"] & C'_n/B'_n \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\partial}''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Z'_{n-1} \arrow[r, "\tilde{i}"] & Z_{n-1} \arrow[r, "\tilde{p}"] & Z''_{n-1} & \end{tikzcd} \tag{2.2.21}$$

Ens adonem que

$$\ker \tilde{\partial}_n^* = \{[x] \in C_n^*/B_n^* : \ \partial_n^* x = 0\} = Z_n^*/B_n^* = H_n^* \tag{2.2.22}$$

a més, com que $\partial \circ \partial = 0$, és a dir, $\partial B_n = 0$, obtenim:

$$\operatorname{coker} \tilde{\partial}_n^* = Z_{n-1}^* / \operatorname{Im}(\tilde{\partial}_n^*) = Z_{n-1}^*/B_{n-1}^* = H_{n-1}^* \tag{2.2.23}$$

Aleshores, aplicant el lema de la serp 2.16 al diagrama 2.2.21 obtenim:

$$H_n(C') \xrightarrow{i_*} H_n(C) \xrightarrow{p_*} H_n(C'') \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(C') \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(C) \xrightarrow{p_*} H_{n-1}(C'') \tag{2.2.24}$$

com que aquest raonament l'hem fet per a un n qualsevol i i, p són aplicacions de cadenes tenim la successió exacta llarga:

$$\ldots \longrightarrow H_{n+1}(C'') \xrightarrow{\Delta} H_n(C') \xrightarrow{i_*} H_n(C) \xrightarrow{p_*} H_n(C'') \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(C') \longrightarrow \ldots \tag{2.2.25}$$

□

Notem que aquest teorema té com a corol·lari trivial la successió exacta 2.2.16.

Homotopies de cadenes

El nostre objectiu posterior serà definir cadenes a partir d'espais topològics, però ens agradaria que els espais homotòpics no es diferenciaren en homologia i cohomologia. Amb aquest objectiu en ment anem a definir les homotopies entre aplicacions de cadenes.

Definició 2.24. *Siguen $f, g : C \to C'$ aplicacions de cadenes. Una **homotopia** h entre f i g és un homomorfisme $h : C \to C'$ de grau 1, és a dir, $h_n : C_n \to C'_{n+1}$, tal que:*

$$\partial' \circ h + h \circ \partial = f - g \tag{2.2.26}$$

*Si h existeix, direm que f i g són **homotòpiques** i el denotarem com $f \simeq g$, si volem especificar l'homotopia escriurem $h : f \simeq g$.*

Així a primera vista aquesta definició potser sembla un poc arbitrària ni tan sols h és una aplicació de cadenes. No obstant això, ens adonem que l'aplicació $\gamma = \partial' \circ h + h \circ \partial$ sí que és una aplicació de cadenes ja que té grau 0, perquè la vora té grau -1 i h 1 i a més:

$$\partial' \circ \gamma = \overbrace{\partial' \circ \partial'}^{0} \circ h + \partial' \circ h \circ \partial = \partial' \circ h \circ \partial + h \circ \overbrace{\partial \circ \partial}^{0} = \gamma \circ \partial \tag{2.2.27}$$

Per tant és aplicació de cadenes i l'homomorfisme induït $\gamma_* : H_*C \to H_*(C')$ és l'homomorfisme 0. Ja que donat $z \in Z_n$ es té que:

$$\gamma(z) = \partial' \circ h + h \circ \partial(z) = \partial' \circ h(z) \in B'_n, \quad \Longrightarrow \quad \gamma_*([z]) = 0 \tag{2.2.28}$$

És a dir, si $f \simeq g$ aleshores, $f - g = 0$. Per tant hem provat:

Proposició 2.25. *Si $f \simeq g : C \to C'$ aleshores $f_* = g_* : H_*C \to H_*C'$.*

L'homotopia de cadenes defineix una relació d'equivalència. A la classe de $f : C \to C'$ la denotem com $[f]$ i direm que és la classe d'homotopia de f.

Proposició 2.26. *La relació d'equivalència és compatible en la composició, és a dir, si $f \simeq g : C \to C'$ i $f' \simeq g :\to C' \to C''$ aleshores $f \circ f' \simeq g' \circ g$.*

Demostració. Si $h : f \simeq g$ aleshores, $\partial(f' \circ h) + (f' \circ h)\partial = f'(\partial' \circ h + h \circ \partial) = f'(f - g) = f' \circ f - f' \circ g$, aleshores $f' \circ h : f' \circ \simeq f' \circ g$. Anàlogament, $h' : f' \simeq g'$ implica que $h' \circ g : f' \circ g \simeq g' \circ g$, aleshores aplicant transitivitat tenim $f \circ f' \simeq g' \circ g$. □

Aleshores, podem definir la composició de classes d'homotopia de cadenes $[f'] \circ [f] = [f' \circ f]$, això ens permet definir una nova categoria $\mathscr{H}Ch_R$. Els objectes són els complexos de cadenes com en Ch_R però els morfismes ara són les classes d'homotopia d'aplicacions de cadenes.

2.3 Homologia d'espais topològics

Ara que ja tenim l'estructura algebraica per definir l'homologia anem a vore com podem definir complexos de cadenes a partir d'espais topològics, en particular anem a definir l'homologia simplicial i l'homologia singular, estudiant amb més profunditat la darrera ja que serà la que gastarem en general. Per a aquesta secció hem gastat com a referències principals [Hat01, Capítol 2.1] i [Dol80, Capítol 3].

2.3.1 Homologia Simplicial

Definició 2.27. *Donats $\{v_0, ..., v_n\} \subset \mathbb{R}^m$ punts afinament independents, i.e. $\{v_0 - v_1, ..., v_n - v_1\}$ són vectors linealment independents. Podem definir el símplex de dimensió n o $n-$**símplex** com a la suma convexa dels punts, és a dir el conjunt:*

$$(v_0, ..., v_n) := \left\{ t_0 v_0 + ... + t_n v_n / \sum_{i=0}^{n} t_i = 1, t_i \geq 0, 0 \leq i \leq n \right\} \tag{2.3.1}$$

*La k-**cara** de $(v_0, ..., v_n)$ és un $k-$símplex de dimensió k que té com a vèrtex $k+1$ punts de $\{v_0, ..., v_n\}$.*

Notem que els escalars $\{t_0, ..., t_n\}$ són les coordenades baricèntriques de $(v_0, ..., v_n)$.
Donat $(v_0, ..., v_n)$ un n-símplex definim la k-cara del símplex com el k-símplex generat per $k+1$ vèrtexs del conjunt $\{v_0, ..., v_n\}$. En el cas particular de la $(n-1)$-cara resultant de triar tots menys el vèrtex v_j el denotem com:

$$(v_0, ..., \hat{v_k}, ..., v_n) := (v_0, ..., v_{k-1}, v_{k+1}, ..., v_n) \tag{2.3.2}$$

Definició 2.28. *Un **complex simplicial** K de dimensió $n \in \mathbb{N}$ és un conjunt finit de p-símplexs amb $p \leq n$ tal que:*

1. *Si un símplex està en K totes les seues cares també estan en K.*
2. *Dos símplexs de K o bé són disjunts o bé intersequen només en una sola cara en comú.*

Definició 2.29. *Donat K un complex simplicial, $p \in \mathbb{N}$ definim $C_p(K;R)$ com el R-mòdul lliure que té com a generadors els símplexs de dimensió p de K.*
Definim $\partial_p : C_p(K;R) \to C_{p-1}(K;R)$ primerament actuant com a homomorfisme de R-mòduls i després sobre cada generador definim:

$$\partial(v_0, ..., v_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (v_0, ..., \hat{v_i}, ..., v_n) \tag{2.3.3}$$

És una comprovació elemental que $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$, aleshores, donat K un complex simplicial, si considerem el R-mòdul graduat $C(K;R) = \oplus_{p\in\mathbb{Z}} C_p(K;R)$[2] i l'homomorfisme $\partial : C(K;R) \to C(K;R)$ donat per $\partial_p : C_p(K;R) \to C_{p-1}(K;R)$. Tenim que $(C(K;R), \partial)$ és un complex de cadenes i per tant podem aplicar-los la definició de grups d'homologia, als quals denominarem grups d'homologia simplicial i totes les propietats de la secció anterior. Per a distingir d'altres complexos de cadenes el denotem com $(C^{simp}(X;R), \partial)$.
Aleshores hem definit una cohomologia sobre els complexos simplicials que venen a ser pareguts a la idea de poliedre, podem expandir, l'ús d'aquestos a molts més espais gastant la noció de triangulació.

Definició 2.30. *Si $(X, \mathcal{T})$ és un espai topològic, una **triangulació** és un complex simplicial K, on $|K| := \bigcup_{s\in K} s \subseteq \mathbb{R}^N$ per a algun N suficientment gran amb la topologia del subespai, i un homeomorfisme $\phi : |K| \to X$.*

Com que els homeomorfismes són isomorfismes en Top, anem a considerar que donat un espai topològic X amb triangulació (K, ϕ), definim el complex de cadenes $C^{simp}(X;R) := C^{simp}(K;R)$.

2.3.2 Homologia Singular

Si Δ^n és el n-símplex de $\mathbb{R}^{n+1}$ generat pels punts $\{e_1, ..., e_{n+1}\}$ on $e_i := (0, ..., 0, \overset{i)}{1}, 0, ..., 0)$. Aleshores qualsevol $n-$símplex $(v_0, ..., v_n)$ es pot transformar en Δ^n mitjançant l'isomorfisme afí:

$$\begin{array}{rccc} f: & \Delta^n & \longrightarrow & (v_0, ..., v_n) \\ & (t_0, ..., t_n) & \longmapsto & \sum_{i=0}^{n} t_i v_i \end{array} \tag{2.3.4}$$

[2]És fàcil adonar-se que $C_n(K) = \{0\}$ si $n < 0$.

Conseqüentment d'ací endavant només treballarem amb Δ^n.

Definició 2.31. *Donat Δ^n, una aplicació contínua $\sigma : \Delta^n \to X$ on X un espai topològic, es diu un n-**símplex singular** de X.*
*La k-**cara** d'un n-símplex singular σ és el $(n-1)$-símplex singular següent:*

$$\begin{array}{rccl} \partial_{(i)}\sigma : & \Delta^{n-1} & \longrightarrow & X \\ & (t_0, ..., t_{n-1}) & \longmapsto & \sigma(t_0, ..., t_{k-1}, 0, t_k, ..., t_{n-1}) \end{array} \tag{2.3.5}$$

Definició 2.32. *Siga X un espai topològic. Definim el R-mòdul de les n-**cadenes singulars** de X, $C_n(X;R)$, com el R-mòdul com el R-mòdul lliure generat símplexs singulars.*

Definició 2.33. *Si σ és un $n-$símplex singular de X, definim l'**homomorfisme vora** ∂ com*

$$\begin{array}{rccl} \partial_n : & C_n(X) & \longrightarrow & C_{n-1}(X) \\ & \sigma & \longmapsto & \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\partial_{(i)}\sigma \end{array} \tag{2.3.6}$$

Per facilitar notació de normal escriurem només ∂.

És trivial que de fet és un homomorfisme i també es comprova fàcilment que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. Si considerem el R-mòdul graduat $C(X;R) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} C_n(X;R)$[3] i estenem ∂_n a un homomorfisme de cadenes de grau -1, ∂, és clar que $(C(X), \partial)$ és un complex de cadenes. Tal com hem dit en la simplicial, això fa que apliquen tot el que hem demostrat per a complexos de cadenes. En general anem a treballar sempre amb complexos singulars, aplicant el functor d'homologia a $(C(X;R), \partial)$ obtenim $H_*(X) := H_*(C(X;R))$ normalment ometrem la referència a R si no hi ha confusió, sinó escriurem $H_*(X;R)$.

Teorema 2.34. *Per a tot K complex simplicial tenim que $H_*(K) = H_*(C^{simp}(K))$.*

Aquest és un resultat que no anem a gastar fora d'exemples per a la demostració vore [Hat01, Teorema 2.27].
Anem a vore que existeix un functor de Top a Ch_R, que du cada espai topològic al seu complex de cadenes singular.

Definició 2.35. *Prenem X, Y espais topològics i $f : X \to Y$ una aplicació contínua. Aleshores, si σ és un $n-$símplex singular, tenim que $f \circ \sigma : \Delta^n \to Y$ es un símplex de Y ja que és contínua per ser composició de contínues. Aleshores a cada aplicació f li podem associar*

$$f_\# : \{\sigma/\sigma \text{ és símplex singular de } X\} \to \{\phi/\phi \text{ és símplex singular de } Y\} \tag{2.3.7}$$

*definida per $f_\#(\sigma) = f \circ \sigma$. A $f_\#$ li diem **aplicació induïda** per f.*

[3] Com en la simplicial tenim que $C_n(X;R) = \{0\}$ per a tot $n < 0$.

Ara estenem aquestes aplicacions a $C(X)$. Siga $f : X \to Y$ una aplicació contínua entre espais topològics i $n \in \mathbb{Z}$. Definim l'homomorfisme induït per f com:

$$\begin{array}{rccc} f_{\#}^{(n)}: & C_n(X) & \longrightarrow & C_n(Y) \\ & & & \\ & \sum_{\sigma\in I} r_\sigma \sigma & \longmapsto & \sum_{\sigma\in I} r_\sigma f_{\#}(\sigma) \end{array} \tag{2.3.8}$$

El qual podem estendre a $f_{\#} : C(X) \to C(Y)$.
D'aquesta definició es dedueixen fàcilment les següents propietats:

1. Considerem $id_X : X \to X$ la identitat, aleshores $(id_X)_{\#}$ és la identitat en $C(X)$.
2. Si $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ són contínues aleshores $(f \circ g)_{\#} = f_{\#} \circ g_{\#}$.

Anem a vore que tenim el diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{f_{\#}^{(n)}} & C_n(Y) \\ \partial\big\downarrow & & \big\downarrow\partial \\ C_{n-1}(X) & \xrightarrow{f_{\#}^{(n-1)}} & C_{n-1}(Y) \end{array} \tag{2.3.9}$$

Demostració. Com que $f_{\#}$ és homomorfisme és suficient vore que per a tot n-símplex singular $\phi : \Delta^n \to X$ es verifica que $\partial_{(i)} \circ f_{\#}^{(n)}(\phi) = f_{\#}^{(n-1)} \circ \partial_{(i)}(\phi)$, per a tot $i \in \{0, ..., n\}$.

$$\begin{aligned}(f_{\#}^{(n-1)} \circ \partial_{(i)})[(\phi)(t_0, ..., t_{n-1})] = f_{\#}^{(n-1)}[(\phi)(t_0, ..., t_{i-1}, 0, t_i, ..., t_{n-1})] = \\ = (f \circ \phi)(t_0, ..., t_{i-1}, 0, t_i, ..., t_{n-1})\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Per altra banda,

$$\begin{aligned}(\partial_{(i)} \circ f_{\#}^{(n)})[(\phi)(t_0, ..., t_{n-1})] = \partial_{(i)}[(f \circ \phi)(t_0, .., t_{i-1}, 0, t_i, .., t_{n-1})] = \\ = (f \circ \phi)(t_0, ..., t_{i-1}, 0, t_i, ..., t_{n-1})\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

$\square$

Per tant hem demostrat que donada una aplicació contínua $f : X \to Y$, l'aplicació induïda $f_{\#}$ és un aplicació de cadenes. Tenim també que es respecta la identitat i la composició aleshores podem definir el functor $Sing : Top \to Ch_R$, de manera que $Sing(X) = C(X; R)$ i $Sing(X \xrightarrow{f} Y) = C(X) \xrightarrow{f_{\#}} C(Y)$.
Per tant, aplicant la composició definim el functor $H_* \circ Sing : Top \to GrMod_R$ que porta cada espai topològic al seu R-mòdul graduat d'homologia i cada aplicació contínua $X \xrightarrow{f} Y$ a un homomorfisme de R-mòduls graduats $H_*(X) \xrightarrow{f_*} H_*(Y)$.

Homologia relativa

Donat X un espai topològic i $Y \subseteq X$ tenim $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ és clar que i és contínua aplicant el functor $Sing$ obtenim $C(S) \overset{i_\#}{\to} C(X)$ aplicació entre cadenes. Com actua aquesta $i_\#$? Resulta que si ϕ és un n-símplex singular de Y aleshores $i_\#(\phi) = (i \circ \phi)$ que és un n-símplex singular de X, aleshores $C(Y) \subseteq C(X)$, però a més com que $i_\#$ és una aplicació de cadenes tenim que $C(Y)$ és un submòdul de $C(X)$, aleshores per l'exemple 2.11 tenim la successió exacta curta:

$$0 \longrightarrow C(Y) \xrightarrow{i_\#} C(X) \xrightarrow{p} C(X)/C(Y) \longrightarrow 0 \tag{2.3.12}$$

On p és la projecció sobre el quocient. Al complex de cadenes $C(X)/C(Y)$ el denotarem com $C(X,Y)$ i direm que és el complex de relatives de X sobre Y, i els grups d'homologia els denotem com $H_*(X,Y)$.

Pel teorema 2.23 tenim que existeix una successió exacta llarga:

$$... \longrightarrow H_{n+1}(X,Y) \xrightarrow{\Delta} H_n(Y) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{p_*} H_n(X,Y) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(Y) \longrightarrow ... \tag{2.3.13}$$

Anàlogament, si tenim la terna (X,A,B) espais topològics on $B \subset A \subset X$, tenim que $C_*(B) \leq C_*(A) \leq C_*(X)$ i per tant per l'exemple 2.17 tenim la successió exacta curta:

$$0 \longrightarrow C_*(A,B) \longrightarrow C_*(X,B) \longrightarrow C_*(X,A) \longrightarrow 0 \tag{2.3.14}$$

Aleshores aplicant el teorema 2.23 obtenim la successió exacta llarga:

$$... \longrightarrow H_{n+1}(X,A) \xrightarrow{\Delta} H_n(A,B) \longrightarrow H_n(X,B) \longrightarrow H_n(X,A) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(A,B) \longrightarrow ... \tag{2.3.15}$$

Homotopia

Teorema 2.36. *Si $f,g : (X,A) \to (Y,B)$ són homotòpiques, aleshores les aplicacions induïdes en les cadenes $f_\#$ i $g_\#$ són homotòpiques, com a aplicacions de cadenes.*

La demostració es pot trobar a [Hat01, Teorema 2.10] i [Hat01, Proposició 2.19], per a una versió més detallada vore [Qui18, Lliçó 11].

L'únic que cal ressaltar de la prova que necessitarem més tard és que es defineix una homotopia de cadenes $P : C_*(X) \to C_*(Y)$ i que aquesta porta cadenes de $C_n(A)$ a $C_{n+1}(B)$ i per tant al passar al quocient és una homotopia de cadenes relatives.

Corol·lari 2.37. *Si $f,g : (X,A) \to (X,B)$ són homotòpiques, aleshores $f_* = g_* : H_*(X) \to H_*(Y)$*

Demostració. Al resultat del teorema anterior li apliquem la proposició 2.25. □

Definició 2.38. *Siga X un espai topològic $S \subset X$ direm que S és un retracte de deformació de X si existeix una aplicació contínua respecte de les dos variables:*

$$\begin{array}{rccl} F: & X \times [0,1] & \longrightarrow & X \\ & (x,t) & \longmapsto & F(x,t) =: f_t(x) \end{array} \tag{2.3.16}$$

tal que

1. *$F(x,0) = f_0(t) = id_X$.*

2. *$f_t|_S = id_S$ per a tot $t \in [0,1]$ i $f_1(X) = S$.*

A f_1 es denota a vegades com $r : X \to X$, direm que és un retracte.

Corol·lari 2.39. 1. *Si X és un espai topològic i S retracte de deformació aleshores $H_*(X,S) = 0$*

2. *Si X és un espai topològic $B \subset A \subset X$ i B retracte de deformació de A aleshores $H_*(X,A) \cong H_*(X,B)$*

Demostració. 1. Si $r : X \to S$ és un retracte aleshores $r \circ i = \mathrm{id}_S$ i a més $i \circ r \simeq \mathrm{id}_X$, on $i : S \hookrightarrow X$ denota la inclusió. Aquestes aplicacions les podem considerar com al parell $r : (X,S) \to (S,S)$ i $i : (S,S) \to (X,S)$. Ara si passem a homologia tenim que $r_* \circ i_* = id_{H_*(S,S)}$ i $i_* \circ r_* = id_{H_*(X,S)}$, aleshores $H_*(X,S) = H_*(S,S)$, però $C_*(S)/C_*(S) = 0$ aleshores $H_*(S,S) = 0$.

2. Considerem la successió exacta llarga 2.3.15 associada a la terna (X,B,A):

$$... \longrightarrow H_n(A,B) \longrightarrow H_n(X,B) \longrightarrow H_n(X,A) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(A,B) \longrightarrow ... \tag{2.3.17}$$

Pel que acabem de demostrar tenim que els grups dels extrems són 0 per tant enmig tenim un isomorfisme.

□

Exemple 2.40. Donat un fibrat vectorial ξ amb espai total $E(\xi)$ si definim $E(0) := \{0_{F_b} \in E(\xi)/\ b \in B(\xi)\}$ aleshores $E(0)$ és retracte de deformació de $E(\xi)$.

$$\begin{array}{rccl} F: & E(\xi) \times [0,1] & \longrightarrow & E(\xi) \\ & (x,v,t) & \longmapsto & (x,(1-t)v) \end{array} \tag{2.3.18}$$

és trivial que aquesta aplicació és contínua per la condició de trivialitat local i que satisfà les condicions anteriors.

Exemple 2.41. Siga D^n un disc i ∂D^n la seua frontera topològica. Per a $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tenim que ∂D^n és retracte de deformació per l'aplicació:

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \\ & (x,t) & \longmapsto & x(1-t) + \frac{x}{||x||} t \end{array} \tag{2.3.19}$$

Amb aquesta mateixa aplicació si la restringim a $D^n \backslash \{0\}$ obtenim que ∂D^n és retracte de deformació de $D^n \backslash \{0\}$.

Excisió

Donat X un espai topològic i $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j\in J}$ una família de subespais tal que els seus interiors formen un recobriment de X. Ara siga $C_n^{\mathcal{A}} \leq C_n(X)$ format per les cadenes $\sum_i r_i\sigma_i$ tal que cada σ_i té la seua imatge en algun A_j. L'homomorfisme vora de $(C(X), \partial)$ indueix un altre homomorfisme vora de manera que $C_*^{\mathcal{A}}$ és un complex de cadenes.

Lema 2.42. *La inclusió $i : C_n^{\mathcal{A}} \hookrightarrow C_n(X)$ és un equivalència d'homotopia de cadenes. És a dir, existeix una aplicació de cadenes $\rho : C_n(X) \to C_n^{\mathcal{A}}$ tal que $i \circ \rho$ i $\rho \circ i$ són homotòpiques a la identitat.*

La demostració d'aquest lema està fóra de l'interés del treball, es pot trobar a [Hat01, Proposició 2.21]. L'únic que notem que en la demostració l'aplicació que dona l'homotopia porta cadenes d'un subespai a cadenes d'eixe mateix subespai.

Teorema 2.43 (Teorema d'excisió)**.** *Donat X espai topològic i dos subespais $Z \subset A \subset X$ tal que $ad(Z) \subset int(A)$, aleshores la inclusió $(X\backslash Z, A\backslash Z) \hookrightarrow (X, A)$ defineix un isomorfisme:*

$$i_* : H_n(X\backslash Z, A\backslash Z) \longrightarrow H_n(X, A) \tag{2.3.20}$$

Vore [Hat01, Teorema 2.20].

2.4 Cohomologia

Finalment arribem al primer objectiu d'aquest capítol, ser capaços de definir la cohomologia i estudiar les propietats de la cohomologia singular, principalment traslladar resultats obtesos per a homologia, relacionar l'homologia amb la cohomologia i vore la gran novetat que aporta la cohomologia a la possibilitat de definir un producte intern. Definirem el producte *cup* $\smile$ i vorem que a la cohomologia es pot donar estructura d'àlgebra anticommutativa. Per a aquesta secció hem gastat com a referències principals [Hat01, Capítol 3] i [MS74, Apèndix A].

Notació. D'ací endavant R ja no és només un **anell commutatiu unitari** sinó que a més serà un **anell d'ideals principal**.

2.4.1 R-mòdul de cohomologia

Siga (C, ∂) un complex de cadenes sobre R, sabem que tenim la successió

$$... \xrightarrow{\partial_n} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_n} C_n \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-2}} ... \tag{2.4.1}$$

Aquesta ja hem vist que forma una categoria Ch_R i hem estudiat les seues propietats.
Ara definim un functor contravariant $\mathscr{D} : Ch_R \to Ch_R$ com:
Donat un complex de cadenes $\mathscr{D}(C, \partial) = (C^*, \delta)$ definim $C^* = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} C^n$ on

$$C^n = \mathrm{Hom}_R(C_n; R) \tag{2.4.2}$$

Als elements de C^n els direm n-**cocadenes** quan vullguem fer referència a les cadenes a partir dels quals s'han definit.
Donada $f : C \to K$, com que és contravariant, s'aplica sobre $f^{op} : K \to C$ una aplicació de cadenes obtenim $K^* \xrightarrow{f^*} C^*$ definida com $f^*(\alpha) = \alpha \circ f$ on $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(K; R)$.
Per ser un functor contravariant tenim que la identitat es preserva però la composició canvia d'ordre és a dir si en teníem $C \xrightarrow{f} K \xrightarrow{g} D$, la composició $g \circ f$ passa a $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
Anem a vore que està ben definit, el primer que notem és que, donat un R-mòdul M tenim que $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ té estructura de grup abelià però a més com que R és commutatiu podem donar-li estructura de R-mòdul[4] definint $(af)(x) = af(x)$ per a tot $a \in R$, $x \in M$ i $f \in \mathrm{Hom}_R(M, R)$. (vore [Lan02, pg. 122])
Falta definir una aplicació vora, definim l'homomorfisme

$$\delta_{n-1} = \partial_n^* : C_{n-1}^* \to C_n^*, \quad \delta(\varphi) = \varphi \circ \partial, \quad \forall \varphi \in C^n \tag{2.4.3}$$

a aquest li direm **homomorfisme covora**. A més, $\delta\delta = 0$ ja que $\partial\partial = 0$, per tant obtenim una successió:

$$... \xleftarrow{\delta_{n+1}} C^{n+1} \xleftarrow{\delta_n} C^n \xleftarrow{\delta_{n-1}} C^{n-1} \xleftarrow{\delta_{n-2}} ... \tag{2.4.4}$$

A priori no sembla que (C^*, δ) siga un complex de cadenes ja que l'homomorfisme covora té grau $+1$ que no -1. No obstant això, ens adonem que les cadenes van indexades sobre $\mathbb{Z}$, és a dir el fet que un homomorfisme siga de grau -1 si fem una reordenació dels índexs de manera que la covora estiga baixant de dimensió en comptes de pujar ens mostra que podem vore (C^*, δ) com un complex de cadenes.
A més, donat un R-homomorfisme tenim que el seu dual és també un R-homomorfisme (compara [Lan02, pg. 122]), falta comprovar que aquestos commuten amb la covora, però donat $C \xrightarrow{f} K$ veiem que

$$(\delta_C \circ f^*)(\alpha) = \delta_C(\alpha \circ f) = \alpha \circ f \circ \partial_C = \alpha \circ \partial_K \circ f = (f^* \circ \delta_K)(\alpha) \tag{2.4.5}$$

per a tot $\alpha \in C^n$ per a qualsevol $n \in \mathbb{Z}$ ja que f és una aplicació de cadenes. Per tant, tots els morfismes obtesos pel functor són aplicacions de cadenes, per tant aquest functor està ben definit.
Com que tenim un complex de cadenes, el següent pas natural és aplicar el functor $\mathcal{H}_*$, als mòduls resultants són els mòduls d'homologia de (C^*, δ) i els direm **mòduls de cohomologia** de (C, ∂). Són el resultat d'aplicar el functor que denominarem **functor de**

[4] Això no és cert per a qualsevol anell en general només perquè assumim R és commutatiu

cohomologia $\mathcal{H}^* = \mathscr{D} \circ \mathcal{H}_*$, aquest és contravariant per ser $\mathscr{D}$ contravariant.
Com que és un complex de cadenes tot funciona com esperem però com que el nostre interés serà tindre la cohomologia en referència al complex de cadenes no al de cocadenes definim la següent nomenclatura

Definició 2.44. *Siga $(*, \partial)$ un complex de cadenes i (C^*, δ) el complex de cocadenes corresponent definim, els n-**cocicles**:*

$$Z^n(C^*; R) := \ker \delta_n \tag{2.4.6}$$

*Definim les n-**covores**:*

$$B^n(C^*; R) := \operatorname{Im} \delta_{n-1} \tag{2.4.7}$$

*El n-èssim R-**mòdul de cohomologia**:*

$$H^n(C; R) := \ker \delta_n / \operatorname{Im} \delta_{n-1} = Z^n(X; R)/B^n(X; R) \tag{2.4.8}$$

Notació. Sempre que no hi haja risc de confusió ometrem la referència a R.

Per functorialitat, una conseqüència immediata és que les aplicacions de cadenes indueixen R-homomorfismes en els mòduls de cohomologia. Com que $\mathcal{H}^*$ és contravariant tenim que la composició d'aquestes queda invertida.

La primera pregunta natural a fer-se és què passa si apliquem el functor $\operatorname{Hom}_R(-, R) \circ \mathcal{H}_* : Ch_R \to Mod_R$ i no el que hem aplicat $\mathcal{H}_* \circ \mathscr{D} : Ch_R \to Mod_R$? En general anem a vore que no és cert que el resultat siga el mateix:

Exemple 2.45. Donat $m \in \mathbb{N}^*$, considerem el complex de cadenes:

$$0 \xrightarrow[\partial_4]{} \mathbb{Z} \xrightarrow[\partial_3]{0} \mathbb{Z} \xrightarrow[\partial_2]{m} \mathbb{Z} \xrightarrow[\partial_1]{0} \mathbb{Z} \xrightarrow[\partial_0]{} 0 \tag{2.4.9}$$

$2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ és l'aplicació $x \mapsto mx$ i 0 l'aplicació nul·la. Els grups d'homologia són

- $H_0(C) = \ker \partial_0 / \operatorname{Im} \partial_1 = \mathbb{Z}$
- $H_1(C) = \ker \partial_1 / \operatorname{Im} \partial_2 = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$
- $H_2(C) = \ker \partial_2 / \operatorname{Im} \partial_3 = 0$
- $H_3(C) = \ker \partial_3 / \operatorname{Im} \partial_4 = \mathbb{Z}$

Si apliquem $\operatorname{Hom}(-, \mathbb{Z})$, sabent que $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}$ obtenim el complex de cocadenes:

$$0 \xleftarrow[\delta_4]{} \mathbb{Z} \xleftarrow[\delta_3]{0} \mathbb{Z} \xleftarrow[\delta_2]{m} \mathbb{Z} \xleftarrow[\delta_1]{0} \mathbb{Z} \xleftarrow[\delta_0]{} 0 \tag{2.4.10}$$

Calculem ara els grups de cohomologia

- $H^0(C) = \ker \delta_1 / \operatorname{Im} \delta_0 = \mathbb{Z}$
- $H^1(C) = \ker \delta_2 / \operatorname{Im} \delta_1 = 0$

- $H^2(C) = \ker \delta_3 / \operatorname{Im} \delta_2 = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$
- $H^3(C) = \ker \delta_4 / \operatorname{Im} \delta_3 = \mathbb{Z}$

Vegem que el 0 i el 3 coincideixen però el grup de torsió $H_1(C)$ ha pujat en una dimensió en els mòduls de cohomologia. Aleshores, en general no és cert que $H^n(C) \cong \operatorname{Hom}(C, R)$.

Anem a vore que encara que la relació no siga directa sí podem relacionar les dos més o menys fàcilment.

Lema 2.46. *Existeix un homomorfisme sobrejectiu*

$$h : H^n(C, R) \to \operatorname{Hom}(H_n(C), R) \tag{2.4.11}$$

És a dir tenim la successió exacta curta:

$$0 \to \ker h \to H^n(C, R) \xrightarrow{h} \operatorname{Hom}(H_n(C), R) \to 0 \tag{2.4.12}$$

Demostració. Donats $\alpha \in H^n(C)$ i $x \in H_n(C)$ aleshores triem un representant $z \in Z^n$ i $\sigma \in Z_n$ definim:

$$\begin{array}{cccccc} h: & H^n(C) & \longrightarrow & Hom_R(H_n(C), R) & & \\ & \alpha & \longmapsto & h(\alpha) : H_n(C) & \to & R \\ & & & x & \mapsto & z(\sigma) \end{array} \tag{2.4.13}$$

El primer que hem de vore és que aquesta aplicació està ben definida. Com que z és una covora tenim que $\delta(z) = 0$ és a dir $z \circ \partial = 0$ i per tant s'anul·la en les vores, per tant no depén de l'elecció de representant de x. Per altra banda, si $z \in \operatorname{Im} \delta$ aleshores $z = \delta(y) = y \circ \partial$ aleshores z seria 0 en el cocicles, i per tant $z = 0$ ja que C_n és un mòdul lliure i R un anell d'ideals principal per 2.8 tenim B_{n-1} és lliure de manera que al tenir la successió exacta curta:

$$0 \to Z_n \to C_n \to B_{n-1} \to 0 \tag{2.4.14}$$

aplicant l'exemple 2.11 tenim que $C_n/Z_n \cong B_{n-1}$ i Z_n és sumand directe. Per tant concloem que h no depén de l'elecció de z.

Sobrejectiu? Pel que comentat abans Z_n és sumand directe aleshores qualsevol $z' : Z_n \to R$ es pot estendre a $z' : C_n \to R$ com la identitat en Z_n i 0 en l'altre sumand directe. Siga $f \in Hom_R(H_n(C), R)$, la composició

$$Z_n \xrightarrow{\pi} H_n(C) \xrightarrow{f} R \tag{2.4.15}$$

es pot estendre a un homomorfisme $F : C_n \to R$. Com que F s'anul·la en les vores, raonant com abans tenim $\delta F = 0$. Siga $\beta \in H^n(C)$ la classe de F i $x \in H_n(C)$ amb representant $\sigma \in Z_n$

$$h(\beta)(x) = F(\sigma) = f(x) \tag{2.4.16}$$

Per tant $h(\beta) = f$ i h és sobrejectiva. $\square$

Un problema molt important a estudiar en cohomologia és computar eixe $\ker h$, el lector interessat es pot referir a [Hat01, Teorema 3.2]. Nosaltres no el necessitarem ja que el nostre objectiu serà treballar amb classes de cohomologia en coeficients en $\mathbb{Z}/2$ i per tant, tots els mòduls seran lliures, en aquest cas veiem que $\ker h = 0$.

Teorema 2.47. *Suposem que $H_{n-1}(C;R)$ és un $R-$**mòdul lliure** aleshores $H^n(C;R) \cong \mathrm{Hom}(H_n(C;R),R)$.*

Demostració. Pel lema 2.46 només cal vore que h és injectiva, per a això anem a vore que $\ker h = 0$.
Siga $x \in \ker h$ aleshores $h(x) = 0$, és a dir que si $z \in Z^n$ un representant de x $z(\sigma) = 0$ per a tots els cicles $\varphi \in Z_n$, per provar que és injectiva em de provar que z és una covora i per tant nul·la en el mòdul d'homologia.
Com que z s'anul·la en els cicles la composició $z \circ \partial^{-1} : B_{n-1} \to R$ està ben definida. Ara com que el quocient

$$H_{n-1}(C) = Z_{n-1}/B_{n-1} \tag{2.4.17}$$

és lliure tenim que Z_{n-1} és sumand directe de B_{n-1} pel teorema 2.8 ja que R és un anell d'ideals principals. Per tant a la manera del lema 2.46 podem estendre $z \circ \partial^{-1}$ a $f : C_{n-1} \to R$. Aleshores, donat $\sigma \in C_n$,

$$(\delta(f))(\sigma) = f(\partial\sigma) = z \circ \partial^{-1}(\partial\sigma) = z(\sigma) \tag{2.4.18}$$

Aleshores, z és una covora, QED $\square$

Per a les classes de Stiefel-Whitney considerarem grups de cohomologia sobre $\mathbb{Z}/2$, aquest és un cos i com a conseqüència sabem que tots els $\mathbb{Z}/2$-mòduls són lliures. Per això, serà prou en aquest teorema no obstant això, intentarem aplicar també el teorema del coeficient universal en algunes proposicions per fer-les més generals.

2.4.2 Cohomologia singular

Definida ja la cohomologia anem a aplicar-la al complexa de cadenes singular i així podrem gastar la cohomologia per deduir propietats sobre topologia.
De forma natural definim el **functor de cohomologia singular** $\mathcal{H}^* \circ Sing : Top \to Mod_R$, el resultat d'aplicar aquest functor serà la **cohomologia singular**. La primera conseqüència immediata és que les aplicacions contínues entre espais topològics passen a ser homomorfismes entre mòduls de cohomologia per functorialitat.

Proposició 2.48. *Donada $f : X \to Y$ **aplicació contínua** entre espais topològics, aleshores*

$$f^\# := \mathscr{D} \circ Sing(f) : C^n(Y;R) \to C^n(X;R) \tag{2.4.19}$$

*és una **aplicació de cocadenes** i per tant $f^* : H^n(X;R) \to H^n(Y;R)$ és un R-**homomorfisme**.*

Notació. A partir d'ara a l'aplicació de cocadenes induïda per una aplicació contínua f la denotarem com $f^{\#}$ i a la corresponent en cohomologia com f^*.

Nota 2.49. Es pot definir també la cohomologia simplicial de forma anàloga però aquesta no serà rellevant per al treball.

El que queda d'aquesta subsecció l'anem a passar demostrant o només enunciant teoremes i propietats de la cohomologia singular.

Successions llargues

Teorema 2.50. *Donada una successió exacta de cocadenes $0 \to C'' \to C \to C' \to 0$ aleshores existeix una successió exacta llarga de cohomologia:*

$$... \to H^n(C'') \to H^n(C) \to H^n(C') \xrightarrow{\delta'} H^{n+1}(C'') \to ... \tag{2.4.20}$$

És conseqüència directa del teorema 2.23.

Lema 2.51. *Donada la successió exacta curta entre R-mòduls.*

$$C \xrightarrow{i} K \xrightarrow{p} D \longrightarrow 0 \tag{2.4.21}$$

Aleshores la successió

$$\mathrm{Hom}_R(C, Y) \xleftarrow{i^*} \mathrm{Hom}_R(K, Y) \xleftarrow{p^*} \mathrm{Hom}_R(D, Y) \longleftarrow 0 \tag{2.4.22}$$

és exacta curta. per a tot Y R-mòdul, en particular si $Y = R$.

Per a la demostració ens referirem a [Lan02, Proposició 2.1, Capítol III].

Proposició 2.52. *1. Donat X espai topològic i $A \subset X$ aleshores tenim la* ***successió exacta curta****:*

$$0 \to C^*(X, A) \to C^*(X) \to C^*(A) \to 0 \tag{2.4.23}$$

2. Donada la ***terna*** *$B \subset A \subset X$ tenim la* ***successió exacta curta****:*

$$0 \to C^*(X)/C^*(A) \to C^*(X)/C^*(B) \to C^*(A)/C^*(B) \to 0 \tag{2.4.24}$$

Demostració. 1. Com que $C_*(A) \leq C_*(X)$ tenim la successió exacta curta:

$$0 \to C_*(A) \xrightarrow{i} C_*(X) \xrightarrow{p} C_*(X)/C_*(A) \to 0 \tag{2.4.25}$$

Aplicant el lema anterior tenim la successió exacta

$$C^*(X, A) \xrightarrow{p^*} C^*(X) \xrightarrow{i^*} C^*(A) \to 0 \tag{2.4.26}$$

Per tant només cal demostrar la injectivitat de p^*, ara bé $C^*(X,A)$ són les cocadenes de $C^*(X)$ que porten les cadenes singulars de A al 0. Ara bé per a tot símplex singular de X o bé la seua imatge està continguda en A o bé no està, considerem els dos subconjunts són disjunts i a més formen una base de $C^*(X)$, aleshores p^* és injectiva perquè du cadenes generades pel segon conjunt a cadenes generades pel segon conjunt.

2. Com que $C_*(B) \leq C_*(A) \leq C_*(X)$, per l'exemple 2.17 tenim la successió exacta curta:

$$0 \to C_*(A)/C_*(B) \to C_*(X)/C_*(B) \to C_*(X)/C_*(A) \to 0 \tag{2.4.27}$$

pel lema anterior obtenim la successió exacta:

$$C^*(X)/C^*(A) \to C^*(X)/C^*(B) \to C^*(A)/C^*(B) \to 0 \tag{2.4.28}$$

Ara bé aplicant el mateix raonament d'abans i el fet de que si la imatge d'un símplex està continguda en B també està en A tenim la injectivitat. □

Corol·lari 2.53. *Donat un espai topològic X i $A \subseteq X$ aleshores tenim la* ***successió exacta llarga****:*

$$... \to H^n(X,A) \to H^n(X) \to H^n(A) \xrightarrow{\delta'} H^{n+1}(X,A) \to ... \tag{2.4.29}$$

Anàlogament, donada la terna $B \subset A \subset X$ tenim la ***successió exacta llarga****:*

$$... \to H^n(X,A) \to H^n(X,B) \to H^n(A,B) \xrightarrow{\delta'} H^{n+1}(X,A) \to ... \tag{2.4.30}$$

Demostració. Aplicar la proposició anterior i la proposició 2.50. □

Successió de Mayer Vietoris

Teorema 2.54 (Successió de Mayer-Vietoris)**.** *Siga X un espai topològic, $(X,Y) = (A \cup B, C \cup D)$ amb $C \subset A$ i $D \subset B$ tal que X està recobert pels interiors de A i B i Y està recobert pels interiors de C i D aleshores tenim la successió exacta llarga:*

$$... \longrightarrow H^n(X,Y;R) \longrightarrow H^n(A,C;R) \oplus H^n(B,D;R) \longrightarrow H^n(A \cap B, C \cap D;R) \longrightarrow ... \tag{2.4.31}$$

Per a la demostració vore [Hat01, pp. 201-202].

Teorema d'excisió per a cohomologia

Teorema 2.55 (Excisió). *Donat X espai topològic i dos subespais $Z \subset A \subset X$ tal que $ad(Z) \subset int(A)$, aleshores existeix un isomorfisme:*

$$i_* : H^n(X, A) \longrightarrow H^n(X\backslash Z, A\backslash Z) \tag{2.4.32}$$

Demostració. Anem a provar-ho només per al cas en què els grups $H_{n-1}(X, A)$ i $H_{n-1}(X\backslash Z, A\backslash Z)$ siguen lliures serà prou aplicar el teorema d'excisió (2.43) per determinar que:

$$H_i(X, A) \cong H_i(X\backslash Z, A\backslash Z), \quad \forall i \in \mathbb{Z} \tag{2.4.33}$$

I aplicar el teorema 2.47 deduint que

$$H^n(X, A) \cong \mathrm{Hom}(H_n(X, A), R) \cong \mathrm{Hom}(H_n(X\backslash Z, A\backslash Z)) \cong H^n(X\backslash Z, A\backslash Z) \tag{2.4.34}$$

□

Retractes de deformació en cohomologia

Proposició 2.56. *Si $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ són homotòpiques, aleshores $f^* = g^* : H^*(X, A) \to H^*(Y, B)$*

Demostració. Pel teorema 2.36 tenim que existeix una homotopia de cadenes P tal que $g_\# - f_\# = \partial P + P\partial$, al dualitzar obtenim que $g^\# = f^\# = P^*\delta + \delta P^*$ on P^* és l'aplicació dual de P. Per tant P^* és una homotopia de cadenes entre $f^\#, g^\# : C^n(Y) \to C^n(X)$. A més, aquesta homotopia es restringia també a les cadenes relatives i per tant aplicant la proposició 2.25 tenim la tesi del teorema. □

Corol·lari 2.57.
1. *Si X és un espai topològic i S retracte de deformació aleshores $H^*(X, S) = 0$*
2. *Si X és un espai topològic $B \subset A \subset X$ i B retracte de deformació de A aleshores $H^*(X, A) \cong H^*(X, B)$*

Demostració.
1. Si $r : X \to S$ és un retracte aleshores $r \circ i = \mathrm{id}_S$ i a més $i \circ r \simeq \mathrm{id}_X$, on $i : S \hookrightarrow X$ denota la inclusió. Aquestes aplicacions les podem considerar com al parell $r : (X, S) \to (S, S)$ i $i : (S, S) \to (X, S)$. Ara si passem a cohomologia tenim que $r^* \circ i^* = id_{H^*(X,S)}$ i $i^* \circ r^* = id_{H_*(S,S)}$, aleshores $H^*(X, S) = H^*(S, S)$, però $C^*(S)/C^*(S) = 0$ aleshores $H^*(S, S) = 0$ i per tant $H^*(X, S) = 0$.
2. Considerem la successió exacta llarga 2.50 associada a la terna (X, A, B):

$$\ldots \longrightarrow H^{n-1}(A, B) \xrightarrow{\delta'} H^n(X, A) \longrightarrow H^n(X, B) \longrightarrow H^n(A, B) \xrightarrow{\delta'} \ldots \tag{2.4.35}$$

   Pel que acabem de demostrar tenim que els grups dels extrems són 0 per tant enmig tenim un isomorfisme.

□

Cohomologia del límit

Per a aquest lema recomanem al lector que es referisca a l'apèndix C.3 si no està familiaritzat amb els conceptes de límits inversos i directes de categories.

Lema 2.58. *Siguen R és un cos i B un espai Hausdorff, aleshores el morfisme natural:*

$$H^j(B;R) \longrightarrow \lim_{\substack{\leftarrow \\ C\subset B, compacte}} H^j(C;R) \tag{2.4.36}$$

és un isomorfisme on $\lim\limits_{\leftarrow}$ denota el límit invers sobre la família dirigida dels compactes amb la inclusió. (comparar amb C.26)

La demostració gasta com a referència [MS74, Lema 10.3].

Demostració. Primer considerem el cas de l'homologia. Un n-símplex singular és una aplicació contínua i té com a domini un n-símplex simplicial que és compacte, com que una n-cadena singular és suma finita de n-símplex també és contínua per tant com la imatge d'un compacte és compacta la imatge de cada n-cadena està continguda en algun compacte. Sabem que en la categoria Mod_R existeixen els límits directes (vore exemple C.27). Sabem que per ser Hausdorff la unió de compactes és compacta. Si considerem el límit directe amb conjunt dirigit els compactes de B amb la relació d'inclusió, de manera que porta cada espai al seu grup de cohomologia i cada inclusió a la aplicació induïda en homologia. Per la propietat universal del límit tenim el diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
H^j(C')... \arrow[dr, "p_*"] \arrow[ddr, "i_*"'] & ... & ...H^j(C) \arrow[dl, "p_*"'] \arrow[ddl, "i_*"] \\
& \lim\limits_{\rightarrow} H_j(C) \arrow[d, "f"] & \\
& H_j(B) &
\end{tikzcd} \tag{2.4.37}$$

Anem a justificar el diagrama commutatiu, primerament per a les i són les aplicacions induïdes per la inclusió. Per tant, és clar que $H_j(B)$ és nadir d'un cocon amb la forma del conjunt dirigit. Per la construcció del límit directe (vore C.27), tenim que

$$\lim_{\rightarrow} H_j(C) = \bigsqcup_{C\subseteq B \text{ compacte}} H_j(C)\Big/\sim \tag{2.4.38}$$

Si $[\phi] \sim [\psi]$ amb $[\psi] \in H_j(C)$ i $[\phi] \in H_j(D)$, si considerem els seus representants la imatge dels dos tindrà que estar continguda en el compacte $E \supseteq C \cup D$, però al estar relacionades tenim que $(i_C)_*(\psi) = (i_D)_*(\phi)$, aleshores en $H_j(E)$ tenim que $[\psi]_E = [\phi]_E$, per tant,

$\psi = \phi + \gamma$ on $\gamma \in B_j(E)$. Aleshores, $p^*([\psi]) = [\psi]_B \in H_j(B)$, és a dir, la projecció porta la classe d'homologia d'un subespai a la classe total d'homologia. Per tant, com a conjunt el límit directe és $H_j(B)$.
Ara si considerem la aplicació $id : H_j(B) \to H_j(B)$ és clar que fa el diagrama commutar pel que ja hem comentat, ara per la propietat universal la identitat té que ser f i aquesta és un isomorfisme de mòduls, per tant tenim un ismorfisme:

$$\lim_{\rightarrow} H_j(C) \longrightarrow H_j(B) \tag{2.4.39}$$

Finalment, com que R és un cos tots els R-mòduls són lliures aleshores podem aplicar el teorema 2.47 tenim que $H^j(C) \cong \mathrm{Hom}(H_j(C), R)$. Aleshores pel teorema C.30, tenint en compte que $Hom_R(-, R)$ és contravariant i que els límits són colímits en la categoria oposada, tenim l'isomorfisme:

$$\mathrm{Hom}_R\left(\lim_{\rightarrow} H_j(C); R\right) \longrightarrow \lim_{\leftarrow} \mathrm{Hom}_R(H_j(C); R) \tag{2.4.40}$$

Amb això i el teorema 2.47 tenim un isomorfisme

$$H^j(B) \longrightarrow \lim_{\leftarrow} H^j(C) \tag{2.4.41}$$

□

Nota 2.59. Per com és la demostració el lema aquest també és vàlid si llevem la hipòtesi de ser Hausdorff i simplement considerem com família dirigida subconjunts de manera que la imatge de qualsevol cadena simplicial estiga en algun membre de la família, tal que la unió finita de conjunts estiga en la família i tal que siga un recobriment. Notem que al afegir la condició de ser Hausdorff i que la família siguen compactes es satisfan aquestes hipòtesi de forma immediata.
En particular, tenim que si considerem B com a un conjunt definit com al límit directe una família de compactes encaixats en un espai Hausdorff es satisfan les hipòtesi del teorema. Un cas notable d'aquest són els CW-complexos considerant $\{K^n\}_{n=0}^{\infty}$ els K-esquelets com a la família dirigida.
També la hipòtesi de que R siga un cos és innecessària si la substituïm per que $H_{j-1}(C)$ i $H_{j-1}(B)$ siguen lliures per a qualsevol $C \subset B$ compacte.

2.4.3 Cohomologia com a àlgebra anticommutativa

El lector es podria preguntar quina necessitat estudiar la cohomologia quan ja en tenim l'homologia definida, la raó principal és que la cohomologia té la propietat que es pot dotar d'estructura d'anell. En aquesta subsecció el definirem i vorem que és natural respecte d'homomorfismes i que $H^*(X, A; R)$ té estructura d'àlgebra anticommutativa sobre R.

Definició 2.60. *Considerem $\varphi \in C^k(X;R)$ i $\psi \in C^l(X;R)$ definim el la* ***cocadena producte cup*** *$\varphi \smile \psi \in C^{k+l}(X;R)$, com la cocadena que actua sobre el símplex singular $\sigma : \Delta^{k+l} \to X$ de la següent manera:*

$$(\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma|_{(v_0,\dots,v_k)})\psi(\sigma|_{(v_k,\dots,v_{k+l})}) \tag{2.4.42}$$

aquesta expressió es defineix a partir del producte en R.

El producte és intern perquè ens dóna una cocadena, a més és associatiu perquè donats $\varphi \in C^k(X;R)$, $\psi \in C^l(X;R)$ i $\eta \in C^m(X;R)$ i σ un $(k+l+m)$- símplex singular.

$$\begin{aligned}((\varphi \smile \psi) \smile \eta)(\sigma) &= (\varphi \smile \psi)(\sigma|_{(v_0,\dots,v_{k+l})})\eta(\sigma|_{(v_{k+l},\dots,v_{k+l+m})}) = \\ &= \varphi(\sigma|_{(v_0,\dots,v_k)})\psi(\sigma|_{(v_k,\dots,v_{k+l})})\eta(\sigma|_{(v_{k+l},\dots,v_{k+l+m})}) = \\ &= \varphi(\sigma|_{(v_0,\dots,v_k)})(\psi \smile \eta)(\sigma|_{(v_k,\dots,v_{k+l+m})}) = (\varphi \smile (\psi \smile \eta))(\sigma)\end{aligned} \tag{2.4.43}$$

Si considerem la suma de cadenes de la forma natural és clar que el producte *cup* és distributiu perquè les cocadenes són homomorfismes, per tant si considerem l'anell graduat $C^*(X;R)$ és clar que $\smile$ és un producte intern i $(C^*(X;R), +, \smile)$ té estructura d'anell. Com que R és un anell unitari, si definim $1 \in C^0(X;R)$ com $1(\sigma) = 1$ per a tot σ 0-símplex singular, aleshores es comprova que l'anell és unitari.
Ara volem estendre l'estructura d'anell que hem aconseguit en les cocadenes a la cohomologia per a això hem d'estudiar es comporta amb l'homomorfisme δ.

Lema 2.61. *Donats $\varphi \in C^k(X;R)$ i $\psi \in C^l(X;R)$ aleshores,*

$$\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi + (-1)^k \varphi \smile \delta\psi \tag{2.4.44}$$

Demostració. Donat $\sigma : \Delta^{k+l+1} \to X$ tenim per una banda:

$$(\delta\varphi \smile \psi)(\sigma) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \varphi(\sigma|_{(v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_{k+1})})\psi(\sigma|_{(v_{k+1},\dots,v_{k+l+1})}) \tag{2.4.45}$$

Per altra banda:

$$(-1)^k(\varphi \smile \delta\psi)(\sigma) = \sum_{i=k}^{k+l+1} (-1)^i \varphi(\sigma|_{(v_0,\dots,v_{k+1})})\psi(\sigma|_{(v_{k+1},\dots,\hat{v}_i,\dots,v_{k+l+1})}) \tag{2.4.46}$$

Si ara sumem les dos expressions, l'últim terme del primer sumatori i el primer terme del segon són exactament el mateix $\varphi(\sigma|_{(v_0,\dots,v_k)})\psi(\sigma|_{(v_k,\dots,v_{k+l+1})})$ llevat del signe, aleshores es cancel·len. Finalment,

$$\delta(\varphi \smile \psi)(\sigma) = (\varphi \smile \psi)(\partial\sigma) = (\varphi \smile \psi)\left(\sum_{i=0}^{k+l+1} (-1)^i \sigma|_{(v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_{k+l+1})}\right) \tag{2.4.47}$$

Ara per definició,

$$\delta(\varphi \smile \psi)(\sigma) = \sum_{i=0}^{k+l+1} (-1)^i (\varphi \smile \psi)(\sigma|_{(v_0,...,\hat{v}_i,...,v_{k+l+1})}) \tag{2.4.48}$$

Que és precisament el que queda en la suma de dalt ja que les cocadenes són homomorfismes.

□

Notem que d'aquest lema es dedueix que el producte *cup* de dos cocicles és un cocicle. Si fem el producte *cup* de un cocicle i una covora obtenim $\delta\varphi \smile \psi = \pm\delta(\varphi \smile \psi)$ si $\delta\varphi = 0$ o $\varphi \smile \delta\psi = \delta(\varphi \smile \psi)$ si $\delta\psi = 0$ i per tant tenim una covora. Per tant, podem definir un **producte *cup* induït**:

$$H^k(X;R) \times H^l(X;R) \xrightarrow{\smile} H^{k+l}(X;R) \tag{2.4.49}$$

Com que el producte *cup* per a cocadenes és associatiu i distributiu també ho és en la cohomologia. Amb el $1 \in C^0(X;R)$ que hem definit abans tenim que $[1] \in H^0(X;R)$ és la identitat per al producte *cup*. Ara bé, si considerem l'anell graduat $H^*(X;R)$ anem a definir

$$H^*(X;R) \times H^*(X;R) \xrightarrow{\smile} H^*(X;R) \tag{2.4.50}$$

És un producte intern associatiu, distributiu. Per tant, $(H^*(X;R), +, \smile)$ té estructura d'anell unitari.

Nota 2.62. El producte *cup* es pot definir anàlogament per a cohomologia simplicial, simplement considerant a partir del n-símplex $\Delta^n = (v_0, ..., v_n)$, $\psi \in C^k(\Delta)$ i $\phi \in C^{n-k}(\Delta)$.

$$(\varphi \smile \psi)(v_0, ..., v_n) = \varphi(v_0, ..., v_k)\psi(v_k, ..., v_n) \tag{2.4.51}$$

I després l'induït en la cohomologia. Aquest només l'anem a fer gastar per al següent exemple que no tindrà cap repercussió.

Exemple 2.63. Considerem la superfície tancada i orientable de gènere $g = 2$, anem a estudiar el producte *cup* amb aquest, es pot vore que això és equivalent a estudiar la cadena simplicial del dibuix 2.1, numerant els vèrtexs dels símplexs començant pel centre i continuant en sentit antihorari en els triangles marcats en un + i horari en cas contrari.[5]

[5] La justificació de perquè és equivalent requereix una explicació massa llarga de manera que el lector interessat es pot dirigir a [Hat01, pp. 5-6, 141, 213]

Si triem els coeficients en $\mathbb{Z}$, es pot demostrar que, $H_1(M;\mathbb{Z}) = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 / \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{Z}\}$. Pel teorema 2.47 tenim que $H^1(M) \cong \mathrm{Hom}(H_1(M), \mathbb{Z})$. Podem trobar una base de $\mathrm{Hom}(H_1(M), \mathbb{Z})$ simplement dualitzant a_i que ens donaria α_i una homomorfisme que a a_i li assigna 1 i 0 a la resta, anàlogament de b_i definim β_i. Com que hem dit que són isomorfs, en tenim una base de $H^1(M)$.

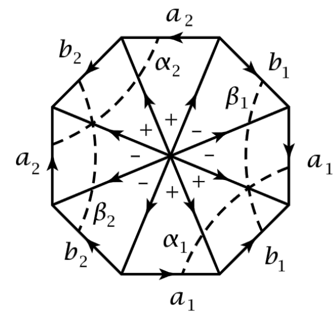

Figura 2.1: Superfície de gènere orientable $g = 2$. [Hat01, 213]

Volem trobar un cocicle φ_i que siga representant de la classe de α_i per a això tenim que triar els valors en els segments radials de manera que $\delta\varphi_i = 0$, si considerem l'arc que està designat a la figura 2.1 com a α_i, aquest és un llaç que no toca cap altre element de la base a banda de a_i. Ara definim φ_i com a l'aplicació que dona 1 en els segments que toquen α_i i 0 en la resta. Per com hem definit φ_1, en tenim que $\delta\varphi_1 = \varphi_1\partial$ és aquesta nul·la? Per a qualsevol triangle que no conté a α_1 al dibuix és clar que és 0, ara per al de baix enmig T_1 tenim que $\partial T_1 = a_1 - t_{11}$ on t_{11} és el segment de la dreta del triangle aleshores $\varphi_1\partial(T_1) = 1 - 1 = 0$. Anàlogament es comprova per als altres triangles. Per tant, φ_1 és un cocicle, anàlogament es comprova que φ_2 és un cocicle. Amb el mateix raonament definim ψ_i a partir de β_i on β_i és el dual de b_i i comprovem que són cocicles.

Ara ja podem computar els productes *cup*. Sabem que donat un 2-símplex $T = (v_0, v_1, v_2)$

$$\varphi_1 \smile \psi_1(T) = \varphi_1(v_0, v_1) \cdot \psi_1(v_1, v_2) \tag{2.4.52}$$

Com que α_1 i β_1 només coincideixen en dos triangles, tenim que fora d'eixos dos serà 0. Ara per al de baix a la dreta tenim que si li diem al del centre c al que està més baix d i l'altre e, aleshores $\varphi_1 \smile \psi_1(c, d, e) = \varphi_1(c, d)\psi_1(d, e) = 1 \cdot 1 = 1$.

Per al triangle de la dreta fem el mateix, només que al cantó de dalt li diem f, aleshores $\varphi_1 \smile \psi_1(c, e, f) = \varphi_1(c, e)\psi_1(e, f) = 1 \cdot 0 = 0$. Aleshores si considerem la 2-cadena formada per tots els triangles tenim que $\varphi_1 \smile \psi_1$ dona 1. Ara bé aquest té vora nul·la i no n'hi ha 3-símplexs per tant c és el representant d'una classe no nul·la de $H_2(M)$. A més, com que $(\varphi \smile \psi)(c) = 1$ tenim que c té que ser el generador de $H_2(M) \cong \mathbb{Z}$ ja que $\varphi_1 \smile \psi_1$ és un homomorfisme i per tant $\varphi_1 \smile \psi_1$ representa el generador de $\gamma \in H^2(M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_2(M), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, ja que $H_1(X;\mathbb{Z})$ és lliure.

Anàlogament, i recordant que $[\varphi_i] = \alpha_i$ i $[\psi_i] = \beta_i$ obtenim:

$$\alpha_i \smile \alpha_j = 0, \quad \beta_i \smile \beta_j = 0 \quad \alpha_i \smile \beta_j = -(\beta_i \smile \alpha_j) = \begin{cases} \gamma, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases} \tag{2.4.53}$$

Per la propietat distributiva i associativa del producte *cup* aquestes relacions determinen per complet el producte *cup* $H^1(M) \times H^1(M) \to H^2(M)$.

Producte *cup* relatiu

També podem definir el producte $\smile$ per a la cohomologia relativa, si X és un espai topològic i $A, B \subset X$ oberts.

$$H^k(X, A; R) \times H^l(X, B; R) \to H^{k+l}(X, A \cup B; R) \tag{2.4.54}$$

Això és fa de la següent manera el que fem és restringir el producte $\smile$ entre cocadenes a un producte en:

$$C^k(X, A) \times C^l(X, B) \xrightarrow{\smile} C^{k+l}(X, A + B) \tag{2.4.55}$$

on $C^n(X, A+B) = C^n(X)/(C^n(A) + C^n(B))$, és a dir el subgrup de cocadenes de $C^n(X)$ que és fan 0 en A i en B. Com que són oberts, si definim $\mathcal{A} = \{A, B\}$ pel lema 2.42 tenim que $i_\# : C_n^{\mathcal{A}} = C_n(A) + C_n(B) \hookrightarrow C_n(A \cup B)$ és una equivalència d'homotopia de cadenes. És a dir, existeix $\rho : C_n(A \cup B) \to C_n^{\mathcal{A}}$ de manera que $\rho \circ i_\# = id$ i $id - \rho \circ id_\# = \partial \circ D + D \circ \partial$. Si ara dualitzem tenim que

$$i^\# \circ \rho^\# = id \text{ i } id - i^\# \circ \rho^\# = D^\# \circ \delta + \delta \circ D^\# \tag{2.4.56}$$

Per la proposició 2.56 tenim l'aplicació induïda $i^* : H^j(A \cup B) \to H^j(A + B)$ és un isomorfisme.
Ara passem aquest resultat a la relativa. Tenim les successions exactes curtes:

$$0 \longrightarrow C^n(X)/[C^n(A) + C^n(B)] \xrightarrow{p_1^\#} C^n(X) \xrightarrow{j_1^\#} C^n(A) + C^n(B) \longrightarrow 0 \tag{2.4.57}$$

i

$$0 \longrightarrow C^n(X)/[C^n(A \cup B)] \xrightarrow{p_2^\#} C^n(X) \xrightarrow{j_2^\#} C^n(A \cup B) \longrightarrow 0 \tag{2.4.58}$$

Aplicant la proposició 2.50, si α^* és l'aplicació induïda pel parell $id_X^\#$ i $i^\#$, obtenim el diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H^{n-1}(X) \arrow[r, "j_1^*"] & H^{n-1}(A+B) \arrow[r, "\delta"] & H^n(X, A+B) \arrow[r, "p_1^*"] & H^n(X) \arrow[r, "j_1^*"] & H^{n-1}(A+B) \arrow[r] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & H^{n-1}(X) \arrow[r, "j_2^*"] \arrow[u, "id_X^*"] & H^{n-1}(A \cup B) \arrow[r, "\delta'"] \arrow[u, "i^*"] & H^n(X; A \cup B) \arrow[r, "p_2^*"] \arrow[u, "\alpha^*"] & H^n(X) \arrow[r, "j_2^*"] \arrow[u, "id_X^*"] & H^{n-1}(A \cup B) \arrow[r] \arrow[u, "i^*"] & \ldots
\end{tikzcd} \tag{2.4.59}$$

Ara sabem que id_X^* i i^* són isomorfismes aleshores pel lema dels 5 tenim que α^* és un isomorfisme. Per tant podem definir el **producte *cup* induït** de la fórmula 2.4.55 de manera:

$$H^k(X, A) \times H^l(X, B) \xrightarrow{\smile} H^{k+l}(X, A \cup B) \tag{2.4.60}$$

Anem a vore un exemple de producte *cup* relatiu.

Exemple 2.64. Considerem $\mathbb{R}^n$ com el producte cartesià $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ amb $n = k + l$.

$$H^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}^l; \mathbb{Z}/2) \times H^l(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}^k; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\smile} H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \{0\}; \mathbb{Z}/2) \tag{2.4.61}$$

Aquestos es pot vore que són isomorfs a $\mathbb{Z}/2$ i que a més si α i β són els generadors dels dos primers $\alpha \smile \beta$ és el generador del darrer. Per a fer-ho abans necessitem un lema:

Lema 2.65. *Per a R anell commutatiu i anell d'ideals principals tenim que:*

$$H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \{0\}; R) = \begin{cases} 0 & i \neq n \\ R & i = n \end{cases} \tag{2.4.62}$$

Aplicant el teorema 2.47 obtenim el mateix per a cohomologia, ja que $\mathrm{Hom}(R, R) = R$.

El lema es pot demostrar fàcilment gastant homologia reduïda, vore [Hat01, pg. 134]. Anem a continuar amb l'exemple. Ens adonem que $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}^l = \mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^l \backslash \{0_l\})$, com que $\mathbb{R}^l$ és retracte de deformació de $\mathbb{R}^k$ i mitjançant el mateix retracte tenim que $\{0_k\} \times (\mathbb{R}^l \backslash \{0\})$ és retracte $\mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}^l$, aleshores,

$$\mathbb{Z}/2 \cong H^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}^l; \mathbb{Z}/2) \cong H^k(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^l \backslash \{0_l\}; \mathbb{Z}/2) \tag{2.4.63}$$

Raonant igual obtenim $H^l(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}^k; \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$ i per als mòduls d'homologia també. Per calcular, la cohomologia voldríem trobar un representant de generador sobre el qual avaluar les cocadenes. Aleshores, primer volem trobar un símplex $\sigma : \Delta^n \to \mathbb{R}^n$ tal que la seua classe d'homologia siga generador i les seues restriccions a cada subespai també, anem a vore que si satisfà

1. $0_{\mathbb{R}^n} \in int(\sigma(\Delta^n))$.
2. Si definim $\sigma_k := (\pi_k \circ \sigma|_{(v_0,...,v_k)}$ on $\pi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ és la projecció ortogonal. Aleshores volem que $0_{\mathbb{R}^k} \in int(\sigma_k(v_0, ..., v_k))$
3. Si definim $\sigma_l := (\pi_l \circ \sigma|_{(v_l,...,v_n)}$ on $\pi_l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ és la projecció ortogonal. Aleshores volem que $0_{\mathbb{R}^l} \in int(\sigma_l(v_k, ..., v_n))$

ja ho tindrem. Perquè si es satisfà (1) tenim que σ serà un generador de $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, ja que és una cadena no nul·la fora de la vora, anàlogament σ_k i σ_l seran generadors dels grups d'homologia respectius.
Considerem el símplex s_n format per la unió de les n-tuples $\{x_1, ..., x_n\}$ tals que $1 \geq x_1 \geq ... \geq x_n \geq 0$, aquest és un símplex que té com a vèrtexs els punts $[1, ..., 1, v_i, 0, ..., 0]$. Recordem que cada punt de Δ^n ve donat per les seues coordenades baricèntriques $(t_0, ..., t_n)$ aleshores definim:

$$\begin{aligned} \sigma_0 : \quad \Delta^n &\longrightarrow s_n \subset \mathbb{R}^n \\ (t_0, ..., t_n) &\longmapsto (\textstyle\sum_{k=1}^n t_k, ..., \sum_{k=i}^n t_k, ..., t_n) \end{aligned} \tag{2.4.64}$$

És clar que aquesta està ben definida, contínua, injectiva i lineal. Ara la sobrejectivitat, la podem vore definint les t_i recursivament a partir de les diferències $x_{i-1} - x_i$. Com que va d'un compacte i Hausdorff a un Hausdorff tindrà que ser homeomorfisme. Com a conseqüència un punt de l'interior és aquell que satisfà $1 > x_1 > ... > x_n > 0$.
Notem que per l'últim que hem comentat les projeccions $\pi_k(s_n) = s_k$ i $\pi_l(s_n) = s_l$, i passarà igual que punts de l'interior aniran a punts de l'interior. Aleshores per obtenir el σ que satisfà les 3 condicions només composar σ_0 amb una translació que deixe $0_{\mathbb{R}^n}$ en l'interior.
Ara ja podem computar el producte *cup*. Siguen $\varphi \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}^l; \mathbb{Z}/2)$ i $\phi \in C^l(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}^k; \mathbb{Z}/2)$ representants de $\alpha \in H^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}^l; \mathbb{Z}/2)$ i $\beta \in H^l(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}^k; \mathbb{Z}/2)$ respectivament, aquestos els generadors dels mòduls. Com que els mòduls són lliures tenim pel teorema 2.47 uns isomorfismes als homomorfismes dels mòduls d'homologia és a dir porten generadors a generadors. Aleshores $\varphi(\sigma_k) = 1$ i $\phi(\sigma_l) = 1$, per tant $\varphi \smile \psi(\sigma) = \varphi(\sigma_k)\phi(\sigma_l) = 1$ aleshores $\alpha \smile \beta$ és el generador de $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \{0\}; \mathbb{Z}/2)$

Nota 2.66. Aquest raonament es pot fer de la mateixa manera per a coeficients en $\mathbb{Z}$, hem decidit fer-ho en $\mathbb{Z}/2$ perquè el necessitarem més tard.

Teorema 2.67. *Si R és un* ***anell commutatiu****, per a tot $\alpha \in H^k(X, A; R)$ i $\beta \in H^l(X, A; R)$ tenim que $\alpha \smile \beta = (-1)^{kl} \beta \smile \alpha$. És a dir, $(H^*(X, A; R), +, \smile)$ és un* ***àlgebra anticommutativa****.*

Per a aquesta demostració hem gastat com a referència [Qui18, Lliçons 11 i 20].

Demostració. Primer considerem que cas $A = \emptyset$. Siguen $\varphi \in C^k(X; R)$ i $\psi \in C^l(X; R)$, per definició de producte *cup* $\varphi \smile \psi$ i $\psi \smile \varphi$ són iguals llevat d'una permutació en els vèrtexs de Δ^{kl} la idea de la prova és buscar una permutació que es comporte bé amb aquest producte i trobar una homotopia de cadenes entre la identitat i eixa permutació per deduir la igualtat en cohomologia.
Donat $\sigma : \Delta^n = (e_0, ..., e_n) \to X$ un n-símplex singular i $s \in \Sigma_n$ la permutació que passa de $[e_0, ..., e_n]$ a $[e_n, e_{n-1}, ..., e_1, e_0]$ aleshores definim $\overline{\sigma}(t_0, ..., t_n) = (t_n, ..., t_0)$. Per facilitar la notació escriurem $\overline{\sigma} = \sigma|_{(v_n, ..., v_0)}$. En això definim l'homomorfisme:

$$\begin{array}{rccc} \rho_n : & C_n(X) & \longrightarrow & C_n(X) \\ & \sigma & \longmapsto & \varepsilon_n \sigma|_{e_n, ..., e_0} \end{array} \tag{2.4.65}$$

on $\varepsilon_n = (-1)^{n(n+1)/2}$ anem a vore que és una aplicació de cadenes. Donat $\sigma : \Delta^n \to X$ tenim que

$$\begin{aligned} (\partial \circ \rho(\sigma))(t_0, ..., t_{n-1}) &= \partial(\varepsilon_n \sigma|_{(e_n, ..., e_0)})(t_0, ..., t_n) = \\ &= \varepsilon_n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma(t_n, ..., t_{n-i}, 0, t_{n-i-1}, ..., t_0) = \\ &= \varepsilon_n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma|_{(e_n, ..., \hat{e}_{n-i}, ..., e_0)} \end{aligned} \tag{2.4.66}$$

Per altra banda:

$$\rho \circ \partial(\sigma) = \rho \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma|_{(e_0,...,\hat{e}_i,...e_n)} \right) =$$
$$= \varepsilon_{n-1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma|_{(e_n,...,\hat{e}_i,...e_0)} =$$
$$= \varepsilon_{n-1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \sigma|_{(e_n,...,\hat{e}_{n-i},...e_0)} =$$
$$= \varepsilon_{n-1}(-1)^n \sum_{i=0} \sigma|_{(e_n,...,\hat{e}_{n-i},...,e_0)} \quad (2.4.67)$$

Aleshores només cal comprovar que $(-1)^{n(n+1)/2} = \varepsilon_n = (-1)^n \varepsilon_{n-1} = (-1)^n(-1)^{(n-1)n/2}$ clar que $2n + n(n-1) = n(n+1)$, aleshores $\partial \circ \rho = \rho \circ \partial$ com a conseqüència *rho* és una aplicació de cadenes.
Ara demostrem que $\rho \simeq id_{C_*(X)}$, és a dir, que existeix $Q_n : C_n(X) \to C_{n+1}(X)$ tal que

$$\partial \circ Q_n + Q_{n+1} \circ \partial = \rho - id_{C_n(X)} \quad (2.4.68)$$

per a això anem a necessitar construir uns operadors especials. Considerem el producte $\Delta^n \times I$ i definim $([e_0, 0], ..., [e_n, 0]) = \Delta^n \times \{0\}$ i $([e_0, 1], ..., [e_n, 1]) = \Delta^n \times \{1\}$, aquestes dos van a tindre la mateixa imatge sota la projecció $\pi : \Delta^n \times I \to \Delta^n$. Ara definim l'aplicació

$$\begin{array}{rccl} p_i^n : & \Delta^{n+1} & \longrightarrow & \Delta^n \times [0,1] \\ & (t_0, ..., t_{n+1}) & \longmapsto & ((t_0, ..., t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, ..., t_{n+1}), t_{i+1} + ... + t_{n+1}) \end{array} \quad (2.4.69)$$

És clar que està ben definida pel fet que $\sum t_i = 1$. A més, es comprova immediatament que si e_k és un vèrtex de Δ^{n+1} aleshores

$$p_i^n(e_k) = \begin{cases} (e_k, 0), & 0 \leq k \leq i \\ (e_{k-1}, 1) & k > i \end{cases} \quad (2.4.70)$$

Si ara considerem la permutació $s_i(t_0, ..., t_{n+1}) = (t_0, ..., t_i, t_{n+1}, ..., t_{i+1})$ podem definir la següent aplicació

$$\gamma_i : \Delta^{n+1} \xrightarrow{s_i} \Delta^{n+1} \xrightarrow{p_n^i} \Delta \times [0,1] \xrightarrow{\pi} \Delta^n \quad (2.4.71)$$

Anem a vore com funcionaria:

$$(t_0, ..., t_{n+1}) \longmapsto (t_0, ..., t_i, t_{n+1}, ..., t_{i+1}) \longmapsto$$
$$((t_0, ..., t_{i-1}, t_i + t_{n+1}, ..., t_{i+1}), t_{n+1} + ... + t_0) \longmapsto$$
$$(t_0, ..., t_{i-1}, t_i + t_{n+1}, t_n, ..., t_{i+1}) \quad (2.4.72)$$

Aplicant 2.4.70:

$$\gamma_i(e_k) = \begin{cases} e_k & 0 \leq k \leq i \\ e_{n+i+1-k} & i < k \leq n+1 \end{cases} \tag{2.4.73}$$

Ara donat $\sigma : \Delta^n \to X$ denotem $\sigma \circ \gamma_i$ com $\sigma|_{(e_0,\dots,e_i,e_n,\dots,e_i)}$. Definim

$$\begin{array}{rccl} Q_n : & C_n(X) & \longrightarrow & C_{n+1}(X) \\ & \sigma & \longmapsto & \sum_{i=0}^n (-1)^i \varepsilon_{n-i}(\sigma \circ \gamma_i) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \varepsilon_{n-i}\sigma|_{(e_0,\dots,e_i,e_n,\dots,e_i)} \end{array} \tag{2.4.74}$$

Per tal de poder aplicar la vora anem a vore que passa al composar amb $\partial_{(j)}$ (vore l'equació 2.3.5), $\partial_{(j)}\sigma \circ \gamma_i$.

$$(\partial_{(j)}(\sigma \circ \gamma_i))(t_0, \dots, t_n) = (\sigma \circ \gamma)(t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_n) \tag{2.4.75}$$

Anem a considerar dos casos, primer $j \leq i$:

$$\partial_{(j)}(\sigma \circ \gamma_i)(e_k) = \begin{cases} \sigma(e_k) & 0 \leq k < j \\ \sigma(e_{k+1}) & j \leq k \leq i-1 \\ \sigma(e_{n+i-k}) & i \leq k \leq n \end{cases} \tag{2.4.76}$$

Per tant veiem $\partial_{(j)}(\sigma \circ \gamma_i) = \sigma|_{(e_0,\dots,\hat{e}_j,\dots,e_i,e_n,\dots,e_i)}$.
Ara considerem el cas en què $j > i$:

$$\partial_{(j)}(\sigma \circ \gamma_i)(e_k) = \begin{cases} \sigma(e_k) & 0 \leq k \leq i \\ \sigma(e_{n+i+1-k}) & i < k < j \\ \sigma(e_{n+i-k}) & j \leq k \leq n \end{cases} \tag{2.4.77}$$

Per tant veiem $\partial_{(j)}(\sigma \circ \gamma_i) = \sigma|_{(e_0,\dots,\hat{e}_j,\dots,e_i,e_n,\dots,e_i)}$.

Ara podem vore que Q és una homotopia de cadenes

$$\begin{aligned} \partial \circ Q_n(\sigma) = \sum_{j \leq i} (-1)^i (-1)^j \varepsilon_{n-i}\sigma|_{(e_0,\dots,\hat{e}_j,\dots,e_i,e_n,\dots,e_i)} + \\ + \sum_{j \geq i} (-1)^i (-1)^{n+i+1-j} \varepsilon_{n-i}\sigma|_{e_0,\dots,e_i,e_n,\dots,\hat{e}_j,\dots,e_i)} \end{aligned} \tag{2.4.78}$$

Si considerem només els termes de $i = j$ obtenim:

$$\begin{aligned} \varepsilon_n \sigma|_{(e_n,\dots,e_0)} + \sum_{i>0} \varepsilon_{n-i}\sigma|_{(e_0,\dots,e_{i-1},e_n,\dots,e_i)} + \\ + \sum_{i<n} (-1)^{n+i+1} \varepsilon_{n-i}\sigma|_{(e_0,\dots,e_i,e_n,\dots,e_{i+1})} - \sigma|_{(e_0,\dots,e_n)} \end{aligned} \tag{2.4.79}$$

Ara si en el segon sumatori canviem l'índex i per $i-1$ i reordenem obtenim:

$$\sum_{i>0}(-1)^{n+i}\varepsilon_{n-i+1}\sigma|_{(e_0,\ldots,e_{i-1},e_n,\ldots,e_i)} \tag{2.4.80}$$

És fàcil comprovar que $(-1)^{n+i}\varepsilon_{n-i+1} = -\varepsilon_{n-i}$,

$$(-1)^{n+i}\varepsilon_{n-i+1} = (-1)^{n+i}(-1)^{(n-i+1)(n-i+2)/2} = (-1)^{(n-i)(n-i+1)/2}(-1)^{(n-i+1)+n+i} = -\varepsilon_{n-i} \tag{2.4.81}$$

i per tant aquest sumatori i el primer d'abans de 2.4.79 es cancel·len i ens queden només els termes:

$$\varepsilon_n\sigma(e_n,...,e_0) - \sigma|_{(e_0,\ldots,e_n)} = \rho(\sigma) - \sigma \tag{2.4.82}$$

Ara calculem $Q \circ \partial$:

$$Q_{n-1}\circ\partial(\sigma) = \sum_{i<j}(-1)^i(-1)^j\varepsilon_{n-i-1}\sigma|_{(e_0,\ldots,e_i,e_n,\ldots,\hat{e}_j,\ldots,e_i)} + \\ + \sum_{i>j}(-1)^{i-1}(-1)^j\varepsilon_{n-i}\sigma|_{(e_0,\ldots,\hat{e}_j,\ldots,e_i,e_n,\ldots,e_i)} \tag{2.4.83}$$

Com que hem comprovat al principi de la prova que $\varepsilon_{n-i} = (-1)^{n-i}\varepsilon_{n-i-1}$, obtenim al restar aquesta 2.4.78 obtenim que es cancel·la tot menys $i = j$ i per tant hem vist que $\partial \circ Q - Q \circ \partial = \rho - id_{C_*(X)}$. Per tant, ρ i la identitat són homotòpiques com a aplicacions de cadenes.
Com que $\rho \simeq id_{C_n(X)}$ l'aplicació induïda en la cohomologia $\rho^* = id_{H_*(X)}$ aleshores per una banda tenim:

$$(\rho\varphi \smile \rho\psi)(\sigma) = \varphi(\varepsilon_k\sigma|_{(e_k,\ldots,e_0)})\psi(\varepsilon_l\sigma|_{(e_{k+l},\ldots,e_k)}) \tag{2.4.84}$$

Per altra:

$$\rho(\psi \smile \varphi)(\sigma) = \varepsilon_{k+l}\psi(\sigma|_{(e_{k+l},\ldots,e_k)}) \cdot \varphi(\sigma|_{(e_k,\ldots,e_0)}) \tag{2.4.85}$$

Aleshores tenim que $\varepsilon_k\varepsilon_l(\rho\varphi \smile \rho\psi) = \varepsilon_{k+l}\rho(\psi \smile \varphi)$. Ara observem que

$$\varepsilon_{k+l} = (-1)^{(k+l)(k+l+1)/2} = (-1)^{kl}(-1)^{k(k+1)/2}(-1)^{l(l+1)/2} = (-1)^{kl}\varepsilon_k\varepsilon_l \tag{2.4.86}$$

Per tant, $(\rho\varphi \smile \rho\psi) = (-1)^{kl}\rho(\psi \smile \varphi)$ ara bé com que $\rho^* = id_{H_*(X)}$ ens queda

$$[\varphi] \smile [\psi] = (-1)^{kl}[\psi] \smile [\varphi] \tag{2.4.87}$$

El cas per a $A \neq \emptyset$ es dedueix del fet que l'operador Q du les cadenes de $C_n(A)$ a $C_{n+1}(A)$ i per tant la Q induïda en el quocient també és una homotopia de cadenes. $\square$

Proposició 2.68 (**Naturalitat** del producte *cup*)**.** *Donada una aplicació contínua entre espais topològics $f : X \to Y$, aleshores les aplicacions induïdes $f^* : H^n(Y; R) \to H^n(X; R)$ satisfan $f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta)$, anàlogament per a la cohomologia relativa.*

Demostració. Considerem $f^{\#} : C^*(X) \to C^*(Y)$ l'aplicació induïda, aleshores donats $\sigma \in C_n(X)$, $\varphi \in C^l(X)$ i $\psi \in C^k(X)$ tals que $k + l = n$ tenim:

$$\begin{aligned}(f^{\#}\varphi \smile f^{\#}\psi)(\sigma) &= f^{\#}\varphi(\sigma|_{(v_0,\ldots,v_k)}) \cdot f^{\#}\psi(\sigma|_{(v_k,\ldots,v_n)}) = \\ &= \varphi[(f\circ\sigma)|_{(v_0,\ldots,v_k)}] \cdot \psi[(f\circ\sigma)|_{(v_k,\ldots,v_n)}] = (\varphi \smile \psi)(f\circ\sigma) = f^{\#}(\varphi \smile \psi)(\sigma)\end{aligned} \tag{2.4.88}$$

Per tant, tenim que $f^{\#}\varphi \smile f^{\#}\psi = f^{\#}(\varphi \smile \psi)$, d'aquesta igualtat es dedueix el resultat per a cohomologia i per a cohomologia relativa ja que simplement és passar a quocients. □

El que hem demostrat en aquesta secció és que $(H^*(X,A), +, \smile)$ forma un àlgebra anti-commutativa[6] sobre R i a més existeix un un functor

$$\mathcal{S} : Top \to Skew_R, \quad \mathcal{S}(X) = (H^*(X;R), +, \smile) \tag{2.4.89}$$

i $\mathcal{S}(X \xrightarrow{f} Y) = f^* : (H^*(X;R), +, \smile) \to (H^*(Y;R), +, \smile)$. Aquest és un functor perquè $\mathcal{H}^* \circ Sing : Top \to GrMod_R$ és un functor i les aplicacions que eren homomorfismes de R-mòduls al ser naturals respecte del producte *cup* són homomorfismes d'àlgebres.

2.5 CW-complexos

Ja hem acabat de vore les primeres propietats de l'homologia i la cohomologia. En aquest capítol les aplicarem per deduir propietats d'homologia i cohomologia sobre CW-complexos. Amb aquestes calcularem l'estructura cel·lular del Grassmannià, els seus mòduls de cohomologia i l'anell de cohomologia de l'espai projectiu infinit $\mathbb{R}P^\infty$. Per a aquest capítol hem gastat com a referència principal [MS74, Capítol 6 i pp. 260-262].

Considerem el disc $D^p = \{v \in \mathbb{R}^p / \ |v| \leq 1\}$ i definim el seu interior $int(D^p) = \{v \in \mathbb{R}^p / \ |v| < 1\}$, excepte en el cas particular que $p = 0$ considerarem que $int(D^0) = D^0$.
Direm que un espai topològic és una **p-cel·la tancada** si és homeomorf a D^p, si és homeomorfa a $int(D^p)$ direm que és una **p-cel·la oberta**.

Definició 2.69. *Un **CW-complex** consisteix en un espai Hausdorff K al qual diem espai subjacent i una partició de conjunts disjunts de K, $\{e_i\}_{i\in I}$ que satisfan les següents propietats:*

1. *Per a tot $i \in I$ e_i és una **cel·la** de dimensió $n(i) \geq 0$. A més per a cada cel·la e_i existeix una aplicació contínua:*

$$f : D^{n(i)} \to K \tag{2.5.1}$$

*que actua com a homeomorfisme entre $int(D^{n(i)})$ i e_i. A f li direm **funció característica**.*

[6] En molts llibres d'àlgebra a un àlgebra commutativa també rep el nom de commutativa, nosaltres anem a evitar eixa nomenclatura pel risc a confusió.

2. *Donat $x \in \overline{e_i} - e_i$, aleshores existeix $j \in I$ tal que $x \in e_j$ i $n(j) < n(i)$.*

   *Si I és un conjunt finit direm que el **CW-complex** és **finit** i és suficient amb aquestes condicions. Un subconjunt de K és un **subcomplex** si és tancat i és unió de e_i.*

3. *Clausura finita. Per a tot $x \in K$ està contingut en un subcomplex finit de K.*

4. *Topologia de Whitehead. K té la **topologia del límit directe** de la família dirigida formada pels subcomplexos finits amb la inclusió.*

*Al subcomplex format per les cel·les de dimensió n o menor li diem n-**esquelet** denotat com K^n.*

Nota 2.70. A l'exemple C.28 es veu com la topologia de Whitehead és el mateix que considerar que un conjunt $U \subset K$ és obert si i només si $K^n \cap U$ és obert en la topologia de K^n.

Nota 2.71. El nom de CW-complex fa referència als axiomes, la C ve de *Finite Closure* i la W de *Weak topology*, que és com li va dir originalment Whitehead a la topologia del límit directe [Whi49], la qual no és la topologia feble de l'anàlisi matemàtica i per tant evitem aquesta nomenclatura per evitar confusió.

Ara que hem definit què és un CW-complex podem passar a demostrar propietats sobre els mòduls d'homologia.

Lema 2.72. *Siga K un CW complex, el grup d'homologia relativa $H_i(K^n, K^{n-1})$ amb coeficients en R és 0 per a $i \neq n$ i és un R-mòdul lliure per a $i = n$ amb un generador per a cada n-cel·la de K. A més, $H^i(K^n, K^{n-1}) = 0$ si $i \neq n$ i $H^i(K^n, K^{n-1}) = \mathrm{Hom}_R(H_i(K^n, K^{n-1}); R)$ si $i = n$*

Demostració. Si per a cada n-cel·la oberta triem un punt s_e definim S com la unió d'aquestos s_e. Si considerem $K^n \backslash S$ i col·lapsem cada n-cel·la foradada en la seua frontera i per tant ens queda K^{n-1} i per tant, aquest és retracte de deformació de $K^n \backslash S$. Per tant obtenim:

$$H_i(K^n, K^{n-1}) \cong H_i(K^n, K^n \backslash S) \tag{2.5.2}$$

Aplicant el teorema d'excisió tenim que $H_i(K^n, K^n \backslash) = H_i(K^n \backslash K^{n-1}, K^n \backslash (S \cup K^{n-1}))$. El primer és la unió disjunta de les n-cel·les i el segon la unió disjunta de les n-cel·les foradades. Que és la suma directa dels grups d'homologia $H_i(e, e \backslash s_e) \cong H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, aplicant el lema 2.65 obtenim la tesi del teorema.
En particular tenim que aplicant el lema 2.47, $H^i(K^n, K^{n-1}) = 0$ si $i \neq n$ ja que per a $i \leq n$ aplica el teorema per ser $H_i(K^n, K^{n-1})$, per a $n+1$ aplica per ser $\mathrm{Hom}(H_i(K^n, K^{n-1}))$ lliure i per a la resta aplica per ser 0 l'anterior. □

Corol·lari 2.73. *Siga K un CW complex, el grup $H_i(K^n)$ és 0 per a $i > n$ i isomorf a $H_i(K)$ per a $i < n$. Anàlogament per a cohomologia.*

Demostració. És clar que $H_i K^0 = 0$ si $i > 0$ ja que és un espai discret. A partir de la successió exacta curta

$$0 \longrightarrow C_n(K^{n-1}) \xrightarrow{i} C_n(K^n) \xrightarrow{p} C_n(K^n, K^{n-1}) \longrightarrow 0 \tag{2.5.3}$$

s'indueix la successió exacta llarga

$$... \longrightarrow H_{n+1}(K^n, K^{n-1}) \longrightarrow H_n(K^{n-1}) \longrightarrow H_n(K^n) \longrightarrow H_n(K^n, K^{n-1}) \longrightarrow ... \tag{2.5.4}$$

Per inducció sobre n, si $i > n$ tenim que $H_i(K^{n-1}) = 0$ i pel lema anterior tenim $H_i(K^n, K^{n-1}) = 0$, per tant per exactitud $H_i(K^n) = 0$. Si $n < i$ aplicant el lema 2.72 ens queda:

$$... \longrightarrow 0 \longrightarrow H_n(K^{n-1}) \longrightarrow H_n(K^n) \longrightarrow 0 \longrightarrow ... \tag{2.5.5}$$

Per tant, per exactitud $H_i(K^n) \cong H_i(K^{n-1})$, per tant aplicant inducció

$$H_i(K^n) \cong H_i(K^{n+1}) \cong H_i(K^{n+2}) \cong ... \tag{2.5.6}$$

. Si K és de dimensió finita ja hem acabat.
En el cas en què K és de dimensió infinita, és qüestió de considerar el límit directe de mòduls d'homologia a la família dels n-esquelets aplicant el mateix raonament que es gasta a la demostració del lema 2.58 i la nota 2.59, s'obté el que volíem.
Ara considerem el cas de la cohomologia, fent el mateix raonament que en homologia però aplicat a la successió exacta llarga:

$$... \leftarrow H^i(K^{n-1}) \leftarrow H^i(K^n) \leftarrow H^i(K^n, K^{n-1}) \leftarrow H^{i-1}(K^{n-1}) \leftarrow ... \tag{2.5.7}$$

en això, inducció i el lema 2.72 obtenim $H^i(K^n) = 0$ si $i > n$.
Per al cas, $i < n$ aplica el mateix raonament que hem fet en homologia.
La cohomologia $H^n(K)$ és clara pel que acabem de vore i pels lemes 2.58 i la nota 2.59. □

2.5.1 Estructura cel·lular del Grassmannià

Ara que en tenim algunes propietats dels CW-complexos anem a buscar un CW-complex sobre el qual aplicar-les, vorem que el Grassmannià infinit té estructura de CW-complex, anem a calcular la seua estructura cel·lular i amb aquesta la seua cohomologia.

Considerem la varietat del Grassmannià $G(n, k)$, i recordem el fet de que $\mathbb{R}^{n+k}$ es pot construir a partir de la successió $\mathbb{R}^0 \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \subset ... \subset \mathbb{R}^{n+k}$ on $\mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^{n+k}$ consisteix en els vectors de la forma $(v_1, ..., v_p, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{n+k}$.
Aleshores donat $X \in G(n, k)$ podem definir la següent successió d'enters

$$0 \leq \dim(X \cap \mathbb{R}) \leq \dim(X \cap \mathbb{R}^2) \leq ... \leq \dim(X \cap \mathbb{R}^{n+k}) = n \tag{2.5.8}$$

Tenim la successió exacta:

$$0 \longrightarrow X \cap \mathbb{R}^{p-1} \xrightarrow{i} X \cap \mathbb{R}^p \xrightarrow{\pi_p} \mathbb{R} \longrightarrow 0 \tag{2.5.9}$$

Per tant, $\ker(\pi_p) = i(X \cap \mathbb{R}^{p-1})$ i per tant $\dim(X \cap \mathbb{R}^{p-1}) - \dim(X \cap \mathbb{R}^p) \leq 1$. Aleshores la successió 2.5.8 conté exactament n bots de dimensió, això motiva la següent definició:

Definició 2.74. *Li direm **símbol de Schubert** a $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n) \in \mathbb{Z}^n$ tal que:*

$$1 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < ... < \sigma_n \leq n + k \tag{2.5.10}$$

Per a cada símbol de Schubert σ, definim $e(\sigma) \subset G(n,k)$

$$e(\sigma) := \left\{X \in G(n,k)/ \ \dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i}),\ \dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i - 1}) = i - 1, i = 1, ..., n + k\right\} \tag{2.5.11}$$

És clar que donat $X \in G(n,k)$ existeix un únic nombre de Schubert σ tal que $X \in e(\sigma)$. El que anem a demostrar ara és que $e(\sigma)$ és una cel·la oberta.
Recordem que $\mathbb{H}^k := \{(v_1, ..., v_k, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{n+k}/v_k > 0\}$[7]. Ens adonem que donat $X \in G(n,k)$ aleshores si X té una base $x_1, ..., x_n$ tal que:

$$x_1 \in \mathbb{H}^{\sigma_1}, ..., x_n \in \mathbb{H}^{\sigma_n} \tag{2.5.12}$$

aplicant la successió exacta 2.5.9 obtindrem:

$$dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i}) > dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i - 1}), \quad i = 1, ..., n \tag{2.5.13}$$

aleshores $X \in e(\sigma)$. El recíproc també és cert, però encara més fort tenim la següent propietat:

Lema 2.75. *Per a cada $X \in e(\sigma)$ existeix una única base ortonormal $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{H}^{\sigma_1} \times ... \times \mathbb{H}^{\sigma_n}$.*

Demostració. El vector x_1 té que estar en la recta donada per $X \cap \mathbb{R}^{\sigma_1}$ i a més té que ser unitari per tant, tenim dos possibilitats només però triem la que tinga la σ_1-èssima component positiva per a que $x_1 \in \mathbb{H}^{\sigma_1}$. Ara x_2 té que ser un vector unitari de $X \cap \mathbb{R}^{\sigma_2}$ tal que siga ortogonal a x_1, això torna a donar dos possibilitats però només 1 tindrà la component σ_2-èssima positiva. Recursivament, es determinen unívocament $\sigma_3, ..., \sigma_n$. □

Definició 2.76. *Definim*

$$e'(\sigma) = V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) \cap (\mathbb{H}^{\sigma_1} \times ... \times \mathbb{H}^{\sigma_n}) \tag{2.5.14}$$

és a dir n-marcs ortonormals de manera que $x_i \in \mathbb{H}^{\sigma_i}$. També definim

$$\overline{e}'(\sigma) = V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) \cap (\overline{\mathbb{H}}^{\sigma_1} \times ... \times \overline{\mathbb{H}}^{\sigma_n}) \tag{2.5.15}$$

Lema 2.77. *$\overline{e}'(\sigma)$ és una cel·la tancada de dimensió $d(\sigma) = (\sigma_1 - 1) + (\sigma_2 - 2) + ... + (\sigma_n - n)$. A més, l'interior és $e'(\sigma)$ i $q : V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \to G(n,k)$[8] actua com a homeomorfisme entre $e'(\sigma)$ i $e(\sigma)$.*

[7] Atenció al fet que l'hem definit com el semiplà obert no el tancat.
[8] Recordem que $q : V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \to G(n,k)$ és l'aplicació que porta cada n-marc al pla que genera.

Demostració. Per inducció sobre n. Per a $n = 1$, $\overline{e}'(\sigma_1)$ ś el conjunt dels vectors de la forma:

$$x_1 = (x_{11}, x_{12} ..., x_{1\sigma_1}, 0, ..., 0), \quad \sum_{i=1}^{n+k} x_{1i}^2 = 1,\ x_{1\sigma_1} \geq 0 \tag{2.5.16}$$

Trivialment $\overline{e}'(\sigma_1)$ és el casquet superior tancat de l'esfera $\sigma_1 - 1$, i per tant homeomorf a $D^{\sigma_1 - 1}$.

Suposem ara que és cert per a n i veiem que és cert per a $n+1$. Siguen $u, v \in \mathbb{R}^{n+k}$ dos vectors unitaris $u \neq -v$ i siga

$$T(u,v) : \mathbb{R}^{n+k} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k} \tag{2.5.17}$$

L'única rotació entre u i v en $\mathbb{R}^{n+k}$ que fixa punt a punt l'espai ortogonal al pla generat per u i v. Aquesta ve donada per la fórmula:

$$T(u,v)x = x - \frac{(u+v)\cdot x}{1 + u\cdot v}(u+v) + 2(u\cdot x)v \tag{2.5.18}$$

De fet comprovem, que la funció és lineal respecte de x, que

$$T(u,v)u = u - \frac{u\cdot u + v\cdot u}{1 + u\cdot v}(u+v) + 2(u\cdot u)v = u - (u+v) + 2v = v \tag{2.5.19}$$

i finalment si $x\cdot u = x\cdot v = 0$ tenim que

$$T(u,v)x = x - \frac{u\cdot x + v\cdot x}{1 + u\cdot v}(u+v) + 2(u\cdot x)v = x + 0 + 0 = x \tag{2.5.20}$$

Notem que es compleix que $T(u,u)$ és la identitat i $T(v,u) = T(u,v)^{-1}$. A més, partir de la fórmula deduïm que que $T(u,v)x$ és contínua respecte de totes les variables i que si $u, v \in \mathbb{R}^p$ tenim que $T(u,v)x \equiv x \ (mod\, \mathbb{R}^p)$.

Siga $b_i = (0, ..., 0, \overset{\sigma_i)}{1}, 0, ..., 0) \in \mathbb{H}^{\sigma_i}$, aleshores $(b_1, ..., b_n) \in e'(\sigma)$. Per a qualsevol n-marc $(x_1, ..., x_n) \in \overline{e}'(\sigma)$ considerem la rotació en $\mathbb{R}^{n+k}$:

$$T = T(b_n, x_n) \circ T(b_{n-1}, x_{n-1}) \circ ... \circ T(b_1, x_1) \tag{2.5.21}$$

és clar que aquesta rotació du $b_1, ..., b_n$ a $x_1, ..., x_n$ respectivament, ja que per a una $i \in \{1, ..., n\}$ fixa, si $j < i$ $b_i \cdot x_j = b_i \cdot b_j = 0$, llavors $T(b_j, x_j)$ fixa b_i; $T(x_i, b_i)$ du b_i a x_i i si $i < j$ $T(b_j, x_j)$ fixen x_i.

Donat un enter $\sigma_{n+1} > \sigma_n$ i

$$D = \{u \in \overline{\mathbb{H}}^{\sigma_{n+1}} / \ ||u|| = 1 \ \wedge \ b_1 \cdot u = ... = b_n \cdot u = 0\} \tag{2.5.22}$$

Tenim que D és un casquet tancat d'una esfera de dimensió $\sigma_{n+1} - n - 1$ i per tant una cel·la tancada. Definim l'homeomorfisme:

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \overline{e}'(\sigma_1, ..., \sigma_n) \times D & \longrightarrow & \overline{e}'(\sigma_1, ..., \sigma_{n+1}) \\ & (x_1, ..., x_n, u) & \longmapsto & (x_1, ..., x_n, Tu) \end{array} \tag{2.5.23}$$

on T és la rotació que hem definit abans en funció de $x_1, ..., x_n$. Per vore que està ben definida notem que:

$$x_i \cdot Tu = Tb_i \cdot Tu = b_i \cdot u = 0, \quad \text{si } i \leq n, \text{ a més} \quad Tu \cdot Tu = u \cdot u = 1 \tag{2.5.24}$$

com que $Tu \equiv u \mod \mathbb{R}^{\sigma_n}$ tenim que $Tu \in \overline{\mathbb{H}}^{\sigma_{n+1}}$. Pel que hem comentat abans de la continuïtat de $T(a,b)$ tenim que f és clarament contínua. Coneixent la inversa de la rotació deduïm que:

$$u = T^{-1}x_{n+1} = T(x_1, b_1) \circ ... \circ T(x_n, b_n)x_{n+1} \in D \tag{2.5.25}$$

és contínua i per tant f^{-1} està ben definida i és contínua. Per tant podem concloure que $\overline{e}'(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ és homeomorfa a $\overline{e}'(\sigma_1, ..., \sigma_n) \times D$. Per inducció, tenim que $\overline{e}'(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ és una cel·la tancada de dimensió $(\sigma_1 - 1) + (\sigma_2 - 2) + ... + (\sigma_n - n)$ i per tant $\overline{e}'(\sigma_1, ..., \sigma_{n+1})$ és una cel·la tancada de dimensió $d(\sigma)$. Anàlogament es demostra que, $f|_{e'(\sigma_1,...,\sigma_n)\times int(D)}$ és un homeomorfisme entre $e'(\sigma_1, ..., \sigma_n) \times int(D)$ i $e'(\sigma_1, ..., \sigma_{n+1})$.
Falta demostrar que

$$q|_{e'(\sigma)} : e'(\sigma) \to e(\sigma) \tag{2.5.26}$$

és un homeomorfisme, pel lema 2.75 tenim que q és injectiva. A més si $(x_1, ..., x_n) \in \overline{e}'(\sigma) \backslash e'(\sigma)$, aleshores $X = q(x_1, .., x_n) \notin e(\sigma)$, ja que algun $x_i \in fr(\mathbb{H}^{\sigma_i})$, on fr denota la frontera topològica en $\mathbb{R}^{\sigma_i - 1}$. Per tant, $dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i - 1}) \geq i$ i com a conseqüència $X \notin e(\sigma)$. Ara bé, siga $A \subset e'(\sigma)$ conjunt tancat en la topologia relativa, aleshores $\overline{A} \cap e'(\sigma) = A$, on $\overline{A} \subset \overline{e}'(\sigma)$ és compacte per ser tancat dins d'un compacte ($\overline{e}'(\sigma)$, homeomorf a un disc), per tant $q(\overline{A})$ és compacte i per tant tancat. Ara bé, hem demostrat que $q(\overline{A}) \cap e'(\sigma) = A$, per tant $q(A)$ és tancat en la topologia relativa. Aleshores q du tancats a tancats i per tant és un homeomorfisme. □

Acabem de demostrar que $e(\sigma)$ és una cel·la oberta de dimensió $d(\sigma)$ i a més $q|_{e'\sigma} : e'(\sigma) \to e(\sigma)$ serveix com a funció característica.

Teorema 2.78. *Els $\binom{n+k}{n}$ diferents $e(\sigma)$ són les cel·les d'un CW-complex sobre l'espai $G(n,k)$. A més, si considerem el límit directe de la família dirigida dels $G(n,k)$, obtenim un CW-complex sobre G_n.*

Demostració. Pel lema anterior ja tenim la condició 1.
Demostrem la condició 2. Ens adonem que $\overline{e}'(\sigma)$ és compacte i per tant $q(\overline{e}'(\sigma))$ és compacte, aleshores també és tancat i per tant $\overline{e}(\sigma) \subseteq q(\overline{e}'(\sigma))$ ara bé l'altra inclusió és clara per definició de $e(\sigma)$. Per tant, per a qualsevol $X \in \overline{\sigma} \backslash e(\sigma)$ existeix una base $(x_1, ..., x_n) \in \overline{e}'(\sigma) \backslash e'(\sigma)$. Per definició de $e'(\sigma)$ tenim que són ortonormals i $x_i \in \mathbb{R}^{\sigma_i}$ per a tot i, per tant $dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i}) \geq i$. Per tant el símbol de Schubert de X, $(\tau_1, ..., \tau_n)$ ha de complir:

$$\tau_1 \leq \sigma_1, ..., \tau_n \leq \sigma_n \tag{2.5.27}$$

com que $(x_1, ..., x_n) \notin e'(\sigma)$ existeix un i tal que $x_i \in \mathbb{R}^{\sigma_i - 1}$, per tant, $\sigma_i > \tau_i$ i deduïm que $d(\sigma) > d(\tau)$. Per tant, $X \in e(\tau)$ una cel·la de dimensió inferior. Per tant tenim la condició

2. Per tant tenim que $G(n,k)$ és un CW-complex finit.
Si ara prenem el límit directe, ja tenim que G_n satisfà 1 i 2, i per ser límit directe ja tenim que té la topologia de Whitehead. Finalment, si $X \in G_n$ aleshores $X \in G(n,k)$ per a algun k i per tant tenim la condició de la clausura finita. $\square$

Exemple 2.79. En el cas particular en que $n = 1$ tenim que $\mathbb{R}P^\infty = G_1$, serà un CW-complex i a més té una única k-cel·la, $e(k+1)$, per a tot $k \in \mathbb{N}$. A més, $\overline{e}(k+1) = \mathbb{R}P^k$
Amb aquesta informació podem computar $H^i(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2)$ per a tot $i \in \mathbb{N}$, a cada n-esquelet de $\mathbb{R}P^\infty$ el denotem per K^n, en tot moment treballem amb $\mathbb{Z}/2$ de manera que es deixa implícit.
Recordem el lema 2.72, aquest ens diu si n'hi ha només una cel·la aleshores $H_n(K^n, K^{n-1}) = \mathbb{Z}/2$, ara pel teorema 2.47, com que estem treballant en un cos tots els $\mathbb{Z}/2$-mòduls són lliures per tant:

$$H^n(K^n, K^{n-1}) = \mathrm{Hom}(H_n(K^n, K^{n-1}), \mathbb{Z}/2) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2 \tag{2.5.28}$$

Pel corol·lari 2.73 tenim que $H^n(\mathbb{R}P^\infty) = H^n(K^n)$ aleshores raonem per inducció, si $n = 0$ pel teorema 2.47 tenim que $H^0(K^0) = End(\mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$. Considerem la successió exacta curta donada pel quocient:

$$0 \longleftarrow C^n(K^{n-1}) \xleftarrow{i^*} C^n(K^n) \xleftarrow{p^*} C^n(K^n, K^{n-1}) \longleftarrow 0 \tag{2.5.29}$$

Indueix la successió exacta llarga:

$$\leftarrow H^n(K^{n-1}) \leftarrow H^n(K^n) \leftarrow H^n(K^n, K^{n-1}) \leftarrow H^{n-1}(K^{n-1}) \leftarrow H^{n-1}(K^n) \leftarrow H^{n-1}(K^n, K^{n-1}) \leftarrow \tag{2.5.30}$$

sabem que $H^n(K^n, K^{n-1}) = \mathbb{Z}/2$, pel lema 2.72 $H^{n-1}(K^n, K^{n-1}) = 0$ i pel corol·lari 2.73 tenim que $H^n(K^{n-1}) = 0$ i que $H^{n-1}(K^n) = H^{n-1}(K^{n-1}) = \mathbb{Z}/2$ la darrera igualtat per hipòtesi d'inducció. Aleshores ens queda la successió exacta llarga:

$$... \longleftarrow 0 \longleftarrow H^n(K^n) \xleftarrow{d_3^*} \mathbb{Z}/2 \xleftarrow{d_2^*} \mathbb{Z}/2 \xleftarrow{d_1^*} \mathbb{Z}/2 \longleftarrow 0 \longleftarrow ... \tag{2.5.31}$$

Per exactitud, d_1^* és un monomorfisme, aleshores per actuar entre $\mathbb{Z}/2$-mòduls de la mateixa dimensió és clar que és un isomorfisme. Per tant d_2^* té que ser l'aplicació nul·la, per tant d_3^* és un isomorfisme $\mathbb{Z}/2 \cong H^n(K^n) = H^n(\mathbb{R}P^\infty)$.

Per calcular la cohomologia del Grassmannià ens serà útil contar el nombre de cel·les en $G(n,k)$. Per a això, primerament definim:

Definició 2.80. *Una **partició** de $n \in \mathbb{N}$ és una successió $i_1, ..., i_k$ d'enters positius tal que $\sum_{j=1}^k i_j = n$. El **nombre de particions** el denotarem com $p(n)$.*

Exemple 2.81. Per a $n = 4$, p(4)=5, on les particions són 1111, 112, 22, 13, 4.
Per a n=3, p(3)=3, 111,12, 3.
Per a $n = 0$, p(n)=1 on la partició és el conjunt buit.

Per a cada símbol de Schubert $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ tal que $d(\sigma) = j$ i $\sigma_n \leq m$ li correspon una partició de j, $i_1, ..., i_s$ donada per $\sigma_1 - 1, ..., \sigma_n - n$ llevat dels termes que siguen 0. És clar que

$$1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_s \leq m - n \tag{2.5.32}$$

i a més $s \leq n$. per tant:

Corol·lari 2.82. *El nombre de j-cel·les en $G(n, k)$ és igual al nombre de particions de j amb n enters com a màxim menors de $\leq k$. En particular, si $n, k \geq j$ tenim que el nombre de j-cel·les de $G(n, k)$ és $p(j)$.*

Corol·lari 2.83. *Si definim*

$$p_n(j) \tag{2.5.33}$$

com el nombre de particions de j que té com a màxim n enters tenim que $p_n(j)$ és el nombre de j-cel·les en G_n

Proposició 2.84. *Existeix un R-isomorfisme de mòduls $H^j(G_n; \mathbb{Z}/2) \to \oplus_{i=1}^{p_n(j)} \mathbb{Z}/2$.*

Demostració. Pel lema 2.72, $H_j(K^j, K^{j-1}) = \oplus_{i=1}^{p_n(j)} \mathbb{Z}/2$, ara pel teorema 2.47, tots els $\mathbb{Z}/2$-mòduls són lliures per tant:

$$H^j(K^j, K^{j-1}) \cong \mathrm{Hom}(H_j(K^j, K^{j-1}), \mathbb{Z}/2) \cong \mathrm{Hom}\left(\oplus_{i=1}^{p_n(j)} \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2\right) \cong \oplus_{i=1}^{p_n(j)} \mathbb{Z}/2 \tag{2.5.34}$$

Pel corol·lari 2.73 tenim que $H^j(G_n) = H^j(K^j)$ aleshores raonem per inducció, si $j = 0$ pel teorema 2.47 tenim que $H^0(K^0) \cong End(\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$. Considerant el parell (K^j, K^{j-1}) tenim la successió exacta llarga.

$$H^j(K^{j-1}) \xleftarrow{i^*} H^j(K^j) \leftarrow H^j(K^j, K^{j-1}) \xleftarrow{\Delta} H^{j-1}(K^{j-1}) \leftarrow H^{j-1}(K^j) \leftarrow H^{j-1}(K^j, K^{j-1}) \tag{2.5.35}$$

Pel corol·lari 2.73 tenim que $H^j(K^{j-1}) = 0$, aleshores $i^* = 0$ i que
$H^{j-1}(K^j) = H^{j-1}(K^{j-1}) \cong \oplus_{i=1}^{p_n(j-1)} \mathbb{Z}/2$ la darrera igualtat per hipòtesi d'inducció, per tant $\Delta = 0$. Aleshores concloem que $\oplus_{i=1}^{p_n(j)} \mathbb{Z}/2 \cong H^n(K^j, K^{j-1}) \cong H^j(K^j) = H^j(G_n)$. □

Teorema 2.85. *Existeix un isomorfisme d'àlgebres,*

$$H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathbb{Z}/2[a]/(a^{n+1}) \tag{2.5.36}$$

on a és l'única classe no nul·la de $H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2)$, anàlogament existeix un isomorfisme d'àlgebres

$$H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathbb{Z}/2[a] \tag{2.5.37}$$

Per a la demostració hem gastat com a referència [Hat01, Teorema 3.11].

Demostració. Per l'exemple 2.79 i el corol·lari 2.73, tenim que $H^j(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}/2$ per a tot $j \leq n$. A més, pel corol·lari 2.73 tenim que la inclusió $i : \mathbb{R}P^{n-1} \to \mathbb{R}P^n$ indueix un isomorfisme $i^* : H^j(\mathbb{R}P^{n-1}) \to H^j(\mathbb{R}P^n)$. Aleshores per demostrar la tesi del teorema és prou provar que el producte *cup* de $H^{n-1}(\mathbb{R}P^n)$ amb el generador de $H^1(\mathbb{R}P^n)$ és un generador de $H^n(\mathbb{R}P^n)$.
De forma més general, podem provar que el producte *cup* d'un generador de $H^i(\mathbb{R}P^n)$ amb un generador de $H^j(\mathbb{R}P^n)$ és un generador de $H^n(\mathbb{R}P^n)$, on $j = n - i$.
Ens adonem que si considerem el subconjunt de $\mathbb{R}P^n$ tal que les coordenades $x_{i+1}, ..., x_n$ són totes 0 aquest conjunt és de fet un espai projectiu $\mathbb{R}P^i$. Anàlogament, el subconjunt de $\mathbb{R}P^n$ tal que $x_0, ..., x_{i-1}$ són 0 és un espai projectiu $\mathbb{R}P^j$. La intersecció d'aquestos dos és un únic punt $p := \{\pm(0, ..., 0, \overset{i)}{1}, 0, ..., 0)\}$. Siga

$$U := \{\{\pm(x_0, ..., x_i, ..., x_n)\} \in \mathbb{R}P^n / \ x_i \neq 0\} \tag{2.5.38}$$

Cada element $u \in U$, té un representant tal que la i-èssima coordenada és 1, si considerem aquest diem-li v podem definir un homeomorfisme $U \to \mathbb{R}^n$ de manera que $u \mapsto (v_0, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_n)$, és clar que és bijectiva ja que al fixar una coordenada les altres varien com vullguem en tot R^n a més és contínua i la inversa també. Ens adonem també que U el podem vore com $\mathbb{R}P^n \backslash \mathbb{R}P^{n-1}$.
Aleshores considerem el diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
H^i(\mathbb{R}P^n) \times H^j(\mathbb{R}P^n) \arrow[r, "\smile"] & H^n(\mathbb{R}P^n) \\
H^i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n \backslash \mathbb{R}P^j) \times H^j(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n \backslash \mathbb{R}P^i) \arrow[r, "\smile"] \arrow[u] \arrow[d] & H^i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n \backslash \{p\}) \arrow[u] \arrow[d] \\
H^i(\mathbb{R}^m \mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}^j) \times H^j(\mathbb{R}^m \mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}^i) \arrow[r, "\smile"] & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \{0\})
\end{tikzcd} \tag{2.5.39}$$

Aquest commuta per la naturalitat del producte *cup*. Per l'exemple 2.64 el producte *cup* de la fila de baix du un parell de generadors al generador, aleshores si demostrem que les columnes són isomorfismes per la commutativitat del diagrama tindrem el que volíem.
L'homomorfisme de baix a la dreta és conseqüència d'aplicar excisió

$$\begin{aligned} H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n \backslash \{p\}) \cong H^n(\mathbb{R}P^n \backslash \mathbb{R}P^{n-1}, \mathbb{R}P^n \backslash (\mathbb{R}P^{n-1} \cup \{p\})) = \\ = H^n(U, U \backslash \{p\}) \cong H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \end{aligned} \tag{2.5.40}$$

Per al de dalt a la dreta, podem gastar el fet de que $\mathbb{R}P^{n-1}$ és retracte de deformació de $\mathbb{R}P^n \backslash \{p\}$ mitjançant

$$\{\pm v\} \mapsto \left\{ \pm \frac{(v_0, ..., v_{i-1}, (1-t)v_i, v_{i+1}, ..., v_n)}{||(v_0, ..., v_{i-1}, (1-t)v_i, v_{i+1}, ..., v_n)||} \right\} \tag{2.5.41}$$

, per tant tenim que $H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n \backslash \{0\}) \cong H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1})$ per l'estructura cel·lular de $\mathbb{R}P^\infty$ tenim que $H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1}) = H^n(K^n, K^{n-1}) \cong \mathbb{Z}/2 \cong H^n(\mathbb{R}P^n)$.
Ara veiem que els morfismes de l'esquerra són isomorfismes. Considerem el diagrama commutatiu:

$$
\begin{tikzcd}
H^i(\mathbb{R}P^n) \arrow[d, "i^*"] & H^i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{i-1}) \arrow[l] \arrow[d, "i^*"] & H^i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n \backslash \mathbb{R}P^j) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "i^*"] & H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}^j) \arrow[d, "i^*"] \\
H^i(\mathbb{R}P^i) & H^i(\mathbb{R}P^i, \mathbb{R}P^{i-1}) \arrow[l] & H^i(\mathbb{R}P^i, \mathbb{R}P^i \backslash \{p\}) \arrow[l] \arrow[r] & H^i(\mathbb{R}^i, \mathbb{R}^i \backslash \{0\})
\end{tikzcd} \tag{2.5.42}
$$

Aquest és commutatiu, per posar a la fila de baix les aplicacions induïdes per les inclusions. Pel corol·lari 2.73, coneixent l'estructura cel·lular de $\mathbb{R}P^l$ i l'exemple 2.79, tenim que el quadrat de l'esquerra són tots isomorfismes. El de baix al mig és per ser retracte de deformació com hem raonat abans i el de baix a la dreta ja hem raonat abans que era isomorfisme per excisió. Finalment, el vertical de la dreta és isomorfisme per l'exemple 2.64.
Si demostrem que el de dalt enmig és isomorfisme, per commutativitat del quadrat central tindrem que la tercera vertical també serà isomorfisme i com conseqüència per commutativitat del quadrat de la dreta tindrem que l'homomorfisme de dalt a la dreta també serà isomorfisme. Per provar que el d'enmig és isomorfisme és prou vore que $\mathbb{R}P^{i-1}$ és retracte de deformació de $\mathbb{R}P^n \backslash \mathbb{R}P^j$, per a això considerem

$$
\{\pm(x_0, ..., x_n)\} \mapsto \left\{ \pm \frac{(x_0, .., x_{i-1}, (1-t)x_i, ..., (1-t)x_n)}{||(x_0, .., x_{i-1}, (1-t)x_i, ..., (1-t)x_n)||} \right\} \tag{2.5.43}
$$

aquesta aplicació és contínua i per tant en tenim que és un retracte de deformació.
Hem vist que tot el diagrama són isomorfismes, si intercanviem la i i la j els mateixos arguments ens dona el mateix resultat de que siguen isomorfismes i per tant al diagrama 2.5.39 tots els morfismes verticals són isomorfismes i per tant el producte *cup* del generador de $H^i(\mathbb{R}P^n)$ i el generador de $H^j(\mathbb{R}P^n)$ donen un generador de $H^n(\mathbb{R}P^n)$.
El cas per a $\mathbb{R}P^\infty$ es dedueix pel lema 2.58 i la nota 2.59.

□

2.6 Cohomologia de fibrats

En aquesta secció el nostre objectiu serà definir el producte en creu per relacionar cohomologies d'espais productes. Després el gastarem per poder trobar la classe fonamental de cohomologia i provar el teorema de l'isomorfisme de Thom, en això i les operacions de quadrats de Steenrod que descriurem al final. Per a aquesta secció hem gastat com a referència principal [MS74, Apèndix A, Capítol 10 i Capítol 8].

2.6.1 Producte en creu i cohomologia de l'espai producte

Donat $\varphi \in H^m(X,A)$, $A \subset X$ obert, i $\psi \in H^n(Y,B)$, $B \subset Y$ obert. Si considerem les projeccions:

$$\begin{aligned} p_1 &: (X \times Y, A \times Y) \to (X, A) \\ p_2 &: (X \times Y, X \times B) \to (Y, B) \end{aligned} \tag{2.6.1}$$

si p_1^* i p_2^* són les aplicacions induïdes en cohomologia relativa podem definir el **producte en creu** $\varphi \times \psi$ com:

$$\varphi \times \psi := (p_1^*\varphi) \smile (p_2^*\psi) \in H^{m+n}(X \times Y, (A \times Y) \cup (X \times B)) \tag{2.6.2}$$

Aquest està ben definit per com hem definit el producte *cup* relatiu. En definitiva, tenim un producte exterior:

$$H^m(X,A) \times H^n(Y,B) \xrightarrow{\times} H^{m+n}(X \times Y, (A \times Y) \cup (X \times B)) \tag{2.6.3}$$

Com que el producte *cup* és distributiu tenim que el producte en creu és bilineal i com que el *cup* és associatiu aquest també ho és i com que és natural el producte en creu també.
Anem a vore un poc la idea de com funcionaria aquest producte a nivell de les cocadenes, siguen $a \in C^m(X)$ i $b \in C^n(Y)$ representants de φ i ψ respectivament, és a dir, s'anul·len en $C_m(A)$ i $C_m(B)$ respectivament i al projectar en la cohomologia $[a] = \varphi$ i $[b] = \psi$.
Ara siga σ un n-símplex singular de $C_{n+m}(X \times Y)$ que s'anul·la en $(A \times Y \cup X \times B)$ aleshores:

$$\begin{aligned} (a \times b)(\sigma) = ((p_1^{\#}a) \smile (p_2^{\#}b))(\sigma) &= \\ = (p_1^{\#}a)(\sigma|_{(v_0,\dots,v_n)}) \cdot (p_2^{\#}b)(\sigma|_{(v_n,\dots,v_{n+m})}) &= \\ = a((p_1)_{\#}(\sigma|_{(v_0,\dots,v_n)})) \cdot b((p_2)_{\#}(\sigma|_{(v_n,\dots,v_{n+m})})) &= \\ = a(p_1 \circ \sigma|_{(v_0,\dots,v_n)}) \cdot b(p_2 \circ \sigma|_{(v_n,\dots,v_{n+m})}) & \end{aligned} \tag{2.6.4}$$

Això és simplement al nivell de cocadenes, per a cohomologia tindríem que mirar que passa en les classes.
El producte en creu ens dona una manera de relacionar les cohomologies dels espais amb les cohomologies dels espais producte:

Teorema 2.86 (Una fórmula de Künneth per a cohomologia)**.** *Siguen X i Y espais topològics, $A \subset X$ i $B \subset Y$ i considerem que R és un cos. Aleshores,*

$$\bigoplus_{i+j=n} H^i(X,A) \otimes H^j(Y,B) \cong H^n(X \times Y, A \times Y \cup X \times B) \tag{2.6.5}$$

La prova es pot trobar a [Spa66, Teorema 5.11], aquesta és la versió general del teorema, si després apliquem que si R és un cos i per tant tots els R-mòduls són lliures no n'hi ha torsió obtenim el nostre enunciat. En els casos d'interés aquest isomorfisme ve donat pels productes en creu, per a la demostració en CW-complexos [MS74, Teorema A.6].

Lema 2.87. *Siga B un espai topològic aleshores la correspondència*

$$\begin{array}{ccc} H^j(B) & \longrightarrow & H^j(B \times \mathbb{R}^n) \\ y & \longmapsto & y \times 1 \end{array} \tag{2.6.6}$$

és un isomorfisme, a més, si ϕ és el representant de y aleshores $\phi(p \circ \sigma) = \phi \times 1(\sigma)$ per a tot n-símplex singular $\sigma : B \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, on $p : (B \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ és la projecció.

Demostració. Per la definició de producte en creu tenim que el producte $H^j(B) \times H^0(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\times} H^j(B \times \mathbb{R}^n)$ està ben definit, a més tenim que és bilineal i per tant lineal respecte de la primera variable. Com que $\mathbb{R}^n$ és retracte de deformació d'un punt $H^0(\mathbb{R}^n) = R$.
Seguint el raonament que hem fet abans obtenim que si $\sigma : \Delta^n \to B \times \mathbb{R}^n$.

$$(\phi \times 1)(\sigma) = \phi(p_1 \circ \sigma|_{(v_0,\ldots,v_n)}) \cdot 1(p_2 \circ \sigma|_{(v_n)}) = \phi(p_1 \circ \sigma|_{(v_0,\ldots,v_n)}) \tag{2.6.7}$$

És a dir, $\phi \times 1(\sigma)$ és equivalent a restringir el codomini de σ a B i desprès aplicar ϕ. Aquesta comprovació també mostra que és injectiu. Per comprovar que és sobrejectiu és prou adonar-se que podem retractar $B \times \mathbb{R}^n$ a $B \times \{0\}$ i per tant deduïm que al passar a cohomologia seran indiferents els valors que prenguen en $\mathbb{R}^n$. $\square$

La parella $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_0)$, on $\mathbb{R}^n_0 = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, la podem escriure com $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0) \times .... \times (\mathbb{R}, \mathbb{R}_0)$.
Anem a triar un generador $e^n \in H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_0)$ de la següent manera. $\mathbb{R}_0$ es pot escriure com la unió disjunta $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$.
La terna $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0, \mathbb{R}^-)$ per la proposició 2.53 obtenim la successió exacta llarga:

$$... \to H^m(\mathbb{R}, \mathbb{R}^-) \to H^m(\mathbb{R}_0, \mathbb{R}^-) \xrightarrow{\delta} H^{m+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0) \to H^{m+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^-) \to ... \tag{2.6.8}$$

Com que $\mathbb{R}^-$ és retracte de deformació de $\mathbb{R}$ tenim que $H^j(\mathbb{R}, \mathbb{R}^-) = 0$, aleshores δ és un isomorfisme. Per altra banda, per excisió tenim que $H^0(\mathbb{R}^+) \cong H^0(\mathbb{R}_0, \mathbb{R}^-)$ aleshores tenim:

$$H^0(\mathbb{R}^+) \xleftarrow{\cong} H^0(\mathbb{R}_0, \mathbb{R}^-) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0) \tag{2.6.9}$$

Si considerem $1 \in H^0(\mathbb{R}^+)$ podem definir la $e \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0)$ a partir dels isomorfismes del diagrama anterior.
Anem a vore que aquesta e ens defineix un isomorfisme.

Teorema 2.88. *Per a cada parella (X, A) on A obert en X*

$$\begin{array}{ccc} H^j(X, A) & \longrightarrow & H^{j+n}(X \times \mathbb{R}^n, X \times \mathbb{R}^n_0 \cup A \times \mathbb{R}^n) \\ & & \\ a & \longmapsto & a \times e^n \end{array} \tag{2.6.10}$$

és un isomorfisme

Demostració. És suficient provar-ho per a $n = 1$ ja que el cas general aplicant que el producte en creu és associatiu i per inducció tenim: Demostrem el cas $n = 1$.
Cas 1. Suposem que $n = 1$ i que A és buit.
Primerament notem que si considerem $H^m(X \times \mathbb{R}_0, X \times \mathbb{R}^-)$ aplicant el teorema d'excisió podem escindir $X \times \mathbb{R}^-$ de manera que tenim l'isomorfisme:

$$i^* : H^m(X \times \mathbb{R}_0, X \times \mathbb{R}^-) \to H^m(X \times \mathbb{R}^+) \tag{2.6.11}$$

Per altra banda, si considerem la terna $(X \times \mathbb{R}, X \times \mathbb{R}_0, X \times \mathbb{R}^-)$ aquesta ens dóna una successió exacta llarga de cohomologia, amb δ' l'homomorfisme de connexió,

$$\to H^m(X\times\mathbb{R}, X\times\mathbb{R}^-) \xrightarrow{k^*} H^m(X\times\mathbb{R}_0, X\times\mathbb{R}^-) \xrightarrow{\delta'} H^{m+1}(X\times\mathbb{R}, X\times\mathbb{R}_0) \xrightarrow{j^*} H^{m+1}(X\times\mathbb{R}, X\times\mathbb{R}^-) \to \tag{2.6.12}$$

Ara bé com que $X \times \mathbb{R}$ i $X \times \mathbb{R}^-$ tenen a $X \times \{-1\}$ com a retracte de deformació tenim que $H^j(X \times \mathbb{R}, X \times \mathbb{R}^-) = 0$ per tant δ té que ser un isomorfisme. Aleshores per a una a fixa, com que el producte *cup* és natural tenim el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
H^0\mathbb{R}^+ \arrow[d, "a\times"] & H^0(\mathbb{R}_0, \mathbb{R}^-) \arrow[l, "\eta"'] \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "a\times"] & H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0) \arrow[d, "a\times"] \\
H^m(X) \cong H^m(X \times \mathbb{R}^+) & H^m(X \times \mathbb{R}_0, X \times \mathbb{R}^-) \arrow[l, "i^*"'] \arrow[r, "\delta'"] & H^{m+1}(X \times \mathbb{R}, X \times \mathbb{R}_0)
\end{tikzcd} \tag{2.6.13}$$

aquest commuta llevat del signe[9], per la naturalitat del producte en creu. Per construcció $e = \delta\eta^{-1}1$, aleshores $a \times e = a \times \delta\eta^{-1}e$, per commutativitat del diagrama tenim que

$$a \times \delta\eta^{-1}1 = \pm\delta'(a \times (\eta^{-1}(1))) = \pm\delta'(i^*)^{-1}(a \times 1) = \delta'(i^*)^{-1}(\bullet \times 1)(a) \tag{2.6.14}$$

Pel lema 2.87 $\bullet \times 1$ és un isomorfisme, aleshores $a \times e$ és la composició d'isomorfismes i per tant és un isomorfisme. Això demostra el cas 1.
Cas 2. Suposem que A és no buit i $n = 1$. Siga $z \in Z^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0)$ el representant de e i ara considerem el diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^m(X, A) \arrow[r, "p^*"] \arrow[d, "\times z"] & C^m(X) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\times z"] & C^m(A) \arrow[r] \arrow[d, "\times z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{m+1}(X \times \mathbb{R}; X \times \mathbb{R}_0 \cup A \times \mathbb{R}) \arrow[r] & C^{m+1}(X \times \mathbb{R}, X \times \mathbb{R}_0) \arrow[r] & C^{m+1}(A \times \mathbb{R}, A \times \mathbb{R}_0) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{2.6.15}$$

És clar que la primera fila és exacta (vore exemple 2.11). Per a la segona ens adonem que si una cocadena anul·la les cadenes que prenen valors només en $X \times \mathbb{R}_0$ o $A \times \mathbb{R}$ en particular ho fan per al primer, per tant és injectiva la primera. Ara si una cocadena venia de la primera tenim que en $C^{m+1}(A \times \mathbb{R})$ i per tant està en el ker de la segona aplicació. Finalment la segona aplicació és sobrejectiva perquè tota cocadena de $X \times \mathbb{R}$ que s'anul·la

[9] Perquè la cohomologia amb el producte *cup* és un àlgebra anticommutativa.

en les cadenes que prenen valors només en $X \times \mathbb{R}_0$ també ho fa en $A \times \mathbb{R}_0$. Per tant la segona fila també és exacta.
A més com tots són aplicacions de cadenes commuten en la covora i $\delta(a \times z) = (\delta a) \times z$, per ser z cocicle. Aleshores aplicant la covora es dedueix el diagrama commutatiu de classes de cohomologia:

$$\begin{tikzcd}
... \arrow[r, "\delta"] & H^m(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\times e"] & H^m(X) \arrow[r] \arrow[d, "\times e"] & H^m(A) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\times e"] & ... \\
... \arrow[r, "\delta"] & H^{m+1}(X \times \mathbb{R}, X \times \mathbb{R}_0 \cup A \times \mathbb{R}) \arrow[r] & H^{m+1}(X \times \mathbb{R}, X \times \mathbb{R}_0) \arrow[r] & H^{m+1}(A \times \mathbb{R}, A \times \mathbb{R}_0) \arrow[r, "\delta"] & ...
\end{tikzcd} \tag{2.6.16}$$

Pel cas 1 tenim que les dos fletxes verticals de la dreta són isomorfismes, a l'esquerra n'hi han dos isomorfismes més que queden fora del dibuix però que són anàlegs, aleshores en tenim que podem aplicar el lema dels 5 i per tant $H^m(X,A) \cong H^{m+1}(X\times\mathbb{R}, A\times\mathbb{R}_0\cup A\times\mathbb{R})$. Per tant hem provat la tesi del teorema per a $n = 1$, per al cas general és prou aplicar l'associativitat del producte en creu:

$$a \times e^n = (a \times e^{n-1}) \times e \tag{2.6.17}$$

aleshores que $\times e^n$ és un isomorfisme ix per inducció ja que podem considerar el cas inicial com $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ i $\mathbb{R}^0_0 = \emptyset$. □

2.6.2 Teorema de l'isomorfisme de Thom

Després de més de 50 pàgines anunciant-lo per fi hem arribat al punt en que tenim la maquinària matemàtica per provar el teorema de l'isomorfisme de Thom l'ingredient principal per construir les classes de Stiefel-Whitney.

Notació. En tot el que queda de capítol $R = \mathbb{Z}/2$ i ometrem la referència aquest per als mòduls de cohomologia.

Siga ξ un $\mathbb{R}^n$-fibrat vectorial amb espai total E i base B, aquesta Hausdorff. Donat $b \in B$, denotem $(F_b)_0 := F_b \backslash \{0_{F_b}\}$ i $E_0 := \cup_{b\in B}(F_b)_0$, és a dir els vectors no nuls de cada fibra de E.
Per a tot $b \in B$ tenim la inclusió del parell $i_b : (F_b,(F_b)_0) \hookrightarrow (E,E_0)$ sabem que indueix un homomorfisme $i_b^* : H^n(E,E_0) \to H^n(F_b,(F_b)_0)$. Notem que per a $(F_b,(F_b)_0)$ com que un fibrat satisfà la condició de ser localment trivial serà homeomorf a $(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n_0)$ pel lema 2.65 i aplicant el teorema 2.47 tenim que:

$$H^n(F,F_0) \cong H^n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n_0) \cong \mathrm{Hom}(H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n_0);\mathbb{Z}/2) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2 \tag{2.6.18}$$

Per tant, $i_b^* : H^n(E,E_0) \to H^n(F_b,(F_b)_0) \cong \mathbb{Z}/2$.

Teorema 2.89 (Teorema de l'isomorfisme de Thom)**.** *Existeix una única classe de cohomologia $u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z}/2)$ tal que $i_b^*(u)$ és no nul·la per a $b \in B$, a més l'aplicació*

$$\begin{array}{ccc} H^j(E;\mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & H^{j+n}(E,E_0;\mathbb{Z}/2) \\ & & \\ y & \longmapsto & y \smile u \end{array} \tag{2.6.19}$$

és un isomorfisme per a tot $j \in \mathbb{Z}$, en particular $H^i(E, E_0) = 0$ per a tot $i < j$. A u li direm la ***classe fonamental de cohomologia****.*

Demostració. **Cas 1.** Suposem que ξ és un fibrat vectorial trivial. Aleshores, existeix un isomorfisme de fibrats de manera que $E \cong B \times \mathbb{R}^n$. Aleshores, la classe de cohomologia $H^n(E, E_0) \cong H^n(B \times \mathbb{R}^n, B \times \mathbb{R}^n_0)$, pel teorema 2.88 tenim l'isomorfisme

$$\begin{array}{ccc} H^j(B) & \longrightarrow & H^{j+n}(B \times \mathbb{R}^n, B \times \mathbb{R}^n_0) \\ a & \longmapsto & a \times e^n \end{array} \tag{2.6.20}$$

Siga $x \in H^n(E, E_0)$, com que l'anterior és un isomorfisme tenim que existeix un únic $s \in H^j(B)$ tal que $x = s \times e^n$. Ara volem que $i_b^*(s \times e^n) = 1$ per a cada $b \in B$, si z és el representant de s i ε el de e^n, necessitem que $z \times \varepsilon(\sigma|_b) = 1$, però per a això significa que tot n-símplex que tinga a b en la seua imatge:

$$(z \times \varepsilon)(\sigma) = z(p_1 \circ \sigma|_{(v_0,\dots,v_n)}) \cdot \varepsilon(p_2 \circ \sigma|_{(v_n)})) = 1 \tag{2.6.21}$$

per tant $z \times \varepsilon = 1$ per a tot n-símplex amb imatge en B i l'únic que satisfà aquesta condició és $z = 1$ ja que al estar treballant amb $\mathbb{Z}/2$ una cocadena diferent a 1 donarà 0 en algun símplex. Aleshores, $1 \in H^n(B)$ és l'únic que pot fer que eixe producte siga no nul sempre. Definim $u = 1 \times e^n$. Pel lema 2.87 tenim l'isomorfisme $H^j(B) \to H^j(B \times \mathbb{R}^n)$ donat per $y \mapsto y \times 1$. Aleshores, l'operació

$$y \times 1 \mapsto (y \times 1) \smile u = (y \times 1) \smile (1 \times e^n) = y \times e^n \tag{2.6.22}$$

defineix un isomorfisme per ser composició d'isomorfismes. Per tant queda provat el cas 1.
Cas 2. Suposem que B és la unió de dos oberts trivialitzants B' i B''. Aleshores, tenim que la tesi del teorema és certa per a $\xi|_{B'}$, $\xi|_{B''}$ i $\xi|_{B' \cap B''}$. Denotem $E^* = E' \cap E''$ i $E_0^* = E_0' \cap E_0''$. Per Mayer-Vietoris tenim la successió exacta llarga:

$$\dots \to H^{i-1}(E^*, E_0^*) \to H^i(E, E_0) \xrightarrow{k^i} H^i(E', E_0') \oplus H^i(E'', E_0') \xrightarrow{l^i} H^i(E^*, E_0^*) \to \dots \tag{2.6.23}$$

Pel cas anterior, tenim que $H^{n-1}(E^*, E_0^*) = 0$ per tant k^n és injectiva.
També pel cas anterior tenim que existeixen $u' \in H^n(E', E_0')$ i $u'' \in H^n(E'', E_0'')$ tal que la

restricció a cada fibra és no nul·la igual per a $u^* \in H^n(E^*, E^*_0)$. Aleshores si considerem:

$$\begin{tikzcd}
H^n(E', E'_0) \arrow[dr] \arrow[ddr] & & H^n(E'', E''_0) \arrow[dl] \arrow[ddl] \\
& H^n(E^*, E^*_0) \arrow[d] & \\
& H^n(F_b, (F_b)_0) &
\end{tikzcd} \tag{2.6.24}$$

on les fletxes són les induïdes per les inclusions, les classes fonamentals seran no nul·les baix i per tant per unicitat tenim que $i^*(u') = i^*(u'') = u^*$, aleshores $(u', u'') \overset{l^i}{\mapsto} 0$[10], per exactitud de 2.6.23 estan en la imatge de k^n i venen de la mateixa classe de cohomologia $u \in H^n(E, E_0)$, per injectivitat de k^n està unívocament determinada.
Ara considerem la successió de Mayer-Vietoris:

$$... \to H^{j-1}(E^*) \to H^j(E) \to H^j(E') \oplus H^j(E'') \to H^j(E^*) \to ... \tag{2.6.25}$$

on $j + n = i$. Per la naturalitat del producte *cup* obtenim el diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
H^j(E^*) \arrow[r] \arrow[d, "(\smile u, \smile u)"] & H^j(E') \oplus H^{j+1}(E'') \arrow[r] \arrow[d, "\smile u"] & H^j(E) \arrow[r] \arrow[d, "\smile u"] & H^j(E') \oplus H^{j+1}(E'') \arrow[r] \arrow[d, "(\smile u, \smile u)"] & H^{j+1}(E^*) \arrow[d, "\smile u"] \\
H^i(E^*, E^*_0) \arrow[r] & H^i(E', E'_0) \oplus H^i(E'', E'_0) \arrow[r] & H^i(E, E_0) \arrow[r] & H^{i+1}(E', E'_0) \oplus H^{i+1}(E'', E'_0) \arrow[r] & H^{i+1}(E^*, E^*_0)
\end{tikzcd} \tag{2.6.26}$$

Pel cas anterior tenim que totes les columnes excepte la del centre són isomorfismes, aleshores pel lema dels cinc tenim que $H^j(E) \overset{\smile u}{\to} H^{j+n}(E, E_0)$ és un isomorfisme. Per tant hem provat el cas 2.
Cas 3. Siga B tal que està recobert per un nombre finit d'oberts trivialitzants $B_1, ..., B_k$. Raonem per inducció, per a $k = 1$ ja hem demostrat que el teorema és cert, aleshores per hipòtesi d'inducció és cert per a $\xi|_{B_1 \cup ... \cup B_{k-1}}$ i per a $\xi|_{(B_1 \cup ... \cup B_{k-1}) \cap B_k}$, aplicant el cas 2 tenim que és cer per a ξ.
Cas general. Siga C un obert compacte de B, aleshores per a qualsevol recobriment d'oberts trivialitzants podem extraure un finit i pel cas 3 tenim que el teorema és cert per a $\xi|_C$. Al considerar el conjunt dirigit dels subespais compactes de B amb les inclusions i el diagrama que porta cada subespai a l'homologia i les inclusions a les induïdes per cohomologia, pel lema 2.58 obtenim que $H^j(B) \cong \varprojlim H^j(C)$.
Ara si considerem E, una cadena singular tindrà la seua imatge en algun compacte D, com que π és contínua $C = \pi(D)$ és compacte, aleshores la imatge de la cadena està continguda en $\pi^{-1}(C)$, per tant estem en les condicions esmentades de la nota 2.59 i per tant podem

[10] Aquesta aplicació de la successió de Mayer-Vietoris du el parell a la diferència de les restriccions, en aquest cas venen donades per les inclusions induïdes, i per això és 0, comparar amb [Hat01, pg. 202]

aplicar el lema 2.58 obtenint:

$$H^n(E, E_0) \cong \lim_{\leftarrow} H^n(\pi^{-1}(C), \pi^{-1}(C)_0) \tag{2.6.27}$$

Cada $H^n(\pi^{-1}(C), \pi^{-1}(C)_0)$ conté una única classe de cohomologia u_C tal que la restricció a cada fibra és no nul·la. Per tant, existeix un única classe de cohomologia $u \in H^n(E, E_0)$ tal que la restricció a cada fibra és no nul·la, ja que si n'hi han dos diferents les dos coincideixen en tots els C i existeix per ser la classe de cohomologia global de les anteriors mitjançant el límit invers.
Considerem l'homomorfisme $(\smile u) : H^i(E) \to H^j(E_0, E_0)$, aleshores per a cada $C \subseteq B$ compacte tenim el diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd} H^j(E) \arrow[r, "\smile u"] \arrow[d] & H^{j+n}(E, E_0) \arrow[d] \\ H^j(\pi^{-1}(C)) \arrow[r, "\smile u_C"] & H^{j+n}(\pi^{-1}(C), \pi^{-1}(C)_0) \end{tikzcd} \tag{2.6.28}$$

Si ara apliquem el límit invers, per la proposició C.29 com que $H^j(E)$ i $H^{j+n}(E, E_0)$ són límits, obtenim que $\smile u$ també és un isomorfisme, això completa la prova. □

2.6.3 Operacions de Quadrats de Steenrod

El que queda de capítol l'anem a dedicar a descriure unes de les operacions de cohomologia. Només amb la caracterització poden semblar un poc obscures per això hem examinat un exemple que ens ajuda a vore millor la seua acció. Per a més informació sobre operacions de cohomologia vore [MT68, Capítol 2] i [FF16, Capítol 4].

Definició 2.90. *Les* ***operacions de quadrats de Steenrod*** *es poden caracteritzar de la següent manera:*

1. *Per a dos espais topològics $Y \subset X$ i per a cada $i, n \in \mathbb{N}$ és un* ***homomorfisme additiu****:*
$$Sq^i : H^n(X, Y) \to H^{n+i}(X, Y) \tag{2.6.29}$$
2. *Si $f : (X, Y) \to (X', Y')$ aleshores $Sq^i \circ f^* = f^* \circ Sq^i$.*
3. *Si $a \in H^n(X, Y)$, aleshores $Sq^0(a) = a$, $Sq^n(a) = a \smile a$, i $Sq^i(a) = 0$ per a tot $i > n$.*
4. *La* ***fórmula de Cartan****, si $a \smile b$ està definit aleshores,*
$$Sq^k(a \smile b) = \sum_{i+j=k} Sq^i(a) \smile Sq^j(b) \tag{2.6.30}$$

Es pot vore a [FF16, pp. 395-400] que a partir de les propietats (1) i (3) es demostra l'existència i unicitat de les operacions de quadrats de Steenrod i que la propietat (4) es pot demostrat com a teorema. Per a la propietat (2) vore [MT68, Capítol 2, Teorema 4]. Per una qüestió de notació definim l'**operació de quadrat de Steenrod total** com:

$$Sq(a) = a + Sq^1(a) + Sq^2(a) + ... + Sq^n(a), \quad a \in H^n(X, Y) \tag{2.6.31}$$

Amb aquesta notació la fórmula de Cartan queda com:

$$Sq(a \smile b) = Sq(a) \smile Sq(b) \tag{2.6.32}$$

Recordem que el producte en creu és el producte $\smile$ de les classes induïdes per les projeccions aleshores:

$$Sq(a \times b) = Sq(a) \times Sq(b) \tag{2.6.33}$$

Ara ja tenim el necessari per demostrar l'existència de les classes de Stiefel-Whitney. Però abans anem a vore com actuen les operacions de quadrats de Steenrod.

Exemple 2.91. Considerem $\mathbb{R}P^\infty$ aquesta ja sabem quina cohomologia té $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[a]$ on $a \in H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2)$, el generador de l'anell. Per la propietat 3. tenim:

$$Sq^0(a) = a, \quad Sq^1(a) = a^2, \quad Sq^j a = 0, \, \forall j > 1 \tag{2.6.34}$$

Gastant la fórmula de Cartan podem computar $Sq(a^n)$. Aplicant la fórmula 2.6.32

$$Sq(a^n) = Sq(a)^n = \left(\sum_{i=0}^{\infty} Sq^i(a) \right)^n = (a + a \smile a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+k} \tag{2.6.35}$$

En particular per la propietat 1 tenim que $Sq^k(a^n)$ serà el terme de grau $n + k$ i per tant:

$$Sq^k(a^n) = \binom{n}{k} a^{n+k}, \quad \text{si } k \leq n, \; 0 \text{ en altre cas} \tag{2.6.36}$$

Com que estem treballant amb $\mathbb{Z}/2$ notem que molts d'aquestos termes seran 0.

Notem a més que al ser γ^1, el fibrat tautològic sobre un fibrat universal per als $\mathbb{R}$-fibrats sobre una base paracompacta i Hausdorff, donat $\xi \in Ob(ParaBundle_{\mathbb{R}})$, tenim $f_\xi : \xi \to \gamma^1$ transformació de fibrats que indueix un monomorfisme $\overline{f}_\xi^* : H^*(B(\xi); \mathbb{Z}/2) \to H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2)$, al ser monomorfisme té inversa per l'esquerra g_ξ^*, per tant aplicant la propietat 2:

$$Sq(u) = g_\xi^* \circ \overline{f}_\xi^* \circ Sq(u) = g_\xi^* \circ Sq(\overline{f}_\xi^*(u)) \tag{2.6.37}$$

$Sq(\overline{f}_\xi^*(u)) \in H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2)$ per tant sabem com computar-lo, aleshores sabem com funcionen les operacions de quadrats de Steenrod sobre les classes de cohomologia de dimensió 1 (comparar amb [Mal12]). Notem que tenim encara més informació perquè la propietat 2 ens permet conèixer que passa en la cohomologia relativa.

Capítol 3

Classes de Stiefel-Whitney

Aquest capítol té com a objectiu aplicar tot el que hem estat desenvolupant en els capítols anteriors, primerament enunciarem els axiomes de les classes de Stiefel-Whitney, després a partir de les operacions de quadrats de Steenrod i l'isomorfisme de Thom definirem unes classes de cohomologia i vorem que satisfan aquesta axiomàtica. Amb això calcularem l'àlgebra de cohomologia del Grassmannià i amb això últim provarem la unicitat de les classes de Stiefel-Whitney. Aplicant que el Grassmannià és un fibrat universal definirem les classes de Stiefel-Whitney com a classes característiques. Finalment, vorem aplicacions a partir dels axiomes ja que estarà comprovada l'existència de classes de cohomologia que els satisfan. Per a aquest capítol hem gastat com a referència principal [MS74, Capítols 4,7,8,10].

Notació. En tot el capítol tenim que la cohomologia i homologia és sempre amb coeficients en $\mathbb{Z}/2$.

3.1 Axiomes i existència de les classes de Stiefel-Whitney

Axioma 1. A cada fibrat vectorial ξ li correspon una successió de classes de cohomologia, $\{w_i(\xi)\}_{i=0}^{\infty}$:

$$w_i(\xi) \in H^i(B(\xi), \mathbb{Z}/2), \quad i \in \mathbb{N} \tag{3.1.1}$$

a aquesta successió li direm la **classe Stiefel-Whitney** de ξ. A més $w_0(\xi) = 1$ on 1 denota la identitat de $H^0((B(\xi), \mathbb{Z}/2))$ i $w_i(\xi) = 0$ $\forall i > n$ si ξ és un fibrat de dimensió n.

Notació. Definim la **classe total de Whitney** com

$$w(\xi) = w_0(\xi) + w_1(\xi) + ... + w_n(\xi) \tag{3.1.2}$$

Axioma 2. Naturalitat. Si $f : B(\xi) \to B(\eta)$ indueix una transformació de fibrats de ξ a η aleshores,

$$w_i(\xi) = f^* w_i(\eta), \quad \forall i \in \mathbb{N} \tag{3.1.3}$$

Axioma 3. El teorema del producte Whitney. Si ξ i η són dos fibrats sobre la mateixa base B, aleshores

$$w_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^{k} w_i(\xi) \smile w_{k-i}(\xi) \tag{3.1.4}$$

Definim la classe total de Stiefel-Whitney com $w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + ... + w_n(\xi) + 0 + ... \in H^*(B(\xi), \mathbb{Z}/2)$, d'aquesta manera l'axioma 3 queda com:

$$w(\xi \oplus \eta) = w(\xi) \smile w(\eta) \tag{3.1.5}$$

Notació. En aquest capítol en general ometrem el signe del producte *cup* s'assumeix que el producte de classes de cohomologia és sempre mitjançant aquest.

Axioma 4. Per al **fibrat tautològic** γ_1^1 sobre P^1, la classe Stiefel-Whitney $w_1(\gamma_1^1)$ és no nul·la.

3.1.1 Existència de les classes de Stiefel Whitney

Recordem que el capítol anterior hem demostrat el teorema 2.89 que ens diu que per a cada $\mathbb{R}^n$-fibrat vectorial ξ sobre una base Hausdorff existeix una única classe de cohomologia $u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z}/2)$ tal que la restricció a cada fibra és no nul·la i $y \mapsto y \smile u$ és un isomorfisme entre $H^j(E)$ i $H^{j+n}(E, E_0)$.

Definició 3.1. *Definim l'**isomorfisme de Thom** $\phi : H^k(B) \to H^{k+n}(E, E_0)$ com la composició de*

$$H^k(B) \xrightarrow{\pi^*} H^k(E) \xrightarrow{\smile u} H^{k+n}(E, E_0). \tag{3.1.6}$$

Per justificar que això és un isomorfisme només hem de vore que π^* és un isomorfisme. Com que $E \backslash E_0$, la secció nul·la, és retracte de deformació de E tenim que $H^k(E) \cong H^k(E \backslash E_0)$ mitjançant la inclusió. A més, $\pi|_{E \backslash E_0} : E \backslash E_0 \to B$ és un homeomorfisme, per tant, $\pi^* : H^k(B) \to H^k(E)$ és un isomorfisme.

Per altra banda recordem que hem definit les operacions de quadrats de Steenrod a partir de les següents propietats.

1. Per a dos espais topològics $Y \subset X$ i per a cada $i, n \in \mathbb{N}$ és un homomorfisme additiu:

$$Sq^i : H^n(X, Y) \to H^{n+i}(X, Y) \tag{3.1.7}$$

2. Si $f : (X, Y) \to (X', Y')$ aleshores $Sq^i \circ f^* = f^* \circ Sq^i$.

3. Si $a \in H^n(X, Y)$, aleshores $Sq^0(a) = a$, $Sq^n(a) = a \smile a$, i $Sq^i(a) = 0$ per a tot $i > n$.

4. La fórmula de Cartan, si $a \smile b$ està definit aleshores,

$$Sq(a \smile b) = Sq(a) \smile Sq(b) \tag{3.1.8}$$

Això és gastant la notació de l'operació de quadrat de Steenrod total:

$$Sq(a) = a + Sq^1(a) + Sq^2(a) + ... + Sq^n(a), \quad a \in H^n(X, Y) \tag{3.1.9}$$

Definició 3.2. *Siga ξ un $\mathbb{R}^n$-fibrat, definim la* ***classe de Stiefel-Whitney*** *a partir de*

$$w_k(\xi) = \phi^{-1} Sq^k(u), \quad k \in \mathbb{N} \tag{3.1.10}$$

On $u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z}/2)$ és la classe fonamental de cohomologia que obtenim pel teorema de l'isomorfisme de Thom, ϕ l'isomorfisme de Thom i Sq^k l'operació de quadrat de Steenrod.

Teorema 3.3. *La classe de Stiefel-Whitney $w(\xi)$ satisfà els axiomes de les classes de Stiefel-Whitney.*

Demostració. **Axioma 1**. Per la condició (1) de les operacions de Steenrod tenim que $Sq^i(u) \in H^{n+i}(E, E_0; \mathbb{Z}/2)$ i $w_i(\xi) = \phi^{-1}(Sq(u)) \in H^i(B; \mathbb{Z}/2)$. A més

$$w_0(\xi) = \phi^{-1}(Sq^0(u)) = \phi^{-1}(u) = (\pi^*)^{-1}(1_{H^k(E)}) = 1_{H^k(B)} \tag{3.1.11}$$

i $w_k(\xi) = \phi^{-1}(Sq^k(u)) = \phi^{-1}(0) = 0$ per a tot $k > n$.
Axioma 2. Siga $f : \xi \to \eta$ una transformació entre $\mathbb{R}^n$-fibrats vectorials, aleshores indueix una funció $g : (E, E_0) \to (E', E'_0)$. Siguen $u' \in H^n(E', E'_0)$ i $u \in H^n(E, E_0)$ les classes de cohomologia fonamentals. Aleshores,

$$g^* : H^*(E', E'_0) \to H^*(E, E_0) \tag{3.1.12}$$

és homomorfisme d'anells i per tant $g^*(u') = u$. Donat $a \in H^k(B')$, recordem que tenim el diagrama commutatiu:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ B & \xrightarrow{\overline{f}} & B' \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccc} (E, E_0) & \xrightarrow{g} & (E', E'_0) \\ {\scriptstyle \pi,\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi',\pi'} \\ B \times B & \xrightarrow{\overline{f},\overline{f}} & B' \times B' \end{array} \tag{3.1.13}$$

aleshores deduïm que $\pi^* \circ \overline{f}^* = g^* \circ (\pi')^*$

$$\begin{aligned}(g^* \circ \phi')(a) = g^*([(\pi')^*(a)] \smile u') = g^*[(\pi')^*(a)] \smile g^*(u') = g^*[(\pi')^*(a)] \smile u = \\ \pi^*(\overline{f}^*(a)) \smile u = \phi(\overline{f}^*(a)) = (\phi \circ \overline{f}^*)(a)\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

per tant tenim que $g^* \circ \phi' = \phi \circ \overline{f}^*$. Aleshores,

$$w(\xi) = \phi^{-1} Sq(u) = \phi^{-1}[Sq(g^*(u'))] = \phi^{-1} \circ g^* \circ Sq(u') = \overline{f}^* \circ (\phi')^{-1} Sq(u') = \overline{f}^* w(\eta) \tag{3.1.15}$$

Axioma 3. Calculem la classe de Stiefel-Whitney del producte cartesià $\eta = \xi \times \xi'$ que té com a projecció $\pi \times \pi' : E \times E' \to B \times B'$. Siguen $u \in H^m(E, E_0)$ i $u' \in H^n(E', E_0')$ les classes de cohomologia fonamentals de ξ i ξ' respectivament.
Al ser E_0 i E_0' oberts en E i E' respectivament, ja que la secció nul·la és un tancat, podem definir el producte en creu:

$$u \times u' \in H^{m+n}[E \times E', (E \times E_0') \cup (E_0 \times E')] \tag{3.1.16}$$

Ens adonem que $(E \times E_0') \cup (E_0 \times E')$ és un subconjunt obert de $E(\eta) = E \times E'$ que és precisament el conjunt de vectors no nuls $E_0(\eta)$. Anem a vore que $u \times u' \in H^{m+n}(E(\eta), E_0(\eta))$ és la classe de cohomologia fonamental. Com per a tot $b \in B$ les fibres són de la forma $F_b(\eta) = F_b \times F_b'$, és prou comprovar que la restricció de la classe fonamental de cohomologia a la fibra $u \times u'|_{(F_b(\eta),(F_b)_0(\eta)}$ és no nul·la en $H^{m+n}(F_b(\eta), (F_b)_0(\eta))$, ara bé per la fórmula de Künneth 2.86 tenim

$$u \times u'|_{(F_b(\eta),(F_b)_0(\eta))} = u|_{(F_b,(F_b)_0)} \times u'|_{((F_b)',(F_b)_0')} \tag{3.1.17}$$

Per comprovar que aquest producte és no nul només cal vore que si triem representants per a cada cadena no és nul però al ser classes fonamentals de cohomologia no són nul·les per a cap cadena aleshores al considerar el producte resultant del *cup* ens queda que són no nuls. Per tant $u \times u'$ és la classe fonamental de cohomologia.
Per tant, si considerem els isomorfismes de Thom respectius:

$$\begin{aligned}\phi_\eta(a \times b) = ((\pi^* \times (\pi')^*)(a \times b)) \smile (u \times u') = (\pi^*(a) \times (\pi')^*(b)) \smile (u \times u') = \\ (\pi^*(a) \smile u) \times ((\pi')^*(a) \smile u') = \phi(a) \times \phi'(b)\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

La tercera igualtat es justifica de la següent manera si $\overline{a} := \pi^*(a) \in H^j(E)$ i $\overline{b} = (\pi')^*(b) \in H^l(E')$:

$$\begin{aligned}(\overline{a} \times \overline{b}) \smile (u \times u') = p_1^*(\overline{a}) \smile p_2^*(\overline{b}) \smile p_3^*(u) \smile p_4^*(u') = \\ = (-1)^{lj} p_1^*(\overline{a}) \smile p_3^*(u) \smile p_2^*(\overline{b}) \smile p_4^*(u') \underset{-1=1 \; mod \; 2}{=} \\ = p_3^*(\overline{a} \smile u) \smile p_4^*(\overline{b} \smile u') = (\overline{a} \smile u) \times (\overline{b} \smile u')\end{aligned} \tag{3.1.19}$$

on les aplicacions p_i són les projeccions del producte en creu, $p_1 : E \times E' \to E$, $p_2 : E \times E' \to E'$, $p_3 : (E \times E', E_0 \times E_0') \to (E, E_0)$ i $p_4 : (E \times E', E_0 \times E_0') \to (E, E_0)$.
Aleshores tenim:

$$\phi_\eta(w(\eta)) = Sq(u \times u') = Sq(u) \times Sq(u') = \phi(w(\xi)) \times \phi'(\xi') = \phi_\eta(w(\xi) \times w(\xi')) \tag{3.1.20}$$

Per tant si apliquem ϕ_η^{-1} al dos costats obtenim la classe de Stiefel-Whitney:

$$w(\eta) = w(\xi \times \xi') = w(\xi) \times w(\xi') \tag{3.1.21}$$

Ara bé si ξ i ξ' foren fibrats sobre la mateixa base, podríem considerar aplicar l'encaix diagonal $d : B \to B \times B$ als dos costats i sent $p_i : B \times B \to B$ la projecció sobre la component $i = 1, 2$, obtenim:

$$\begin{aligned} d^*(w(\xi \times \xi')) &= w(d^*(\xi \times \xi')) = w(\xi \oplus \xi') = d^*(w(\xi) \times w(\xi')) = \\ &= d^*(p_1^*(w(\xi)) \smile p_2^*(w(\xi'))) = (d^* \circ p_1^*)(w(\xi)) \smile (d^* \circ p_2^*)(w(\xi')) = w(\xi) \smile w(\xi') \end{aligned} \tag{3.1.22}$$

on $d^* : H^*(X \times X) \to H^*(X)$ i $p_i^* : H^*(X) \to H^*(X \times X)$. Per tant hem deduït:

$$w(\xi \oplus \xi') = w(\xi) \smile w(\xi') \tag{3.1.23}$$

Axioma 4. Siga γ_1^1 el fibrat tautològic sobre $\mathbb{R}P^1$. Considerem

$$S := \{(\{\pm x\}, y) \in E(\gamma_1^1)/|y| \leq 1\} \subset E(\gamma_1^1) \tag{3.1.24}$$

Vegem que S és homeomorfa a una banda de Möbius M, la demostració és la següent. Considerem el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & {[-1,1]^2} \arrow[dl, "\pi\circ\alpha"'] \arrow[dr, "p"] & \\ S \arrow[rr, shift left, "h"] & & M \arrow[ll, shift left, "h^{-1}"] \end{tikzcd} \tag{3.1.25}$$

on $p : [-1, 1]^2 \to M$ representa la projecció sobre l'espai quocient de la banda de Möbius; $\alpha(x, \lambda) = (e^{i\pi x}, \lambda e^{2\pi i x})$ i $\pi : S^1 \times D^1 \to S$ que projecta $\pi([e^{i\pi x}], \lambda e^{2\pi i x})$ on $[e^{i\pi x}]$ ve donada per la relació d'equivalència $e^{i\pi x} \sim e^{i\pi y}$ sii $x = y + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
És clar que $\pi \circ \alpha$ és compatible amb la relació d'equivalència que defineix M, aleshores existeix una única aplicació $h : M \to S$ definida com $h([x, \lambda]) = \pi \circ \alpha(x, \lambda)$ a més com que una és contínua h és contínua, clarament és bijectiva i com M és un compacte i S és Hausdorff tenim que h és un homeomorfisme amb inversa $\varphi := h^{-1}$.
Això demostra que $S \cong M$. Es pot vore clarament que $ad(E_0 \cap S) \subset int(E_0)$. Això és perquè E_0 és obert i $fr(S^C) = \{(\{\pm x\}, y) \in E(\gamma_1^1)/|y| = 1\}$, on S^C és el complementari de S en E. Per tant aplicant el teorema d'escisió:

$$H^*(S, E_0 \cap S) = H^*(E \backslash S^C, E_0 \backslash S^C) \cong H^*(E, E_0) \tag{3.1.26}$$

Siga $\tilde{M} = fr(M)$ tenim el següent diagrama:

$$\begin{tikzcd} \tilde{M} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h|_{\tilde{M}}"'] & M \arrow[d, "h"] \\ E_0 \cap S \arrow[r, "j"] & S \end{tikzcd} \tag{3.1.27}$$

On i, j són les inclusions corresponents. La cohomologia relativa ens indueix les successions exactes llargues i amb les aplicacions anteriors ens queda el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
H^{n-1}(M) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "h^*"] & H^{n-1}(\tilde{M}) \arrow[r, "\Delta^*"] \arrow[d, "h|^*_{\tilde{M}}"] & H^n(M, \tilde{M}) \arrow[r, "p^*"] \arrow[d, "k^*"] & H^n(M) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "h^*"] & H^n(\tilde{M}) \arrow[d, "h|^*_{\tilde{M}}"] \\
H^{n-1}(S) \arrow[r, "j^*"] & H^{n-1}(E_0 \cap S) \arrow[r, "(\Delta')^*"] & H^n(S, E_0 \cap S) \arrow[r, "q^*"] & H^n(S) \arrow[r, "j^*"] & H_n(E_0 \cap S)
\end{tikzcd} \tag{3.1.28}$$

si k^* és l'homomorfisme induït per l'aplicació per la projecció de h sobre els quocient. Veiem que $\tilde{M}$ és retracte de deformació de $h^{-1}(E_0 \cap S) = [-1,1] \times ([-1,1] \backslash \{0\}) / \sim$ considerem:

$$\begin{array}{rccc} F\colon & [-1,1] \times ([-1,1]\backslash\{0\}) \times [0,1] & \longrightarrow & [-1,1]^2 \\ & (x, \lambda, t) & \longmapsto & \left(x, \lambda(1-t) + \frac{\lambda}{|\lambda|} t\right) \end{array} \tag{3.1.29}$$

F és contínua i compatible amb la relació d'equivalència aleshores $\overline{F} : h^{-1}(E_0 \cap S) \to M$ és contínua i a més $F_0 = id_M$, $F_1([x, \lambda]) \in \tilde{M}$ i $F_1|_{\tilde{M}} = id_{\tilde{M}}$ per tant és retracte de deformació aleshores $h|^*_{\tilde{M}}$ és un isomorfisme. Doncs, aplicant el lema dels 5 al diagrama d'abans obtenim que k^* és un isomorfisme i per tant:

$$H^*(M, \tilde{M}) \cong H^*(S, E_0 \cap S) \cong H^*(E, E_0) \tag{3.1.30}$$

Ara considerem D^2 i l'encaixem en $\mathbb{R}P^2$, anem a vore que $\mathbb{R}P^2 \backslash D^2 \cong M$. La figura 3.1 mostra que són homeomorfs, aleshores deduïm

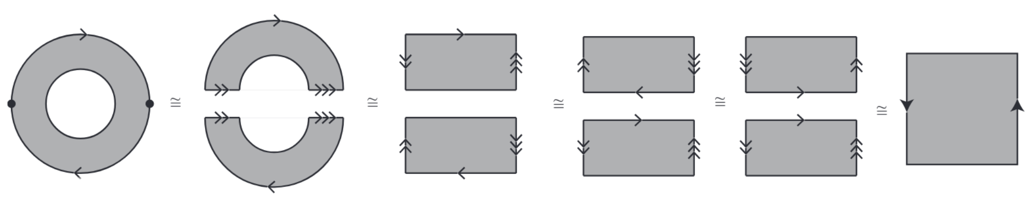

Figura 3.1: Esquema d'homeomorfisme entre $\mathbb{R}P^2 \backslash D^2$ i una banda de Möbius [DL18].

$$H^*(E, E_0) \cong H^*(M, \tilde{M}) \cong H^*(\mathbb{R}P^2 \backslash D^2, \overline{D^2} \backslash D^2) \cong H^*(\mathbb{R}P^2, D^2) \tag{3.1.31}$$

L'últim isomorfisme és conseqüència del teorema d'excisió. Ara bé, és trivial que un punt és retracte de deformació de D^2 aleshores raonant com abans $H^*(\mathbb{R}P^2, D^2) \cong H^*(\mathbb{R}P^2, \pm P_N)$

on P_N és el pol nord, a més sabem que el punt és una 0 cadena i per tant no afecta als grups de cohomologia més enllà de $i = 0$, per tant si $i \neq 0$

$$H^i(E, E_0) \cong H^*(\mathbb{R}P^2, D^2) \cong H^i(\mathbb{R}P^2) \tag{3.1.32}$$

Pel teorema 2.89 sabem que la classe fonamental $u \in H^1(E, E_0)$ és no nul·la, per l'isomorfia tenim que existirà $a \in H^1(P^2)$ que genere el grup. Aleshores $Sq^1(u) = u \smile u$ serà isomorf a $Sq(a) = a \smile a \neq 0$ perquè la cohomologia del pla projectiu l'hem computat en 2.85 i és $H^*(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}/2[a]/(a^3)$, per tant:

$$w_1(\gamma_1^1) = \phi^{-1} Sq^1(u) \tag{3.1.33}$$

és no nul. Això termina la demostració. □

3.2 Cohomologia del Grassmannià $H^*(G(n,k), \mathbb{Z}/2)$

Ara que hem demostrat l'existència de les classes de Stiefel-Whitney, ens poden ajudar a computar la cohomologia del Grassmannià amb això, demostrarem que les classes de Stiefel-Whitney són úniques i ja en la següent secció passarem a definir les classes característiques. Abans de procedir amb la demostració necessitem una definició i un lema tècnic d'àlgebra.

Definició 3.4. *Siga $(R, +, \cdot)$ un anell commutatiu i $x_1, ..., x_n$ elements algebraicament independents sobre R. Siga x una variable sobre $R[x_1, ..., x_n]$, considerem el polinomi:*

$$f(x) = (x - x_1)...(x - x_n) = x^n - s_1 x^{n-1} + ... + (-1)^n s_n \tag{3.2.1}$$

on

$$s_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad s_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j, \quad ... \quad s_n = \prod_{i=1}^{n} x_i \tag{3.2.2}$$

Als polinomis $s_1, ..., s_n$ els anomenarem com ***polinomis elementals simètrics****.*

Lema 3.5. *Els polinomis elementals simètrics $s_1, ..., s_n$ són algebraicament independents sobre R.*

Per a la demostració ens referirem a [Lan02, pp. 190-192].

Lema 3.6. *Les classes de Stiefel-Whitney del fibrat tautològic γ^n sobre G_n, $w_1(\gamma^n), ..., w_n(\gamma^n)$, són algebraicament independents en $\mathbb{Z}/2[w_1(\gamma^n), ..., w_n(\gamma^n)]$.*

Demostració. Raonem per reducció a l'absurd, suposem que existeix p polinomi tal que $p(w_1(\gamma^n), ..., w_n(\gamma^n)) = 0$. Pel teorema 1.53 per a cada $\xi \in Ob(ParaBundle_{\mathbb{R}^n})$ existeix $g : \xi \to \gamma^n$ transformació de fibrats.

Aleshores per l'axioma 2, si $\overline{g}$ és el map induït per g sobre les bases:

$$w_i(\xi) = \overline{g}^*(w_i(\gamma^n)) \tag{3.2.3}$$

per tant

$$p(w_1(\xi), ..., w_n(\xi)) = p(\overline{g}^*(w_1(\gamma^n)), ..., \overline{g}^*(w_n(\gamma^n))) = 0 \tag{3.2.4}$$

Com a conseqüència per a provar el lema és prou trobar $\xi \in Ob(ParaBundle_{\mathbb{R}^n})$ tal que no existeix cap p polinomi de n variables sobre $\mathbb{Z}/2$ que satisfà $p(w_1(\xi), ..., w_n(\xi)) = 0$.
Considerem γ^1 el fibrat tautològic sobre $\mathbb{R}P^\infty$, pel teorema 2.85 tenim que $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2)$, és l'àlgebra $\mathbb{Z}/2[a]$ on a és la classe no nul·la de $H^1(\mathbb{R}P^\infty)$. Si ara considerem el producte cartesià $X = \mathbb{R}P^\infty \times ... \times \mathbb{R}P^\infty$ pel teorema 2.86 tenim que

$$H^*(X; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[a_1] \otimes ... \otimes \mathbb{Z}/2[a_n] = \mathbb{Z}/2[a_1, ..., a_n] \tag{3.2.5}$$

on a_i són els generadors de dimensió 1, $i = 1, ..., n$ (vore [Hat01, Exemple 3.16]). On $a_i = \pi_i^*(a)$ amb $\pi_i : X \to \mathbb{R}P^\infty$ la projecció. Pel corol·lari 1.34 tenim:

$$\xi := \gamma^1 \times ... \times \gamma^1 \cong (\pi_1^* \gamma^1) \oplus ... \oplus (\pi_n^* \gamma^1) \tag{3.2.6}$$

on ξ és un $\mathbb{R}^n$ fibrat sobre X aplicant els axiomes 2 i 3:

$$w(\xi) = \pi_1^*(w(\gamma^1)) \smile ... \smile \pi_n^*(w(\gamma^1)) = (1 + a_1) \smile ... \smile (1 + a_n) \tag{3.2.7}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} w_1(\xi) = &\quad a_1 + a_2 + ... + a_n \\ w_2(\xi) = &\quad a_1 \smile a_2 + a_1 \smile a_3 + ... + a_1 \smile a_n + ... + a_{n-1} \smile a_n \\ \vdots \quad = &\quad \vdots \\ w_n(\xi) = &\quad a_1 \smile a_2 \smile ... \smile a_n \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Aquestos són els polinomis elementals simètrics, i per tant pel lema 3.5 tenim que $w_1(\xi), ..., w_n(\xi)$ són algebraicament independents en $\mathbb{Z}/2$, QED. □

Teorema 3.7. *L'anell de cohomologia $H^*(G_n; \mathbb{Z}/2)$ és l'àlgebra $\mathbb{Z}/2[w_1(\gamma^n), ..., w_n(\gamma^n)]$*

Demostració. Pel lema tenim que $H^*(G_n; \mathbb{Z}/2)$ conté una subàlgebra $\mathbb{Z}/2[w_1(\gamma^n), w_2(\gamma^n), ..., w_n(\gamma^n)]$. Recordem que $p_n(j)$ és el nombre de particions de j amb n enters com a màxim. Per la proposició 2.84 tenim que $H^j(G_n; \mathbb{Z}/2) \cong \oplus_{i=1}^{p_n(j)} \mathbb{Z}/2$, és a dir és un $\mathbb{Z}/2$-mòdul lliure amb $p_n(j)$ generadors. Per altra banda, contem el nombre de monomis de la forma $w_1(\gamma^n)^{i_1} \smile ... \smile w_n(\gamma^n)^{i_n} \in H^j(G_n; \mathbb{Z}/2)$. Al ser de dimensió j, una partició $i_1, ..., i_n$ haurà de complir:

$$i_1 + 2i_2 + 3i_3 + ... + ni_n = j \tag{3.2.9}$$

aleshores a cada partició d'aquesta forma li podem associar la partició de j definida a partir de $(i_n), (i_n + i_{n-1}), (i_n + i_{n-1} + i_{n-2}), ..., (i_n + i_{n-1} + ... + i_1)$, llevat dels 0s que apareguen. Estos monomis, pel lema anterior sabem que són algebraicament independents en $\mod 2$ i per tant el $rang(H^j(G_n, \mathbb{Z}/2))$ és major que $p_n(j)$, però hem dit abans que té exactament eixe nombre de generadors. Per tant, $H^j(G_n, \mathbb{Z}/2)$ és l'anell generat pels monomis $w_1(\gamma^n)^{i_1} \smile ... \smile w_n(\gamma^n)^{i_n}$ tal que $i_1 + 2i_2 + ... + ni_n = j$.
Per tant, si considerem el $\mathbb{Z}/2$-mòdul graduat:

$$H^*(G_n; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[w_1(\gamma^n), ..., w_n(\gamma^n)] \tag{3.2.10}$$

□

Definició 3.8. *Siga $\sigma \in \Sigma_n$ una permutació, R un anell commutatiu i un polinomi $p(t) \in R[t_1, ..., t_n]$, on $t_1, ..., t_n$ algebraicament independents, definim:*

$$\sigma p(t_1, ..., t_n) = p(t_{\sigma(1)}, ..., t_{\sigma(n)}) \tag{3.2.11}$$

Direm que p és simètric si $\sigma p = p$ per a tot $\sigma \in \Sigma_n$.

Corol·lari 3.9. *L'homomorfisme natural $\overline{g}^* : H^*(G_n; \mathbb{Z}/2) \to H^*(\mathbb{R}P^\infty \times ... \times \mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2)$ actua com a isomorfisme entre $H^*(G_n; \mathbb{Z}/2)$ i l'àlgebra dels polinomis simètrics amb $a_1, ..., a_n$ com a variables.*

3.2.1 Unicitat de les classes de Stiefel-Whitney

Amb això anem a vore que quan estem en $ParaBundle_{\mathbb{R}^n}$ les classes de Stiefel-Whitney són úniques això ho farem gastant el fet de que el Grassmannià és un fibrat universal.

Teorema 3.10 (Unicitat de les classes de Stiefel-Whitney)**.** *Existeix una única aplicació $\xi \mapsto w(\xi) \in H^*(B(\xi), \mathbb{Z}/2)$ que assigna a cada $\xi \in Ob(ParaBundle_{\mathbb{R}^n})$ una successió de classes de cohomologia que satisfà els axiomes de Stiefel-Whitney.*

Demostració. Considerem que en tenim $\xi \mapsto w(\xi)$ i $\xi \mapsto \tilde{w}(\xi)$, que satisfan els axiomes de Stiefel-Whitney. Pels axiomes 1 i 4, i aplicant el teorema 2.85 per al fibrat tautològic γ_1^1.

$$w(\gamma_1^1) = \tilde{w}(\gamma_1^1) = 1 + a \tag{3.2.12}$$

Si considerem l'encaix de γ_1^1 en γ^1, aquest defineix una transformació entre fibrats, aleshores pels axiomes 1 i 2 obtenim:

$$w(\gamma^1) = \tilde{w}(\gamma^1) = 1 + a \tag{3.2.13}$$

Si ara considerem el producte cartesià i apliquem el corol·lari 1.34 tenim que $\eta = \gamma^1 \times ... \times \gamma^1 \cong \pi_1^*\gamma^1 \oplus ... \oplus \pi_n^*\gamma^1$. Aleshores aplicant els axiomes 2 i 3 obtenim:

$$w(\eta) = \tilde{w}(\eta) = (1 + a_1) \smile ... \smile (1 + a_n) \tag{3.2.14}$$

Ara pel teorema 1.53 existeix $f : \eta \to \gamma^n$ transformació de fibrats i a més, pel corol·lari anterior tenim que existeix un monomorfisme de $H^*(G_n; \mathbb{Z}/2)$ a $H^*(\mathbb{R}P^\infty \times ... \times \mathbb{R}P^\infty)$, per tant $w(\gamma^n) = \tilde{w}(\gamma^n)$.
Per a qualsevol $\eta \in Ob(ParaBundle_{\mathbb{R}^n})$, podem trobar una transformació de fibrats $f : \eta \to \gamma^n$ i tenim:

$$w(\eta) = \overline{f}^* w(\gamma^n) = \overline{f}^w(\gamma^n) = \tilde{w}(\eta) \tag{3.2.15}$$

Per tant, queda provada la unicitat de les classes de Stiefel-Whitney □

3.3 Classes característiques

Durant tot el treball hem parlat de les classes de Stiefel-Whitney però en cap moment hem dit què són les classes característiques, aquesta secció va a ser la definició de les classes característiques i la comprovació de que les classes de Stiefel-Whitney són de fet classes característiques.
Considerem ara R un anell o grup de coeficients, η un fibrat universal sobre una subcategoria de $\mathscr{T}Bundle$ i $c \in H^i(\eta; R)$ una classe de cohomologia.
Aleshores ξ i c determinen una classe de cohomologia:

$$\overline{f}_\xi^* c \in H^i(B(\xi); R) \tag{3.3.1}$$

Això té sentit perquè una aplicació contínua $\overline{f}_\xi : B(\xi) \to B(\eta)$ indueix una aplicació entre les cohomologies $\overline{f}_\xi^* : H^j(B(\xi)) \to H^j(B(\eta))$, a més aquesta és invariant sota homotopia per definició de fibrat universal aleshores tenim que $\overline{f}_\xi^* c$ està ben definit.

Definició 3.11. *Definim la **classe característica** de cohomologia de ξ determinada per c com*

$$\overline{f}_\xi^* c \tag{3.3.2}$$

la denotem com $c(\xi)$.

Recíprocament, donada una correspondència:

$$\xi \to c(\xi) \in H^i(B(\xi); R) \tag{3.3.3}$$

tal que és natural respecte les transformacions de fibrats, és a dir, si $g : B(\xi) \to B(\eta)$ indueix una transformació entre fibrats tenim que $c(\xi) = g^* c(\eta)$. Aleshores obtenim:

$$c(\xi) = \overline{f}_\xi^* c(w(\gamma^n)) \tag{3.3.4}$$

Recordem del capítol de fibrats vectorials vam demostrar que G_n és el fibrat universal sobre la categoria $ParaBundle_{\mathbb{R}^n}$. Si considerem $R = \mathbb{Z}/2$ coneixem la cohomologia del

Grassmannià i per tant podem definir les **classes característiques de Stiefel-Whitney** o simplement classes de Stiefel-Whitney com

$$\xi \mapsto w(\xi) = \overline{f}_\xi^*(\gamma^n) \tag{3.3.5}$$

on f_ξ és l'única transformació de fibrats $f : \xi \to G_n$, llevat d'homotopia. Aquestes clarament ens donen una correspondència entre fibrats i satisfan la naturalitat per l'axioma 2 per tant són classes característiques.
Com que γ^n en particular també està en $ParaBundle_{\mathbb{R}^n}$, observem que l'anell de les classes característiques de cohomologia per als $\mathbb{R}^n$-fibrats sobre una base paracompacta i Hausdorff amb coeficients en un anell $\mathbb{Z}/2$ és canònicament isomorfa a $H^*(G_n, \mathbb{Z}/2)$.
Les classes de Stiefel-Whitney són només unes de les classes característiques més utilitzades. Notem que l'orientació permet definir una altra classe fonamental i aleshores de forma anàloga a com he fet per a les classes de Stiefel-Whitney es poden definir altres classes característiques interessants com:

- Si tenim una orientació sobre els fibrats vectorials, aleshores podem definir les classes característiques dels $\mathbb{R}^n$-fibrats orientats sobre $\mathbb{Z}$

  $$\xi \mapsto e(\xi) \in H^n(B; \mathbb{Z}) \tag{3.3.6}$$

  a aquesta se li diu la **classe d'Euler orientada**.

- Si considerem fibrats vectorials complexos orientats i prenem $R = \mathbb{Z}$ podem definir les **classes de Chern**:

  $$\omega \mapsto c_i(\omega) \in H^{2i}(B; \mathbb{Z}) \tag{3.3.7}$$

- Donat un espai vectorial V podem considerar el producte tensorial $V \otimes \mathbb{C}$, la complexificació de V. Si ara considerem un $\mathbb{R}^n$ vector i a cada fibra li apliquem esta construcció obtenim $\xi \otimes \mathbb{C}$ que és isomorf a $\xi \oplus \xi$. aleshores definim:

  $$\xi \mapsto p_i(\xi) \in H^{4i}(B; \mathbb{Z}), \quad p_i(\xi) := (-1)^i c_{2i}(\xi \otimes \mathbb{C}) \tag{3.3.8}$$

  aquestes es diuen les **classes de Pontrjagin**.

Per a més informació sobre aquestes consultar [MS74].

3.4 Conseqüències i aplicacions de les classes de Stiefel-Whitney

Després d'un molt llarg camí demostrant construint les classes de Stiefel-Whitney hem arribat per fi a un punt on podem gaudir de les recompenses de tant treball i vore aplicacions. Primerament vorem les conseqüències més immediates i després ja vorem aplicacions més impactants.

Definició 3.12. *Definim $H^{\Pi}(B,\mathbb{Z}/2)$ com l'anell de les* ***sumes infinites formals****:*

$$a = a_0 + a_1 + a_2 + ..., \quad a_i \in H^i(B,\mathbb{Z}/2),\ i \in \mathbb{N} \tag{3.4.1}$$

el producte el definim com a:

$$(a_0+a_1+a_2+...)(b_0+b_1+b_2+...) = (a_0b_0)+(a_1b_0+a_0b_1)+(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)+... \tag{3.4.2}$$

Aquest producte és associatiu i commutatiu. Respecte de la suma el considerem com el producte cartesià dels grups de cohomologia. La classe Stiefel-Whitney total d'un fibrat vectorial de dimensió n ξ sobre B és

$$w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + w_2(\xi) + ... + w_n(\xi) + 0 + ... \tag{3.4.3}$$

Com a conseqüència, amb aquesta notació $w(\xi \oplus \eta) = w(\xi)w(\eta)$

Lema 3.13. *El conjunt format per les sèries de la forma:*

$$w = 1 + w_1 + w_2 + ... \in H^{\Pi}(B;\mathbb{Z}/2) \tag{3.4.4}$$

és a dir les sèries que tenen com a primer terme 1. Són un grup commutatiu respecte de la multiplicació.

De fet aquest és el conjunt de les unitats de $H^{\Pi}(B;\mathbb{Z}/2)$.

Demostració. Hem de trobar un invers $\widetilde{w} := w^{-1}$, donat un element w podem considerar, que $\widetilde{w} = 1$, aleshores queda:

$$\widetilde{w}_n = w_1\widetilde{w}_{n-1} + w_2\widetilde{w}_{n-2} + ... + w_{n-1}\widetilde{w}_1 + w_n \tag{3.4.5}$$

Això ens dóna el sistema, el qual podem resoldre per substitució progressiva i queda:

$$\begin{array}{rcll} \widetilde{w}_1 & = & w_1 & \\ \widetilde{w}_2 & = & w_1^2 + w_2 & \\ \widetilde{w}_3 & = & w_1^3 + w_2w_1 + w_3 & +2(w_1w_2) \\ \widetilde{w}_3 & = & w_1^4 + w_1^2w_2 + w_2^2 + w_4 + & +2(w_3w_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \tag{3.4.6}$$

Al estar en $\mathbb{Z}/2$ el de la dreta del tot són 0s. $\square$

Com a conseqüència el producte de Whitney ens diu que l'equació:

$$w(\xi \oplus \eta) = w(\xi)w(\eta) \tag{3.4.7}$$

té com a única solució $w(\eta) = \widetilde{w}(\xi)w(\xi \oplus \eta)$.

Proposició 3.14. *Si $\xi \cong \eta$ aleshores $w(\xi) = w(\eta)$*

Demostració. Conseqüència directa de l'axioma de naturalitat. $\square$

Proposició 3.15. *Si ξ és un fibrat vectorial trivial, aleshores $w(\xi) = 1$.*

Demostració. Com que és trivial per la proposició anterior $w_i(\xi) = w_i(\varepsilon_{B(\xi)})$ ara bé, donat $b \in B$ podem considerar la transformació de fibrats induïda per $\overline{f} : B \to \{b\}$, aleshores $w_i(\xi) = w_i(b)$ però la cohomologia d'un punt és trivial quan $i > 0$, per tant $w_i(\xi) = 0$ si $i > 0$. $\square$

Proposició 3.16. *Si ε és trivial, aleshores $w_i(\xi \oplus \eta) = w_i(\eta)$*

Demostració. Conseqüència del teorema del producte de Whitney i la proposició anterior ja que tots menys el primer sumand seran 0. $\square$

Com a conseqüència d'aquest teorema tenim i el lema 3.13 és que en què $\xi \oplus \eta$ és trivial, el que passa és que a l'aplicar el teorema del producte de Whitney ens queda el següent sistema:

$$\begin{aligned} w_1(\xi) + w_1(\eta) \quad &= 0 \\ w_2(\xi) + w_1(\xi)w_1(\eta) + w_2(\eta) \quad &= 0 \\ \vdots \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

En aquest cas podem aïllar $w_i(\eta)$ com a polinomis de $w_i(\xi)$ i a més $w(\eta) = \widetilde{w}(\xi)$.

Proposició 3.17. *Si ξ és un $\mathbb{R}^n$−fibrat amb una mètrica euclídea, amb una secció que no nul·la, aleshores $w_n(\xi) = 0$. Si ξ en té k seccions independents aleshores,*

$$w_{n-k+1}(\xi) = w_{n-k+2}(\xi) = ... = w_n(\xi) = 0 \tag{3.4.9}$$

Demostració. Com que en té k seccions que són linealment independents per tot arreu, el que podem és definir un subfibrat ε a partir d'eixes seccions, aleshores sabem que $\xi \cong \varepsilon \oplus \varepsilon^{\perp}$. Aleshores per la proposició anterior $w_i(\xi) = w_i(\varepsilon^{\perp})$ com que $\varepsilon^{\perp}$ és un $(n-k)$−fibrat tenim el que volíem demostrar. $\square$

Clar si ξ és un fibrat euclidià per a qualsevol subfibrat η podem trobar un complement $\eta^{\perp}$ i per tant tindrem que $(w(\eta))^{-1} = w(\eta^{\perp})$. Un cas especial és el següent:

Corol·lari 3.18 (Teorema de la dualitat de Whitney)**.** *Si τ_M és el fibrat tangent d'una varietat en l'espai euclidià i ν_M és el tangent normal, aleshores,*

$$w_i(\nu_M) = \widetilde{w}_1(\tau_M) \tag{3.4.10}$$

Exemple 3.19. Per al fibrat tangent τ_{S^n} tenim que $w(\tau_{S^n})$, és a dir, les classes de Stiefel-Whitney no permeten diferenciar entre el trivial sobre S^n i el tangent.
Si considerem la $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, aleshores hem demostrat al primer capítol que el fibrat normal és trivial. Aleshores $w(\tau)w(\nu) = 1$ però $w(\nu) = 1$ i per tant, $w(\tau) = 1$

Exemple 3.20. La classe de Whitney Stiefel del fibrat tautològic γ_n^1 sobre $\mathbb{R}P^n$ és $w(\gamma_n^1) = 1 + a$.

Considerem la inclusió $i : \mathbb{R}P^1 \hookrightarrow \mathbb{R}P^n$ indueix una transformació de fibrats $j : \gamma_1^1 \to \gamma_n^1$. Per tant,

$$j^* w_1(\gamma_n^1) = w_1(\gamma_1^1) \neq 0 \tag{3.4.11}$$

Per a $i > 1$ l'axioma 1 ja ens determina que seran 0 i $w_0(\gamma_n^1) = 1$ per tant ja ho tenim.

Exemple 3.21. Podem vore γ_n^1 el fibrat tautològic sobre $\mathbb{R}P^n$ com un subfibrat del trivial $\varepsilon^{n+1}_{\mathbb{R}P^n}$, el denotem ε^{n+1}, és clar per la construcció, ara si considerem $\gamma^\perp$ el seu ortogonal, per definició de fibrat ortogonal tenim que $E(\gamma^\perp) = \{(\{\pm x\}, v) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} / \ v \in \{x\}^\perp\}$. Anem a vore que

$$w(\gamma^\perp) = 1 + a + a^2 + ... + a^n \tag{3.4.12}$$

Simplement cal considerar que $\gamma_1 \oplus \gamma^\perp$ és trivial i per tant:

$$w(\gamma^\perp) = \widetilde{w}(\gamma_n^1) = (1 + a)^{-1} = 1 + a + a^2 + ... + a^n \tag{3.4.13}$$

Lema 3.22. *Siga τ el fibrat tangent de $\mathbb{R}P^n$, aleshores $\tau \cong \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp)$.*

Demostració. Siga $l \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ una recta que interseca al 0 i els punts $\pm x$ de S^n, ara considerem $l^\perp \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Siga $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ la projecció sobre el quocient. Aleshores si considerem:

$$dp : TS^n \to T\mathbb{R}P^n \tag{3.4.14}$$

Veiem que si $dp(x, v) = dp(-x, -v)$, això simplement és perquè per a un ε suficientment menut les corbes $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\to S^n$, $\alpha(t) = x + tv$ i $\beta :]-\varepsilon, \varepsilon[\to S^n$, $\beta(t) = -x - tv$ són iguals en la projecció $p(\alpha(t)) = \{\pm x + tv\} = p(\beta(t))$.
Com que a més és submersió, tenim que $T\mathbb{R}P^n$ ve donat per parells $\{(x, v), (-x, -v)\}$ tal que $x \in S^n$ i $v \in \{x\}^\perp$. Raonant amb la mateixa idea en la demostració del teorema 1.27, s'arriba a que tenim l'aplicació $f : T\mathbb{R}^n \to \mathrm{Hom}(l, l^\perp)$ donada per $\pm(x, v) \mapsto \mathcal{L}$ on

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{L}: & l & \longrightarrow & l^\perp \\ & x & \longmapsto & v \end{array} \tag{3.4.15}$$

f és contínua i actua com a ismorfisme entre fibres aleshores pel lema 1.14 tenim que τ és isomorfa a $\mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp)$. $\square$

Seguint la notació del lema anterior

Teorema 3.23. *La suma Whitney $\tau \oplus \varepsilon^1$ és isomorfa a $\gamma_n^1 \overset{n+1)}{\oplus \ldots \oplus} \gamma_n^1$. Per tant, la classe de Whitney Stiefel de $\mathbb{R}P^n$ és:*

$$w(\tau) = (1+a)^{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1} a + \binom{n+1}{2} a^2 + \ldots + \binom{n+1}{n} a^n \tag{3.4.16}$$

Demostració. El fibrat $\mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1)$ és trivial perquè és un $\mathbb{R}$-fibrat amb una secció no nul·la canònica donada per la identitat. Aleshores tenim

$$\tau \oplus \varepsilon^1 \cong \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp) \oplus \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1) \cong \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp \oplus \gamma_n^1) \cong \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^{n+1}) \tag{3.4.17}$$

I per tant és isomorfa a $\mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^1)$ es pot demostrar que $\mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^1)$ és isomorf a γ_n^1 (compara [MS74, pg. 35]) com que γ_n^1 té una mètrica euclídea. Aleshores $\tau \oplus \varepsilon^1 \cong \gamma_n^1 \oplus \ldots \oplus \gamma_n^1$.
Pels axiomes 2 i 4 podem concloure que:

$$w(\tau) = w(\tau \oplus \varepsilon^1) = w(\gamma_n^1) \ldots w(\gamma_n^1) = (1+a)^{n+1} \tag{3.4.18}$$

□

3.4.1 Existència de $\mathbb{R}$-àlgebres de divisió en $\mathbb{R}^n$

Un problema de l'àlgebra durant molt de temps va ser determinar les àlgebres de divisió en $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$, en principi és un problema purament algebraic i un esperaria que la demostració es fera només gastant mètodes algebraics. No obstant això, va ser Whitney qui va donar la primera prova de que no n'hi han més que les que ja es coneixien $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, els quaternions i els octonions i va ser precisament gastant les classes de Stiefel-Whitney. Relacionarem l'existència d'àlgebres de divisió amb la paral·lelitzabilitat de $\mathbb{R}P^n$ i mitjançant les classes de Stiefel-Whitney determinem que no existeix cap altra.

Com a conseqüència directa del teorema 3.23 obtenim el següent:

Corol·lari 3.24. *La classe de $w(\tau_{\mathbb{R}P^n}) = 1$ sii $n+1$ és una potència de 2.*

Demostració. És una propietat elemental d'àlgebra que $(a+b)^2 \equiv a^2 + b^2 \mod 2$. Aleshores, $(1+a)^{2^r} = 1 + a^{2^r}$. Aleshores, si $n+1 = 2^r$ tenim que:

$$w(\tau_{\mathbb{R}P^n}) = (1+a)^{n+1} = 1 + a^{n+1} = 1 \tag{3.4.19}$$

recíprocament si $n+1 = 2^r m$ on $m > 1$ senar,

$$w(\tau_{\mathbb{R}P^n}) = (1+a^{n+1}) = (1+a^{2^r})^m = 1 + m a^{2^r} + \frac{m(m-1)}{2} a^{2 \cdot 2^r} + \ldots \tag{3.4.20}$$

l'últim terme és diferent de 0 pequè $2^r < n+1$. □

Com a conseqüència d'aquest teorema tenim que el únics espais projectius que podrien ser paral·lelitzables serien $\mathbb{R}P^1, \mathbb{R}P^3, \mathbb{R}P^7, \mathbb{R}P^{15}$..., es pot demostrar en molt més esforç i complicació que només els 3 primers són paral·lelitzables (vore [BM58]).
Recordem que en un anell R un divisor de 0 és $0 \neq r \in R$ tal que existeix $0 \neq r' \in R$ amb $r \cdot r' = 0$. Un domini d'integritat és un anell que no té divisors de 0. Si considerem un $\mathbb{R}$-àlgebra sobre R direm que és un àlgebra de divisió si R és un domini d'integritat.

Teorema 3.25. *Suposem que existeix un producte bilineal*

$$p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{3.4.21}$$

sense divisors de 0, aleshores $\mathbb{R}P^{n-1}$ *és paral·lelitzable.*

Demostració. Siga $e_1, ..., e_n$ la base canònica de $\mathbb{R}^n$. Com que p és bilineal tenim que $y \mapsto p(y, e_1)$ com que no n'hi han divisors de 0 té que ser un isomorfisme. Aleshores si definim

$$\begin{array}{rccc} v_i : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & p(y, e_1) & \longmapsto & p(y, e_i) \end{array} \tag{3.4.22}$$

aquesta és lineal, a més $v_1(x), ..., v_n(x)$ són linealment independents per a $x \neq 0$ i v_1 és la identitat de $\mathbb{R}^n$.
Donada una recta l que passa pel 0, si $\pi : \mathbb{R}^n \to l^\perp$ és la projecció ortogonal, podem definir:

$$\begin{array}{rccc} \overline{v}_i : & l & \longrightarrow & l^\perp \\ & x & \longmapsto & (\pi \circ v_i)(x) \end{array} \tag{3.4.23}$$

Tenim que $\overline{v}_1 = 0$ però que $\overline{v}_2, ..., \overline{v}_n$ van a ser linealment independents per a tot punt. Aleshores el que tenim són unes seccions de $\mathrm{Hom}(\gamma^1_{n-1}, \gamma^\perp)$ independents i per tant aquest és el fibrat trivial ara bé:

$$\tau_{\mathbb{R}P^{n-1}} \cong \mathrm{Hom}(\gamma^1_{n-1}, \gamma^\perp) \tag{3.4.24}$$

Aleshores $\mathbb{R}P^{n-1}$ és paral·lelitzable. □

Aleshores el que hem demostrat és que per a que en $\mathbb{R}^n$ es puga definir un àlgebra de divisió sobre $\mathbb{R}$ una condició necessària és que $\mathbb{R}P^{n-1}$ siga paral·lelitzable, pel corol·lari d'abans tenim que n té que ser potència de 2, hem comentat també que només ho són per a 0, 1, 3 i 7.
Com a conseqüència, els únics casos on podríem definir àlgebres de divisió serien $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^4$ i $\mathbb{R}^8$, aquestos corresponen a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, els quaternions i els octonions respectivament.

3.4.2 Immersions

Un dels primers problemes per als quals es van aplicar va ser el problema de la immersió. Aquest consisteix en trobar la menor k tal que existeix una immersió d'una varietat M de dimensió n a $\mathbb{R}^{n+k}$. Tenim el següent teorema:

Teorema 3.26 (Whitney, [Whi44]). *Siga M una varietat diferenciable compacta de dimensió $n > 1$ aleshores existeix una immersió de M en $\mathbb{R}^{2n-1}$.*

Anem a vore que aquesta fita no és pot millorar i que és exacta per a alguns exemples del projectiu.

Aplicant el teorema 3.18, si ν_M denota el fibrat normal, tenim

$$w_i(\nu_M) = \widetilde{w}_i(\tau_M) \tag{3.4.25}$$

Clar com que les classes $w_i(\tau_M) = 0$ si $i > n$ tenim que $w_i(\nu_M) = 0$ si $i > k$, és a dir obtenim una fita de k.

Exemple 3.27. Considerem l'espai projectiu $\mathbb{R}P^9$ tenim que

$$w(\tau_{\mathbb{R}P^9}) = (1+a)^{10} = 1 + a^2 + a^8 \tag{3.4.26}$$

i per tant

$$\widetilde{w}(\tau_{\mathbb{R}P^9})1 + a^2 + a^4 + a^6 \tag{3.4.27}$$

Aleshores si existeix un a immersió de $\mathbb{R}P^9$ en $\mathbb{R}^{9+k}$, tenim que k té que ser major o igual que 6.

Exemple 3.28. Si n és una potència de 2 aleshores:

$$w(\tau_{\mathbb{R}P^n}) = (1+a)^{n+1} = 1 + a + a^n \tag{3.4.28}$$

i per tant

$$\widetilde{w}(\tau_{\mathbb{R}P^n}) = 1 + a + a^2 + ... + a^{n-1} \tag{3.4.29}$$

D'aquest últim exemple deduïm el teorema

Teorema 3.29. *Si existeix una immersió de $\mathbb{R}P^{2^r}$ en $\mathbb{R}^{2^r+k}$ aleshores k té que ser almenys $2^r - 1$.*

El que hem demostrat amb el teorema 3.29 és que el teorema 3.26 que acabem de citar de Whitney ens dona la millor fita possible per a k, és impossible trobar-ne una millor per a varietats compactes.

3.4.3 Nombres de Stiefel-Whitney i cobordisme

Comencem aquesta secció amb una definició:

Definició 3.30. *Dos varietats diferenciables tancades M i N de dimensió n direm que estan en la mateixa* ***classe de cobordisme***[1] *sii la seua unió disjunta $M \sqcup M_2$ és la frontera d'una varietat diferenciable compacta de dimensió $(n+1)$. Es pot comprovar que les classes de cobordisme defineixen una relació d'equivalència.*

[1] Hem decidit traduir *cobordism* com cobordisme i no "covorisme" seguint el criteri que es gasta en anglés que és respectar l'arrel francesa de *bord*.

L'estudi de aquesta relació d'equivalència es coneix com a cobordisme, un problema natural a determinar és si donades dos varietats diferenciables saber si estan o no en la mateixa classe de cobordisme. Aplicant els nombres de Stiefel-Whitney anem a donar un criteri necessari i suficient per comprovar-lo.

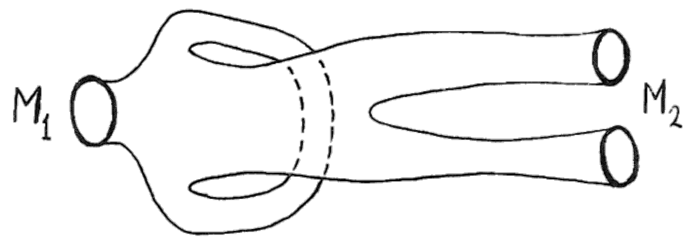

Figura 3.2: Exemple de cobordisme, la varieta M_1 està en la mateixa classe de cobordisme que M_2.[MS74, pg. 53]

Recordem el següent teorema de topologia:

Teorema 3.31. *Tota varietat diferenciable compacta és homeomorfa a un subconjunt triangulat de l'espai euclidià, a més l'homeomorfisme es pot comprovar que és suau per a cada símplex de la triangulació.*

Siga M una varietat diferenciable amb vora de dimensió n. Considerem la cadena simplicial formada per tots els símplexs de la triangulació, sense especificar una orientació ja que anem a treballar en $\mathbb{Z}/2$. És immediat que la vora de la cadena coincideix amb la triangulació de la vora i per tant la cadena anterior defineix un cicle relatiu la classe del qual anomenem **classe fonamental d'homologia** denotat com:

$$\mu_M \in H_n(M, \partial M; \mathbb{Z}/2) \tag{3.4.30}$$

Donada una classe de cohomologia $\varphi \in H^n(M, \partial M; \mathbb{Z}/2)$, per la demostració del teorema 2.46 tenim que si z és un representant d'aquesta i u un representant de μ_M està ben definida la correspondència:

$$h(\varphi)(\mu_M) = z(u) \tag{3.4.31}$$

denotarem $h(\varphi)(\mu_M)$ com $\varphi[M]$.
Si M no té vora el raonament és el mateix només que no considerem homologia relativa. En el cas en que la varietat no siga compacta, també podem definir una classe fonamental d'homologia en $\mathbb{Z}/2$ (vore [MS74, pp. 273-275])
A més a més, l'homomorfisme de connexió ∂ de la successió exacta llarga:

$$... \to H_n(M, \partial M) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\partial M) \to H_{n-1}(M) \to ... \tag{3.4.32}$$

porta μ_M a $\mu_{\partial M}$.
Ara ja estem en condició de definir els nombres de Stiefel-Whitney.
Siguen $r_1, ..., r_n \in \mathbb{N}$ tals que $r_1 + 2r_2 + ... + nr_n = n$. Per a qualsevol fibrat vectorial ξ tenim el monomi:

$$w_1(\xi)^{r_1} \smile ... \smile w_n(\xi)^{r_n} \in H^n(B(\xi); \mathbb{Z}/2) \tag{3.4.33}$$

En particular, per al fibrat tangent d'una varietat M tenim

Definició 3.32. *Definim el* ***nombre de Stiefel-Whitney*** *de M associat al monomi $w_1(\xi)^{r_1}...w_n(\xi)^{r_n}$ com:*

$$w_1(\xi)^{r_1}...w_n(\xi)^{r_n}[M] := h(w_1(\xi)^{r_1}...w_n(\xi)^{r_n})(\mu_M) \tag{3.4.34}$$

on h és l'aplicació del teorema 2.46.

Notem que dos varietats M i M' tindran els mateixos nombres de Stiefel-Whitney si per a tot n i per a tota partició $p(n)$ els nombres de Stiefel-Whitney coincideixen.

Exemple 3.33. Anem a estudiar els nombres de Stiefel-Whitney de l'espai projectiu $\mathbb{R}P^n$.

Siga τ el fibrat tangent de $\mathbb{R}P^n$:

- Si n és parella aleshores $w_n(\tau) = (n+1)a^n \neq 0$ i per tant $w_n[\mathbb{R}P^n] \neq 0$.
  A més, $w_1(\tau) = (n+1)a \neq 0$ i per tant $w_1^n[\mathbb{R}P^n] \neq 0$.
  En particular, si $n = 2^r$, aleshores sabem que $w(\tau) = 1 + a + a^n$ i per tant només són no nuls els nombres de Stiefel-Whitney que ja hem considerat, i per tant és no nul. En cas contrari podem calcular-los aplicant el binomi de Newton amb el teorema del producte de Whitney.

- Si n és senar, $n = 2k-1$, aleshores $w(\tau) = (1+a)^{2k} = (1+a^2)^k$. Per tant, si j és senar tenim que $w_j(\tau) = 0$. Ara bé, tota partició de $2k-1$ ha de tindre almenys un nombre senar per ser la suma de parells parella aleshores tots els nombres de Stiefel-Whitney de $\mathbb{R}P^{2k-1}$ són 0.

Els nombre de Whitney Stiefel tenen una aplicació importantíssima que es reflecteix en els següents dos teoremes.

Teorema 3.34. *Si tots els nombres de Stiefel-Whitney de M són 0, aleshores M és la vora d'alguna varietat diferenciable compacta.*

Per a la prova consultar [Sto68, pg. 95]

Teorema 3.35. *Si M és una varietat diferenciable compacta de dimensió $(n+1)$ i ∂M, aleshores tots els nombres de Stiefel-Whitney de ∂M són 0.*

Demostració. Siga $\mu_M \in H_{n+1}(M, \partial M; \mathbb{Z}/2)$ la classe fonamental d'homologia del parell $(M, \partial M)$. Aleshores tenim que l'homomorfisme natural

$$\partial : H_{n+1}(M, \partial M) \to H_n(\partial M) \tag{3.4.35}$$

i aquest satisfà que $\partial(\mu_M) = \mu_{\partial M}$. Es pot comprovar que l'homomorfisme de connexió δ de la successió exacta llarga:

$$... \to H^n(M) \to H^n(\partial M) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(M, \partial M) \to ... \tag{3.4.36}$$

és el dual de ∂, és a dir, $\delta = \partial^*$ (vore [Hat01, pp.198-199]).
Per a tot $\psi \in H^n(\partial M)$, aleshores per com hem definit h al teorema 2.46 es comprova que

$$h(\psi)(\partial(\mu_M)) = h(\delta \circ \psi)(\mu_B) \tag{3.4.37}$$

Si definim una mètrica riemanniana sobre τ_M aquest indueix un únic camp vectorial sobre ∂M, el donat pel vector exterior de la nota A.17, aquest per ser una secció no nul·la ens dona un fibrat trivial ε^1 sobre ∂M i per tant, com que és el fibrat normal tenim:

$$\tau_M|_{\partial M} \cong \tau_{\partial M} \oplus \varepsilon^1 \tag{3.4.38}$$

Aleshores $w(\tau_M|_{\partial M}) = w(\tau_{\partial M} \oplus \varepsilon^1) = w(\tau_{\partial M})$. Aplicant el que hem raonat abans tenim $\delta(w_1^{r^1}(\tau_M)...w_n^{r^n}(\tau_M)) = 0$. i per tant

$$\begin{aligned} h(w_1^{r^1}(\tau_{\partial M})...w_n^{r^n}(\tau_{\partial M}))(\mu_{\partial M}) &= \\ = h(w_1^{r^1}(\tau_M|_{\partial M})...w_n^{r^n}(\tau_M|_{\partial M}))(\partial\mu_M) &= \\ = h(\delta(w_1^{r^1}(\tau_M|_{\partial M})...w_n^{r^n}(\tau_M|_{\partial M})))(\mu_M) &= 0 \end{aligned} \tag{3.4.39}$$

Per tant, tots els nombres de Stiefel-Whitney són 0. □

Corol·lari 3.36. *Dos n varietats diferenciables tancades pertanyen a la mateixa classe de cobordisme sii tots els seus nombres de Stiefel-Whitney són iguals.*

És conseqüència dels dos teoremes anteriors. El que hem aconseguit és una caracterització per comprovar si dos varietats estan en la mateixa classe d'equivalència.

Apèndix A

Varietats Diferenciables

Aquesta secció es dedica a definir i enunciar propietats sobre les varietats diferenciables, s'assumeix que el lector està mínimament familiaritzat amb les varietats. Com que el coneixement de les varietats no és l'interés d'aquest treball no es demostra res ni es comprova que tot estiga ben definit ja que són coneixements elementals de topologia diferencial estudiats a nivell de grau. Hem gastat com a referència principal apunts del grau [Bal22], no obstant el lector interessat pot consultar [GP74] i [Lee12].

Gèrmens

Simplement una definició per alleugerar la notació d'aquest apèndix, es gastarà molt puntualment en el treball.

Definició A.1. *Si X, Y, Z són espais topològics i $x \in X$, aleshores definim:*
Si $U, V \subset X$ són entorns oberts de x i $f : U \to Y$, $g : V \to Y$ direm que defineixen el mateix germen en x, si existeix $W \subseteq U \cap V$ entorn obert de x en el qual coincideixen Això defineix una relació d'equivalència i a cada classe li direm germen d'aplicació en x, el denotem $f : (X, x) \to Y$ o $f : (X, x) \to (Y, y)$ si $f(x) = y \in Y$

- *Si en la classe existeix un representant que és contínua, direm que el germen d'aplicació contínua. A més, si $f : U \to$ germen continu i tenim $g : W \subseteq Y \to Z$ on W entorn obert de $f(x)$ es pot definir la composició de gèrmens.*

- *Si en la classe existeix un representant que és un homeomorfisme, direm que el germen d'homeomorfisme.*

- *Un germen $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \to (\mathbb{R}^m, y)$ es diu suau/de classe $\mathcal{C}^k$ si té un representant tal que és suau/de classe $\mathcal{C}^k$.*

A.1 Definició de varietat i espai tangent

Ara definim les varietats diferenciables.

Definició A.2 (Varietat topològica)**.** *Una varietat topològica M de dimensió n és un espai topològic localment homeomorf a $\mathbb{R}^n$ i Hausdorff.*

Açò no ens dona realment l'estructura que volem per poder diferenciar i derivar. Aleshores definim.

Definició A.3 (Atles i cartes)**.** *Donat un espai topològic M, un **atles** de classe $\mathcal{C}^k$ i dimensió n, $n, k \in \mathbb{N}$, és una família d'homeomorfismes, els quals anomenarem **cartes**,*

$$\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \subseteq M \to A_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n\}_{\alpha \in I} \tag{A.1.1}$$

on I és un conjunt d'índex qualsevol i U_α, A_α són conjunts oberts per a tot $\alpha \in I$. Tals que:

1. *$\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ és un recobriment de M.*
2. *Donats $\alpha, \beta \in I$ i $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ el germen*

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\beta(\mathbb{R}^n, \varphi_\alpha(x)) \to \varphi_\alpha(\mathbb{R}^n, \varphi_\beta(x)) \tag{A.1.2}$$

de classe $\mathcal{C}^k$. Quan es compleix aquesta condició direm que les cartes són compatibles i a l'aplicació $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ li direm aplicació de transició.

Direm que dos atles $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ són compatibles si $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ és també un atles. És molt fàcil demostrar que ser compatible defineix una relació d'equivalència entre atles i a cada classe $[\mathcal{A}]$ li direm estructura suau o diferenciable de dimensió n.
A més, es pot demostrar que per a cada estructura diferenciable existeix un únic atles $\mathcal{A}' \in [\mathcal{A}]$ de manera que $\mathcal{A}$ és maximal respecte de la inclusió.

Definició A.4. *Una **varietat diferenciable** de dimensió n és un parell $(M, [\mathcal{A}])$, on M és un espai topològic 2AN i Hausdorff i $[\mathcal{A}]$ és una estructura suau de dimensió n en M.*

Nota A.5. Les propietats de les varietats diferenciables permeten demostrar, tal com es pot trobar en qualsevol llibre introductori a la topologia diferencial, que aquesta definició implica que podem suposar que $M \subset \mathbb{R}^{2n}$, topologitzat com a subespai de $\mathbb{R}^{2n}$ amb la topologia usual, i que $k = \infty$.

Definició A.6 (Varietat amb vora)**.** *Si a la definició d'atles substituïm $\mathbb{R}^n$ per $\overline{\mathbb{H}}^n$, (el semiplà superior tancat) amb la topologia relativa obtenim la definició de **varietat diferenciable amb vora**.*

Direm que un punt és de l'**interior** de M si en un entorn del punt M és localment homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ i direm que és de la **vora** en cas contrari. Es pot demostrar que la vora és una varietat diferenciable d'una dimensió $n-1$.

Definició A.7 (Funció suau)**.** *Donades M, N varietats diferenciables, direm que el germen d'aplicació contínua*[1] *$f : (M,x) \to (N,y)$ és **suau** en $x \in M$ si existeixen $\varphi : (M,x) \to (\mathbb{R}^n, u_0)$ carta de M i $\psi : (N,y) \to (\mathbb{R}^k, v_0)$ carta de N, de manera que l'aplicació:*

$$\overline{f} := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : (\mathbb{R}^n, u_0) \to (\mathbb{R}^n, v_0) \tag{A.1.3}$$

és suau, a aquesta aplicació se la denomina representació local de f, (el representant depén de les cartes la suavitat no) i ens dona el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{array}{ccc} (M,x) & \xrightarrow{\hat{f}} & (N,f(x)) \\ {\scriptstyle\varphi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\psi} \\ (\mathbb{R}^n, u_0) & \xrightarrow{\overline{f}} & (\mathbb{R}^k, v_0) \end{array} \tag{A.1.4}$$

Si $f : (M,x) \to (N, f(x))$ és suau per a tot $x \in M$, direm que f és suau. Si a més f bijectiva i la seua inversa suau direm que és un difeomorfisme i que M i N són difeomorfes.

Proposició A.8. *La composició d'aplicacions suaus és suau, igual amb els gèrmens.*

Proposició A.9. *Tota aplicació suau és contínua.*

Espai tangent

Donat M una varietat diferenciable, denotem $\mathcal{O}_M$ al conjunt de les aplicacions suaus $f : M \to \mathbb{R}$. És clar que si definim la suma i producte de funcions de la manera natural obtenim que $\mathcal{O}_M$ és una $\mathbb{R}$-àlgebra. Anàlogament, donat $x \in M$ si considerem $\mathcal{O}_{M,x}$ com al conjunt dels gèrmens $f : (M,x) \to \mathbb{R}$ també és una $\mathbb{R}$-àlgebra.
Siga $\mathcal{C}_{M,x} := \{\alpha : (\mathbb{R}, 0) \to (M,x)/\ \alpha \text{ germen suau } \}$. Aleshores podem definir la relació d'equivalència:

$$\alpha, \beta \in \mathcal{C}_{M,x}, \quad \alpha \sim \beta \Longleftrightarrow (f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0) \quad \forall f \in \mathcal{O}_{M,x} \tag{A.1.5}$$

Definició A.10. *Definim l'**espai tangent** a M en x com:*

$$T_x M = \frac{\mathcal{C}_{M,x}}{\sim} \tag{A.1.6}$$

Direm que $[\alpha] \in T_x M$ és un vector tangent a X en x_0. Es comprova que té una única estructura de $\mathbb{R}$-espai vectorial.

[1] Per a aquesta definició no cal que siga contínua, és prou que donades les cartes $\varphi : U \to A$ carta de M i $\psi : V \to B$, compleixen que $x \in U$ i $f(U) \subseteq V$.

Com que té estructura d'espai vectorial, ens interessa descriure la base.

Definició A.11. *Siga M una varietat diferenciable i siga $\phi : (M, x) \to (\mathbb{R}^n, u_0)$ una carta en $x \in M$. Donat $i \in \{1, ..., n\}$ on dim$(M) = n$, definim el **i-èssim vector coordenat** com:*

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x := [\gamma_i] \in T_x M \tag{A.1.7}$$

on $\gamma_i = \phi^{-1}(u_0 + te_i) \in \mathcal{C}_{M,x}$ i $e_i = (0, ..., 0, \overset{i)}{1}, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$.

Teorema A.12. *Si M és una varietat diferenciable amb dimensió n, aleshores una base de $T_x M$ és:*

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x \right\}_{i=1}^{n} \tag{A.1.8}$$

li direm base canònica o base de vectors tangents coordenats.

Definició A.13. *Donat $f \in \mathcal{O}_{M,x}$ denotem la **derivada** d'una funció respecte $\partial/\partial x_i|_x$ com:*

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x (f) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \tag{A.1.9}$$

A més es comprova que, si $\overline{f} = f \circ \phi^{-1}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial \overline{f}}{\partial u_i}(u) \tag{A.1.10}$$

on $u_1, ..., u_n$ són les coordenades de $\mathbb{R}^n$, i la banda dreta la derivada parcial d'anàlisi.

Definició A.14. *Siga $f : M \to N$ una aplicació suau entre varietats i $x \in M$ es defineix la **diferencial** de f en x com l'aplicació:*

$$\begin{aligned} df_x \colon \quad T_x M &\longrightarrow T_{f(x)} N \\ v &\longmapsto df_x(v) := [f \circ \alpha] \end{aligned} \tag{A.1.11}$$

on $v = [\alpha]$. Es pot comprovar que aquesta aplicació està ben definida.

Proposició A.15. *En les condicions de la definició anterior:*

- *És una aplicació lineal.*
- *Cumpleix la regla de la cadena, és a dir, si $g : N \to Y$ aplicació suau entre varietats:*

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x \tag{A.1.12}$$

- *Si $\phi : (M,x) \to (\mathbb{R}^n, u)$ i $\psi : (N, f(x)) \to (\mathbb{R}^k, v)$ són cartes de M i N amb funcions coordenades $x_1, ..., x_n$ i $y_1, ..., y_k$ respectivament. Aleshores la matriu df_x en les bases canòniques dels espais tangents coincideixen amb la matriu jacobiana de $\overline{f}$ en u i és igual a:*

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right), \quad f_i := y_i \circ f \tag{A.1.13}$$

Per a varietats amb vora es pot definir igual l'espai tangent i a més tenim la següent propietat.

Proposició A.16. *Si X és una varietat amb vora de dimensió n aleshores ∂X és una subvarietat de dimensió $n-1$ i per a cada $x \in \partial X$ es té que $T_x\partial X$ ve generat pels vectors:*

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x \right\}_{i=1}^{n-1} \tag{A.1.14}$$

és a dir la base de T_xX menys l'últim vector.

Nota A.17. Com a conseqüència tenim que $T_x\partial X$ és l'hiperplà donat pels vectors tangents tals que $v(x_n) = 0$ on x_n és la coordenada n-èssima en una carta qualsevol. Aleshores $T_x\partial X$ divideix T_xX en vectors interiors ($v(x_n) > 0$) i exteriors ($v(x_n) < 0$).

A.2 Teoremes i definicions auxiliars de varietats

En aquesta part inclourem els teoremes i definicions que facen falta per a la resta del treball.

Teorema del rang constant, immersions i submersions

Definició A.18. *Donada una aplicació suau $f : M \to N$ entre varietats, es defineix el* ***rang*** *de f en x com el rang de la diferencial df_x. Es defineix igual per a gèrmens. Direm que el germen $f : (M,x) \to (N,y)$ té rang constant si existeix un representant que té rang constant.*

Teorema A.19 (Teorema del rang constant)**.** *Siga $f : (M,x) \to (N,y)$ germen de rang constant r. Aleshores existeixen cartes $\phi : (M,x) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ i $\psi : (N,y) \to (\mathbb{R}^k, 0)$tals que la representació local de f és:*

$$\begin{array}{cccc} \overline{f}: & (\mathbb{R}^n, 0) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^k, 0) \\ & (u_1, ..., u_n) & \longmapsto & (u_1, ..., u_k, 0, ..., 0) \end{array} \tag{A.2.1}$$

Definició A.20. *1. Direm que $f : M \to N$ és una immersió en $x \in M$ si df_x és injectiva, igual per a gèrmens i si ho és en tots els punts direm que f immersió.*

2. *Direm que f és **encaix** si és una immersió injectiva tal que $f : X \to f(X)$ és homeomorfisme.*

3. *Si M és una varietat i $N \subset M$ és un espai topològic tal que $i : N \hookrightarrow M$ és un encaix, direm que N és una subvarietat de M.*

Proposició A.21. *Siga $f : M \to N$ un encaix. Aleshores, $f(M)$ és una subvarietat de N i per a tot $x \in M$ tenim que $T_{f(x)}f(M) = \operatorname{Im} df_x$.*

Definició A.22. *Direm que $f : M \to N$ és una **submersió** en $x \in M$ si df_x és sobrejectiva, igual per a gèrmens i si ho és en tots els punts direm que f submersió.*

Definició A.23. *Si $f : M \to N$ és una aplicació suau direm que $y \in N$ és **valor regular** si per a tot $x \in f^{-1}(y)$ tenim que f és submersió.*

Teorema A.24 (Teorema del valor regular)**.** *Siga $f : M \to N$ una aplicació suau entre varietats de dimensió n i k i $y \in N$ un valor regular tal que $f^{-1}(y) \neq$ aleshores $Z = f^{-1}(y)$ és una subvarietat de M, $\operatorname{codim} Z = \dim N$ i a més:*

$$T_x Z = \ker df_x \tag{A.2.2}$$

Exemple A.25. Considerem $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ donat per $f(x_1, ..., x_{n+1}) = x_1^2 + ... + x_{n-1}^2$ és clar que 1 és valor regular i que $f^{-1}(1) = S^n$, per tant tenim que $T_x S^n = \ker df_x = (x_1, ..., x_n)^{\perp}$.

Espai tangent global

Si definim l'espai tangent a M com:

$$TM = \sqcup_{x \in M} T_x M \tag{A.2.3}$$

anem a vore que podem topologitzar a TM. Definim $\pi : TM \to M$ que a cada corba li fa correspondre el punt de la corba. Com que M és una varietat considerem $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \to A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ l'atles maximal de M. Definim el següent:

- $V_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha) \subseteq TM$ per a tot $\alpha \in I$
- $W_\alpha = A_\alpha \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ obert.
- Si $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ són coordenades del vector v en la base de l'espai tangent $\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi_\alpha^i}\Big|_x \right\}_{i=1}^n$ definim

$$\begin{array}{rccl} \phi_\alpha : & V_\alpha & \longrightarrow & W_\alpha \\ & v & \longmapsto & \phi_\alpha(v) = (\varphi(\pi(v)), \lambda_1, ..., \lambda_n) \end{array} \tag{A.2.4}$$

Siga $\tilde{\mathcal{A}} = \{\phi_\alpha : V_\alpha \to W_\alpha\}_{\alpha\in I}$, anem a vore que defineix un atles de dimensió $2n$. Primerament considerem la topologia en TX que té com a base d'oberts:

$$\mathcal{B} = \{\phi_\alpha^{-1}(V) : \ \alpha \in I, V \subset W_\alpha, V \in \mathcal{T}_u\} \tag{A.2.5}$$

La propietat de ser 2AN ve del fet que M i $\mathbb{R}^n$ és 2AN, és Hausdorff, perquè per una banda M és Hausdorff aleshores dos corbes centrades en diferents punts tenen oberts disjunts en M, U i V i tenim que $\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(V) = \emptyset$ són els entorns oberts que buscàvem. Per altra banda si les dos corbes corresponen al mateix punt estàn en el mateix V_α, aplicant que $\tilde{\mathcal{A}}$ és un atles, obtenim que és homeomorf a un obert de $\mathbb{R}^{2n}$, per tant els podem separar per entorns disjunts.

Teorema A.26. *La família $\tilde{\mathcal{A}}$ és un atles de dimensió $2n$ si dim $X = n$.*

Només cal destacar que la inversa de les cartes ve donada per:

$$\begin{array}{rccl} \phi_\alpha^{-1}: & W_\alpha & \longrightarrow & V_\alpha \\ & (u,a) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\varphi_\alpha^{-1}(u)} \end{array} \tag{A.2.6}$$

Teorema de Borsuk-Ulam

No anem a vore l'enunciat del teorema de Borsuk-Ulam sinó una conseqüència directa que és:

Teorema A.27. *Si $f : S^k \to \mathbb{R}^{k+1}\backslash\{0\}$ és una aplicació senar, aleshores f interseca cada recta que passa pel 0 almenys 1 vegada.*

La demostració d'aquest teorema i l'enunciat del teorema de Borsuk-Ulam es pot trobar a [GP74, pp. 91-93].

Apèndix B

Espais paracompactes

Aquest apèndix té com a únics objectius, definir espais paracompactes, particions de la unitat i demostrar que tot espai paracompacte i Hausdorff és normal i que per a tot espai regular existeix una partició de la unitat associada a cada recobriment. Hem gastat com a referència principal [Eng89, Capítol 5].

Definició B.1. *Un espai topològic X és* ***normal*** *o $T4$ si per a cada parell de conjunts tancats disjunts C i D existeixen oberts U, V $C \subseteq U$, $D \subseteq V$ tals que $U \cap V = \emptyset$. En el cas particular que la propietat siga certa quan B és un punt només direm que és* ***regular*** *o $T3$.*

Teorema B.2 (Lema de Urysohn)**.** *Si X és un espai topològic normal, aleshores per a cada parell de subconjunts tancats disjunts A i B existeix una funció contínua $f : X \to I$ tal que $f(x) = 0$ per a tot $x \in A$ i $f(x) = 1$ per a tot $x \in B$.*

Demostració. Per a cada $q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ definim l'obert $V_q \subset V$ a partir de les condicions:

1. $\overline{V_q} \subset V_{q'}$, si $q < q'$
2. $A \subset V_0$ i $B \subset X \backslash V_1$

Considerem una successió $\{q_i\}_{i=1}^n \subseteq [0,1] \cap \mathbb{Q}$, amb $q_1 = 0$ i $q_2 = 1$, $q_i \neq q_j$ si $i \neq j$ i $\cup_{i \in \mathbb{N}} \{q_i\} = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ que sabem que existeix per ser els racionals numerables. Per ser normal, existeixen U i V tals que $A \subset U$ i $B \subset V$ amb $U \cap V$, en particular $X \backslash B \subset X \backslash V$ i per tant si prenem $V_0 = U$ i $V_1 = X \backslash B$ satisfan (2).
Si definim la condició (3.k) com:

$$\overline{V_{q_i}} \subset V_{q_i}, \quad \text{si } q_i < q_j, i, j \leq k \tag{B.0.1}$$

És clar que V_0 i V_1 satisfan la condició (3.2). Ara anem a raonar per inducció, suposem que V_{q_i} estan definits per a $i < n$, $n \geq 2$ i que satisfan (3.n). Si ara denotem q_l i q_m als elements:

$$q_l = \max_{i \leq n} \{q_i / \ q_i < q_{n+1}\}, \quad q_m = \min_{i \leq n} \{q_i / \ q_i > q_{n+1}\} \tag{B.0.2}$$

tenim per (3.n) que $\overline{V}_{q_l} \subset V_{q_m}$. Raonant com abans per ser normal trobem U obert tal que $\overline{V_{q_l}} \subset U \subset \overline{U} \subset V_{q_m}$. Si considerem $V_{q_{n+1}} := U$ és clar que $V_{q_1}, ..., V_{q_{n+1}}$ satisfà la condició (3.n+1). Aleshores aplicant inducció obtenim una successió $\{V_{q_i}\}_{i=1}^{\infty}$ que satisfà (1) i (2). Ara definim la funció $f : X \to I$ definida com:

$$f(x) = \begin{cases} \inf_{q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} \{q / x \in V_q\}, & \text{si } x \in V_1 \\ 1 & \text{si } x \in X \backslash V_1 \end{cases} \tag{B.0.3}$$

Per la condició (2) tenim que $f(A) \subset \{0\}$ i $f(B) \subset \{1\}$. Per tant només cal demostrar que és contínua. Si demostrem que $f^{-1}([0,a[)$, $a \leq 1$ i $f^{-1}(]b,1])$, $b \geq 0$ són oberts aleshores ja tindrem que és contínua.
Per una banda, $f(x) < a$ sii existeix $q < a$ tal que $x \in V_q$, aleshores

$$f^{-1}([0,a[) = \bigcup_{r<a} V_r \tag{B.0.4}$$

és obert. Per altra banda, $f(x) > b$ sii existeix $q' > b$ tal que $x \notin V_{q'}$, aplicant la condició (1), existeix $q > r$ tal que $x \notin \overline{V}_{q'}$. Aleshores,

$$f^{-1}(]b,1]) = \bigcup_{r>b} X \backslash \overline{V_q} = X \backslash \bigcap_{r>b} \overline{V}_q \tag{B.0.5}$$

és obert. Per tant f és contínua. □

Definició B.3. *Siga X un espai topològic.*

1. *Un recobriment obert $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ és un **refinament** d'un recobriment obert de $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j \in J}$ si per a tot $j \in J$ existeix $i \in I$ tal que $B_j \subseteq A_i$.*

2. *Un **recobriment** obert $\mathcal{A}$ és **localment finit** si per a tot $x \in X$ existeix un entorn U tal que $U \cap A_i \neq 0$ només per a una quantitat finita de $i \in I$.*

3. *X és **paracompacte** si tot recobriment obert admet un recobriment localment finit.*

4. *X és **localment compacte** si tot punt admet una bade d'entorns compactes.*

Lema B.4. *Per a tota família localment finita $\{A_i\}_{i \in I}$ tenim que*

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A}_I \tag{B.0.6}$$

Demostració. És clar que $\overline{A}_i \subseteq \overline{\cup_{i \in I} A_i}$ per a tot $i \in I$. Per tant només cal provar l'altra inclusió. Com que la família és localment finita per a cada $x \in \overline{\cup_{i \in I} A_i}$ existeix un entorn

U tal que el conjunt $I_0 = \{i \in I / U \cap A_i \neq \emptyset\}$ és finit. Per definició de punt d'adherència tenim que $x \notin \overline{\cup_{i\in I\setminus I_0} A_i}$ i com que:

$$x \in \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \overline{\bigcup_{i\in I_0} A_i} \bigcup \overline{\bigcup_{i\in I\setminus} A_i} \tag{B.0.7}$$

Aleshores $x \in \overline{\bigcup_{i\in I_0} A_i} = \bigcup_{i\in I_0} \overline{A}_i \subset \bigcup_{i\in I} \overline{A}_i$. □

Lema B.5. *Siga X un espai paracompacte i Hausdorff i A, B un parell de conjunts tancats. Si per a cada $x \in B$ existeixen oberts disjunts U_x i V_x tals que $A \subset U_x$ i $x \in V_x$, aleshores existeixen U, V oberts disjunts tals que $A \subset U$ i $B \subset V$*

Demostració. La família $\{V_x\}_{x\in B} \cup \{X \backslash B\}$ és un recobriment obert de X, per ser paracompacte existeix un refinament $\{W_i\}_{i\in I}$ localment finit. Siga $I_0 = \{i \in I / \ W_i \cap B \neq 0\}$ aleshores $\{W_i\}_{i\in I_0}$ és un recobriment obert de B i a més $A \cap \overline{W}_i = \emptyset$ per a tot $i \in I_0$.
Aplicant el lema anterior tenim que $\cup_{i\in I_0} \overline{W}_i$ és tancat, per tant $U = X \backslash \cup_{i\in I_0} \overline{W}_i$ és obert i triant $V = \cup_{i\in I_0} W_i$, tenim que U i V satisfan les condicions de l'enunciat. □

Proposició B.6. *Tot espai paracompacte i Hausdorff és normal.*

Demostració. Considerem $x \in X$ i C un conjunt tancat tal que $x \notin C$, en les condicions del lema anterior considerem $A = \{x\}$ i $B = C$, per ser Hausdorff és clar que es satisfan les hipòtesi del teorema i existeixen dos oberts U, V disjunts tals que $x \in U$ i $C \subseteq V$.
Ara donats dos conjunts tancats disjunts C i D apliquem el fet anterior a C i cada punt de D, aleshores obtenim les hipòtesi del lema i obtenim que X és regular. □

Definició B.7. *Una **partició de la unitat** és una família de funcions contínues tal que*

$$\{\lambda_i : X \to [0,1]\}_{i\in I} \quad \textit{tal que} \sum_{i\in I} \lambda_i(x) = 1 \tag{B.0.8}$$

Notem que la convergència de la sèrie implica que $\lambda_i(x) = 0$ llevat d'un nombre finit de funcions.
La partició de la unitat és localment finita si per a cada punt n'hi ha un entorn de manera que totes les funcions són nul·les llevat de $\lambda_{i_1}, ..., \lambda_{i_k}$ on $i_1, ..., i_k \in I$.
Una partició de la unitat està subordinada a un recobriment $\mathcal{A}$ de X si el recobriment $\{\lambda^{-1}(]0,1])\}_{i\in I}$ és un refinament de $\mathcal{A}$.

Lema B.8. *Si X és és regular i per a cada recobriment de X, $\{U_i\}_{i\in I}$ existeix un refinament localment finit, aleshores existeix un recobriment localment finit tancat $\{F_i\}_{i=I}$ tal que $F_i \subseteq U_i$ per a tot $i \in I$.*

Demostració. Com que sabem que és regular tenim que existeix $\mathcal{B}$ recobriment obert de X tal que per a tot $i \in I$ existeix $W \in \mathcal{W}$ tal que $\overline{W} \subset U_i$, això és degut a que si considerem el tancat $X \backslash U_i$ i un punt $x \in U_i$ aplicant la condició de regularitat podem extraure entorns oberts disjunts U_x i $U_{X \backslash U_i}$ i és clar que $ad(U_x) \cap X \backslash U_i = \emptyset$.
Siga $\{A_j\}_{j \in J}$ un refinament localment finit de $\mathcal{B}$, per a cada $j \in J$ existeix $i(j) \in I$ tal que $\overline{A}_j \subseteq U_{i(j)}$, siga $F_i = \cup_{i(j)=i} \overline{A}_j$, pel lema B.4 tenim que és tancat i a més la família $\{F_i\}_{i \in I}$ és un refinament localment finit i tancat de $\{U_i\}_{i \in I}$ ja que $F_i \subseteq U_i$ per a tot $i \in I$. □

Teorema B.9. *Si X és paracompacte i Hausdorff aleshores cada recobriment obert té un refinament localment finit amb una partició de la unitat subordinada a aquest.*

Demostració. Com que X és paracompacte i Hausdorff en particular és regular aleshores tenim la condició del lema anterior aleshores per a cada recobriment obert $\mathcal{A}$ existeixen $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un refinament obert localment finit de $\mathcal{A}$ i un refinament tancat localment compacte $\{T_i\}_{i \in I}$ de $\mathcal{U}$ amb $T_i \subseteq U_i$. Pel lema de Urysohn B.2, per a cada $i \in I$ existeix $g_i : X \to I$ tal que $g_i(x)|_{X \backslash U_s} = 0$ i $g_s|_{T_i} = 1$. Com que $\mathcal{U}$ és localment finita la funció $g(x) = \sum_{i \in I} g_i(x)$ està ben definida i és contínua. Per tant si considerem $\{f_i := g_i/g\}_{i \in I}$ tenim que és una partició de la unitat subordinada a $\mathcal{A}$. □

Nota B.10. El recíproc també és cert, però no el necessitarem.

Apèndix C

Teoria de categories elemental

La teoria de categories històricament naix de l'estudi de la topologia algebraica i la cohomologia això fa que siga un poc inevitable dependre d'ella. Aquest apèndix té com a objectiu definir conceptes bàsics de teoria de categories intentant sempre posar exemples relacionats en el treball. En particular, com que els límits i colímits tenen especial rellevància en les demostracions del capítol de Cohomologia sí hem fet un parell d'exercicis que es gastaran per provar propietats necessàries. Per redactar aquest apèndix hem gastat com a referències [Dol80, Capítol 1] i [Rie19].

C.1 Categories

Definició C.1. *Una **categoria** $\mathscr{C}$ consisteix en*

1. *una classe d'**objectes**, denotada com $Ob(\mathscr{C})$.*
2. *Per a cada parell $X, Y \in Ob(\mathscr{C})$ una classe de **morfismes** o **fletxes** de X a Y, el denotem com $\mathscr{C}(X,Y)$. Si $\alpha \in \mathscr{C}(X,Y)$, aleshores li diem a X domini de α i a Y codomini de α, també podem escriure $\alpha : X \to Y$ o $X \overset{\alpha}{\to} Y$. En el cas particular que $Y = X$ escriurem $\mathscr{C}(X,X) = End_{\mathscr{C}}(X)$*
3. *Per a cada terna $X, Y, Z \in Ob(\mathscr{C})$, existeix una aplicació de $\mathscr{C}(X,Y) \times \mathscr{C}(X,Z)$ a $\mathscr{C}(X,Z)$ anomenada **composició**. La imatge de (α, β) es denota com $\beta \circ \alpha$ o $\beta\alpha$.*

Aquestos han de complir els següents axiomes:

- ***Associativitat**. Si $X \overset{\alpha}{\to} Y \overset{\beta}{\to} Z \overset{\gamma}{\to} W$, aleshores, $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$.*
- ***Existència de identitat**. Per a cada $X \in Ob(\mathscr{C})$ existeix un morfisme $X \xrightarrow{id_X} X$ tal que:*
$$\alpha \circ id_X = \alpha, \quad id_Y \circ \alpha = \alpha, \qquad \text{on } X \xrightarrow{\alpha} Y \tag{C.1.1}$$
a més aquesta és única ja que $id_X = id_X \circ id'_X = id'_X$.

Exemple C.2.

- La categoria dels conjunts $\mathscr{C} = Set$. Els objectes són conjunts i $\mathscr{C}(X,Y)$ són les aplicacions entre X i Y.
- La categoria dels espais topològics $\mathscr{C} = Top$. Els objectes són els espais topològics i $C(X,Y)$ les aplicacions contínues entre X i Y.
- La categoria $\mathscr{C} = Htpy$. Els objectes són els espais topològics i $C(X,Y)$ les classes d'homotopia d'aplicacions contínues entre X i Y.
- Tot conjunt parcialment ordenat es pot vore com a categoria $\mathscr{C}$. Triem $Ob(\mathscr{C}) = C$ i $\mathscr{C}(X,Y) = \emptyset$ si $X \nleq Y$ i $\mathscr{C}(X,Y)$ és una única fletxa si $X \leq Y$.
- Siga R un anell commutatiu aleshores definim $\mathscr{C} = Mod_R$. Els objectes són R-mòduls i els morfismes R-homomorfismes. Anàlogament, donat un R-mòdul graduat definim $GrMod_{\mathbb{R}}$ com la categoria dels R-mòduls graduats on els morfismes són els homomorfismes de R-mòduls graduats.
- Siga R un anell commutatiu aleshores definim $\mathscr{C} = Ch_R$. Els objectes són complexos de cadenes sobre R i $\mathscr{C}(X,Y)$ aplicacions de cadenes de X a Y.
- Donada una categoria $\mathscr{C}$, definim la **categoria oposada**, $\mathscr{C}^{op}$, com la categoria que té els mateixos objectes. $Ob(\mathscr{C}) = Ob(\mathscr{C}^{op})$ i $\mathscr{C}^{op}(X,Y) = \mathscr{C}(Y,X)$ i la composició $\circ_{\mathscr{C}^{op}}$ és defineix com $\beta \circ_{\mathscr{C}^{op}} \alpha = \alpha \circ_{\mathscr{C}} \beta$. És clar que és una categoria i que $(\mathscr{C}^{op})^{op} = \mathscr{C}$.
- Donat R un anell commutatiu unitari tenim que $\mathscr{C} = Skew_R$ és la categoria on els objectes són R-àlgebres anticommutatives i els morfismes són morfismes d'àlgebres.

Definició C.3. *Una categoria $\mathscr{C}$ on $Ob(\mathscr{C})$ és un conjunt direm que és* ***xicoteta****.*
Una categoria $\mathscr{C}$ on la classe dels morfismes és un conjunt direm que és una categoria ***localment xicoteta****, de normal anem a treballar sempre en categories localment xicotetes, aleshores*

Definició C.4. *Donat una categoria $\mathscr{C}$ i $f \in \mathscr{C}(X,Y)$, definim f és un* ***isomorfisme*** *si existeix $g \in \mathscr{C}(Y,X)$ tal que $gf = 1_X$ i $fg = 1_Y$. A més, direm que X i Y són isomorfs si existeix un isomorfisme entre els dos, el denotarem com $X \cong Y$.*

Exemple C.5.

- En Set els isomorfismes són les bijeccions.
- En Top els isomorfismes són els homeomorfismes.
- En $Htpy$ els isomorfismes són les equivalències d'homotopia.
- En $(\mathbb{N}, \leq)$ els únics isomorfismes són les fletxes identitat $n \leq n$.

Definició C.6. *Si $\mathscr{C}$ i $\mathscr{C}'$ són categories, direm que $\mathscr{C}'$ és una subcategoria****subcategoria*** *de $\mathscr{C}$ si:*

1. $Ob(\mathscr{C}') \subset Ob(\mathscr{C})$
2. $\mathscr{C}'(X',Y') \subset \mathscr{C}(X',Y')$ *per a tot* $X',Y' \in Ob(\mathscr{C}')$.
3. *les composicions de* $\alpha \in \mathscr{C}'(X',Y')$ *i* $\beta \in \mathscr{C}'(X',Y')$ *coincideixen en* $\mathscr{C}$ *i* $\mathscr{C}'$.
4. *els morfismes identitat de* $X \in Ob(\mathscr{C}')$ *coincideixen en* $\mathscr{C}'$ *i* $\mathscr{C}$.

Si a més $\mathscr{C}'(X',Y') = \mathscr{C}(X',Y')$ *per a tot* $X',Y' \in Ob(\mathscr{C})$ *direm que és una subcategoria* ***plena*** *anàlogament si* $ob(\mathscr{C}) = ob(\mathscr{C}')$ *direm que és una subcategoria* ***ampla***.

Exemple C.7.

- La categoria dels conjunts finits és una subcategoria plena de Set.
- Donat R un anell commutatiu la categoria dels R-mòduls anticommutatius, és a dir, que el producte compleix que $a \cdot b = -b \cdot a$, $\mathscr{C} = Skew_R$ és una subcategoria plena de Mod_R.

Objectes inicials i terminals.

Definició C.8. *Siga* $\mathscr{C}$ *una categoria, direm que* $I \in Ob(\mathscr{C})$ *és* ***inicial*** *si per a tot* $X \in Ob(\mathscr{C})$ *existeix un únic morfisme* $I \to X$. *Anàlogament, direm que* $T \in Ob(\mathscr{C})$ *és* ***terminal*** *si per a tot* $X \in Ob(\mathscr{C})$ *existeix un únic morfisme* $X \to T$.

Exemple C.9.

- $\mathbb{Z}$ és inicial en la categoria dels anells, ja que per a qualsevol anell R es pot definir un únic homomorfisme $f : \mathbb{Z} \to R$ donat per $f(1_{\mathbb{Z}}) = 1_R$ i $f(0_{\mathbb{Z}}) = 0_R$.
- En Set i Top el conjunt buit $\emptyset$ és final i els conjunts d'un únic punt són terminals.

Proposició C.10. *Donats dos objectes inicials o dos objectes terminals* U *i* U' *existeix un únic isomorfisme* $U \to U'$.

Demostració. Considerem el cas en què són inicials. Com que U és inicial existeix un únic morfisme $U \overset{u}{\to} U'$ i un únic morfisme $U \overset{id_U}{\to} U$, com que U' és inicial existeix un únic morfisme $U \overset{u'}{\to} U'$. Ara bé, com que $u' \circ u : U \to U$ està ben definit per unicitat $u' \circ u = id_U$, fent el mateix raonament arribem a que $u \circ u' = id_{U'}$, i per tant u és isomorfisme.
La prova per a terminals és completament anàloga. □

C.2 Functors

Definició C.11. *Siguen* $\mathscr{C}$ *i* $\mathscr{D}$ *categories. Un* ***functor*** *(covariant)* T *de* $\mathscr{C}$ *a* $\mathscr{D}$, $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ *és:*

1. *una correspondència* $T : Ob(\mathscr{C}) \to Ob(\mathscr{D})$.
2. *aplicacions* $T_{XY} : \mathscr{C}(X,Y) \to \mathscr{D}(TX,TY)$ *per a cada* X, Y *tals que:*

- $T(\beta \circ \alpha) = (T\alpha) \circ T(\beta)$ *per a tot* $X \overset{\alpha}{\to} Y \overset{\beta}{\to} Z$ *en* $\mathscr{C}$*.*
- $T(id_X) = id_{TX}$ *per a tot* $X \in Ob(X)$*.*

Un ***functor contravariant*** *de* $\mathscr{C}$ *a* $\mathscr{D}$ *és un functor de* $\mathscr{C}^{op}$ *a* $\mathscr{D}$*, només que en la condició (2) canviem* $T_{XY} : \mathscr{C}(Y, X) \to \mathscr{D}(TX, TY)$ *i* $T(\beta \circ \alpha) = (T\alpha) \circ (T\beta)$*.*

Exemple C.12.

- El functor identitat $id_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$, donat per $id_{\mathscr{C}}(X) = X$ i $id_{\mathscr{C}}(\alpha) = \alpha$, per a tots els objectes X i morfismes α de $\mathscr{C}$.
- Si $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ i $U : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ són functors aleshores la composició és un functor $UT : \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ definit com $(UT)X = U(TX)$ i $(UT)(\alpha) = U(T\alpha)$, per a tots els objectes X i morfismes α de $\mathscr{C}$.
- Donat $D \in Ob(\mathscr{D})$ fix definim el functor constant $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ de manera que $TX = D$ i $T\alpha = id_D$ per a tots els objectes X i morfismes α de $\mathscr{C}$.
- Donat Top i $Htpy$ podem definir el functor $Htp : Top \to Htpy$ que deixa invariants els objectes i du cada aplicació contínua a la seua classe d'homotopia.
- Siga R un anell, definim el functor contravariant $\mathrm{Hom}_R(-, R) : Mod_R \to Mod_R$, on $\mathrm{Hom}_R(-, R) = \mathrm{Hom}_R(X, R)$ per a tot objecte de Mod_R i donat $\alpha \in Mod_R(X, Y)$ definim $\mathrm{Hom}_R(-, R)(\alpha) = \alpha^* : \mathrm{Hom}_R(Y, R) \to \mathrm{Hom}_R(X, R)$ on $\alpha^*(\beta) = \beta \circ \alpha$ on $\beta \in \mathrm{Hom}_R(Y, R)$.

Transformacions naturals

Definició C.13. *Siguen* $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ *categories i siguen* $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ *functors, direm que* $\alpha : F \to G$ *és una* ***transformació natural****, si és una correspondència que a cada* $X \in Ob(\mathscr{C})$ *li associa:*

$$\alpha_X : FX \to GX \tag{C.2.1}$$

i a més, per a cada morfisme $f \in \mathscr{C}(X, Y)$ *tenim el diagrama commutatiu:*

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{\alpha_X} & GX \\ {\scriptstyle Ff}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Gf} \\ FY & \xrightarrow{\alpha_Y} & GY \end{array} \tag{C.2.2}$$

Adjuncions

Donat $A \overset{f}{\to} B$ un morfisme en una categoria localment xicoteta $\mathscr{C}$, per a cada $X \in Ob(\mathscr{C})$, definim les aplicacions

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(X, A) & \overset{f_*}{\to} & \mathrm{Hom}(X, B) \\ h & \mapsto & f \circ h \end{array} , \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(B, X) & \overset{f^*}{\to} & \mathrm{Hom}(A, X) \\ h & \mapsto & h \circ f \end{array} \tag{C.2.3}$$

Definició C.14. *Para cada objecte $X \in Ob(\mathscr{C})$, definim el functor*

$$\mathrm{Hom}(X, \bullet) \colon \mathscr{C} \to Set \tag{C.2.4}$$

que actua de manera que $A \mapsto \mathrm{Hom}(X, A)$ i $f \mapsto f_*$.
Anàlogament, definim el functor

$$\mathrm{Hom}(\bullet, X) \colon \mathscr{C}^{op} \to Set \tag{C.2.5}$$

que actua de manera que $A \mapsto \mathrm{Hom}(A, X)$ i $f \mapsto f^*$.

Donats dos functors $L : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ i $R : \mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ una **adjunció** consisteix en donar a cada objecte X de $\mathscr{C}$ i Y de $\mathscr{C}'$ una bijecció

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(LX, Y) \xrightarrow{\eta_{X,Y}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, RY) \tag{C.2.6}$$

de manera que es satisfà

- Per a tot objecte $X \in ob(\mathscr{C})$ i tot morfisme $Y \xrightarrow{f} Y'$ de $\mathscr{C}'$ es té el diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(LX, Y) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\eta_{X,Y}"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(LX, Y') \arrow[d, "\eta_{X,Y'}"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, RY) \arrow[r, "(Rf)_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, RY') \end{tikzcd} \tag{C.2.7}$$

- Per a tot objecte Y de $\mathscr{C}'$ i tot morfisme $X \xrightarrow{f} X'$ en $\mathscr{C}$ es té el diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(LX', Y) \arrow[r, "(Lf)^*"] \arrow[d, "\eta_{X',Y}"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(LX, Y) \arrow[d, "\eta_{X,Y}"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X', RY) \arrow[r, "f^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, RY) \end{tikzcd} \tag{C.2.8}$$

En aquest cas direm que L és **adjunt a esquerra** de R o que R és **adjunt a dreta** de L. Per a la definició formal d'adjunció i el cas contravariant vore [Rie19, Capítol 4].

Exemple C.15.
- El functor contravariant $\mathrm{Hom}_R(-, R) : Mod_R \to Mod_R$ és adjunt a dreta de sí mateix.

C.3 Límits i colímits

Definició C.16. *Siga J una categoria xicoteta. Un **diagrama** $\mathcal{D}$ en forma J en una categoria $\mathscr{C}$ és un functor $\mathcal{D} : J \to \mathscr{C}$.*

Exemple C.17.
- Considerem la categoria $\bullet$ donada per un únic punt i la fletxa identitat, un diagrama $\mathcal{D}$ de forma $\bullet$ en $\mathscr{C}$ és un objecte en $X \in \mathscr{C}$.
- Considerem la categoria definida pel diagrama commutatiu

$$J = \begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{array} = \begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 3 & \longrightarrow & 4 \end{array} \tag{C.3.1}$$

  Un diagrama de forma J consisteix en 4 objectes i 4 fletxes formant el diagrama commutatiu:

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \longrightarrow & X_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_3 & \longrightarrow & X_4 \end{array} \tag{C.3.2}$$

  Les fletxes identitat no es dibuixen sinó que les deixem implícites.
- Si considerem com a J els naturals amb la relació d'ordre usual $(\mathbb{N}, \leq)$. Un diagrama $\mathcal{D}$ amb forma $(\mathbb{N}, \leq)$ sobre $\mathscr{C}$ és una successió d'objectes de $\mathscr{C}$ $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ amb morfismes $X_n \xrightarrow{f_n} X_{n+1}$.

Recordem que en l'exemple C.12 ja havíem definir el functor constant $ct_X : J \to \mathscr{C}$.

Definició C.18. *Un **con** c sobre $\mathcal{D}$ amb **zenit** X és una transformació natural:*

$$ct_X \xRightarrow{c} \mathcal{D} \tag{C.3.3}$$

És a dir, un con és una col·lecció de morfismes $\{X \xrightarrow{\lambda_j} X_j\}_{j \in Ob(J)}$ tals que per a qualsevol morfisme $j \xrightarrow{f} k$ en J, tenim el diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\lambda_j"'] \arrow[dr, "\lambda_k"] & \\ X_j \arrow[rr, "\mathcal{D}f"'] & & X_k \end{tikzcd} \tag{C.3.4}$$

*Als morfismes λ_i $i \in J$ els direm **potes del diagrama**.*
*Anàlogament definim un con c sota $\mathcal{D}$ o **cocon** sobre $\mathcal{D}$ amb **nadir** X com una transformació natural:*

$$\mathcal{D} \xRightarrow{c} ct_X \tag{C.3.5}$$

És a dir, un cocon és una col·lecció de morfismes $\{X_j \xrightarrow{\lambda_j} X\}_{j\in Ob(J)}$ *tals que per a qualsevol morfisme* $j \xrightarrow{f} k$ *en* J*, tenim el diagrama commutatiu:*

$$\begin{tikzcd} X_j \arrow[rr, "\mathcal{D}f"] \arrow[dr, "\lambda_j"'] & & X_k \arrow[dl, "\lambda_k"] \\ & X & \end{tikzcd} \tag{C.3.6}$$

Igual que abans als morfismes λ_i $i \in J$ *els diem* ***potes****.*

Exemple C.19.

- Si considerem la categoria $(\mathbb{Z}, \leq)$, donat un subconjunt $S \subseteq \mathbb{Z}$ considerem la subcategoria $(S, \leq)$ i el diagrama donat per la inclusió $(S, \leq) \xrightarrow{\mathcal{D}} (\mathbb{Z}, \leq)$. Aleshores una fita inferior x de S és un con sobre $\mathcal{D}$ amb zenit x i una fita superior y és un cocon sobre $\mathcal{D}$ amb nadir y.

Si considerem dos cons $ct_X \Rightarrow \mathcal{D}$ i $ct_Y \Rightarrow \mathcal{D}$ amb potes $\{\lambda_j \colon X \to X_j\}_{j\in J}$ y $\{\mu_j \colon Y \to X_j\}_{j\in J}$, Una transformació natural $ct_X \Rightarrow ct_Y$ tal que el següent diagrama és commutatiu

$$\begin{tikzcd} ct_X \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & ct_Y \arrow[dl, Rightarrow] \\ & \mathcal{D} & \end{tikzcd} \tag{C.3.7}$$

és a dir donar un morfismes $f : X \to Y$ tal que per a tot $j \in J$ tenim que $\lambda_j = \mu_j \circ f$. Aquest el podem posar com el diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"'] \arrow[ddl, "\lambda_j"'] \arrow[ddr, "\lambda_k"] & \\ & Y \arrow[dl, "\mu_j"] \arrow[dr, "\mu_k"'] & \\ X_j & & X_k \end{tikzcd} \tag{C.3.8}$$

En aquest cas direm que el con $ct_X \Rightarrow \mathcal{D}$ factoritza sobre a través el con $ct_Y \Rightarrow \mathcal{D}$.

Definició C.20. *Un con* $ct_L \overset{l}{\Rightarrow} \mathcal{D}$ *és un* ***límit*** *del diagrama* $\mathcal{D}$ *si per a qualsevol altre con* $ct_X \overset{c}{\Rightarrow} \mathcal{D}$ *existeix una única transformació natural* $ct_X \overset{\eta}{\Rightarrow} ct_L$*, tal que el diagrama següent commuta:*

$$\begin{tikzcd} ct_X \arrow[rr, Rightarrow, "\eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "c"'] & & ct_L \arrow[dl, Rightarrow, "l"] \\ & \mathcal{D} & \end{tikzcd} \tag{C.3.9}$$

que és el mateix que dir que existeix un únic morfisme $X \xrightarrow{f} L$ de manera que el diagrama C.3.8 *és commutatiu. A aquesta darrera propietat del límit se li diu* ***propietat universal*** *del límit.*
Anàlogament podem definir: un cocon $\mathcal{D} \overset{k}{\Rightarrow} ct_K$ és un ***colímit*** *del diagrama $\mathcal{D}$ si per a qualsevol altre con $\mathcal{D} \overset{c}{\Rightarrow} ct_X$ existeix una única transformació natural $ct_K \overset{\eta}{\Rightarrow} ct_X$, tal que el diagrama següent commuta:*

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D} \arrow[dl, Rightarrow, "k"'] \arrow[dr, Rightarrow, "c"] & \\ ct_K \arrow[rr, Rightarrow, "\eta"'] & & ct_X \end{tikzcd} \tag{C.3.10}$$

que és el mateix que dir que existeix un únic morfisme $K \xrightarrow{f} X$ tal que per a tot $j, k \in J$, el següent diagrama commuta:

$$\begin{tikzcd} X_j \arrow[dr, "\lambda_j"] \arrow[ddr, "\mu_j"'] & & X_k \arrow[dl, "\lambda_k"'] \arrow[ddl, "\mu_k"] \\ & K \arrow[d, "f"] & \\ & X & \end{tikzcd} \tag{C.3.11}$$

Aquesta és la ***propietat universal*** *del colímit.*

Exemple C.21.

- Donat un subconjunt $S \subset \mathbb{R}$, si considerem el diagrama donat per $(S, \leq)$ aleshores un límit de $\mathcal{D}$ és $x = \inf S$ i el diagrama donat per $(S, \leq)^{op} = (S, \geq)$ un colímit de $\mathcal{D}$ és $x = \sup S$.
- Si considerem la categoria buida J, tot diagrama $\mathcal{D}$ sobre $\mathscr{C}$ és buit. Aleshores un con sobre $\mathcal{D}$ és un objecte de $\mathscr{C}$, per definició de límit T és terminal sii és límit del diagrama buit. Si considerem el cocon sota $\mathcal{D}$ obtenim que un objecte és inicial en $\mathscr{C}^{op}$ sii és el colímit del diagrama buit. (En aquest sentit podem dir que són universals).

Definició C.22. *Una relació $\leq$ en un conjunt Λ es diu* ***preordenada*** *si és*

- *Reflexiva. $\lambda \leq \lambda$ per a tot $\lambda \in \Lambda$*
- *Transitiva. $\lambda \leq \mu \leq \nu$ implica que $\lambda \leq \nu$, amb $\mu, \lambda, \mu \in \Lambda$.*

Un conjunt preordenat és ***dirigit*** *si per a cada parell $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ existeix μ tal que $\lambda \leq \mu$ i $\lambda' \leq \mu$.*

Exemple C.23. • Tota categoria xicoteta $\mathscr{C}$ on per a cada X, Y objectes $\mathscr{C}(X, Y)$ té un o cap morfisme. La relació de preordre es defineix com $X \leq Y$ sii existeix $X \xrightarrow{f} Y$.

- Tot conjunt parcialment ordenat en particular és també preordenat. Qualsevol reticle, conjunt parcialment ordenat on cada parell d'elements té un suprem i un ínfim, és en particular un conjunt preordenat dirigit.
  - Qualsevol subconjunt de $\mathbb{Z}$ en la relació d'ordre usual és un reticle, donat un parell el suprem és el màxim dels dos.
  - Donat un grup G, el conjunt dels subgrups amb la relació d'ordre definida per $H \leq N$ sii H és subgrup de N. G és el suprem
  - Els oberts d'un espai topològic ordenats per la inclusió. L'espai total i el buit són el suprem i l'ínfim respectivament.
- Donat un CW-Complex K, K^n els seus n-esquelets, si considerem el diagrama en forma $\mathbb{N}$ al functor $F : (\mathbb{N}, \leq) \to Top$ tal que $Fn = K^n$ i $F(n \leq m) = i : K^n \hookrightarrow K^m$. És clar que F és una família dirigida.

Definició C.24. *Una **família dirigida** és un diagrama amb forma Λ, on Λ és un conjunt dirigit.*

Definició C.25. *Siga J un conjunt dirigit un cocon sota $\mathcal{D}$ en forma J en $\mathscr{C}$ és un objecte K i uns morfismes $\{X_j \xrightarrow{\lambda_j} K\}_{j \in J}$ tal que per a tot $i \leq j$, el següent diagrama és commutatiu:*

$$\begin{tikzcd} X_j \arrow[rr, "\mathcal{D}\leq"] \arrow[dr, "\lambda_j"'] & & X_k \arrow[dl, "\lambda_k"] \\ & K & \end{tikzcd} \tag{C.3.12}$$

El colímit de $\mathcal{D}$ es diu **límit directe** de la família dirigida i és un cocon amb nadir denotat com $\varinjlim_{j \in J} X_j$.

Per definició de colímit, per a qualsevol altre cocon amb nadir K existeix un únic morfisme $\varinjlim_{j \in J} X_j \to K$ tal que per a tot $i \leq j$ el següent diagrama és commutatiu:

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[rr, "\mathcal{D}\leq"] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & X_j \arrow[dl] \arrow[ddl] \\ & \varinjlim_{j \in J} X_j \arrow[d, "f"] & \\ & X & \end{tikzcd} \tag{C.3.13}$$

Definició C.26. *Siga J un conjunt dirigit un con sobre $\mathcal{D}$ en forma J en $\mathscr{C}$ és un objecte X i uns morfismes $\{X \overset{\lambda_j}{\to} X_j\}_{j\in J}$ tal que per a tot $i \leq j$, el següent diagrama és commutatiu:*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\lambda_i"'] \arrow[dr, "\lambda_j"] & \\ X_i \arrow[rr, "\mathcal{D}\leq"'] & & X_j \end{tikzcd} \tag{C.3.14}$$

El límit de $\mathcal{D}$ es diu **límit invers** de la família dirigida i és un con amb zenit denotat com $\varprojlim_{j\in J} X_j$.
Per definició de límit, per a qualsevol altre con amb zenit X existeix un únic morfisme $X \to \varprojlim_{j\in J} X_j$ tal que per a tot $j \leq k$ el següent diagrama és commutatiu:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d] \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \\ & \varprojlim_{j\in J} X_j \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X_j \arrow[rr, "\mathcal{D}\leq"'] & & X_k \end{tikzcd} \tag{C.3.15}$$

Exemple C.27. En la categoria Top, Mod_R i també en altres categories algebraiques existeix el límit directe de qualsevol família dirigida i té la forma següent:
Si la família dirigida ve donada per $\{X_j\}_{j\in J}$ i $\rho_{lk} : X_l \to X_k$ els morfismes si $l \leq k$. Definim el conjunt:

$$X = \left(\bigsqcup_{j\in J} X_j \right) / \sim \tag{C.3.16}$$

on $\sim$ denota la relació d'ordre que donats $i, j \in J$ existeix $k \in J$ tal que $i \leq k$ i $j \leq k$. Siga $x_i \in X$ i $x_j \in X_j$ aleshores $(x_i, X_i) \sim (x_j, X_j)$ sii $\rho_{ik}(x_i) = \rho_{jk}(x_j)$. Els morfismes que fan commutar el diagrama són la projecció al quocient de ρ_{lk}.

Exemple C.28. Anem a vore com els límits directes en Top on la família dirigida són espais topològics encaixats coincideixen en la topologia de Whitehead o *Weak Topology.*
Considerem el conjunt dirigit $(\mathbb{N}, \leq)$. Suposem que $X_0, ..., X_k, ...$ és una família d'espais topològics encaixats, amb la inclusió com als morfismes.
Tenim el que l'espai X total serà el de l'exemple anterior, ara bé, per la relació d'equivalència, si considerem $i, j \in \mathbb{N}$, podem assumir que $j \leq k$ (o al contrari).Per tant tindrem que $(x, X_j) \sim (x', X_k)$ sii $\rho_{jk}(x) = \rho_{kk}(x)$ és a dir sii $i(x) = id_{X_k}(x')$ sii $x = x'$, per tant

$X = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. A més les projeccions al quocient passen a ser només les inclusions.
Per a que X siga el límit directe primer necessitem que $i_j : X_j \hookrightarrow X$ siguen contínues, aleshores la topologia més fina tal que eixes aplicacions són contínues està continguda en $\mathcal{T}_X$. Aquesta topologia, $\mathcal{T}$ es defineix de manera que l'antiimatge de qualsevol obert de X té que ser obert en X_i és a dir, $i_j^{-1}(U) \cap X_j$ obert per a qualsevol $j \in J$. Això és equivalent a dir que U és obert sii $U \cap X_j$ és obert en X_j, aquesta és precisament la topologia de Whitehead. Pel que hem dit abans, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_X$.
Ara considerem el mateix espai només amb la topologia de Whitehead $(X, \mathcal{T})$, és clar que tenim un cocon sobre $\{X_i\}$, per la propietat universal, tenim el diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
X_j \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "i"] \arrow[ddr, "i"'] & & X_k \arrow[dl, "i"'] \arrow[ddl, "i"] \\
& (X, \mathcal{T}_X) \arrow[d, "g"] & \\
& (X, \mathcal{T}) &
\end{tikzcd} \tag{C.3.17}$$

Per a que el diagrama siga commutatiu és clar que g ha de ser la identitat, per tant la inversa és contínua ja que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_X$ i té que ser contínua per ser morfisme aleshores és un homeomorfisme i $\mathcal{T} = \mathcal{T}_X$.

Proposició C.29. *Si tenim dos famílies dirigides sobre el mateix conjunt dirigit $\{A_i\}_{i\in I}$ i $\{B_i\}_{i\in I}$ i existeix el límit invers de les cada una, L i L' respectivament, i a més existeixen isomorfismes $A_i \xrightarrow{f_i} B_i$ i un morfisme $L \xrightarrow{\sigma} L'$ tal que el següent diagrama és commutatiu:*

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[rrr, "\sigma"] \arrow[dddl] \arrow[dd] \arrow[dr] & & & L' \arrow[dl] \arrow[dd] \arrow[dddr] & \\
& & A_k \arrow[r, "f_k"] & B_k & & \\
& \ddots \arrow[rrr, "f_{\dots}"] & & & \ddots & \\
A_i \arrow[rrrrr, "f_i"] & & & & & B_i
\end{tikzcd} \tag{C.3.18}$$

Aleshores, $L \xrightarrow{\sigma} L'$ és un isomorfisme.

Demostració. El primer que ens adonem és que al ser commutatiu el diagrama L és el zenit d'un con sobre la família dirigida $\{B_i\}_{i\in I}$ al considerar $L \xrightarrow{\sigma} L' \to B_i$, per la propietat universal el morfisme σ és únic. A més, si considerem f_k^{-1} és clar que la composició

$$L' \to B_k \xrightarrow{f_k^{-1}} A_k \tag{C.3.19}$$

Ens defineix una sèrie de morfismes donen un con amb zenit L sobre la família dirigida $\{A_i\}_{i\in I}$, per la propietat universal existeix un únic morfisme $L' \xrightarrow{\delta} L$ tal que el diagrama aquest commuta. Ara anem a vore que $id_{L'} = \sigma \circ \delta$.
Considerem el diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
 & L' \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] \arrow[ddl] & L \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & L' \arrow[d] \arrow[ddr] & \\
 & & A_j \arrow[d, "h_{ji}"] \arrow[dr, "f_j"] & & \\
 & B_j \arrow[ur, "f_j^{-1}"] \arrow[dl] & A_i \arrow[drr, "f_i"] & B_j \arrow[dr] & \\
B_i \arrow[urr, "f_i^{-1}"'] & & & & B_i
\end{tikzcd} \tag{C.3.20}$$

Aquest diagrama el que fa es dibuixar un con amb zenit L' sobre la família dirigida $\{B_i\}_{i\in I}$ només que ara els morfismes són $L' \to B_j \xrightarrow{f_j^{-1}} A_j \xrightarrow{f_j} B_j$, per la propietat universal existeix una única fletxa $L' \to L'$ que fa el diagrama commutar, però $\delta \circ \sigma$ i $id_{L'}$ també fa el diagrama commutar aleshores $id_{L'} = \sigma \circ \delta$. Anàlogament es comprova que $\delta \circ \sigma = id_L$ i per tant σ és un isomorfisme. $\square$

Finalment enunciem un teorema que ens serà útil:

Teorema C.30 (RAPL)**.** *Els functors adjunts a dreta preserven límits. És a dir, si tenim un diagrama $\mathcal{D} : J \to \mathscr{C}$ i té límit L i $R : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ és un functor adjunt a dreta, tenim aleshores el diagrama:*

$$R \circ \mathcal{D} : J \to \mathscr{C}' \tag{C.3.21}$$

té com a límit RL.

La demostració es pot trobar a [Rie19, Teorema 4.5.2]. El nom *RAPL*, ve de l'anglés *Right Adjoint Preserve Limits.*

Bibliografia

[Alu09] Paolo Aluffi. *Algebra: Chapter 0.* Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2009.

[AM94] Michael Atiyah and Ian G. Macdonald. *Introduction To Commutative Algebra.* Westview Press, 1994.

[Bal22] Juan José Nuño Ballesteros. Apunts de classe “Topologia Diferencial”, 2022.

[BM58] Raul Bott and John Milnor. On the parallelizability of the spheres. *Bulletin of the American Mathematical Society.*, 64:35–61, 1958.

[Die89] Jean Dieudonne. *A History of Algebraic and Differential Topology (1900 - 1960) Chapter 4.* Birkhauser, 1989.

[DL18] Cornelia Drutu and Marc Lackenby. https://www.maths.ox.ac.uk/system/files/attachments/toplectnotes17.pdf, 2018. Notes from “PART A TOPOLOGY” course , University of Oxford, accessed 06-2022.

[Dol80] Albrecht Dold. *Lectures on algebraic topology.* Classics in Mathematics. Springer, 2 edition, 1980.

[Eng89] Ryszard Engelking. *General topology.* Sigma Series in Pure Mathematics. Heldermann Verlag, 1989.

[FF16] Anatoly Fomenko and Dmitry Fuchs. *Homotopical Topology.* Graduate Texts in Mathematics №273. Springer, 2 edition, 2016.

[GP74] Victor Guillemin and Alan Pollack. *Differential Topology.* Prentice Hall, 1974.

[Hat01] Allen Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 1 edition, 2001.

[Kap54] Irving Kaplansky. *Infinite Abelian Groups.* University of Michigan Publications in Mathematics vol. 2. University of Michigan Press, 1954.

[Lan02] Serge Lang. *Algebra.* Graduate Texts in Mathematics №211. Springer, 3 edition, 2002.

[Lee12] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics №218. Springer, 2 edition, 2012.

[Mal12] Cary Malkiewich. https://people.math.binghamton.edu/malkiewich/steenrod.pdf, 2012. Online Notes, University of Binghamton, accessed 06-2022.

[Mor56] Kiiti Morita. On decomposition spaces of locally compact spaces. *Proc. Japan Acad.*, 32:544–548, 1956.

[MS74] John Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic classes*. Annals of mathematics studies 76. Princeton University Press, 1974.

[MT68] Robert E. Mosher and Martin C. Tangora. *Cohomology Operations and Applications to Homotopy Theory*. Harper and Row Publishers, 1968.

[Qui18] Gereon Quick. https://folk.ntnu.no/gereonq/MA3403H2018, 2018. Notes from "Algebraic topology" course , Norwegian University of Science and Technology, accessed 06-2022.

[Rie19] Emily Riehl. *Category theory in context*. Dover Publications, https://emilyriehl.github.io/files/context.pdf edition, 2019.

[Rog16] John Rognes. https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT4530/v16/documents/snake.pdf, 2016. Notes from "Algebraisk topologi I" course, University of Oslo, accessed 06-2022.

[Spa66] Edward H. Spanier. *Algebraic topology*. McGraw-Hill Inc, mgh edition, 1966.

[Sto68] Robert Stong. *Notes on cobordism theory*. Mathematical notes. Princeton University Press, 1st edition, 1968.

[Whi44] Hassler Whitney. The singularities of a smooth n-manifold in (2n-1) space. *Ann. of Math (2)*, 45:247–293, 1944.

[Whi49] John H.C. Whitehead. Combinatorial homotopy i. *Bulletin of the American Mathematical Society.*, 55:214, 1949.