Análisis Vectorial
Licenciatura de Matemáticas

JESÚS GARCIA i FALSET
Departament d'Anàlisi Matemàtica
Universitat de València

22 de diciembre de 2011

Índice general

Capítulo 1

Integrales de Línea

1.1. Vectores

1.1.1. Producto escalar euclídeo y norma euclídea

Definición 1.1.1 *Llamamos producto escalar euclídeo en* $\mathbb{R}^n$ *a la aplicación del producto cartesiano* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *en los números reales* $\mathbb{R}$, *que viene dada por la siguiente expresión*

$$\langle (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Proposición 1.1.2 *Las propiedades fundamentales del producto escalar son:*

a) $\langle x, x \rangle > 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *y* $\langle x, x \rangle = 0$ *si* $x = 0$,
b) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$,
c) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$,
d) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

Ejemplo 1.1.3 *Si* $v = (4, -1, 3)$ *y* $w = (-1, -2, 5)$. *El producto escalar de estos dos vectores es:*

$$\langle v, w \rangle = \langle (4, -1, 3), (-1, -2, 5) \rangle = 4(-1) + (-1)(-2) + 3(5) = 13$$

Definición 1.1.4 *Dado un vector* $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *llamamos norma euclideana de dicho vector a:*

$$\|(x_1, ..., x_n)\| = +\sqrt{\langle (x_1, ..., x_n), (x_1, ..., x_n) \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Este concepto da lugar a la noción de longitud del vector $(x_1, ..., x_n)$ (ver en el plano y en el espacio tridimensional, la relación de este concepto con la distancia al origen).

Proposición 1.1.5 *Las propiedades fundamentales de la norma euclidea son:*
a) $\|x\| \geq 0$ *y* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
c) Desigualdad de Cauchy-Schwarz $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \|y\|$.
c) Desigualdad triangular: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Prueba de la desigualdad de Cauchy-Schwarz

Si alguno de los dos vectores x o y es el vector nulo, entonces la desigualdad es evidente.

Supongamos que $x, y \neq 0$. En este caso podemos introducir los vectores unitarios $a = \frac{x}{\|x\|}$ y $b = \frac{y}{\|y\|}$. Para estos dos nuevos vectores se cumple:

$$0 \leq \|a - b\|^2 = \langle a - b, a - b\rangle = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b\rangle = 2 - 2\langle a, b\rangle.$$

Las desigualdades anteriores no dicen que $\langle a, b\rangle \leq 1$. Por lo tanto,

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\| \|y\|.$$

Por último, reemplazando el vector x por $-x$ obtenemos el resultado.

Ejemplo 1.1.6 *La norma euclidea del vector* $v = (-1, 1, 0)$ *es* $\|v\| = \|(-1, 1, 0)\| = +\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = +\sqrt{2}$.

El ángulo de dos vectores no nulos del plano o del espacio tridimensional v y w se define como el ángulo en radianes $\theta \in [0, \pi]$ que forman las semirectas que tienen como origen el origen de coordenadas y pasan por los puntos v y w respectivamente.

Veamos como en el caso de vectores no colineales en el plano el producto escalar está relacionado con el ángulo que forman dichos vectores.

Sean a, b dos vectores del plano que sean linealmente independientes. Entonces podemos formar el triangulo de lados a b y $a - b$ si llamamos h a la altura de dicho triangulo y θ al ángulo que forman los vectores a y b se tendrá:

$$h = \|a\| \sin(\theta), \quad \|b\| = \|a\| cos(\theta) + \sqrt{\|a - b\|^2 - h^2}$$

Con lo cual

$$(\|b\| - \|a\|cos(\theta))^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b\rangle - \|a\|^2 \sin^2(\theta)$$

De donde se desprende que,

$$\|b\|^2 + \|a\|^2 \cos^2(\theta) - 2\|a\|\|b\| \cos(\theta) = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b\rangle - \|a\|^2 \sin^2(\theta)$$

Ahora simplificando la expresión queda que:

$$\langle a, b\rangle = \|a\|\|b\| \cos(\theta).$$

Este concepto de ángulo se puede generalizar a $\mathbb{R}^n$ de la siguiente forma:

Definición 1.1.7 *Dados dos vectores no nulos $a, b \in \mathbb{R}^n$ llamaremos ángulo formado por dichos vectores al siguiente número real:*

$$\theta := \arccos(\frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|\|b\|}) \in [0, \pi].$$

La definición anterior nos permite ver que si v y w son dos vectores no nulos, entonces $\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\| \cos(\theta)$.

Definición 1.1.8 *Dos vectores v y w se llaman perpendiculares u ortogonales si $\langle v, w\rangle = 0$.*

Ejemplo 1.1.9 *Los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ son ortogonales. En efecto, si calculamos su producto escalar nos queda:*

$$\langle e_1, e_2\rangle = \langle (1, 0), (0, 1)\rangle = 1(0) + (0)1 = 0.$$

1.1.2. Proyecciones.

Sean v y w dos vectores de $\mathbb{R}^n$ con origen común. Si trazamos la perpendicular por el extremo de v a la recta que contiene a w, queda determinado un vector, que se llama *el vector proyección* de v sobre w, y que denotaremos por $P(v, w)$.

Se comprueba de forma fácil que dicho vector viene dado por:

$$P(v, w) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2} w.$$

Una de las aplicaciones importantes del producto escalar y de las proyecciones se da en el campo de la física, cuando hay que calcular la cantidad de trabajo realizada por una fuerza constante. Se define el trabajo realizado W por una fuerza constante de dirección la trayectoria rectilínea de un objeto, como el número Fd, donde F es la magnitud de la fuerza y d la distancia recorrida.

Vamos ahora a considerar el caso de una fuerza que actua en otra dirección.

Experimentalmente se comprueba que, cuando una fuerza F mueve un objeto sobre una recta desde el punto P hasta Q, (con lo cual el vector desplazamiento viene dado por PQ la magnitud del trabajo realizado es la norma del vector proyección de F sobre PQ multiplicado por la distancia recorrida, i.e.,

$$W = \|P(F, PQ)\| \|PQ\| = |\langle F, PQ\rangle|$$

Ejemplo 1.1.10 *Supongamos que el viento ejerce una fuerza de* 2500 *newtons sobre la vela de un barco en dirección* $30^o NE$*. Hallar el trabajo realizado por el viento cuando desplaza el barco* $100m$ *hacia el norte.*

Sabemos que $\|F\| = 2500$newtons. El vector desplazamiento es $PQ = (0, 100)$, luego $\|(0, 100)\| = 100m$. Por lo tanto

$$F = (2500\cos(60^o), 2500\sin(60^o)) = (1250, 1250\sqrt{3})$$

Así, el trabajo realizado es

$$W = \langle (1250, 1250\sqrt{3}), (0, 100)\rangle = 125000\sqrt{3} \text{ julios}$$

1.1.3. El Producto cruz (o vectorial) de dos vectores del espacio tridimensional.

Sean $a = (a_1, a_2, a_3)$ y $b = (b_1, b_2, b_3)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$. A partir de estos dos vectores podemos construir un nuevo vector de la siguiente forma:

$$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1),$$

a dicho vector lo llamaremos vector producto cruz (o producto vectorial) de los vectores a y b. Una regla formal para recordar la construcción de dicho vector es la de desarrollar por menores de la primera fila el siguiente determinante:

$$a \times b = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_3$$

Si calculamos la norma del producto vectorial de los vectores a y b tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rl} \|a \times b\|^2 = & (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = \\ & (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \end{array}$$

Lo que nos dice:

$$\begin{array}{rl} \|a \times b\|^2 = & \|a\|^2\|b\|^2 - (\langle a, b\rangle)^2 \\ & = \|a\|^2\|b\|^2 - \|a\|^2\|b\|^2\cos^2(\theta) \\ & = \|a\|^2\|b\|^2 - \|a\|^2\|b\|^2(1 - \sin^2(\theta)) \\ & = \|a\|^2\|b\|^2\sin^2(\theta) \end{array},$$

de donde se obtiene que

$$\|a \times b\| = \|a\|\|b\||\sin(\theta)|,$$

pero como θ es el ángulo que forman los vectores a y b se tendrá que $\theta \in [0, \pi]$ y por lo tanto $\sin(\theta) \geq 0$, luego podemos afirmar que

$$\|a \times b\| = \|a\|\|b\|\sin(\theta).$$

Teorema 1.1.11 *Sean a, b dos vectores de $\mathbb{R}^3$. El producto cruz de los vectores a y b cumple las siguientes propiedades:*

1. $b \times a = -(a \times b)$,
2. $a \times b$ *es un vector ortogonal a los vectores a y b,*
3. a *y* b *son linealmente dependientes si, y sólo si,* $a \times b = 0$.

Por el apartado (2) del teorema anterior se concluye que el vector $a \times b$ es un vector ortogonal al plano generado por a y b, con longitud $\|a\|b\|\sin(\theta)$. Sin embargo, hay dos vectores que pueden satisfacer estas condiciones. Para determinar cual de los dos vectores representa $a \times b$ se usa la regla de la mano derecha": Si se coloca la palma de la mano derecha de forma que sus dedos se curven desde a en la dirección de b en un ángulo θ, el dedo pulgar apuntará en la dirección de $a \times b$.

Si a y b son colineales (linealmente dependientes), $\sin(\theta) = 0$, de manera que $a \times b = 0$. Si a y b son linealmente independientes, entonces generan un plano y $a \times b$ es un vector perpendicular a ese plano. La longitud de $a \times b$, coincide con el área del paralelogramo que tiene como lados adyacentes a los vectores a y b.

Usando el producto cruz podemos interpretar geométricamente los determinantes 2×2. Si identificamos los vectores de $\mathbb{R}^2$ con los vectores del espacio que tienen la tercera coordenada nula, entonces $a = a_1e_1 + a_2e_2$, $b = b_1e_1 + b_2e_2$. Si θ denota el ángulo que forman ambos vectores, hemos visto que $\|a \times b\| = \|a\|\|b\||\sin(\theta)|$. Como la norma del producto vectorial representa el área del paralelogramo con lados adyacentes a y b,

$$a \times b = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = (a_1b_2 - a_2b_1)e_3.$$

Entonces $\|a \times b\|$ es el valor absoluto del determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

De aquí se obtiene que el valor absoluto del determinante anterior es el área del paralelogramo que tiene como lados adyacentes los vectores $a = a_1e_1 + a_2e_2$, $b = b_1e_1 + b_2e_2$.

1.2. Parametrización de curvas

1.2.1. Trayectorias

Definición 1.2.1 *Dado un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, llamaremos trayectoria o camino en $\mathbb{R}^n$ a toda función continua $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.*

- *Al punto $\alpha(a)$ lo llamaremos punto inicial del camino.*
- *Al punto $\alpha(b)$ lo llamaremos punto final del camino.*
- *Cuando $\alpha(a) = \alpha(b)$ diremos que la trayectoria es cerrada.*
- *Llamaremos arco parametrizado por α al conjunto $\alpha^* := \alpha([a, b]) \subset \mathbb{R}^n$.*

Ejemplo 1.2.2 *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces $G(f)$ es un arco en $\mathbb{R}^2$ que viene parametrizado por el siguiente camino:*

$$\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \quad \alpha(x) = (x, f(x))$$

es claro que $\alpha([a, b]) = G(f)$.

Ejemplo 1.2.3 *La circunferencia $S = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 = R^2\}$ es un arco en el plano que viene parametrizada por*

$$\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \quad \alpha(\theta) = (R\cos(\theta), R\sin(\theta))$$

es claro que $\alpha([0, 2\pi]) = S$.

Hay que tener presente que un arco puede tener muchas paramentrizaciones:

Ejemplo 1.2.4 *El conjunto $A = \{(x, y) \ : \ x, y \geq 0, \ x^2 + y^2 = 4\}$ es un arco en el plano que puede ser paramentrizada por:*

$$\alpha : [0, 2] \to \mathbb{R}^2 \quad \alpha(x) = (x, +\sqrt{4 - x^2})$$

es claro que $\alpha([0, 2]) = A$.

$$\beta : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2 \quad \beta(\theta) = (2\cos(\theta), 2\sin(\theta))$$

es claro que $\beta([0, \frac{\pi}{2}]) = A$.

$$\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2 \quad \gamma(\theta) = (2\sin(\theta), 2\cos(\theta))$$

es claro que $\gamma([0, \frac{\pi}{2}]) = A$.

Definición 1.2.5 *Diremos que un arco $C = \alpha([a, b])$ es simple si α es inyectiva en $[a, b]$.*

El siguiente resultado pretende mostrar la relación existente entre dos paramentrizaciones de un mismo arco simple.

Lema 1.2.6 *Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$, supongamos que $s : I \to \mathbb{R}$ es continua e inyectiva. Entonces s es estrictamente monótona.*

Prueba. Aplicar el teorema de Bolzano.

Teorema 1.2.7 *Consideremos los intervalos cerrados y acotados* $I = [a, b]$ *y* $J = [c, d]$. *Supongamos que* $f : I \to \mathbb{R}^n$, $g : J \to \mathbb{R}^n$ *son funciones continuas las cuales son parametrizaciones del mismo arco simple. Entonces existe una función continua y estrictamente monótona* $s : I \to J$ *tal que*

$$f(t) = g(s(t)), \quad \forall t \in I.$$

Prueba. Como g es inyectiva, se cumple que $g : J \to g(J)$ es biyectiva y por lo tanto existe la función inversa $g^{-1} : g(J) \to J$. Veamos que g^{-1} es continua.

Sea $y \in g(J)$ y sea $y_n \in g(J)$ tal que $y_n \to y$. Tenemos que demostrar que $g^{-1}(y_n) \to g^{-1}(y)$.

Ahora bien, existen $x_n, x \in J$ de forma que $y_n = g(x_n),\ y = g(x)$. Luego debemos probar que $x_n \to x$, sabiendo que $g(x_n) \to g(x)$.

Supongamos, para obtener una contradicción, que (x_n) no converge a x. Como la sucesión (x_n) está acotada, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, existirá una subsucesion (x_{n_k}) convergente a $z \neq x$. Como g es continua, entonces $g(x_{n_k}) \to g(z) \neq g(x)$. Lo cual es una contradicción. Es decir, g^{-1} es continua en $g(J)$. Finalmente definimos $s : I \to J$ como:

$$s = g^{-1} \circ f$$

Esto tiene sentido ya que f y g definen el mismo arco simple $f(I) = g(J)$.

Como s es composición de funciones continuas entonces es continua. Además, es inyectiva por ser composición de inyectivas.

Por último aplicando el lema anterior se desprende que s es estrictamente monótona.

□

Definición 1.2.8 *Dadas dos parametrizaciones* $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ *y* $\beta : J \to \mathbb{R}^n$ *de un mismo arco simple, diremos que son equivalentes si existe una función continua y estrictamente creciente* $s : J \to I$ *de forma que* $\beta = \alpha \circ s$.

Se puede comprobar que la definición de parametrizaciones equivalentes es una relación de equivalencia, i.e., verifica la propiedad reflexiva, simétrica y transitiva.

Definición 1.2.9 *Una curva es una clase de equivalencia de representaciones paramétricas.*

1.2.2. Longitud de una trayectoria

Definición 1.2.10 *Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un camino. Definimos la longitud de la trayectoria α por la siguiente fórmula:*

$$l(\alpha) := \sup L(\alpha, P) := \sum_{i=1}^{n} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|,$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones $P = \{a = t_0 < ... < t_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$. Si $l(\alpha)$ es finito decimos que el camino α es rectificable.

Proposición 1.2.11 *(a) Sea $f : I \to \mathbb{R}^n$ un camino tal que $f(I)$ es un arco simple y sea $P = \{a = t_0 < ... < t_n = b\}$ una partición del intervalo I. Si se define $g_k := f|_{[t_{k-1}, t_k]}$ para $k = 1, 2, ..., n$. Entonces*

$$l(f) = \sum_{k=1}^{n} l(g_k).$$

(b) Sea $I_T := [a, T]$ y definimos $f|_T$ como la restricción de f a $[0, T]$. Definimos $s(T) := l(f|_T)$, entonces s es una función continua para cada $T \in I$.

(c) Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es un camino y P y Q son particiones del intervalo I tal que $P \subseteq Q$, entonces $L(\alpha, P) \leq L(\alpha, Q)$.

Es claro que si la parametrización α define un arco simple, entonces podemos definir la longitud del arco como la longitud de dicha parametrización. El siguiente resultado muestra que la longitud de un arco simple es independiente de la parametrización que seleccionemos.

Teorema 1.2.12 *Sean $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ $\beta : J \to \mathbb{R}^n$ dos representaciones del mismo arco simple. Entonces $l(\alpha) = l(\beta)$.*

Prueba. Por el Teorema 1.2.7, sabemos que existe una función continua y estrictamente monótona s de forma que $\alpha = \beta \circ s$. Sean $P = \{t_o, ..., t_n\}$ y $Q = \{\tau_0, ..., \tau_m\}$ dos particiones de I y J respectivamente. Llamamos

$$L_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|, \quad L_\beta = \sum_{i=1}^{m} \|\beta(\tau_i) - \beta(\tau_{i-1})\|.$$

Cada partición Q del intervalo J se puede obtener mediante una partición P de I llamando

(i) $\tau_i = s(t_i)$ si s es estrictamente creciente o

(ii) poniendo $\tau_i = s(t_{n-i})$ si s es estrictamente decreciente.

En el caso (i) está claro que $\beta(\tau_i) = \alpha(t_i)$ para $i = 0, 2, ..., n$.. En el caso (ii), $\beta(\tau_i) = \alpha(t_{n-i})$.

En ambos casos las sumas L_α y L_β son iguales y por lo tanto $l(\alpha) = l(\beta)$.

$\square$

Cuando las trayectorias son suficientemente diferenciable los métodos del cálculo pueden usarse para obtener su longitud.

Dado un camino en $\mathbb{R}^n$, i.e.; una función continua $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Escribiremos

$$\gamma'(t) := \lim_{h \to t,\ h \in [a,b]} \frac{\gamma(h) - \gamma(t)}{h - t},$$

si tal límite existe. Observemos que si $t \in]a, b[$ entonces $\gamma'(t)$ existe si, y sólo si, γ es diferenciable en el punto t.

Ahora, vamos a extender el concepto de función de clase $\mathcal{C}^q$ a intervalos cerrados.

Definición 1.2.13 *(i) Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria. Diremos que α es de clase C^q en $[a, b]$ si existe $\alpha^{(q)}(t)$ y $\alpha^{(q)}$ es continua en $[a, b]$.*

(ii) Diremos que α es de clase C^q a trozos, si existe $\{a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b\}$ de forma que α es de clase C^q en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

Lema 1.2.14 *Sea $P = \{t_0, ..., t_m\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ y denotamos por $\|P\|$ la longitud del subintervalo más largo de P. Para cualquier función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y para cada selección $u_j \in [t_{j-1}, t_j]$ se tiene que*

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{m} f(u_i)(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b f(t)dt.$$

Prueba. Como f, por el teorema de Heine-Cantor, es uniformemente continua, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

siempre que $|x-y|<\delta$ con $x,y\in[a,b]$. Ahora consideremos una partición P con $0<\|P\|<\delta$. Entonces

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^m f(u_i)(t_i-t_{i-1})-\int_a^b f(t)dt\right| &= \left|\sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i}(f(u_i)-f(t))dt\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i}|f(u_i)-f(t)|dt \\ &\leq \epsilon\sum_{i=1}^m (t_i-t_{i-1})=\epsilon(b-a)\end{aligned}$$

□

Teorema 1.2.15 *Sea $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ una trayectoria de clase C^1. Entonces α es rectificable y además*

$$l(\alpha)=\int_a^b\|\alpha'(t)\|dt.$$

Prueba.
Por definición de longitud sabemos que

$$l(\alpha):=\sup\{\sum_{i=1}^n\|\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})\|\ :\ P=\{t_0,...,t_n\}\in\mathcal{P}([a,b])\}.$$

Por otra parte, por definición de trayectoria de clase C^1, sabemos que existe la función $\alpha':[a,b]\to\mathbb{R}^n$ y es continua. Por lo tanto, la función que asocia $t\in[a,b]\to\|\alpha'(t)\|$ es una función continua sobre $[a,b]$ y por lo tanto es integrable Riemman en dicho intervalo. Lo cual significa:

$$\int_a^b\|\alpha'(t)\|dt<\infty.$$

Luego, por el lema anterior, dado $\varepsilon>0$ existirá $\delta>0$ tal que si $\|P\|<\delta$, entonces

$$\left|\sum_{i=1}^n\|\alpha'(\xi_i)\|(t_i-t_{i-1})-\int_a^b\|\alpha'(t)\|dt\right|<\varepsilon$$

para cada $\xi_i\in[t_{i-1},t_i[$.

Si escribimos α mediante sus funciones coordenadas se tendrá que $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ donde cada una de las funciones coordenadas $\alpha_k:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$y derivable en $]a,b[$. Entonces dada la partición P por el teorema del valor medio sabemos que existe $\xi_{ki}\in[t_{i-1},t_i[$ tal que

$$\alpha_k(t_i)-\alpha_k(t_{i-1})=\alpha_k'(\xi_{ki})(t_i-t_{i-1}).$$

Con lo cual,

$$\sum_{i=1}^{m} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k'(\xi_{ki}))^2 \right)^{1/2} (t_i - t_{i-1}).$$

Ahora teniendo en cuenta el teorema de Heine-Cantor sabemos que las funciones coordenadas α_k son uniformemente continuas y por lo tanto si la norma de la partición es suficientemente pequeña, se cumplirá que $\alpha_k(x) \approxeq \alpha_k(y)$ cuando $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$. Con lo cual para particiones suficientemente finas se podrá encontrar $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i[$ tal que

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k'(\xi_{ki}))^2 \right)^{1/2} (t_i - t_{i-1}) \approxeq \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k'(\xi_i))^2 \right)^{1/2} (t_i - t_{i-1}).$$

Lo que acabamos de ver es que si P es una partición lo suficientemente fina se tiene que

$$l(\alpha) \approxeq \sum_{i=1}^{m} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| \approxeq \sum_{i=1}^{m} \|\alpha'(\xi_i)\|(t_i - t_{i-1}) \approxeq \int_a^b \|\alpha'(t)\|dt.$$

□

Corolario 1.2.16 *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ un camino de clase C^1 a trozos. Entonces α es rectificable y además $l(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|dt$.*

Prueba. Sea $P = \{t_0, ..., t_m\}$ una partición de $[a, b]$ tal que $\alpha_j := \alpha|_{[t_{j-1}, t_j]}$ es de clase C^1 para cada $j = 1, 2, ..., m$. Por el teorema anterior

$$l(\alpha_j) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\alpha'(t)\|dt.$$

Consecuentemente α es rectificable ya que:

$$l(\alpha) = \sum_{j=1}^{m} l(\alpha_j) = \sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\alpha'(t)\|dt.$$

Como la función $t \to \|\alpha'(t)\|$ está bien definida en cada punto del intervalo salvo a lo sumo en un número finito de puntos y es acotada y continua en su domonio de definición. Por el teorema de Lebesgue-Vitali dicha función es integrable Riemann en $[a, b]$.

De las propiedades de la integral de Riemann se concluye que

$$l(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|dt.$$

Definición 1.2.17 *Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria. Diremos que α es suave si α es de clase C^1 y $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$.*

Ejemplo 1.2.18 *Calcular la longitud de una circunferencia de radio $R >$ 0.*

Consideremos la parametrización de la circunferencia dada por $\alpha(\theta) = (R\cos(\theta), R\sin(\theta))$. Claramente, esta trayectoria es suave ya que

$$\alpha'(\theta) = (-R\sin(\theta), R\cos(\theta)) \neq (0, 0).$$

Por lo tanto,

$$l(\alpha) = \int_0^{2\pi} \|(-R\sin(\theta), R\cos(\theta))\| d\theta = R\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi R.$$

1.3. Integración de campos.

La integral de línea fue inventada para resolver problemas relativos a movimientos de fluidos, electricidad, magnetismo o campos de fuerzas.

1.3.1. Campos vectoriales

Definición 1.3.1 *Un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ es una función continua $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.*

Asigna un vector a un punto. Los campos vectoriales son de utilidad para representar campos de fuerza o campos de velocidad.

Supongamos que $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ es suave de forma que el arco parametrizado por α está contenido en un abierto U. Si queremos evaluar el trabajo hecho sobre un objeto moviendose en un campo de fuerzas $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a lo largo del arco α^* desde el punto $\alpha(a)$ hasta $\alpha(b)$, debemos tener en cuenta los siguientes principios básicos:

1. El trabajo sólo depende de la componente de la fuerza que actua en la misma dirección en la que se mueve el objeto,

2. El trabajo realizado por un campo constante F_0 que mueve un objeto entre dos puntos que forman un segmento, en la dirección de la fuerza, es el producto $\|F_0\|$ por la longitud del segmento.

Recordemos que

$$T(t) := \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

es un vector unitario, tangente al arco en el punto $\alpha(t)$ y la longitud de $\alpha|_{[t_{j-1},t_j]}$ es aproximadamente $\|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\| \approx \|\alpha'(t_j)\|(t_j - t_{j-1})$.

Entonces, si consideramos una partición P lo suficientemente fina del intervalo $[a, b]$, el trabajo hecho para mover la particula desde $\alpha(t_{j-1})$ hasta $\alpha(t_j)$ es, aproximadamente

$$\langle F(\alpha(t_j)), T(t_j)\rangle \cdot \|\alpha'(t_j)\|(t_j - t_{j-1}).$$

Luego una buena aproximación del trabajo realizado para mover una particula a lo largo de α^* es:

$$\sum_{i=1}^{m} \langle F(\alpha(t_j)), T(t_j)\rangle \|\alpha'(t_j)\|(t_j - t_{j-1}).$$

Teniendo en cuenta el Lema 1.2.14, es razonable definir el trabajo realizado por la fuerza F sobre la particula que se mueve a lo largo de α como:

$$W := \int_a^b \langle F(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle dt.$$

Definición 1.3.2 *Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial y α un camino de clase C^1 a trozos tal que $\alpha^* \subseteq U$. Llamaremos integral de línea de F a lo largo de α a:*

$$\int_\alpha F := \int_a^b \langle F(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle dt.$$

Ejemplo 1.3.3 *Clacular la integral de línea del campo vectorial $F(x, y, z) = (x, y, z)$ a lo largo de la trayectoria $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definida por $\alpha(t) = (\sin(t), \cos(t), t)$.*

$$\int_\alpha F ds = \int_0^{2\pi} \langle(\sin(t), \cos(t), t), (\cos(t), -\sin(t), 1)\rangle dt =$$

$$\int_0^{2\pi} (\sin(t)\cos(t) - \sin(t)\cos(t) + t)dt = \int_0^{2\pi} t dt = 2\pi^2.$$

1.3.2. Formas diferenciales

A veces para simplificar la resolución de algunos problemas concretos así como para encontrar conexiones con el teorema general de Stokes, es conveniente adoptar otro punto de vista para las integrales de línea. La observación esencial es que cada vector $v \in \mathbb{R}^n$ define una forma lineal:

$$\varphi_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ definida por } \varphi_v(h) = \langle v, h \rangle.$$

Reciprocamente, para cada forma lineal $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se le puede encontrar un y sólo un vector $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $L = \varphi_v$. Observar que $v := (L(e_1), L(e_2), ..., L(e_n))$.

Esto significa que si definimos la aplicación

$$\Gamma : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^* \text{ como } \Gamma(v) = \varphi_v,$$

es un isomorfismo lineal.

Denotemos por dx_j las formas lineales asociadas al vector de la base canónica e_j. Esto es,

$$dx_j(h) = \langle e_j, h \rangle = h_j.$$

Se sigue fácilmente que si $v = (v_1, ..., v_n)$, entonces φ_v es la siguiente forma lineal:

$$\varphi_v = \sum_{i=1}^{n} v_j \cdot dx_j.$$

De este modo podemos identificar vectores con formas lineales, con lo cual es bastante natural identificar campos vectoriales sobre un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ con aplicaciones que asocian a cada punto de U una forma lineal.

Definición 1.3.4 *Sea U un subconjunto abierto. Una forma diferencial de grado 1 sobre U es una aplicación*

$$\omega : U \subseteq \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*.$$

A la formas diferenciales de grado 1, también las llamaremos 1-formas diferenciales. Para cada $x \in U$ y $h \in \mathbb{R}^n$ se tiene:

$$\omega(x)(h) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)h_i = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)dx_i \right)(h).$$

Entonces $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)dx_i$ para cada $x \in U$. Lo abreviaremos escribiendo:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i.$$

Una 1-forma diferencial ω se dirá que es continua o de clase C^q si sus componenetes f_i son todas funciones continuas o funciones de clase C^q. En adelante asumiremos que las 1-formas son siempre continuas.

Observemos que si $\omega(x)$ es la forma lineal asociada con el vector $F(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$, estudiar la 1-forma ω es equivalente a estudiar el campo vectorial F. Es decir, interpretaremos la 1-formas diferenciales y los campos vectoriales como dos formas diferentes de visualizar un mismo objeto matemático. Cuando formulemos problemas que vienen de la Física o ingeniería usar campos vectoriales parece el camino más correcto. No obstante, para resolver problemas con herramientas matemáticas es más frecuente expresarlas mediante formas diferenciales.

Ejemplo 1.3.5 Sea $g : U \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 sobre el abierto U. La diferencial de g en un punto $x \in U$ es la aplicación lineal

$$dg(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

dada por

$$dg(x)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) h_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) dx_i(h),$$

por lo tanto

$$dg = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i.$$

Como cada derivada parcial de g es una función continua, concluimos que la aplicación $x \in U \to dg(x)$ es una 1-forma diferencial continua que la representamos por $\omega = dg$. Así que, el ejemplo anterior muestra que la noción de 1-forma diferencial es una generalización del concepto de diferencial de una función.

Definición 1.3.6 *Sea ω una 1-forma diferencial continua sobre el abierto U y sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria de clase C^1 a trozos tal que $\alpha^* \subseteq U$. Entonces*

$$\int_\alpha \omega := \int_a^b \omega(\alpha(t))(\alpha'(t))dt.$$

Observemos lo siguiente: Si $\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$ se tiene:

$$\int_\alpha \omega = \int_a^b (\sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha(t)) dx_i(\alpha'(t)) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha(t))(\alpha_i'(t)) dt = \int_\alpha F$$

Donde $F = (f_1, ..., f_n)$ es el campo vectorial asociado con la 1-forma diferecnial $\omega = f_1 dx_1 + ... + f_n dx_n$.

1.3.3. Cambio de paráremtro.

La integral de línea $\int_\alpha F$ depende del campo vectorial y también de la trayectoria α. En esta sección analizaremos qué ocurre cuando reemplazamos α por otra trayectoria que define el mismo arco.

Definición 1.3.7 *Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ y $\beta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ dos trayectorias. Diremos que son equivalentes ($\alpha \backsim \beta$) si existe una aplicación de clase C^1 $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ suprayectiva tal que $\varphi'(t) > 0$ para todo $t \in [a,b]$ y además $\alpha = \beta \circ \varphi$.*

Como φ es una biyección estrictamente creciente se tendrá que $\varphi(a) = c$ y $\varphi(b) = d$. Luego de la definición anterior se sigue que si $\alpha \backsim \beta$, entonces $\beta \backsim \alpha$ poniendo $\beta = \alpha \circ \varphi^{-1}$.

Proposición 1.3.8 *Si α y β son dos trayectorias equivalentes y una de ellas es de clase C^1 a trozos, entonces la otra tambien lo es y además $l(\alpha) = l(\beta)$.*

Prueba.

Supongamos que β es C^1 a trozos. Consideremos en este caso $P = \{u_0 < u_1 < ... < u_m\}$ una partición del intervalo $[c,d]$ tal que $\beta|_{[u_{i-1},u_i]}$ es C^1, $i = 1, 2, ...m$. Tomemos para $j \in \{0, 1, ..., m\}$ $t_j := \varphi^{-1}(u_j)$. Está claro que $Q = \{t_0, ..., t_m\}$ es una partición del intervalo $[a,b]$. Como sabemos que φ es estrictamente creciente y de clase C^1 y la composición de funciones de clase C^1 es una función de clase C^1, podemos concluir que $\alpha|_{[t_{i-1},t_i]} = \beta \circ \varphi|_{[t_{i-1},t_i]}$ es de clase C^1.

Por otra parte, se sabe que

$$l(\beta) = \int_c^d \|\beta'(u)\| du = \sum_{i=1}^{m} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \|\beta'(u)\| du.$$

Ahora aplicando el teorema de cambio de variable en cada subintervalo (llamando $u = \varphi(t)$), se deduce:

$$\int_{\varphi(t_{i-1})}^{\varphi(t_i)} \|\beta'(u)\| du = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\beta(\varphi(t))\| \varphi'(t) dt$$

Como $\varphi'(t) > 0$ para todo $t \in [a, b]$ nos queda que

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\beta(\varphi(t))\varphi'(t)\| dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|(\beta \circ \varphi)'(t)\| dt$$

De donde se desprende que

$$\int_{u_{i-1}}^{u_i} \|\beta'(u)\| du = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(t)\| dt.$$

Sumando todas las integrales anteriores se obtiene el resultado.

□

Proposición 1.3.9 *Sea ω una 1-forma continua en un abierto U y sean α y β dos caminos de clase C^1 a trozos equivalentes. Entonces*

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega.$$

Prueba.

Para simplificar lo haremos para trayectorias de clase C^1. En este caso se tiene:

$$\begin{array}{ll} \int_\beta \omega & = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \omega(\beta(u))(\beta'(u)) du \\ & = \int_a^b \omega(\beta(\varphi(t)))(\beta'(\varphi(t)))\varphi'(t) dt \\ & = \int_a^b \omega(\beta(\varphi(t)))((\beta \circ \varphi)'(t)) dt \\ & = \int_a^b \omega(\alpha(t))(\alpha'(t)) dt = \int_\alpha \omega \end{array}.$$

□

Definición 1.3.10 *Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria de clase C^1 a trozos. Llamaremos trayectoria opuesta a α y la denotaremos por $-\alpha$ a la siguiente trayectoria:*

$$-\alpha : [-b, -a] \to \mathbb{R}^n, \quad -\alpha(t) = \alpha(-t).$$

La trayectoria opuesta define el mismo arco pero éste se recorre en sentido contrario,i.e., el punto inicial de una pasa a ser el final de la otra y vice versa.

Definición 1.3.11 *Sean $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ y $\beta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ dos trayectorias de clase C^1 a trozos tal que $\alpha(b) = \beta(c)$. Llamaremos unión de trayectorias y la denotaremos por $\alpha \cup \beta$ a la trayectoria de clase C^1 a trozos $\xi : [e,f] \to \mathbb{R}^n$ con la siguiente propiedad: Existe $e < r < f$ tal que*

$$\xi|_{[e,r]} \sim \alpha \quad \text{y} \quad \xi|_{[r,f]} \sim \beta$$

Obviamente $(\alpha \cup \beta)^* = \alpha^* \cup \beta^*$ y $\alpha \cup \beta$ se puede expresar con el siguiente camino

$\xi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ donde

$$\xi(t) = \begin{cases} \alpha(2t(b-a)+a), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta((2t-1)(d-c)+c), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Proposición 1.3.12 *Sea ω una 1-forma continua sobre un abierto U de $\mathbb{R}^n$ y sean α, β, γ tres trayectorias de clase C^1 a trozos, cuyos arcos están contenidos en U. Entonces*

1. $\int_{-\gamma} \omega = -\int_\gamma \omega$,
2. $\int_{\alpha \cup \beta} \omega = \int_\alpha \omega + \int_\beta \omega$.

Prueba.

$\int_{-\gamma} \omega = \int_{-b}^{-a} \omega(\gamma(-t))(-\gamma'(-t))dt$, haciendo el cambio de variable $u = -t$ queda:

$$-\int_{-\gamma} \omega = \int_a^b \omega(\gamma(u))(\gamma'(u))du = \int_\gamma \omega.$$

También tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha \cup \beta} \omega = \; & \int_e^r \omega(\xi(t))(\xi'(t))dt + \int_r^f \omega(\xi(t))(\xi'(t))dt \\ & = \int_{\xi|_{[e,r]}} \omega + \int_{\xi|_{[r,f]}} \omega \\ & = \int_\alpha \omega + \int_\beta \omega. \end{aligned}$$

□

1.4. Campos conservativos. Formas diferenciales exactas.

Ejemplo 1.4.1 Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el campo vectorial definido por $F(x,y) = (x,y)$ y consideremos las siguientes trayectorias $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ y $\beta : [0,1] \to$

$\mathbb{R}^2$ definidas por $\alpha(t) = (t,t)$ y $\beta(t) = (t,t^2)$. Si calculamos las correspondientes integrales de línea, se tiene:

$$\int_\alpha F = \int_0^1 \langle (t,t),(1,1)\rangle dt = \int_0^1 2tdt = 1.$$

$$\int_\beta F = \int_0^1 \langle (t,t^2),(1,2t)\rangle dt = \int_0^1 (t+2t^3)dt = 1.$$

La conclusión del ejemplo anterior no es sorprendente ya que la integral de línea representa el trabajo hecho por el campo de fuerzas F para mover una partícula a lo largo de una trayectoria y se conoce de la física que, bajo la acción del campo gravitacional, el trabajo es independiente de la trayectoria y solo depende del punto inicial y del punto final. No obstante, hay campos de fuerza donde esto no se cumple.

Ejemplo 1.4.2 Sean α y β como en el ejemplo anterior y consideremos el campo vectorial $F(x,y) = (-y+\frac{3}{8}, x-\frac{1}{2})$. Entonces

$$\int_\alpha F = \int_0^1 \langle (-t+\frac{3}{8}, t-\frac{1}{2}),(1,1)\rangle dt = \int_0^1 -\frac{1}{8}dt = -\frac{1}{8}.$$

$$\int_\beta F = \int_0^1 \langle (-t^2+\frac{3}{8}, t-\frac{1}{2}),(1,2t)\rangle dt = \int_0^1 (t^2-t+\frac{3}{8})dt = \frac{1}{3}-\frac{1}{8}.$$

Definición 1.4.3 *Sea $F = (f_1,...,f_n)$ un campo vectorial sobre un abierto U de $\mathbb{R}^n$ o bien la 1-forma diferencial asociada $\omega = f_1dx_1 + ... + f_ndx_n$ Si existe una función $f : U \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\nabla f = F$ (o, equivalentemente $df = \omega$) sobre U, entonces el campo F se llama conservativo y la 1-forma diferencial w se llama exacta. La función escalar f es el potencial del campo conservativo F.*

Los campos conservativos tienen un comportamiento similar al dado en el ejemplo 1.4.1. Este hecho es una consecuencia inmediata del siguiente resultado, que se puede ver como una generalización de la regla de Barrow.

Teorema 1.4.4 *Sea $g : U \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 sobre el abierto U y $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria de clase C^1 a trozos tal que $\gamma^* \subseteq U$. Entonces*

$$\int_\gamma \nabla g = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).$$

Prueba.

Es evidente que dg es la 1-forma asociada al campo vectorial ∇g. Además,

$$dg = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} g dx_i,$$

entonces teniendo en cuenta la regla de la cadena se tiene:

$$(g \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla g(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} g(\gamma(t))\gamma_i'(t).$$

Excepto en un número finito de puntos. Con lo cual,

$$\int_\gamma dg = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} g(\gamma(t))\gamma_i'(t) \right) dt = \int_a^b (g \circ \gamma)'(t) dt.$$

Finalmente, consideremos la partición $P = \{a = t_0 < ... < t_m = b\}$de forma que $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ es de clase C^1 para $1 \leq i \leq m$. La regla de Barrow nos da:

$$\int_\gamma dg = \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (g \circ \gamma)'(t) dt = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).$$

$\square$

Teorema 1.4.5 *Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial sobre el abierto conexo U. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *F es conservativo,*
2. *Si γ es de clase C^1 a trozos y $\gamma^* \subseteq U$ cerrada, entonces*
$$\int_\gamma F = 0,$$
3. *Si γ_1 y γ_2 son de clase C^1 a trozos tal que $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq U$ y tienen el mismo punto inicial y final, entonces*
$$\int_{\gamma_1} F = \int_{\gamma_2} F.$$

Prueba.

(1) $\Rightarrow$ (2). Por hipótesis F es conservativo, entonces existirá $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $F = \nabla f$.

Sea $\gamma : [a, b] \to U$ una trayectoria de clase C^1 a trozos cerrada. Por el teorema anterior

$$\int_\gamma \nabla f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0.$$

(2) $\Rightarrow$ (3). Si γ_1 y γ_2 tienen los mismos puntos iniciales y finales, entonces la trayectoria $\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$ será cerrada y aplicando (2) se tendrá que

$$0 = \int_\gamma \nabla f = \int_{\gamma_1} \nabla f + \int_{-\gamma_2} \nabla f.$$

Ahora teniendo presente las propiedades de la integral de línea se deduce que

$$\int_{\gamma_1} F = \int_{\gamma_2} F.$$

(3) $\Rightarrow$ (1). Como U es un abierto conexo de $\mathbb{R}^n$, entonces U es conexo por poligonales. Fijemos, $x_0 \in U$ y definimos las funciones potencial de la forma siguiente:

Para cada $x \in U$, sea γ_x la poligonal contenida en U que une el punto x_0 con x, y definimos

$$f(x) := \int_{\gamma_x} F.$$

La hipótesis (3) significa que la definición de f no depende de la poligonal concreta que tomemos. Ahora probaremos que f es una función de clase C^1 cuyo gradiente coincide con el campo F.

Sea $x \in U$, como U es abierto existirá $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subseteq U$. Para cada $1 \leq j \leq n$ y $0 < |t| < \delta$ observamos que si γ_x es una poligonal en U que une el punto x_0 con x, entonces $\gamma_x \cup [x, x + te_j]$ es una poligonal en U que une x_0 con $x + te_j$. Entonces,

$$f(x + te_j) - f(x) = \int_{\gamma_x \cup [x, x+te_j]} F - \int_{\gamma_x} F = \int_{[x, x+te_j]} F.$$

Supongamos, para simplificar, que $t > 0$ y paramentrizamos el segmento $[x, x + te_j]$ de la siguiente forma $\gamma(s) = x + se_j$ donde $0 \leq s \leq t$. Si $F = (f_1, ..., f_n)$ se tiene

$$f(x + te_j) - f(x) = \int_0^t \langle F(x + se_j), e_j \rangle ds = \int_0^t f_j(x + se_j) ds.$$

Por último,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x+te_j)-f(x)}{t} - f_j(x) \right| &= \left| \frac{1}{t} \int_0^t (f_j(x + se_j) - f_j(x)) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^t |f(x + se_j) - f_j(x)| ds \\ &\leq \text{máx}\{|f_j(x + se_j) - f(x)| : \ 0 \leq s \leq t\}. \end{aligned}$$

Como las funciones f_j son continuas en x, la expresión anterior tiende a cero cuando $t \to 0$. Luego

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = f_j(x).$$

$\square$

Definición 1.4.6 *Un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice que es estrellado respecto de un punto $a \in U$ si el segmento $[a, x]$ está contenido en U.*

Lema 1.4.7 *Sea U un abierto estrellado respecto del punto $a \in U$. Si $y \in B(x, R) \subseteq U$. Entonces el triángulo con vertices $\{a, x, y\}$ está contenido en U.*

Recordemos que el triangulo de vertices $\{a, x, y\}$ es el conjunto:

$$\{\alpha a + \beta x + \gamma y : \ 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \text{ y } \alpha + \beta + \gamma = 1\}.$$

La frontera del triángulo será la poligonal $[a, x] \cup [x, y] \cup [y, a]$.

Teorema 1.4.8 *Si U es un abierto estrellado con respecto a $a \in U$, entonces las condiciones del teorema 1.4.5 son equivalentes a:*

4. *Si γ es la frontera de un triángulo contenido en U, entonces $\int_\gamma F = 0$.*

Prueba.
Probaremos que (4) $\Rightarrow$ (1). Definimos la función potencial por

$$f(x) = \int_{[a,x]} F.$$

Para cada $x \in U$ tomamos $R > 0$ tal que $B(x, R) \subseteq U$. Por el lema anterior, para cada $1 \leq j \leq n$ y para cada $t \in \mathbb{R}$ con $|t| < R$, el triángulo con vertices $\{a, x, x + te_j\}$ está contenido en U. Con lo cual, de la condición (4) se desprende que

$$f(x + te_j) - f(x) = \int_{[a,x+te_j]} F - \int_{[a,x]} = \int_{[x,x+te_j]} F.$$

Ahora se puede razonar como en la implicación (3) $\Rightarrow$ (1) en el Teorema 1.4.5

$\square$

Ejemplo 1.4.9 Consideremos el campo vectorial $F : U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$F(x, y) = (-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}),$$

Veamos que F no es conservativo. Sea $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, donde $\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t))$,. Es claro que esta trayectoria es cerrada y su arco está contenido en U. Sin embargo,

$$\int_\gamma F = 2\pi.$$

Luego, por el Teorema 1.4.5, F no puede ser conservativo.

Por otra parte, si consideramos que el dominio de F es el conjunto $V := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) : \ y \in \mathbb{R}\}$ Es fácil comporbar que si llamamos

$$g(x, y) = \arctan(\frac{y}{x}),$$

entonces $F = \nabla g$

El ejemplo anterior pone de manifiesto que el ser o no ser conservativo depende tanto de la expresión del campo como de su dominio de definición.

Ejemplo 1.4.10 El campo gravitacional es conservativo.

Consideremos una partícula de masa M localizada en el origen. La fuerza de atracción ejercida sobre una particula de masa m localizada en el punto del espacio $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ es

$$F(x, y, z) := -\frac{GMm}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}(x, y, z).$$

Donde G es la constante gravitacional. Es decir, $F(x, y, z)$ apunta hacia el origen y, como la magnitud de la fuerza es la misma en todos los puntos equidistantes desde el origen parece razonable esperar que ocurra lo mismo para su función potencial.

Consecuentemente buscamos una función de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ cuyas derivadas sean $-\frac{GM}{r^2}$. Un ejemplo de una función de ese tipo es $\frac{GM}{r}$. Con ello es fácil comporbar que

$$f(x, y, z) = \frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

satisface que $\nabla f = F$, es decir, f es una función potencial para el campo gravitacional.

Es de destacar que en física se llama potencial gravitacional a la función $V := f$. Con lo cual, el trabajo realizado para mover una partícula desde un punto A hasta un punto B es independiente de la trayectoria de la partícula y su valor es la diferencia de los potenciales $V(B) - V(A)$.

El siguiente resultado nos da una condición que deben cumplir los campos conservativos.

Teorema 1.4.11 *Sea $F : U \to \mathbb{R}^n$ un campo conservativo de clase C^1 sobre el abierto U y con funciones coordenadas $F = (f_1, ..., f_n)$. Entonces*

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x),$$

para cada elección de índices $1 \leq j, k \leq n$ y para cada $x \in U$.

Prueba.

Como F es conservativo y de clase C^1 , existirá una función de clase C^2 $g : U \to \mathbb{R}$ de manera que $F = \nabla g$. Calculando las derivadas parciales de las funciones coordenadas del campo F se observa que:

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_j}(x),$$

y

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_k}(x)$$

para todo $x \in U$. Ahora teniendo presente el teorema de Schwartz de las derivadas cruzadas obtenemos el resultado.

$\square$

En particular, si $F = (P, Q)$ es un campo vectorial en el plano definido en un abierto U y además es de clase C^1, entonces si es conservativo deberá cumplir:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y),$$

para cada $(x, y) \in U$.

En el caso de campos vectoriales de clase C^1 en el espacio $F = (f_1, f_2, f_3)$. Para el estudio de los campos conservativos tiene interes el campo rotacional, el cual viene dado de la siguiente forma:

$$RotF(x, y, z) = (\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}).$$

Si F es conservativo, entonces $Rot(F)(x, y, z) = 0$.

Una técnica interesante para obtener el campo rotacional de F es el siguiente: llamemos $i = e_1,\ j = e_2,\ k = e_3$, donde e_1, e_2, e_3 son los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Entonces

$$rot(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Observación 1.4.12 *Si un fluido se mueve en una región del plano xy, se puede imaginar el rotacional como la circulación del fluido. Una buena manera de medir el efecto de la circulación (módulo, dirección y sentido) es colocar una pequeña rueda con aspas en el fluido. El rotacional mide la tasa de rotación del fluido en el punto P, en el que se coloca la rueda con aspas, en la dirección de su eje. El rotacional es positivo para la rotación en sentido anti horario, y negativo en sentido horario. Sea $V(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ la velocidad de un fluido y supongamos que introducimos una rueda con aspas en el fluido, de tal forma que su eje es el eje z. El fluido tiende a arremolinarse alrededor del eje z haciendo que giren las aspas. Podemos estudiar el movimiento del fluido mediante el de las aspas. Se puede ver que la velocidad angular del líquido*

alrededor del eje x es proporcional a $(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z})$
Alrededor del eje y es proporcional a $(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x})$
Alrededor del eje z es proporcional a $(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})$
Así la tendencia del fluido a formar un remolino viene dada por $rot(V)$. En el caso particular en que $rot(V) = 0$, el fluido no tiene movimiento rotacional.

Teorema 1.4.13 (Lema de Poincaré) *Sea $F = (f_1, ..., f_n) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1, siendo U un abierto estrellado respecto de un punto $a \in U$. Si*

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x),$$

para cada elección de índices $1 \leq j, k \leq n$ y para cada $x \in U$. Entonces F es conservativo.

Prueba.

Definimos $g : U \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) := \int_0^1 \langle F(a + t(x - a), x - a\rangle dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} f_j(a + t(x - a))(x_j - a_j)dt.$$

Se sigue de los resultados sobre derivación paramétrica que g es una función de clase C^1 sobre U y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x_k}(x) &= \textstyle\sum_{j \neq k}(x_j - a_j) \int_0^1 \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a + t(x - a))tdt \\
&+ \int_0^1 \left\{ \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(a + t(x - a))t(x_k - a_k) + f_k(a + t(x - a)) \right\} dt \\
&= \int_0^1 \left[\textstyle\sum_{j=1}^{n}(x_j - a_j) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a + t(x - a))t + f_k(a + t(x - a)) \right] dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}(f_k(a + t(x - a))t)dt = f_k(x),
\end{aligned}$$

para cada $x \in U$. Esto prueba que $F = \nabla g$, y por lo tanto F es conservativo.

$\square$

Corolario 1.4.14 *Sea $F : U \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 y U un abierto estrellado. Entonces F es conservativo si, y sólo si, $Rot(F) = 0$.*

1.5. Campos escalares

Definición 1.5.1 *Llamaremos campo escalar a toda función real de varias variable continua.*

Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria de clase C^1 a trozos. En este caso en virtud del Teorema 1.2.15 sabemos que α es rectificable. De este modo, la correspondiente longitud de arco viene dada por la siguiente integral:

$$s(t) := \int_a^t \|\alpha'(u)\| du.$$

La derivada de la longitud de arco tiene por valor:

$$s'(t) = \|\alpha'(t)\|.$$

Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar, donde $\alpha^* \subseteq U$. La integral de línea de f respecto a la longitud de arco viene dada por:

$$\int_\alpha f := \int_a^b f(\alpha(t)) s'(t) dt.$$

Definición 1.5.2 *Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria de clase C^1 a trozos y sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar. Llamaremos integral de trayectoria del campo escalar f sobre la trayectoria α a la siguiente integral*

$$\int_\alpha f = \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt.$$

1.5.1. Interpretación física.

Las integrales de trayectoria se presentan en problemas relativos a la distribución de masa a lo largo de una curva. Imaginemos una curva $C = \alpha([a,b])$ en el espacio como un alambre delgado de densidad variable. Supongamos que la densidad en cada punto se representa por un campo escalar f, i.e., $f(x,y,z)$ es la masa por unidad de longitud en el punto (x,y,z). La masa total del alambre vendrá dada entonces por

$$M = \int_\alpha f$$

Ejemplo 1.5.3 *Calcular la masa total de un alambre que tiene la forma* $\alpha([0,2\pi])$ *donde* $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$*, sabiendo que su densidad viene dada por* $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Según hemos visto,

$$M = \int_\alpha f = \int_0^{2\pi} (\cos^2(t) + \sin^2(t) + t^2)\sqrt{(-\sin(t))^2 + \cos^2(t) + 1}dt =$$

$$\int_0^{2\pi} (1+t^2)\sqrt{2}dt = \sqrt{2}[t + \frac{t^3}{3}]_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}(3 + 4\pi^2)$$

1.5.2. Interpretación geométrica

Consideremos una curva plana que tiene una parametrización $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ inyectiva y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un campo escalar tal que $f(x,y) \geq 0$, entonces podemos considerar la valla que sobre el plano tiene la forma de $\alpha([a,b])$ y en cada punto de la curva $\alpha(t)$ su altura es de $f(\alpha(t))$. Con lo cual,

$$\int_\alpha f$$

representará el área de la valla.

1.6. Teorema de Green

En esta sección daremos una primera aproximación al estudio del Teorema de Green, descubierto en 1828. Este resultado puede considerarse como una generalización del teorema fundamental del calculo y establece una relación entre la integral de linea y la integral doble.

Definición 1.6.1 *Sea* $K \subseteq \mathbb{R}^2$ *un compacto cuya frontera* $\partial K = \gamma([a,b])$*, donde* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *es una trayectoria cerrada de clase* C^1 *a trozos. Diremos que* γ *está orientada positivamente si* ∂K *es recorrida una vez de forma que la región* K *quede siempre a la izquierda.*

Teorema 1.6.2 *Bajo las condiciones de la definición anterior, si* $w = Pdx + Qdy$ *es una 1-forma de clase* C^1 *sobre un conjunto abierto* U *conteniendo a* K*. Entonces*

$$\int_\gamma w = \int\int_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Definición 1.6.3 *Un compacto K se dice que es una región de tipo I si puede describirse de la siguiente forma:*

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \le x \le b, \quad f_1(x) \le y \le f_2(x)\},$$

donde $f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones de clase C^1 a trozos de forma que $f_1 \le f_2$.

La orientación positiva de ∂K la podemos describir mediante la unión de las siguientes trayectorias:

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup (-\gamma_3) \cup (-\gamma_4),$$

donde

$$\gamma_1(t) = (t, f_1(t)), \quad \gamma_3(t) = (t, f_2(t))$$
$$\gamma_2 : [f_1(b), f_2(b)] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2(t) = (b, t),$$
$$\gamma_4 : [f_1(a), f_2(b)] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_4(t) = (a, t).$$

Lema 1.6.4 *Sea K un compacto el cual es una región de tipo I. Sea P una función continua sobre K admitiendo derivada continua $\frac{\partial P}{\partial y}$ sobre un entorno de K. Entonces*

$$\int_\gamma P dx = -\int\int_K \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

Prueba.

Como $\gamma_2'(t) = \gamma_4'(t) = (0, 1)$, $\gamma_1'(t) = (1, f_1'(t))$ y $\gamma_3'(t) = (1, f_2'(t))$. Tenemos

$$\int_\gamma P dx = \int_{\gamma_1} P dx - \int_{\gamma_3} P dx = \int_a^b P(t, f_1(t)) dt - \int_a^b P(t, f_2(t)) dt.$$

Por otra parte, el teorema de Lebesgue-Vitali nos asegura que toda función continua sobre un compacto es integrable. Luego por el teorema de Fubini se tiene que:

$$\int\int_K \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b \left(P(t, f_2(t)) - P(t, f_1(t)) \right) dt.$$

Consequentemente,

$$\int_\gamma P dx = -\int\int_K \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

□

Definición 1.6.5 *Un compacto K se dice que es una región de tipo II si puede describirse de la siguiente forma:*

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ c \leq y \leq d, \quad g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\},$$

donde $g_1, g_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ son funciones de clase C^1 a trozos de forma que $g_1 \leq g_2$.

La orientación positiva de ∂K la podemos describir mediante la unión de las siguientes trayectorias:

$$\gamma = (-\gamma_1) \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup (-\gamma_4),$$

donde

$$\gamma_1(t) = (g_1(t), t), \quad \gamma_3(t) = (g_2(t), t)$$
$$\gamma_2 : [g_1(c), g_2(c)] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2(t) = (t, c),$$
$$\gamma_4 : [g_1(d), g_2(d)] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_4(t) = (t, d).$$

Análogamente al anterior lema se puede ver que

Lema 1.6.6 *Sea K un compacto el cual es una región de tipo II. Sea Q una función continua sobre K admitiendo derivada continua $\frac{\partial Q}{\partial x}$ sobre un entorno de K. Entonces*

$$\int_\gamma Q dy = \int \int_K \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy.$$

Teorema 1.6.7 *Sea K un compacto el cual es una región de tipo I o de tipo II y sea $\omega = P dx + Q dy$ una 1-forma de clase C^1 sobre algún rectángulo conteniendo a K. Entonces*

$$\int_\gamma P dx + Q dy = \int \int_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Prueba.

Supongamos que K está contenido en el rectángulo $R := [a, b] \times [c, d]$ y supongamos que ω es una 1-forma de clase C^1 sobre otro rectángulo abierto T que contiene a R. Haremos la prueba para el caso en que K es una región de tipo I. En el caso en que K es una región de tipo II la prueba es similar.

Ya hemos visto que

$$\int_\gamma P dx = -\int \int_K \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

Por lo tanto sólamente necesitamos ver que

$$\int_\gamma Qdy = \int\int_K \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy.$$

Hay que observar que aquí no podemos aplicar el lema previo ya que K puede que no sea de tipo II.

Para cada $(x, y) \in T$ definimos:

$$V(x, y) := \int_c^y Q(x, t)dt,$$

Calculando la diferencial de la función V queda claro que

$$dV(x, y) = F(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

donde $F(x, y) = \int_c^y \frac{\partial Q}{\partial x}(x, t)dt$.

La expresión para F se obtiene aplicado un resultado de integración paramétrica. Como dV es un campo conservativo y γ es una trayectoria de clase C^1 a trozos cerrada, entonces

$$\int_\gamma dV = 0.$$

Que la integral anterior sea nula, implica que

$$\int_\gamma Q(x, y)dy = -\int_\gamma F(x, y)dx.$$

Además, sobre T se cumple que

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

Esto es así, puesto que la función que $y \to F(x, y)$ es la primitiva de la función $y \to \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$. Como K es de tipo I, el lema 1.6.4 nos dice que

$$-\int_\gamma F(x, y)dx = \int\int_K \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)dxdy,$$

Consecuentemente

$$\int_\gamma Q(x, y)dy = \int\int_K \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)dxdy,$$

lo cual nos permite concluir que

$$\int_\gamma \omega = \int\int_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

$\square$

El teorema de Green puede usarse para obtener el área de una región acotada por un arco cerrado simple.

Corolario 1.6.8 *Sea γ una trayectoria cerrada simple orientada positivamente de forma que acota una región para la cual se aplica el teorema de Green, entonces el área de la región D acotada por γ es:*

$$A = \frac{1}{2}\int_\gamma xdy - ydx.$$

Ejemplo 1.6.9 *Calcular el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.*

Damos la orientación positiva de la elipse:

$$\alpha(t) = (a\cos(t), b\sin(t)) \quad t \in [0, 2\pi].$$

Por el teorema de Green se tiene:

$$Ar(El) = \frac{1}{2}\int_{\partial D^+} -ydx + xdy =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-b\sin(t))(-a\sin(t)) + a\cos(t)b\cos(t)dt =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} badt = ba\pi$$

1.6.1. Teorema de la divergencia en el plano

Teorema 1.6.10 (Teorema de la divergencia en el plano) *Sea D un compacto de $\mathbb{R}^2$ de tipo III y sea ∂D su frontera. Denotemos por $\mathbf{n}$ la normal unitaria exterior a ∂D. Si $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ es una parametrización positiva de ∂D, $\mathbf{n}$ viene dada por*

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha_1'(t))^2 + (\alpha_2'(t))^2}}(\alpha_2'(t), -\alpha_1'(t)),$$

Sea $F = (P, Q) : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ con $D \subseteq \mathcal{U}$. Entonces

$$\int_{\partial D} \langle F, \mathbf{n}\rangle = \int_D div(F)dxdy.$$

Observación 1.6.11 1. Dado el campo $F = (P, Q)$ se llama divergencia de F, al siguiente campo escalar: $div(F) := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$.

2. Cuando consideramos $\langle F, \mathbf{n}\rangle$ estamos denotando el siguiente campo escalar:

$$\langle F, \mathbf{n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{(\alpha_1'(t))^2 + (\alpha_2'(t))^2}}\alpha_2'(t)P - \frac{1}{\sqrt{(\alpha_1'(t))^2 + (\alpha_2'(t))^2}}\alpha_1'(t)Q.$$

Prueba.

Como $\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t))$ es tangente a ∂D, resulta claro que $\langle \mathbf{n}, \alpha'\rangle = 0$, de modo que $\mathbf{n}$ es normal a la frontera. El signo de $\mathbf{n}$ se escoge para hacer que corresponda a la dirección exterior. Por otra parte, la definición de integral de trayectoria nos permite escribir:

$$\int_\alpha \langle F, \mathbf{n}\rangle = \int_a^b \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}\left(\alpha_2'(t)P(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) - \alpha_1'(t)Q(\alpha_1(t), \alpha_2(t))\right)\|\alpha'(t)\|dt.$$

Luego

$$\int_\alpha \langle F, \mathbf{n}\rangle = \int_a^b \left(\alpha_2'(t)P(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) - \alpha_1'(t)Q(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\right) dt.$$

Es decir

$$\int_\alpha \langle F, \mathbf{n}\rangle = \int_\alpha Pdy - Qdx$$

Ahora aplicando el teorema de Green se tendrá que

$$\int_\alpha Pdy - Qdx = \int_D (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y})dxdy = \int_D div(F)dxdy.$$

□

Supongamos que U es un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f : U \to \mathbb{R}$ es un campo escalar de clase $C^1(U)$. Si K es un compacto contenido en U tal que $\partial K = \alpha^*$. La derivada normal de f sobre ∂K, que se designará por $\frac{\partial}{\partial n}f$, es la derivada direccional de f en la dirección de la normal hacia afuera de K. En otras palabras,

$$\frac{\partial}{\partial n}f = \langle \nabla f, \mathbf{n}\rangle.$$

En el ejemplo siguiente se muestra cómo se puede usar el teorema de la divergencia en conexión con la derivada normal.

Ejemplo 1.6.12 Supongamos que f es un campo escalar de clase C^2 sobre una regin D de tipo III. Si la frontera de D es una curva suave a trozos α^+, veamos que

$$\int\int_D \triangle f(x,y)dxdy = \int_\alpha \frac{\partial}{\partial n} f,$$

donde $\triangle f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y)$ es el laplaciano de f.

Llamemos $F := (P,Q)$ al siguiente campo vectorial $P(x,y) := -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ y $Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. Como f es de clase C^2 está claro que F es un campo vectorial de clase C^1. Además, por la definición de laplaciano se cumple que:

$$\triangle f = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},$$

Con lo cual podemos aplicar el teorema de Green para obtener:

$$\int\int_D \triangle f(x,y)dxdy = \int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_\alpha Pdx + Qdy.$$

Ahora, aplicando la definición de integral de línea de una forma diferencial, tenemos:

$$\int_\alpha Pdx + Qdy = \int_a^b (-\frac{\partial}{\partial y} f(\alpha(t))\alpha_1'(t) + \frac{\partial}{\partial x} f(\alpha(t))\alpha_2'(t))dt$$

la última integral se puede expresar de la siguiente forma:

$$\int_\alpha Pdx + Qdy = \int_a^b \langle \nabla f(\alpha(t)), (\alpha_2'(t) - \alpha_1'(t) \rangle dt = \int_a^b \langle \nabla f(\alpha(t)), \mathbf{n} \rangle \|\mathbf{n}\| dt,$$

Finalmente teniendo en cuenta la definición de integral de trayectoria nos queda:

$$\int\int_D \triangle f(x,y)dxdy = \int_\alpha \langle \nabla f, \mathbf{n} \rangle = \int_\alpha \frac{\partial f}{\partial n}.$$

□

Capítulo 2

k-Superficies regulares

Una superficie en $\mathbb{R}^3$ es, generalmente hablando, un subconjunto de puntos 2-dimensional, en el sentido que se puede describir localmente por dos parámetros (sistema de coordenadas local) y con la propiedad de ser lo suficientemente suave (i.e., no tiene vértices, bordes o auto-intersecciones) para gerantizar la existencia de plano tangente a la superficie en cada punto.

2.1. Sistemas de coordenadas. Parametrización

Los objetos que trataremos en este capítulo suelen denominarse en los libros de geometría diferencial como k-subvariedades de $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.1.1 *Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío y sea $1 \leq k \leq n$. M se denominará k-superficie regular de clase C^1 si para cada punto $x_0 \in M$ existe un subconjunto abierto $A \subseteq \mathbb{R}^k$ y una aplicación de clase C^1,*

$$\varphi : A \to M,$$

de forma que

(S1) Existe un abierto U de $\mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(A) = M \cap U$, $x_0 \in \varphi(A)$ y $\varphi : A \to \varphi(A)$ es un homeomorfismo,

(S2) para cada $t \in A$, $\varphi'(t) := d\varphi(t) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ es inyectiva.

Al par (A, φ) se le llama carta o sistema de coordenadas local. La aplicación φ es una parametrización y $\varphi(A)$ es una coordenada de un entorno de x_0. Una familia de cartas $\{(A_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ con la propiedad de que

$$M = \bigcup_{i \in I} \varphi_i(A_i)$$

se llama un atlas de M.

La condición (S1) es equivalente a:

(S1)' $x_0 \in \varphi(A)$, φ es continua e inyectiva y para cada abierto $B \subseteq A$ existe un abierto V en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\varphi(B) = V \cap M.$$

En efecto, supongamos que la condición (S1) es cierta y fijemos un abierto $B \subseteq A$. Como $\varphi : A \to \varphi(A)$ es un homeomorfismo, entonces el conjunto $\varphi(B)$ será abierto en $\varphi(A)$. Con lo cual podremos encontrar un abierto W en $\mathbb{R}^n$ verificando que

$$\varphi(B) = \varphi(A) \cap W = M \cap V,$$

donde $V = W \cap U$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Supongamos ahora que (S1)' se cumple. Dado un abierto $B \subseteq A$ tomemos V como en (S1)'. Entonces

$$(\varphi^{-1})^{-1}(B) = \varphi(B) = V \cap \varphi(A),$$

lo que implica que

$$\varphi^{-1} : \varphi(A) \to A$$

es continua. Este hecho junto con la condición (S1)' nos da la condición (S1).

□

La condición (S1)' es, en general, más fuerte que suponer que $\varphi^{-1} : \varphi(A) \to A$ sea una función continua.

La condición (S2) es equivalente a que la matriz jacobiana $\varphi'(t)$ tenga rango máximo,i.e., k para cada $t \in A$. Si denotamos $\varphi := (\varphi_1, ..., \varphi_n)$, donde las φ_i son las funciones coordenadas de φ. La columna j-ésima de la matriz Jacobiana será

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_j}(t) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_j}(t), ..., \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_j}(t) \right),$$

La condición (S2) significa que los k vectores de $\mathbb{R}^n$,

$$\{\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t), ..., \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(t)\}$$

son linealmente independientes para cada $t = (t_1, ..., t_k) \in A$.

□

En el caso $n = 3$, $k = 2$, normalmente denotamos los parámetros por (s, t) y la condición (S2) es equivalente a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t) \neq 0,$$

para cada $(s, t) \in A$.

Las 2-superficies regulares en $\mathbb{R}^3$ se conocen como superficies regulares. Observemos que en el capítulo anterior el concepto importante cuando estudiamos las curvas era la aplicación que parametrizaba dicha curva,i.e., las trayectorias, sin embargo una superficie regular es el conjunto de puntos definido por su parametrización. Este punto de vista será muy útil para entender la orientación.

Ejemplo 2.1.2 Las n-superficies regulares de clase C^1 en $\mathbb{R}^n$ son los subconjuntos abiertos de dicho espacio.

Supongamos que M es una n-superficie regular de clase C^1. Por la definición, para cada punto $x_0 \in M$ existe un conjunto abierto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y una aplicación $\varphi : A \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 de forma que

$$x_0 \in \varphi(A) \subseteq M, \tag{2.1}$$

y su diferencial $\varphi'(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es inyectiva para todo $t \in A$. Esta última condición nos dice que el determinante matriz jacobiana de φ es diferente de cero en cada punto de A. Por el teorema de la función inversa, para cada $t \in A$ existen dos abiertos $W_t \subseteq A$ y $Z_t \subseteq \mathbb{R}^n$ de forma que $t \in W_t$ y $\varphi : W_t \to Z_t$ es biyectiva. Además

$$\varphi(A) = \bigcup_{t\in A} Z_t$$

es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Se sigue de la condición (2.1) que M es la unión de una familia de conjuntos abiertos. En particular, M es abierto. Además, cada abierto es una n superficie regular de clase C^1 basta considerar la carta (A, φ) donde A es el abierto en cuestion y $\varphi : A \to \mathbb{R}^n$ es la aplicación identidad, $\varphi(x) = x$ para $x \in A$.

Ejemplo 2.1.3 Sea $g : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ una aplicación de clase C^1 sobre un conjunto abierto A. Entonce su gráfica

$$G(g) := \{(t, g(t)) \in \mathbb{R}^n : \ t \in A\}$$

es una k-superficie regular de clase C^1 con el sistema de coordenadas (A, φ), donde $\varphi(t) = (t, g(t))$.

En efecto, consideremos la aplicación $\varphi : A \to \mathbb{R}^n$ dada por $\varphi(t) = (t, g(t))$.

Es claro que φ es inyectiva y si $B \subseteq A$ es abierto entonces

$$\varphi(B) = \{(t, g(t)).\ t \in A\} \cap (B \times \mathbb{R}^{n-k}) = G(g) \cap U,$$

donde $U = B \times \mathbb{R}^{n-k}$ is un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Si ahora calculamos la diferencial de φ nos queda:

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ \frac{\partial g_1(t)}{\partial t_1} & ... & ... & ... & \frac{\partial g_1(t)}{\partial t_k} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial g_{n-k}(t)}{\partial t_1} & ... & ... & ... & \frac{\partial g_{n-k}(t)}{\partial t_k} \end{pmatrix}$$

Como las primeras k filas son presisamente las filas de la matriz identidad en $\mathbb{R}^k$ queda claro que $\varphi'(t)$ tiene rango máximo, i.e. k para cada $t \in A$.

Ejemplo 2.1.4 La circunferencia unidad del plano es una curva regular.

En efecto $S_1((0,0)) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 = 1\}$. Para ver que $S_1((0,0))$ es una curva regular razonamos de la forma siguiente:

Definimos $\varphi :]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ por $\varphi(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. Está claro que si $(x, y) \in S_1((0,0)) \setminus \{(1,0)\}$, entonces

$$\varphi(]0, 2\pi[) = S_1((0,0)) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}).$$

Además, φ es inyectiva, continua y su inversa es continua $\varphi^{-1}(x, y) = \arctan(\frac{y}{x}) \in]0, 2\pi[$. También es claro que $\varphi'(\theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$ es inyectiva.

Luego $(]0, 2\pi[, \varphi)$ es una carta que cubre toda la circunferecnia menos el punto $(1,0)$. Para cubrir dicho punto hacemos lo siguiente:

Definimos $\varphi_1 :] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}^2$ por $\varphi_1(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. En este caso tomamos el abierto

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) :\ x \leq 0,\ x^2 + y^2 = 1\},$$

Entonces

Razonando como antes vemos que $(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\varphi_1)$ es una carta de forma que $(1,0)\in\varphi_1(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[)$. Con lo cual se tiene que

$$S((0,0),1)=\varphi(]0,2\pi[)\cup\varphi_1(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[).$$

Es decir, $S((0,0),1)$ es una curva regular.

Ejemplo 2.1.5 El conjunto $M:=\{(x,y):\ x^2=y^2\}$ no es una curva regular.

El conjunto M está formado por las rectas $y=x$ e $y=-x$. Luego el problema lo tendremos en el punto intersección de ambas rectas, i.e., en $(0,0)$.

LLamemos $B:=\{(x,x):\ x\in\mathbb{R}\}$ y $C:=\{(x,-x):\ x\in\mathbb{R}\}$, entonces $M=B\cup C$, y ademas $B\cap C=\{(0,0)\}$.

Supongamos, para llegar a una contradicción, que alrededor del origen se verifica la condición de curva regular. Esto significa que existirá un abierto A de la recta real y una función $\varphi:A\to M$ tal que $(0,0)\in\varphi(A)$. Además podremos encontrar una bola abieta U conteniendo a $(0,0)$ tal que

$$\varphi(A)=M\cap U.$$

Ahora bien como $U\cap B$ es conexo y φ^{-1} es continua, entonces $\varphi^{-1}(B\cap U)=]a,b[\subseteq A$. Del mismo modo, $\varphi^{-1}(C\cap U)=]c,d[\subseteq A$.

Como $(0,0)\in B\cap U$ y $(0,0)\in C\cap U$, entonces

$$\varphi^{-1}(B\cap U)\cap\varphi^{-1}(C\cap U)=]h,r[.$$

Pero esto significa que $\varphi(]h,r[)=B\cap C=\{(0,0)\}$, lo cual es absurdo ya que φ debe ser inyectiva.

Ejemplo 2.1.6 La esfera unidad en $\mathbb{R}^3$ es una superficie regular.

Llamemos $S:=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2=1\}$. Consideremos el abierto de $\mathbb{R}^2$, formado por el círculo unidad abierto:

$$A:=\{(s,t):\ s^2+t^2<1\},$$

y definimos sobre A la función

$$f(s,t):=\sqrt{1-(s^2+t^2)}$$

Si ahora consideramos la función $\varphi_1:A\to\mathbb{R}^3$ definida por

$$\varphi_1(s,t)=(s,t,f(s,t)),$$

está claro que (A, φ_1) es una carta que recubre la semiesfera abierta que queda por arriba del plano $z = 0$.

Si ahora consideramos

$$\varphi_2(s,t) = (s, t, -f(s,t)),$$

está claro que (A, φ_2) es una carta que recubre la semiesfera abierta que queda por debajo del plano $z = 0$. Es decir, mediante estas dos cartas hemos recubierto toda la esfera salvo el ecuador.

Para recubrie el ecuador es suficiente considerar la siguientes cartas:

$$\varphi_3(s,t) = (s, f(s,t), t), \quad \varphi_4(s,t) = (s, -f(s,t), t),$$
$$\varphi_5(s,t) = (f(s,t), s, t), \quad \varphi_6(s,t) = (-f(s,t), s, t).$$

2.1.1. Superficies de nivel.

Los conjuntos de nivel de una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ están definidos, para cada número real c, por

$$f^{-1}(c) = \{x \in U : \ f(x) = c\}.$$

Lo que veremos en esta sección es bajo qué condiciones los conjuntos de nivel de una función de dos variables es una curva regular en el plano y los conjuntos de nivel de una función de tres variables es una superficie regular en el espacio.

Proposición 2.1.7 *Sea $1 \leq k < n$ y $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$. Supongamos que para cada $x_0 \in M$ existe una función de clase C^1 sobre un abierto U,*

$$\Phi : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$$

tal que $x_0 \in U$ y se cumplen las siguientes condiciones:

1. *$M \cap U = \Phi^{-1}(0)$,*
2. *El rango de la diferencial de Φ i.e., rango de $\Phi'(x)$ es $n - k$ para cada $x \in M \cap U$.*

Entonces M es una k-superficie regular de clase C^1.

Para demostrar esta proposición utilizaremos el teorema de la función implícita, el cual pasamos a enunciar:

Teorema 2.1.8 *Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f \in C^1(U, \mathbb{R}^{n-k})$ Sea $(t_0, y_0) \in U$ tal que $f(t_0, y_0) = 0$. Supongamos que*

$$\det(D_j f_i(t_0, y_0))_{i=1,2,..n-k;\ j=k+1,...n;} \neq 0.$$

Entonces existe un entorno abierto V de (t_0, y_0) tal que

$$\det(D_j f_i(t, y))_{i=1,2,...,n-k;\ ,j=k+1,...n} \neq 0 \quad \forall (t, y) \in V,$$

existe un entorno A de t_0 en $\mathbb{R}^k$, y existe una, y sólo una, función $g \in C^1(A, \mathbb{R}^{n-k})$ tal que $g(t_0) = y_0$ y además,

$$\{(t, y) \in V : f(t, y) = 0\} = \{(t, y) \in \mathbb{R}^n :\ t \in A, y = g(t)\}$$

Prueba de la Proposición 2.1.7

Sea $x_0 \in M$ y $\Phi = (\phi_1, ..., \phi_{n-k})$ como en las hipótesis. Despues de una permutación de coordenadas, si es necesario podemos suponer que

$$\frac{\partial(\phi_1, ..., \phi_{n-k})}{\partial(x_{k+1}, ..., x_n)}(x_0) \neq 0.$$

Por el teorema de la función implicita, existirá un abierto $A \subseteq \mathbb{R}^k$ con

$$t_0 = (x_{01}, ..., x_{0k}) \in A,$$

un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq U$, tal que $x_0 \in V$ y una aplicación

$$g : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$$

de clase C^1 de forma que $g(t_0) = (x_{0k+1}, ..., x_{0n})$ y

$$\{x \in V : \Phi(x) = 0\} = \{(t, g(t)) :\ t \in A\},$$

Es decir, $M \cap V = G(g)$. Ahora definimos $\varphi : A \to M$ por

$$\varphi(t) = (t, g(t)).$$

Entonces $M \cap V = \varphi(A)$. Como (A, φ) es una carta, se concluye que M es una k-superficie regular.

$\square$

El resultado anterior significa que, bajo ciertas condiciones, la intersección de un conjunto abierto del plano con una curva de nivel es una 1-superficie regular y que la intersección de un abierto del espacio con una superficie de nivel es una 2-superficie regular.

Ejemplo 2.1.9 Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 sobre el abierto U y sea c un número real de forma que

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x, y) = c\},$$

es un conjunto no vacío y que $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$ para todo $(x, y) \in \Gamma$. Entonces Γ es una curva regular de clase C^1. Nos referiremos a Γ como la curva de nivel de la función f. Para demostrarlo es suficiente aplicar la proposición 2.1.7 a la función

$$\Phi : U \to \mathbb{R} : \quad \Phi(x, y) = f(x, y) - c.$$

Las curvas de nivel son la proyección sobre el plano $z = 0$ de la intersección de la gráfica de f con el plano horizontal $z = c$.

Ejemplo 2.1.10 La superficie de nivel

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ f(x, y, z) = c\},$$

donde $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 sobre el abierto U es una superficie regular si se cumple que $\nabla f(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ para todo $(x, y, z) \in S$. De hecho, es suficiente aplicar la proposición 2.1.7 a la función:

$$\Phi : U \to \mathbb{R} : \quad \Phi(x, y, z) = f(x, y, z) - c.$$

Ejemplo 2.1.11 El elipsoide $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ es una superficie regular.

Definimos la función

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ \text{ por } \Phi(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

Como

$$S = \Phi^{-1}(0),$$

y

$$\nabla\Phi(x, y, z) = (\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}) \neq (0, 0, 0), \quad \text{si} \quad (x, y, z) \in S.$$

Se obtiene del ejemplo 2.1.10 que S es una superficie regular.

2.2. Vectores tangentes y normales

Entenderemos por vector tangente a una superficie en un punto como un vector tangente a una curva contenida en la superficie que contenga a dicho punto. Puede parecer obvio que el conjunto de todos los vectores tangentes a una k-superficie regular en un punto forman un espacio vectorial de dimensión k, sin embargo este hecho no es fácil de probar. El objetivo de esta sección consiste en demostrarlo, y en particular estudiar el plano tangente a un punto dado de una superficie regular en $\mathbb{R}^3$.

Definición 2.2.1 *Sea M una k-superficie regular de clase C^1 en $\mathbb{R}^n$. Diremos que un vector $h \in \mathbb{R}^n$ es tangente a M en el punto $x_0 \in M$ si podemos encontrar una función*

$$\alpha :]-\delta, \delta[\to M$$

diferenciable en $t = 0$ y de forma que

$$\alpha(0) = x_0 \quad \text{y} \quad \alpha'(0) = h.$$

El conjunto formado por todos los vectores tangentes a M en un punto $x_0 \in M$ se llamará *Espacio tangente a la superficie M en el punto x_0* y se denotará por $T_{x_0}M$. Llamaremos plano tangente a $x_0 + T_{x_0}M$.

Teorema 2.2.2 *Si M es una k-superficie regular de $\mathbb{R}^n$, entonces $T_{x_0}M$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k. Además, si (A, φ) es una carta de M y $\varphi(t_0) = x_0$, entonces una base de $T_{x_0}M$ viene dada por*

$$\{\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t_0), ..., \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(t_0)\}.$$

Prueba.

Lo único que debemos hacer es probar que $T_{x_0}M = d\varphi(t_0)(\mathbb{R}^k)$. Para este proposito, primero tomemos un vector fijo $v \in \mathbb{R}^k$ y probaremos que $d\varphi(t_0)(v) \in T_{x_0}M$.

Sea $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño para que $t_0 + sv \in A$ siempre que $|s| < \delta$ y consideremos

$$\alpha :]-\delta, \delta[\to M \quad \text{donde} \quad \alpha(s) = \varphi(t_0 + sv).$$

Está claro que

$$\alpha(0) = \varphi(t_0) = x_0.$$

Además,

$$\alpha'(0) = \lim_{s\to 0} \frac{\alpha(s) - \alpha(0)}{s} = D_v\varphi(t_0) = d\varphi(t_0)(v),$$

lo cual muestra que

$$d\varphi(t_0)(v) \in T_{x_0}M.$$

Para ver la inclusión contraria, consideremos $h \in T_{x_0}M$. Tenemos que ver la existencia de $v \in \mathbb{R}^k$ de forma que $h = d\varphi(t_0)(v)$.

Por la definición de vector tangente, sabemos que existe una función diferenciable

$$\alpha :]-\delta, \delta[\to M \text{ tal que } \alpha(0) = x_0 \text{ y } \alpha'(0) = h.$$

Como (A, φ) es una carta, existe un abierto U de $\mathbb{R}^n$ de forma que

$$\varphi(A) = M \cap U.$$

Entonces

$$I := \alpha^{-1}(\varphi(A)) = \alpha^{-1}(U \cap M) = \alpha^{-1}(U)$$

Como α es continua, entonces I es un abierto de $]-\delta, \delta[$.

Por otra parte, como α es diferenciable y φ^{-1} también, la regla de la cadena nos permite afirmar que la aplicación

$$\beta := \varphi^{-1} \circ \alpha : I \to \mathbb{R}^k$$

es diferenciable en el punto $t = 0$. Además

$$\beta(0) = t_0 \text{ y } \alpha = \varphi \circ \beta,$$

con lo cual,

$$h = \alpha'(0) = d\varphi(t_0)(\beta'(0)),$$

Como $\beta'(0) \in \mathbb{R}^k$, se concluye que $h \in d\varphi(t_0)(\mathbb{R}^k)$.

Para finalizar la prueba hay que tener en cuenta que: como $T_{x_0}M = d\varphi(t_0)(\mathbb{R}^k)$, entonces $T_{x_0}M$ es un subespacio vectorial. Además, como $d\varphi(t)$ tiene rango máximo, se tiene que $dim(T_{x_0}M) = k$. Una base de dicho espacio viene dada por

$$d\varphi(t_0)(e_j) = \frac{\partial\varphi}{\partial t_j}(t_0), \quad j \in \{1, 2, ..., k\}.$$

$\square$

El teorema 2.2.2 explica porqué necesitamos en la definición de k-superficie regular que la diferencial $d\varphi$ tenga rango k en cada punto, ya que esta condición nos permite probar que el espacio tangente en cada punto es un subespacio vectorial de dimensión k.

En particular, cuando $n = 3$, y $k = 2$, es decir cuando S es una superficie regular en el espacio y $\varphi : A \to S$ define la carta (A, φ) de S. Entonces una base del espacio tangente a la superficie en el punto $(x_0, y_0, z_0) = \varphi(s_0, t_0)$ de S viene dada por los vectores

$$\{\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0),\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0)\}.$$

Por lo tanto, el producto vectorial

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0) \times \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0)$$

es un vector normal al espacio tangente.

Ejemplo 2.2.3 Plano tangente al cono $x^2 + y^2 = 2z^2$ en el punto $(1, 1, 1)$.

Es fácil ver, utilizando la proposición 2.1.7, que

$$S := \{(x, y, z) \neq (0, 0, 0) :\ x^2 + y^2 = 2z^2\}$$

es una superficie regular de clase C^1. Ahora elegimos el atlas para el cono:

$$\varphi : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\quad \varphi(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), \frac{\rho}{\sqrt{2}}),$$

donde

$$A := \{(\rho, \theta) :\ \rho > 0,\quad 0 < \theta < 2\pi\}.$$

Entonces,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}(\rho, \theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), \frac{1}{\sqrt{2}}),$$

y

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\rho, \theta) = (-\rho \sin(\theta), \rho \cos(\theta), 0).$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}(\rho, \theta) \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\rho \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix}.$$

Es decir,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(\rho,\theta)\times\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(\rho,\theta)=(-\frac{\rho}{\sqrt{2}}\cos(\theta),-\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sin(\theta),\rho).$$

Con lo cual el vector normal $\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(\rho,\theta)\times\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(\rho,\theta)$ es no nulo, lo que significa que los vectores,

$$\{\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(\rho,\theta),\ \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(\rho,\theta)\}$$

son linealmente independientes para cada (ρ,θ).

Además, es fácil ver que φ es inyectiva. Entonces (A,φ) es una carta de la superfice. Como $(1,1,1)=\varphi(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$, se desprende que un vector normal al plano tangente es:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})\times\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1,2).$$

Por último, la ecuación del plano tangente será

$$\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1,2),(x-1,y-1,z-1)\right\rangle=0,$$

o equivalentemente,

$$x+y-2z=0.$$

Definición 2.2.4 *Sea M una k-superficie regular en $\mathbb{R}^n$. El espacio normal a la superficie en un punto $x_0\in M$ es el subespacio ortogonal al espacio tangente $T_{x_0}M$. Lo denotaremos por N_{x_0}.*

$$N_{x_0}:=\{h\in\mathbb{R}^n:\ \langle h,v\rangle=0,\ \forall v\in T_{x_0}M\}.$$

LLamaremos plano normal a $x_0+N_{x_0}$.

Proposición 2.2.5 *Sea $1\leq k<n$ y consideremos*

$$\Phi:U:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n-k},\quad \Phi=(\phi_1,...,\phi_{n-k}),$$

una función de clase C^1 sobre el abierto U. Si el rango de la diferencial de Φ es $n-k$ en cada punto $x\in M:=\Phi^{-1}(0)$. Entonces, para cada $x_0\in M$ los vectores

$$\{\nabla\phi_1(x_0),...,\nabla\phi_{n-k}(x_0)\}$$

forman una base del espacio normal N_{x_0}.

Prueba. Por la Proposición 2.1.7 se obtiene que M es una k-superficie regular de clase C^1. Si $\alpha :]-\delta, \delta[\to M$ es una función diferenciable en $t = 0$ y $\alpha(0) = x_0$, entonces,

$$\phi_j \circ \alpha(t) = 0$$

para todo $t \in]-\delta, \delta[$. Con lo cual,

$$(\phi_j \circ \alpha)'(0) = 0.$$

Aplicando la regla de la cadena, se tiene que

$$\langle \nabla \phi_j(x_0), \alpha'(0) \rangle = 0,$$

para $j = 1, 2, ..., n-k$. Es decir, cada vector $\nabla \phi_j(x_0)$ está en N_{x_0}. Como el rango de $d\Phi(x_0)$ es $n-k$, entonces los $n-k$ vectores anteriores son linealmente independientes y como la dimensión de N_{x_0} es precisamente $n-k$ obtenemos el resultado. $\square$

Ejemplo 2.2.6 (Hiperplano tangente a una gráfica) Sea $g : A \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 sobre un abierto A y sea

$$\varphi : A \to \mathbb{R}^n : \ \varphi(t) = (t, g(t)),$$

una paramentrización de $G(g)$. Como $G(g) = \Phi^{-1}(0)$ donde

$$\Phi(x_1, ..., x_n) := g(x_1, ..., x_{n-1}) - x_n$$

y $(x_1, ..., x_n) \in A \times \mathbb{R}$. Es de destacar que el espacio normal a $G(g)$ en el punto $x_0 = (t_0, g(t_0)) = (x_1^0, ..., x_n^0)$ es el subespacio generado por el vector

$$\nabla \Phi(x_0) = (\frac{\partial g}{\partial t_1}(t_0), ..., \frac{\partial g}{\partial t_{n-1}}(t_0), -1).$$

Finalmente, la ecuación del hiperplano tangente a $G(g)$ en el punto x_0 es:

$$(x_1 - x_1^0)\frac{\partial g}{\partial t_1}(t_0) + ... + (x_{n-1} - x_{n-1}^0)\frac{\partial g}{\partial t_{n-1}}(t_0) = x_n - x_n^0.$$

Ejemplo 2.2.7 (vector normal a una superficie de nivel) Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 sobre el abierto U de forma que

$$\nabla f(x, y, z) \neq (0, 0, 0),$$

para todo $(x, y, z) \in S$, donde $S = \{(x, y, z) : \ f(x, y, z) = c\} \neq \emptyset$. Sabemos por la proposición 2.1.7 que S es una superficie regular de clase C^1. Además, el vector

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0)$$

es normal a S en el punto (x_0, y_0, z_0). De hecho, es suficiente aplicar la proposición 2.2.5 a la función $\Phi := f - c$.

2.3. Área de una superficie regular en $\mathbb{R}^3$

Primeramente restringiremos nuestra atención al caso de una superficie regular definida por una sola carta (A, φ), es decir; la superficie $S := \varphi(A)$. Además, supongamos que

$$K := [a, b] \times [c, d]$$

está contenido en A.

Sea $a = s_0 < s_1 < ... < s_m = b$ una partición del intervalo $[a, b]$ en subintervalos de longitud h y $c = t_0 < t_1 < ... < t_l = d$ una partición del intervalo $[c, d]$ en subintervalos de longitud k. Llamamos

$$I_{i,j} := [s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}],$$

entonces

$$\varphi(K) = \cup_{i=0}^{m-1} \cup_{j=0}^{l-1} \varphi(I_{i,j}).$$

La porción de superficie $\varphi(I_{i,j})$ puede aproximarse por el paralelogramo determinado por los vectores:

$$\{h\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s_i, t_j),\ k\frac{\partial\varphi}{\partial t}(s_i, t_j)\}$$

(trasladados de forma que el punto $\varphi(s_i, t_j)$ sea el vertice). El área del anterior paralelogramo es

$$hk\|\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s_i, t_j) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s_i, t_j)\|.$$

Por lo tanto, una buena aproximación del área de $\varphi(K)$ será:

$$\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{l-1} hk\|\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s_i, t_j) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s_i, t_j)\|. \tag{2.2}$$

Lema 2.3.1 *Sea $K := [a, b] \times [c, d]$. Sea $a = s_0 < s_1 < ... < s_m = b$ una partición del intervalo $[a, b]$ en subintervalos de longitud h y $c = t_0 < t_1 < ... < t_l = d$ una partición del intervalo $[c, d]$ en subintervalos de longitud k. Si $F : K \to \mathbb{R}$ es una función continua entonces*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{l-1} hkF(s_i, t_j) = \int_K F(s, t)dsdt.$$

Prueba.
Denotemos $I_{i,j} := [s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$. Entonces

$$\int_K F(s,t)dsdt = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{l-1}\int_{I_{i,j}} F(s,t)dsdt$$

y

$$hkF(s_i,t_j) = \int_{I_{i,j}} F(s_i,t_j)dsdt.$$

Con lo cual

$$\left|\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{l-1} hkF(s_i,t_j) - \int_K F(s,t)dsdt\right|$$

es menor o igual que

$$\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{l-1}\int_{I_{i,j}} |F(s_i,t_j) - F(s,t)|dsdt. \tag{2.3}$$

Por el teorema de Heine-Cantor, la función F es uniformemente continua sobre K, lo cual significa que para cada $\epsilon > 0$ existen $h_0 > 0$ $k_0 > 0$ de forma que

$$|F(s',t') - F(s,t)| \leq \frac{\epsilon}{(b-a)(d-c)}$$

siempre que

$$|s'-s| < h_0 \ \text{ y } \ |t'-t| < k_0.$$

Por lo tanto, si $0 < h < h_0$ y $0 < k < k_0$ se tiene

$$|F(s',t') - F(s,t)| \leq \frac{\epsilon}{(b-a)(d-c)}$$

para cada $(s,t) \in I_{i,j}$ y la expresión (2.3) es menor o igual que

$$\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{l-1}\frac{\epsilon}{(b-a)(d-c)}\int_{I_{i,j}} dsdt.$$

Como

$$\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{l-1}\int_{I_{i,j}} dsdt = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{l-1}(t_{j+1}-t_j)(s_{i+1}-s_i) = (b-a)(d-c),$$

podemos concluir que

$$\left|\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{l-1} hkF(s_i,t_j) - \int_K F(s,t)dsdt\right| \leq \epsilon$$

□

Por el lema que acabamos de probar, el límite cuando h y k tienden a cero de la expresión (2.2) es la integral

$$\int_K \|\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t)\|dsdt.$$

De este modo estamos listos para introducir el concepto de área de una superficie regular.

Definición 2.3.2 *Sea (A,φ) una carta de una superficie regular S y sea K un compacto contenido en A. El área de (K,φ) se define como*

$$Ar(K,\varphi) := \int_K \|\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t)\|dsdt.$$

Seguidamente discutiremos cómo proceder para evaluar el área de una superficie regular la cual no pueder cubrirse con sólo una carta.

Lema 2.3.3 *Sea M una superficie regular con un atlas finito $\{(A_i,\varphi_i)\}_{i=1}^m$. Entonces existe una partición de M en subconjuntos $\{B_j\}$ con la propiedad de que $B_j = \varphi_j(K_j)$, donde K_j es un subconjunto medible de A_j.*

Prueba.

Por la definición de superfice regular, sabemos que para cada $j = 1,...,m$ existe una conjunto abierto U_j de $\mathbb{R}^3$ de forma que

$$\varphi_j(A_j) = M \cap U_j.$$

Definimos $B_1 := \varphi_1(A_1)$ y, para cada $j = 2,...,m$,

$$\begin{aligned} B_j := \ & \varphi_j(A_j) \setminus \left(\bigcup_{1\leq i<j} \varphi_i(A_i)\right) \\ & = M \cap U_j \cap \left(\mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{1\leq i<j} U_i\right). \end{aligned}$$

Algunos de los conjunto B_j podrían ser vacíos, pero los no vacíos de dicha familia son una partición de M y, como $B_j \subseteq \varphi_j(A_j)$, podemos ponerlos como: $B_j = \varphi_j(K_j)$, donde $K_1 = A_1$ y, para cada $j \neq 1$ con $B_j \neq \emptyset$,

$$K_j = \varphi_j^{-1}\left(U_j \cap (\mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{1\leq i<j} U_i)\right).$$

Para finalizar, es suficiente observar que K_j es un subconjunto medible de A_j ya que es la intersección de un conjunto abierto y uno cerrado.

$\square$

Definición 2.3.4 *Sea M una superficie regular de $\mathbb{R}^3$ la cual admite una partición finita en subconjuntos $\{B_j\}$ ($1 \leq j \leq m$) tal que $B_j = \varphi_j(K_j)$, donde (A_j, φ_j) es un atlas de M y K_j es un subconjunto medible de A_j. El área de M se define como:*

$$Ar(M) := \sum_{j=1}^{m} Ar(K_j, \varphi_j).$$

Ejemplo 2.3.5 Área de la esfera de radio $r > 0$. La esfera de radio r, S_r, la podemos parametrizar mediante la siguiente carta:

$$U := \{(s,t) : \; 0 < s < \pi, \quad 0 < t < 2\pi\}$$

y para cada $(s,t) \in U$, definimos

$$\varphi(s,t) := (r\sin(s)\cos(t), r\sin(s)\sin(t), r\cos(s)).$$

Esta claro que (A, φ) es una carta de la esfera, pero para obtener toda la esfera nos faltan los dos polos y un meridiano. Como tanto el meridiano como los dos polos se pueden obtener a partir de conjuntos nulos en $\mathbb{R}^2$ no aportarán nada al área de la superficie así que podemos decir que

$$Ar(S_r) = Ar(U, \varphi).$$

Como

$$\|\frac{\partial\varphi}{\partial s} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}\| = r^2\sin(s)$$

Obtenemos que

$$Ar(U,\varphi) = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi} r^2\sin(s)dt\right)ds = 4\pi r^2.$$

$\square$

Ejemplo 2.3.6 Sea $g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una aplicación de clase C^1 sobre el abierto A. Entonces $G(g)$ es una superficie regular en $\mathbb{R}^3$. Veamos la expresión de $Ar(G(g))$ en términos de la función g.

Sabemos que $G(g)$ se puede parametrizar por medio de una sola carta:

$$\varphi : A \to \mathbb{R}^3 : \quad \varphi(s,t) := (s,t,g(s,t)).$$

Desde lo anterior es fácil obtener que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t) = (-\frac{\partial g}{\partial s}(s,t), -\frac{\partial g}{\partial t}(s,t), 1).$$

Por lo tanto,

$$\|\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t)\| = \sqrt{1 + (\frac{\partial g}{\partial s})^2 + (\frac{\partial g}{\partial t})^2}.$$

Luego

$$Ar(G(g)) = \int_A \sqrt{1 + (\frac{\partial g}{\partial s})^2 + (\frac{\partial g}{\partial t})^2} dsdt.$$

$\square$

2.4. Flujo de un campo vectorial.

Supongamos que una superficie S, contenida en un plano de $\mathbb{R}^3$, se sumerge en un fluido teniendo un campo de velocidades constante F_0. Fijemos un vector unitario N que sea normal al plano y estamos interesados en obtener la cantidad de fluido que atraviesa la superficie por unidad de tiempo en la dirección dada por el vector normal N.

Primero analizaremos el caso más simple, es decir, supongamos que el fluido se mueve en la dirección dada por el vector N, esto es: $F_0 = \|F_0\|N$. Imaginemos el fluido como un bloque sólido el cual en el tiempo t se mueve a una distancia $\|F_0\|t$ en la dirección dada por el vector N. En este caso, la cantidad de fluido que está cruzando S en el tiempo t coincide con el volumen del bloque que se mueve, precisamente $\|F_0\|t \cdot ar(S)$. Con lo cual, la cantidad de fluido cruzando S por unidad de tiempo es:

$$\|F_0\| \cdot ar(S).$$

En el caso en que $F_0 = -\|F_0\|N$ llegaríamos a

$$-\|F_0\| \cdot ar(S),$$

donde el signo menos quiere decir que el fluido atraviesa la superficie en el sentido contrario al que indica el vector N.

Bajo la condición más general, es decir cuando F_0 es un vactor arbitrario, lo descomponemos de la forma siguiente:

$$F_0 = \langle F_0, N\rangle \cdot N + G_0$$

donde G_0 es un vector paralelo al plano que contiene a la superficie S. Es bastante intuitivo que el movimiento en una dirección paralela a la superficie no contribuya a la cantidad total de fluido que atraviesa la superficie, por lo tanto, es bastante natural pensar que la cantidad de fluido cruzando S por unidad de tiempo sea:

$$\langle F_0, N\rangle \cdot ar(S).$$

Supongamos ahora que F es campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ que representa la velocidad de un fluido en el cual se sumerge una superficie regular S. Por razones de simplicidad, supondremos que S viene representado por una sola carta (A, φ), i.e., $S = \varphi(A)$. También supondremos que $K = [a, b] \times [c, d]$ está contenido en A. En el punto $\varphi(s, t)$ consideremos el vector normal unitario a S el siguiente:

$$N := N(s,t) = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t)}{\|\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t)\|}$$

Consideremos ahora las siguientes particiones

$\{a = s_0 < ... < s_m = b\}$ de longitud h y $\{c = t_0 < ... < t_l = d\}$ de longitud k

A parir de lo anterior construimos los rectángulos $I_{i,j} := [s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$, así tenemos que

$$\varphi(K) = \bigcup_{i=0}^{m-1} \bigcup_{j=0}^{l-1} \varphi(I_{i,j}).$$

La porción de superficie $\varphi(I_{i,j})$ puede expresarse aproximadamente por el paralelogramo generado por los vectores

$$\{h\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s_i, t_j), k\frac{\partial\varphi}{\partial t}(s_i, t_j)\}$$

(Trasladados de forma que el punto $\varphi(s_i, t_j)$ sea el vertice). Como el área de dicho paralelogramos es

$$hk\|\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s_i, t_j) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s_i, t_j)\|.$$

Si h y k son suficientemente pequeños podemos asumir que F es constante en $\varphi(I_{i,j})$ y la cantidad de fluido que atraviesa $\varphi(I_{i,j})$ en la dirección del vector $N(s_i, t_j)$ es aproximadamente

$$\langle F(\varphi(s_i, t_j)), N(s_i, t_j)\rangle \cdot hk \cdot \|\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s_i, t_j) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s_i, t_j)\|.$$

Por el Lema 2.3.1 el límite, cuando h, k tienden a cero, de

$$\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{l-1}\langle F(\varphi(s_i, t_j)), N(s_i, t_j)\rangle \cdot hk \cdot \|\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s_i, t_j) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s_i, t_j)\|$$

viene dado por la integral

$$\int_K \langle F(\varphi(s, t)), N)\rangle \cdot \|\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s, t)\| dsdt$$

El razonamiento hecho aquí nos permite dar la siguiente definición:

Definición 2.4.1 *Sea (A, φ) un sistema de coordenadas de una superficie regular $S := \varphi(A)$ en $\mathbb{R}^3$. Sea F un campo vectorial definido sobre S y*

$$N(s, t) := \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s, t)}{\|\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s, t)\|}.$$

El flujo del campo F que cruza la superficie S en la dirección del vector N se define por

$$\text{Flux} := \int_A \langle F(\varphi(s, t)), N(s, t)\rangle \|\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s, t)\| dsdt,$$

cuando la integral anterior existe.

2.5. Orientación.

Como hemos visto en la sección anterior para evaluar el flujo de un campo vectorial que atraviesa una superficie regular S, necesitamos elegir un vector normal unitario en cada punto de dicha superficie de forma que el correspondiente campo vectorial que aparece sea continuo. Por ejemplo, si sumergimos una esfera permeable en un fluido y seleccionamos el campo de vector normal hacia afuera de la esfera, entonces el flujo del campo velocidad del fluido que atraviesa la esfera nos dá la cantidad de fluido que sale de la esfera por unidad de tiempo. Sin embargo, si elgimos el campo de vectores normales unitarios que apuntan hacia dentro de la esfera, entonces el flujo nos dara la cantidad de fluido que entra en la esfera por unidad de tiempo. Por lo tanto, es natural preguntarse si cualquier superficie regular admite un campo continuo de vectores normales unitarios. Las superficies regulares que admiten un campo continuo de este tipo se llaman orientables. La mayoria de las superficies regulares son orientables. No obstante, hay ejemplos de superficies regulares que no lo son.

Definición 2.5.1 *Sea V un espacio vectorial real de dimensión n. Las bases $(v_i)_{i=1}^n$ y $(w_i)_{i=1}^n$ se dice que tienen la misma orientación, denotado por $(v_i)_{i=1}^n \sim (w_i)_{i=1}^n$, si el único isomorfismo lineal $F : V \to V$ tal que $F(v_i) = w_i$ tiene determinante positivo.*

Es decir, la matriz del cambio de base tiene determinante positivo.

La propiedad de tener la misma orientación es una relación binaria de equivalencia y hay dos clases de equivalencia. Estas clases de equivalencia son las dos posibles orientaciones de V, denotadas por $\mathcal{O}$ y $-\mathcal{O}$.

Definición 2.5.2 *Un espacio vectorial orientado es un par $(V, \mathcal{O})$, donde V es un espacio vectorial real y $\mathcal{O}$ es una de las dos posibles orientaciones. Una base $\mathcal{B} = (v_j)$ se dice que está positivamente orientada si $\mathcal{B} \in \mathcal{O}$. En ese caso, normalmente se escribe $\mathcal{O} = [v_1, ..., v_n]$.*

Ejemplo 2.5.3 Consideremos una base de $\mathbb{R}^3$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ y ahora la reordenamos de la siguiente forma $\{v_3, v_1, v_2\}$, i.e., aquí estamos suponiendo que el isomorfismo lineal es el que viene dado por $F(v_1) = v_3$, $F(v_2) = v_1$ y $F(v_3) = v_2$. Veamos que estas dos bases definen la misma orientación.

La matriz de cambio de base será:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es positivo.

Sin embargo, si la primera base la reordenamos de la siguiente forma $\{v_2, v_1, v_3\}$, entonces la matriz de cambio de base es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es negativo.

A menos que indiquemos lo contrario siempre consideraremos en $\mathbb{R}^3$ la orientación definida por la base canónica. Se deduce de la definición de orientación que la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ está positivamente orientada si, y sólo si, la matriz con las columnas $[v_1, v_2, v_3]$ tiene determinante positivo.

Proposición 2.5.4 *Sean $\{v_1, v_2\}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes. Entonces la base $\{v_1 \times v_2, v_1, v_2\}$ está positivamente orientada.*

Prueba.

La matriz, respecto a la base canónica, de la transformación $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(e_1) = v_1 \times v_2, \quad F(e_2) = v_1, \quad F(e_3) = v_2,$$

tiene como vectores columna $[v_1 \times v_2, v_1, v_2]$. Como el determinante de una matriz coincide con el de su matriz traspuesta, se tiene que

$$\det(F) = \det([v_1 \times v_2, v_1, v_2) = \det(\begin{bmatrix} v_1 \times v_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}).$$

Con lo cual, el $\det(F)$ coincide con el tripe producto escalar de los vectores $\{v_1 \times v_2, v_1, v_2\}$.

$$\det(F) = \langle v_1 \times v_2, v_1 \times v_2 \rangle = \|v_1 \times v_2\|^2 > 0.$$

□

Proposición 2.5.5 *Sea V subespacio vectorial de dimensión 2 de $\mathbb{R}^3$ y sean $\mathcal{B}_1 := \{v_1, v_2\}$ y $\mathcal{B}_2 := \{w_1, w_2\}$ dos bases de V. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Las dos bases definen la misma orientación,*

2. *existe $\lambda > 0$ tal que $v_1 \times v_2 = \lambda(w_1 \times w_2)$.*

Prueba.

Los vectores $v_1 \times v_2$ y $w_1 \times w_2$ son ortogonales a V, con lo cual han de ser paralelos, i.e., existirá $\lambda \neq 0$ tal que $v_1 \times v_2 = \lambda(w_1 \times w_2)$. Si denotamos por

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$. Ahora, consideremos la matriz A que sea la de cambio de la base $\{v_1 \times v_2, v_1, v_2\}$ a $\{w_1 \times w_2, w_1, w_2\}$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

por lo tanto, $\det(A) = \lambda \det(B)$.

Veamos ahora que (1) $\Rightarrow$ (2). Como las dos bases en V definen la misma orientación tenemos que $\det(B) > 0$ y entonces aplicando la proposición anterior las bases $\{v_1 \times v_2, v_1, v_2\}$ y $\{w_1 \times w_2, w_1, w_2\}$ están positivamente orientadas luego $\det(A) > 0$ lo que conduce a que $\lambda > 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Como por la proposición anterior $0 < \det(A) = \lambda \det(B)$ y por hipótesis $\lambda > 0$, entonces $\det(B) > 0$ luego $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ tienen la misma orientación.

$\square$

Observemos que una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ de un subespacio de dimensión 2 de $\mathbb{R}^3$ define un vector unitario normal a ese subespacio:

$$N := \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|}.$$

Teniendo presente el resultado anterior, dos bases de V definen la misma orientación si, y sólo si, tienen el mismo vector normal unitario. En otras palabras, para definir una orientación en un subespacio vectorial de dimensión 2 de $\mathbb{R}^3$ es suficiente seleccionar un vector normal a tal subespacio

Lema 2.5.6 *Sean V, W espacios vectoriales de dimensión 2, sea*

$$L : V \to W,$$

un isomorfismo lineal y consideremos $\{u_1, u_2\}$ y $\{v_1, v_2\}$ dos bases de V. Entonces se tiene que

$$\{u_1, u_2\} \sim \{v_1, v_2\} \Leftrightarrow \{L(u_1), L(u_2)\} \sim \{L(v_1), L(v_2)\}.$$

Prueba.

Denotemos por $f : V \to V$ y $g : W \to W$ los siguientes isomorfismos lineales:

$$f(u_i) = v_i, \quad i = 1, 2. \quad g(L(u_i)) = L(v_i), \quad i = 1, 2.$$

Está claro que

$$f(u_i) = (L^{-1} \circ g \circ L)(u_i),$$

para $i = 1, 2$, entonces se tiene que $f = L^{-1} \circ g \circ L$, ahora por la propiedad de los determinantes se tiene que

$$\det(f) = \det(L^{-1} \circ g \circ L) = (\det(L))^{-1} \det(g) \det(L) = \det(g).$$

□

2.5.1. Orientación de una superficie

Consideremos M una superficie regular en $\mathbb{R}^3$, para cada punto $p \in M$ podemos considerar su espacio tangente T_pM. Una orientación sobre T_pM nos indica desde que sitio estamos mirando la superficie en un entorno U_p del punto p, o lo que es lo mismo, estamos orientando la superficie en un entorno U_p. Si es posible elegir una orientación de cada plano tangente de forma que para la intersección de dos entornos arbitarios U_p y U_q la orientación inducida por T_pM y T_qM coincide entonces diremos que la superficie es orientable. En esta sección formalizaremos estas ideas y veremos que las superfices regulares orientables son aquellas que admiten un campo vectorial continuo formado por vectores normales unitarios.

Si $x_0 \in M$ y (A, φ) es una carta de M tal que $x_0 = \varphi(t_0)$, entonces sobre $T_{x_0}M$ consideramos la orientación dada por la base

$$\{\frac{\partial \varphi}{\partial s}(t_0), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0)\}.$$

Queremos encontrar condiciones que nos aseguren que la orientación de $T_{x_0}M$ es independiente de la carta elegida.

Proposición 2.5.7 *Sea M una superficie regular en $\mathbb{R}^3$ y sean (A, φ) (B, ψ) dos cartas con $D := \varphi(A) \cap \psi(B) \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in D$ y $t_0 \in A$, $u_0 \in B$ de forma que $x_0 = \varphi(t_0) = \psi(u_0)$. Entonces son equivalentes:*

1. *Las bases de $T_{x_0}M$*

$$\{\frac{\partial \varphi}{\partial s}(t_0), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0)\} \quad \{\frac{\partial \psi}{\partial s}(u_0), \frac{\partial \psi}{\partial t}(u_0)\}$$

tienen la misma orientación,

2. *$J(\varphi^{-1} \circ \psi)(u_0) > 0$.*

Prueba.
Llamemos $L := d\varphi(t_0)$, $T := d\psi(u_0)$, $R := d(\varphi^{-1} \circ \psi)(u_0)$. Como

$$\psi(u) = (\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \psi)(u)$$

en un entorno abierto de u_0 y además $(\varphi^{-1} \circ \psi)(u_0) = t_0$, aplicando la regla de la cadena se tiene que $T = L \circ R$. También

$$\mathcal{B}_1 = \{L(e_1), L(e_2)\}$$

mientras que

$$\mathcal{B}_2 = \{T(e_1), T(e_2)\} = \{L(R(e_1)), L(R(e_2))\}.$$

Por el Lema 2.5.6, se desprende que $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$ si, y sólo si, $\{e_1, e_2\}$ y $\{R(e_1), R(e_2)\}$ son dos bases de $\mathbb{R}^2$ con la misma orientación. Esto nos conduce a que

$$J(\varphi^{-1} \circ \psi)(u_0) = \det(R) > 0.$$

$\square$

Definición 2.5.8 *Una superficie regular M de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$ se dice que es orientable si existe un atlas $\{(A_i, \varphi_1) : \ i \in I\}$ de forma que para cada $x \in M$ hay una orientación θ_x en T_xM con la siguiente propiedad:*

- *Siempre que (A, φ) sea una carta del atlas con $x = \varphi(r)$, entonces $\theta_x = [\frac{\partial \varphi}{\partial s}(r), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(r)]$*

Definición 2.5.9 *Bajo las condiciones de la definición anterior, decimos que el atlas define una orientación sobre M. Además, una carta (B, ψ) de M se dice que es compatible con la orientación dada por el atlas si, para cada $r \in B$, la base del espacio tangente T_xM con $x = \psi(r)$, la cual viene dada por $\{\frac{\partial \psi}{\partial s}(r), \frac{\partial \psi}{\partial t}(r)\}$ pertenece a la orientación $\theta_{\psi(r)}$.*

Como una consecuencia inmediata de la Proposición 2.5.7 y de las definiciones anteriores se obtiene.

Teorema 2.5.10 *Sea M una superficie regular en $\mathbb{R}^3$. M es orientable si, y sólo si, existe un atlas $\{(A_i, \varphi_i) : \ i \in I\}$ de forma que para cada par de cartas (A_1, φ_1) y (A_2, φ_2) de dicho atlas con $D = \varphi_1(A_1) \cap \varphi_2(A_2) \neq \emptyset$ se tiene que $J(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2) > 0$ en su dominio de definición.*

Las superficies regulares orientables son precisamente aquellas que admiten un campo vectorial continuo de vectores unitarios normales.

Lema 2.5.11 *Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dos funciones continuas sobre el abierto A y sea $h : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = h(x)g(x)$. Entonces h debe ser continua.*

Prueba.

Para cada $x_0 \in A$ existe $j \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $g_j(x_0) \neq 0$ y, por continuidad, podremos encontrar $r > 0$ con $g_j(x) \neq 0$ para todo $x \in B(x_0, r)$. Entonces

$$h(x) = \frac{f_j(x)}{g_j(x)} \text{ para todo } x \in B(x_0, r).$$

lo cual nos dice que h es continua sobre toda la bola $B(x_0, r)$ ya que es cociente de funciones continuas.

□

Lema 2.5.12 *Sea $(A; \varphi)$ una carta de una superficie regular M y definimos $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $L(s, t) = (t, s)$. Si $B = L^{-1}(A)$ y $\psi = \varphi \circ L$, entonces (B, ψ) es una carta de M, $\varphi(A) = \psi(B)$ y (B, ψ) cambia la orientación inducida por $(A; \varphi)$.*

Prueba.

Denotemos por $S := \varphi(A) = \psi(B)$. Para cada $x = \varphi(t) \in S$ la orientación definida en T_xM por la carta (A, φ) es

$$\theta_x = [\frac{\partial \varphi}{\partial s}(t), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t)].$$

Ponemos $s = L^{-1}(t)$, entonces la orientación definida por (B, ψ) en T_xM es

$$\nu_x = [\frac{\partial \psi}{\partial s}(s), \frac{\partial \psi}{\partial t}(s)] = [\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t), \frac{\partial \varphi}{\partial s}(t)] = -\theta_x.$$

□

Teorema 2.5.13 *Sea M una superficie regular. M es orientable si, y sólo si, existe una función continua $F : M \to \mathbb{R}^3$ tal que $F(x)$ es ortonormal a T_xM para cada $x \in M$.*

□

Definición 2.5.14 *Sea M una superficie regular en $\mathbb{R}^3$ y sea $F : M \to \mathbb{R}^3$ una función continua tal que $F(x)$ es ortonormal a T_xM para cada $x \in M$. Llamaremos orientación inducida por F en M a la orientación con la* *propiedad de que, para cada $x \in M$, la orientación en el espacio tangente T_xM es*

$$\mu_x = [v_1(x), v_2(x)],$$

donde $\{v_1(x), v_2(x)\}$ es una base de T_xM tal que la base de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\{F(x), v_1(x), v_2(x)\}$$

está positivamente orientada.

Esta última condición es equivalente a que $F(x)$ sea un múltiplo positivo de $v_1(x) \times v_2(x)$.

Ejemplo 2.5.15 La esfera $S = \{(x, y, z) : x^2+y^2+z^2 = R^2\}$ es orientable. Consideremos la función $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$. Está claro que Φ es de clase C^1, además $S = \Phi^{-1}(0)$ y $\nabla\phi(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \neq (0, 0, 0)$ para cada $(x, y, z) \in S$. Por lo tanto S es una superficie regular.

Además, dado $(x_0, y_0, z_0) \in S$ sabemos que $\nabla\Phi(x_0, y_0, z_0)$ es un vector normal a $T_{(x_0,y_0,z_0)}S$ con lo cual si tomamos

$$F : M \to \mathbb{R}^3$$

definida por $F(x, y, z) = \frac{1}{R}(x, y, z)$ nos define un campo vectorial de vectores normales unitarios continuo. Ahora aplicando el teorema 2.5.13 se obtine que S es orientable.

Ejemplo 2.5.16 Una superficie regular no orientable: La banda de Möbius.

Consideremos un circulo centrado en el origen del plano XY y un segmento (sin sus extremos) en el plano YZ cuyo centro está localizado sobre el circulo. Movemos el centro del segmento a lo largo del circulo y al mismo tiempo rotamos el segmento alrededor de la linea tangente al circulo de tal forma que cuando el centro del segmento ha rotado sobre el circulo un ángulo θ el segmento haya rotado un ángulo $\frac{\theta}{2}$. La superficie que se obtiene de esta forma se llama Banda de Möbius. También se puede obtener desde un rectángulo $[-a, a]\times]0, 1[$ en el plano XY juntando los puntos de la forma (a, ϵ) con el punto $(-a, 1 - \epsilon)$.

Si la superficie fuese orientable existiría un campo vectorial F de vectores normales unitarios a la superficie. Un análisis de esos vectores normales a lo largo del circulo usado para generar la Banda de Möbius permite concluir que, después de una vuelta completa, el campo vectorial F vuelve a la posición inicial como $-F$, lo cual es una contradicción.

Para finalizar mencionemos que una parametrización de la Banda es (A, φ) donde $A =]0, 2\pi[\times] - 1, 1[$ y

$$\varphi(s,t) = \Big((2 - t\sin(\frac{s}{2}))\sin(s), (2 - t\sin(\frac{s}{2}))\cos(s), t\cos(\frac{s}{2})\Big).$$

2.6. 2-Formas diferenciales en $\mathbb{R}^3$

Cuando estudiamos el flujo de un campo vectorial $F = (f_1, f_2, f_3) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ sobre una superficie definida por una carta (A, φ) tal que $S = \varphi(A) \subseteq \Omega$ vimos que dicho flujo venia expresado de la forma siguiente:

$$\text{Flux} = \int_S F = \int_A \langle F(\varphi(s,t), \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t)\rangle dsdt.$$

Expresando el producto escalar anterior por medio de determinantes obtenemos:

$$\text{Flux} = \int_S F = \int_A \begin{vmatrix} f_1(\varphi(s,t)) & f_2(\varphi(s,t)) & f_3(\varphi(s,t)) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(s,t) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(s,t) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial t}(s,t) \end{vmatrix} dsdt$$

Por lo tanto, identificando, el flujo se puede expresar de la forma siguiente:

$$\text{Flux} = \int_S F = \int_S \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix}$$

Lo anterior pone de manifiesto que dado un campo vectorial F sobre un abierto Ω de $\mathbb{R}^3$ y dado $\overline{x} := (x, y, z) \in \Omega$, $F(\overline{x})$ se puede identificar con la siguiente la aplicación bilineal alternada:

$$F(\overline{x}) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

definida por

dados $u = (u_1, u_2, u_3),\ v = (v_1, v_2, v_3),\ F(\overline{x})(u, v) = \begin{vmatrix} f_1(\overline{x}) & f_2(\overline{x}) & f_3(\overline{x}) \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

En esta sección estudiaremos aplicaciones ω definidas sobre un abierto U de $\mathbb{R}^3$ tal que para cada $x \in U$ $w(x)$ es una forma bilineal alternada en $(\mathbb{R}^3)^2$.

Definición 2.6.1 *Denotaremos por* $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ *al espacio vectorial de todas la aplicaciones bilineales alternadas* $\alpha : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, *i.e., que satisfacen:*

(a) $\alpha(u+v,w) = \alpha(u,w) + \alpha(v,w)$,

(b) $\alpha(u,v+w) = \alpha(u,v) + \alpha(u,w)$,

(c) $\alpha(\lambda u,v) = \lambda\alpha(u,v)$,

(d) $\alpha(u,\lambda v) = \lambda\alpha(u,v)$,

(e) $\alpha(u,v) = -\alpha(v,u)$.

Donde $u,v,w \in \mathbb{R}^3$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como una consecuencia inmediata de la definición se desprende que si $\alpha \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ y $u \in \mathbb{R}^3$, entonces $\alpha(u,u) = 0$.

Como hemos visto en la sección de 1-formas diferenciales, sobre $(\mathbb{R}^3)^*$ podemos considerar su base canónica. La cual viene representada por $\{dx, dy, dz\}$. A partir de dicha base podemos definir las 2-formas canónicas de la siguiente manera:

Dados los vectores $u = (u_1,u_2,u_3)$ y $v = (v_1,v_2,v_3)$ se definen:

$$(dx \wedge dy)(u,v) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = -(dy \wedge dx)(u,v)$$

$$(dy \wedge dz)(u,v) = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = -(dz \wedge dy)(u,v)$$

$$(dx \wedge dz)(u,v) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = -(dz \wedge dx)(u,v)$$

Teorema 2.6.2 *El sistema* $\{(dy\wedge dz), (dz\wedge dx), (dx\wedge dy)\}$ *es una base del espacio vectorial* $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$.

Prueba.

Veamos primero que $\{(dy\wedge dz), (dz\wedge dx), (dx\wedge dy)\}$ es un sistema libre.

Sean $a,b,c \in \mathbb{R}$ de forma que $a\cdot(dy\wedge dz) + b\cdot dz\wedge dx + c\cdot dx\wedge dy = 0$.

Lo anterior significa que si tomamos los elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ $\{e_1,e_2\}$ se tendrá:

$$0 = a\cdot(dy\wedge dz)(e_1,e_2) + b\cdot(dz\wedge dx)(e_1,e_2) + c\cdot(dx\wedge dy))(e_1,e_2) = c.$$

Tomando ahora los vectores $\{e_1,e_3\}$

$$0 = a \cdot (dy \wedge dz)(e_1, e_3) + b \cdot (dz \wedge dx))(e_1, e_3) = -b.$$

Finalmente, tomando $\{e_1, e_3\}$ nos queda:

$$0 = a \cdot (dy \wedge dz))(e_2, e_3) = a.$$

Veamos ahora que $\{(dy \wedge dz), (dz \wedge dx), (dx \wedge dy)\}$ es un sistema generador.

Tomemos $\alpha \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$. Llamemos $a = \alpha(e_1, e_2)$, $b = \alpha(e_1, e_3)$, $c = \alpha(e_2, e_3)$. Entonces es fácil comprobar que

$$\alpha = a \cdot dx \wedge dy - b \cdot dz \wedge dx + c \cdot dy \wedge dz$$

□

Definición 2.6.3 *Una forma de grado 2 (2-forma) sobre* $\mathbb{R}^3$ *es una aplicación*

$$\omega : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \Lambda^2(\mathbb{R}^3).$$

Por el teorema 2.6.2 dado $x \in U$ podemos escribir de forma única

$$\omega(x) = f_1(x) dy \wedge dz + f_2(x) dz \wedge dx + f_3(x) dx \wedge dy,$$

donde $f_i : U \to \mathbb{R}$ son funciones. ω se dice que es continua si cada f_i es continua. Si U es un conjunto abierto y cada f_i es de clase C^1 en U, entonces diremos que ω es una 2-forma diferencial de clase C^1 en U.

Sabemos, visto en el capítulo anterior, que hay una biyección entre los campos vectoriales y las 1-formas continuas que viene dada por

$$F = (f_1, f_2, f_3) : U \to \mathbb{R}^3 \rightleftarrows \omega = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz : U \to (\mathbb{R}^3)^*.$$

En el caso de 2-formas continuas también podemos encontrar una biyección:

$$F = (f_1, f_2, f_3) : U \to \mathbb{R}^3 \rightleftarrows \omega = f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy : U \to \Lambda^2(\mathbb{R}^3).$$

2.6.1. Producto exterior

Dadas dos 1-formas en $\mathbb{R}^3$, $\omega_1, \omega_2 : U \to (\mathbb{R}^3)^*$, donde

$$\omega_1 = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz, \quad \omega_2 = g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz.$$

Llamaremos producto exterior de ω_1 y ω_2 a la siguiente 2-forma:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (f_1 g_2 - f_2 g_1) dx \wedge dy + (g_1 f_3 - f_1 g_3) dz \wedge dx + (f_2 g_3 - f_3 g_2) dy \wedge dz.$$

Proposición 2.6.4 *Sean $\omega, \alpha, \beta : U \to (\mathbb{R}^3)^*$ 1-formas. Entonces*

1. $\omega \wedge (\alpha + \beta) = \omega \wedge \alpha + \omega \wedge \beta$,

2. $\omega \wedge \alpha = -(\alpha \wedge \omega)$.

Prueba.

Sean $\omega = \omega_1 dx + \omega_2 dy + \omega_3 dz$, $\alpha = \alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz$, $\beta = \beta_1 dx + \beta_2 dy + \beta_3 dz$. Es claro que $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1)dx + (\alpha_2 + \beta_2)dy + (\alpha_3 + \beta_3)dz$.

Si ahora calculamos el producto exterior, nos queda:

$$\begin{aligned}
\omega \wedge (\alpha + \beta) \; &= (\omega_1(\alpha_3 + \beta_3) - \omega_3(\alpha_2 + \beta_2))dy \wedge dz \\
&+(\omega_3(\alpha_1 + \beta_1) - \omega_1(\alpha_3 + \beta_3)dz \wedge dx \\
&+(\omega_1(\alpha_2 + \beta_2) - \omega_2(\alpha_1 + \beta_1))dx \wedge dy \\
&= [(\omega_1\alpha_3 - \omega_3\alpha_2) + (\omega_1\beta_3 - \omega_3\beta_2)]dy \wedge dz \\
&+[(\omega_3\alpha_1 - \omega_1\alpha_3) + (\omega_3\beta_1 - \omega_1\beta_3)]dz \wedge dx \\
&+[(\omega_1\alpha_2 - \omega_2\alpha_1) + (\omega_1\beta_2 - \omega_2\beta_1)]dx \wedge dy.
\end{aligned}$$

Aplicando las propiedades de espacio vectorial obtenemos:

$$\omega \wedge (\alpha + \beta) = \omega \wedge \alpha + \omega \wedge \beta.$$

Por último, como

$$\omega \wedge \alpha = (\alpha_2\omega_1 - \omega_2\alpha_3)dy \wedge dz + (\alpha_3\omega_1 - \omega_3\alpha_1)dz \wedge dx + (\alpha_1\omega_2 - \omega_1\alpha_2)dx \wedge dy$$

se desprende que

$$\omega \wedge \alpha = -(\alpha \wedge \omega).$$

□

2.6.2. Diferenciación exterior

En el capítulo anterior vimos como desde una función diferenciable g obteniamos una 1-forma diferecnial, su diferencial. En esta sección vamos a generalizar ese mecanismo para 2-formas diferenciales.

Definición 2.6.5 *Sea $\omega : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to (\mathbb{R}^3)^*$ una 1-forma diferencial sobre el abierto U dada por*

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{3} f_i(x)dx_i.$$

La diferencial exterior de ω se define:

$$d\omega(x) := \sum_{i=1}^{3} df_i \wedge dx_i.$$

Entonces, $d\omega$ es una 2-forma diferencial.

Ejemplo 2.6.6 La diferenciación exterior de la 1-forma diferencial $F = (P, Q, 0)$. En este caso el campo vectorial se puede escribir de la forma siguiente:

$$\omega(x) = Pdx + Qdy.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy \quad &= (\tfrac{\partial P}{\partial x} dx + \tfrac{\partial P}{\partial y} dy) \wedge dx \\ &+(\tfrac{\partial Q}{\partial x} dx + \tfrac{\partial Q}{\partial y} dy) \wedge dy \\ &= \tfrac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \tfrac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dx \\ &= (\tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y}) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Observemos que la 2-forma diferencial $d\omega$ está determinada por la misma función

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

que aparece en el Teorema de Green.

Si $F = (f_1, f_2, f_3) : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial de clase C^1, la divergencia de dicho campo se define de la forma siguiente:

$$DivF := \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

y recordando la definición de rotacional de un campo se tendrá:

$$RotF := \nabla \times F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}.$$

Es decir:

$$RotF = (\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y})$$

Ejemplo 2.6.7 La diferenciación exterior de una 1-forma diferencial sobre $\mathbb{R}^3$.

Sea $F = (f_1, f_2, f_3)$ un campo vectorial de clase C^1 sobre un abierto U. Ahora calcularemos la derivada exterior de la 1-forma asociada a dicho campo:

$$\omega = f_1dx + f_2dy + f_3dz.$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} d\omega &= df_1 \wedge dx + df_2 \wedge dy + df_3 \wedge dz \\ &= (\tfrac{\partial f_1}{\partial x}dx + \tfrac{\partial f_1}{\partial y}dy + \tfrac{\partial f_1}{\partial z}dz) \wedge dx \\ &+(\tfrac{\partial f_2}{\partial x}dx + \tfrac{\partial f_2}{\partial y}dy + \tfrac{\partial f_2}{\partial z}dz) \wedge dy \\ &+(\tfrac{\partial f_3}{\partial x}dx + \tfrac{\partial f_3}{\partial y}dy + \tfrac{\partial f_3}{\partial z}dz) \wedge dz \end{aligned}$$

Con lo cual,

$$d\omega = (\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z})dy \wedge dz + (\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x})dz \wedge dx + (\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y})dx \wedge dy.$$

Finalmente, podemos observar que $d\omega$ es la 2-forma que está asociada con el campo vectorial $RotF = \nabla \times F$.

Al igual que se ha hecho con las 2-formas diferenciables se puede introducir el concepto de 3-forma. Para ello, primero definimos las formas trilineales alternadas de la siguiente manera:

Definición 2.6.8 *Denotaremos por $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)$ al espacio vectorial de todas la aplicaciones trilineales alternadas $\alpha : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, i.e., que satisfacen:*

(a) $\alpha(\cdot, \cdot, \cdot)$ *es lineal en cada una de sus variables,*

(b) $\alpha(u, v, w) = -\alpha(v, u, w) = -\alpha(u, w, v) = -\alpha(w, v, u)$.

Donde $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

Como hemos visto con las formas bilineales alternadas podemos considerar su base canónica, la cual viene representada por $\{dy\wedge dz, dz\wedge dx, dx\wedge dy\}$. A partir de dicha base podemos definir la 3-forma canónica de la siguiente manera:

Dados los vectores $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $w = (w_1, w_2, w_3)$ se definen:

$$(dx \wedge dy \wedge dz)(u, v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

Definición 2.6.9 *Una forma de grado 3 (3-forma) sobre* $\mathbb{R}^3$ *es una aplicación*

$$\omega : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \Lambda^3(\mathbb{R}^3).$$

Dado $x \in U$ podemos escribir de forma única

$$\omega(x) = f(x) dx \wedge dy \wedge dz,$$

donde $f : U \to \mathbb{R}$ es una función. ω se dice que es continua si f es continua. Si U es un conjunto abierto y f es de clase C^1 en U, entonces diremos que ω es una 3-forma diferencial de clase C^1 en U.

Según se ha visto hay una biyección entre las 2-formas continuas y los campos vectoriales:

$$F = (f_1, f_2, f_3) : U \to \mathbb{R}^3 \rightleftarrows \omega = f_1 dy\wedge dz + f_2 dz\wedge dx + f_3 dx\wedge dy : U \to \Lambda^2(\mathbb{R}^3).$$

Si ahora consideramos la derivada exterior de una 2-forma, de la misma manera que hemos hecho en el caso de 1-formas, nos que lo siguiente:
Si w es la 2-forma asociada al campo vectorial F, entonces:

$$dw = (\frac{\partial f_1}{\partial x} dy \wedge dz) \wedge dx + (\frac{\partial f_2}{\partial y} dz \wedge dx) \wedge dy + (\frac{\partial f_3}{\partial z} dx \wedge dy) \wedge dz.$$

Usando las propiedades de las 3-formas se desprende que:

$$dw = (\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}) dx \wedge dy \wedge dz = Div(F) dx \wedge dy \wedge dz.$$

2.6.3. Integración sobre superficies

Definición 2.6.10 *Sea* M *uns superficie regular orientable de clase* C^1 *y sea* (A, φ) *una carta de* M *compatible con la orientación. Sea*

$$\omega : M \to \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$$

una dos forma continua en M*. Para cada subconjunto medible* $\Omega \subseteq A$ *se define:*

$$\int_{(\Omega,\varphi)} \omega := \int_{\varphi(\Omega)} \omega := \int_{\Omega} \omega(\varphi(s,t)) \left(\frac{\partial \varphi(s,t)}{\partial s}, \frac{\partial \varphi(s,t}{\partial t} \right) dsdt.$$

siempre que exista esta integral.

Supongamos que tenemos el campo vectorial $F = (f_1, f_2, f_3) : M \to \mathbb{R}^3$, en las mismas condiciones de la definición, se define:

$$\int_{\varphi(\Omega)} F := \int_{\Omega} \langle F(\varphi(s,t)), \frac{\partial \varphi(s,t)}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi(s,t}{\partial t} \rangle dsdt.$$

Proposición 2.6.11 *Si* $\omega = f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy$, *entonces*

$$\int_{\varphi(\Omega)} w = \int_{\varphi(\Omega)} F.$$

Prueba.
Por definición de integral de superficie de una 2-forma se tendrá:

$$\begin{array}{ll} \int_{\varphi(\Omega)} w & = \int_{\Omega} (f_1(\varphi(s,t) dy \wedge dz + \\ & f_2(\varphi(s,t) dz \wedge dx + \\ & f_3(\varphi(s,t) dx \wedge dy) \left(\frac{\partial \varphi(s,t)}{\partial s}, \frac{\partial \varphi(s,t}{\partial t} \right) dsdt. \end{array}$$

De donde se obtiene que

$$\int_{\varphi(\Omega)} \omega = \int_{\Omega} \left| \begin{array}{lll} f_1(\varphi(s,t)) & f_2(\varphi(s,t)) & f_3(\varphi(s,t)) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(s,t) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(s,t) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial t}(s,t) \end{array} \right| dsdt = \int_{\varphi(\Omega)} F.$$

□

2.6.4. Cambio de variable

Supongamos que una función r aplica una región A del plano uv sobre una superficie paramétrica $r(A)$. Supongamos también que A es la imagen de una región B del plano st a través de una aplicación inyectiva de clase C^1, $G : B \to A$ siendo $G = (U, V)$. Consideremos la función R definida sobre B mediante la ecuación

$$R(s,t) = r(G(s,t)).$$

Dos funciones así relacionadas se denominan *regularmente equivalentes*. Funciones regularmente equivalentes definen la misma superficie. Esto es $r(A) = R(B)$. El siguiente resultado nos da la relación entre sus productos vectoriales fundamentales.

Lema 2.6.12 *Sean r y R dos funciones regularmente equivalentes ligadas por la ecuación $R = r \circ G$. Entonces*

$$\frac{\partial R}{\partial s} \times \frac{\partial R}{\partial t} = \left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right) \frac{\partial(U,V)}{\partial(s,t)}.$$

Prueba.

Como $R = r \circ G$. Aplicando la regla de la cadena, para cada $i = 1, 2, 3$. Obtenemos

$$\frac{\partial R_i}{\partial s} = \frac{\partial r_i}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial r_i}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial s}$$
$$\frac{\partial R_i}{\partial t} = \frac{\partial r_i}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial r_i}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial t}$$

donde las derivadas $\frac{\partial r_i}{\partial u}$ y $\frac{\partial r_i}{\partial v}$ están calculadas en $(U(s,t), V(s,t))$. Multiplicando vectorialmente se concluye que:

$$\frac{\partial R}{\partial s}\times\frac{\partial R}{\partial t} = \left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial s}\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial s}\right) = \left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right)\det(JG(s,t)).$$

□

Teorema 2.6.13 *La definición de integral de superficie de un campo vectorial es independiente de la carta elegida (siempre que sea compatible con la orientación de la superficie).*

prueba.

Sean (A, φ) y (B, ψ) dos cartas que preservan la misma orientación tales que $\varphi(A) = \psi(B)$. Esto significa que llamando $G = \varphi^{-1} \circ \psi : B \to A$, entonces G es inyectiva de clase C^1 y además $\det(JG) > 0$.

Según la definición de integral de superficie tenemos:

$$\int_{\varphi(A)} F = \int_A \langle F(\varphi(u,v)), \frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial v}\rangle dudv.$$

Ahora como la aplicación G está bajo las condiciones del lema anterior, aplicamos el cambio de variable para la integral doble y obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(A)} F &= \int_A \langle F(\varphi(u,v)), \tfrac{\partial \varphi(u,v)}{\partial u} \times \tfrac{\partial \varphi(u,v)}{\partial v}\rangle dudv \\
&= \int_B \langle F(\varphi(G(s,t)), \tfrac{\partial \varphi(G(s,t))}{\partial u} \times \tfrac{\partial \varphi(G(s,t))}{\partial v}\rangle |\det(JG(s,t))| dsdt \\
&= \int_B \langle F(\psi(s,t)), \tfrac{\partial \psi(s,t)}{\partial s} \times \tfrac{\partial \psi(s,t)}{\partial t}\rangle dsdt \\
&= \int_{\psi(B)} F.
\end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Superficies con frontera

Consideremos en $\mathbb{R}^3$ la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ limitada por los planos $z = 0$ y $z = 1$. Es decir,

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = 1, \; 0 \leq z \leq 1\}.$$

El conjunto M no es una superficie regular (el problema aparece en los puntos de M de la forma $(x, y, 0)$ y en los de la forma $(x, y, 1)$). Sin embargo, podemos descomponer $M = M_1 \cup M_2$ donde

$$M_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = 1, \; 0 < z < 1\}$$

que si que es una superficie regular y

$$M_2 := \{(x, y, z) \in M : \; z = 0, \; \text{o } z = 1\}$$

que es una curva regular.

En este sentido, M es un ejemplo de lo que denominaremos superficie regular con frontera. La frontera es la curva M_2, que en este caso no coincide con la frontera topológica de M. En general, una superficie regular con frontera en $\mathbb{R}^3$ es la unión de una superficie regular y una curva regular (llamada frontera). Este concepto será esencial para la formulación del teorema de Stokes.

3.0.5. Funciones de clase C^1 en un semiplano

Consideremos el semiplano $\mathbb{H}^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \leq 0\}$. Como el plano no es un conjunto abierto, no es obvio el significado de que una función definida en $\mathbb{H}^2$ sea diferenciable. Recordemos que un conjunto $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{H}^2$ es abierto en $\mathbb{H}^2$ para su topología relativa si existe un abierto A en $\mathbb{R}^2$ tal que $A \cap \mathbb{H}^2 = \mathbb{A}$.

Definición 3.0.14 *Sea $\mathbb{A}$ un abierto en $\mathbb{H}^2$. La aplicación*

$$\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{R}^3$$

se dice que es diferenciable (C^1) si existe un abierto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ y una función diferenciable (C^1)

$$g : A \to \mathbb{R}^3$$

tal que $A \cap \mathbb{H}^2 = \mathbb{A}$ y $g|_{\mathbb{A}} = \varphi$.

Ahora verificaremos que las derivadas parciales de g en un punto $(s,t) \in \mathbb{A}$ están determinadas por la restricción $g|_{\mathbb{A}} = \varphi$, lo cual nos permite hablar de parciales de la función φ en los puntos de $\mathbb{A}$.

Como $\mathbb{A} = A \cap \mathbb{H}^2$, donde A es un conjunto abierto. Existirá $\delta > 0$ tal que $(s,t) + h(0,1) \in A$ siempre que $|h| < \delta$. Como $s \leq 0$, tenemos

$$(s,t) + h(0,1) \in \mathbb{A}$$

para cada $|h| < \delta$. Luego

$$\frac{\partial g}{\partial t}(s,t) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(s,t+h) - \varphi(s,t)}{h}.$$

Este último límite no depende de la elección concreta de g.

El análisis de la parcial respecto de la primera variable es ligeramente diferente. Como antes, $\delta > 0$ tal que $(s,t) + h(1,0) \in A$ siempre que $|h| < \delta$. Sin embargo, la primera coordenada del vector anterior es $s+h$ y sólamente hay una forma que nos garantiza que $(s+h,t) \in \mathbb{A}$ cuando $s = 0$ el cual es retringirse a los valores negativos de h. De hecho, si $-\delta < h < 0$ entonces

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(s+h,t) - \varphi(s,t)}{h}.$$

cuando $s < 0$ y

$$\frac{\partial g}{\partial s}(0,t) = \lim_{h\to 0^-} \frac{\varphi(h,t) - \varphi(0,t)}{h}.$$

Definición 3.0.15 *Sea $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{R}^3$ una función. Las derivadas parciales de φ en un punto $(s,t) \in \mathbb{A}$ se definen como sigue:*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(s,t+h) - \varphi(s,t)}{h}.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(s+h,t) - \varphi(s,t)}{h}.$$

cuando $s < 0$ y

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(0,t) = \lim_{h\to 0^-} \frac{\varphi(h,t) - \varphi(0,t)}{h}.$$

Definición 3.0.16 *Sea $M \subseteq \mathbb{R}^3$, no vacío. M se dice que es una superficie regular con frontera de clase C^1 si para cada $x \in M$ existe una aplicación*

$$\varphi : \mathbb{A} \subseteq \mathbb{H}^2 \to M \subseteq \mathbb{R}^3$$

de clase C^1 tal que $x \in \varphi(\mathbb{A})$ y se cumplen:

1. *$\varphi(\mathbb{A})$ es abierto en M y $\varphi : \mathbb{A} \to \varphi(\mathbb{A})$ es un homeomorfismo,*
2. *para cada $(s,t) \in \mathbb{A}$, $d\varphi(s,t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva.*

Al par $(\mathbb{A}, \varphi)$ se le llama carta o sistema de coordenadas. Un atlas es una familia de cartas $(\mathbb{A}_i, \varphi_i)_{i\in I}$ tal que

$$M = \bigcup_{i\in I} \varphi_i(\mathbb{A}_i).$$

Definición 3.0.17 *Sea M una superficie regular con frontera. Un punto $x_0 \in M$ se dice que está en la frontera de M (denotada por ∂M) si para alguna carta $(\mathbb{A}, \varphi)$ hay un punto $(0, t_0) \in \mathbb{A}$ tal que*

$$x_0 = \varphi(0, t_0).$$

Proposición 3.0.18 *Sea M una superficie regular de clase C^1. Entonces M es una superficie regular con frontera de clase C^1 y $\partial M = \emptyset$.*

Prueba. Sea $x_0 \in M$, como M es una superficie regular. Consideremos (A, ψ) una carta de M tal que $(s_0, t_0) \in A$ y $\psi(s_0, t_0) = x_0$. Como A es un abierto, podemos encontrar $B :=]s_0 - r, s_0 + r[\times]t_0 - r, t_0 + r[\subset A$ de forma que (B, ψ) es una carta de M.

Llamemos $\mathbb{A} :=] - 2r, 0[\times]t_0 - r, t_0 + r[\subset \mathbb{H}^2$. Sobre este conjunto definimos:

$$\varphi(s,t) = \psi(s + (s_0 + r), t).$$

Está claro que $(\mathbb{A}, \varphi)$ es una carta de M y además $x_0 = \varphi(-r, t_0)$. Con lo cual, $x_0 \notin \partial M$.

$\square$

Lema 3.0.19 *Para cada semi-plano $\mathbb{S}$ de $\mathbb{R}^2$ existe una aplicación afín*

$$R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

tal que $R(\mathbb{H}^2) = \mathbb{S}$ y $R(\partial\mathbb{H}^2) = \partial\mathbb{S}$.

Prueba.

Dado el semi-plano $\mathbb{S} = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : \pi(s,t) \leq a\}$, donde $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal no nula. Consideremos $\{v_1, v_2\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ de forma que $\pi(v_1) > 0$ y $\{v_2\}$ es la base de $\pi^{-1}(0)$. Tomemos

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

la aplicación lineal definida por $L(e_1) = v_1$ y $L(e_2) = v_2$. Finalmente, seleccionamos un vector $b \in \mathbb{R}^2$ tal que $\pi(b) = a$ y definimos como R la aplicación $R := b + L$. En este caso,

$$\pi(R(xe_1 + ye_2)) = \pi(b + xv_1 + yv_2) = a + x_1\pi(v_1).$$

de donde deducimos que

$$R(\mathbb{H}^2) = \mathbb{S}$$

y

$$R(\partial\mathbb{H}^2) = \partial\mathbb{S}.$$

□

Como una consecuencia inmediata del lema anterior el semi-plano $\mathbb{S}$ es una 2-superficie regular con frontera en $\mathbb{R}^2$.

Proposición 3.0.20 *Sea $M = M_1 \cup M_2$ tal que $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, donde M_1 es una superficie regular y para cada $x_0 \in M_2$ existe un semi-plano $\mathbb{S}$ y una aplicación*

$$\varphi : \mathbb{A} \subseteq \mathbb{S} \to M$$

de clase C^1 tal que $x_0 \in \varphi(\mathbb{A})$ y cumpliendo que

1. *$\varphi(\mathbb{A})$ es abierto en M y $\varphi : \mathbb{A} \subseteq \mathbb{S} \to \varphi(\mathbb{A})$ es un homeomorfismo,*
2. *Para cada $(s,t) \in \mathbb{A}$, $d\varphi(s,t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva,*
3. *$\varphi^{-1}(x_0) \in \partial\mathbb{S}$.*

Entonces M es una superficie regular con frontera y $\partial M = M_2$.

Prueba.

Para cada $x_0 \in M_1$, no tendremos ningún problema puesto que M_1 es una superficie regular. Ahora, nos concentraremos sobre los puntos de M_2. Sea $x_0 \in M_2$ y tomemos

$$\varphi : \mathbb{A} \to M$$

una aplicación de clase C^1 satisfaciendo las condiciones $(1),(2)$ y (3). Tambien consideremos $R:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ como en el lema anterior. Finalmente, definimos

$$\mathbb{B}:=R^{-1}(\mathbb{A})\subseteq\mathbb{H}^2,$$

y

$$\psi:\mathbb{B}\to M,\quad \psi=\varphi\circ R.$$

Es fácil comprobar que $(\mathbb{B},\psi)$ es una carta para M y $\psi^{-1}(x_0)=(0,t_0)$ □

Teorema 3.0.21 *Sea S una superficie regular de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$ contenida en un abierto $U\subseteq\mathbb{R}^3$ y sea $f:U\to\mathbb{R}$ una función de calse C^1 tal que para cada $x\in S\cap f^{-1}(0)$ el gradiente $\nabla f(x)$ no es ortogonal al espacio tangente T_xS. Entonces al conjunto*

$$M:=\{x\in S:\ f(x)\le 0\}$$

es una superficie regular con frontera. Además,

$$\partial M=\{x\in S: f(x)=0\}$$

es la frontera de M.

□

Proposición 3.0.22 (Criterio práctico) *Sean $\Phi,f:U\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dos funciones de clase C^1 sobre el abierto U. Si $\nabla\Phi(x)\ne(0,0,0)$ para cada $x\in\Phi^{-1}(0)$ y también, la diferencial de la función $F:U\to\mathbb{R}^2$ dada por $F=(\Phi,f)$ tiene rango 2 para cada $x\in\Phi^{-1}\cap f^{-1}(0)$. Entonces*

$$M:=\{x\in U:\ \Phi(x)=0,\ f(x)\le 0\}$$

es una superficie regular con frontera:

$$\partial M=\{x\in U:\ \Phi(x)=0,\ f(x)=0\}.$$

Prueba.

Por las hipótesis dadas sobre la función Φ, el ejemplo 2.1.10 asegura que el conjunto

$$S=\{x\in U:\ \Phi(x)=0\}$$

es una superficie regular de clase C^1.

Por otra parte, si tomamos $x\in S\cap f^{-1}(0)$ se tiene que $dF(x)$ tiene rango 2. Como las filas de la diferencial anterior son respectivamente $\nabla\Phi(x)$

y$\nabla f(x)$. Estamos diciendo que dichos vectores no pueden ser paralelos. Ahora bien, Por el ejemplo 2.2.7, sabemos que $\nabla\Phi(x)$ es un vector normal a T_xS y como $\nabla f(x)$ no es paralelo a dicho vector podemos concluir que $\nabla f(x)$ no es ortogonal a T_xS. Es decir, estamos bajo las condiciones del teorema anterior.

$\square$

Ejemplo 3.0.23 Sea $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2+z^2 = 1, \; z \geq 0\}$ la semiesfera unidad superior. Entonces M es una superficie regular con frontera cuya frontera es la circunferencia

$$\partial M = \{(x,y,0) : x^2+y^2 = 1\}.$$

Para probarlo, consideremos las funciones:

$$f(x,y,z) = -z, \quad \Phi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1.$$

Entonces,

$$\nabla\Phi(x,y,z) = (2x, 2y, 2z) \neq (0,0,0)$$

en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Además, tomando $F = (\Phi, f)$, tenemos que

$$dF(x) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tiene rango 2 excepto en los puntos del eje Z. Como el eje Z no intersecta con la circunferencia unidad $x^2+y^2 = 1, \; z = 0$ El criterio anterior nos asegura que M es una superficie regular con frontera.

Definición 3.0.24 *Sea M un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Diremos que M es una n superficie regular de clase C^1 con frontera de clase C^1 si la frontera topolófica de M (llamemosla $Fr(M)$) es una (n-1)-superficie regular de clase C^1 de forma que para cada $x \in Fr(M)$ existe $\delta > 0$ tal que, para cada $0 < r < \delta$, el conjunto $B(x,r) \setminus Fr(M)$ tiene dos componentes conexas, y una de ellas coincide con la intersección de $B(x,r)$ con el int(M). En este caso, $\partial M = Fr(M)$.*

Ejemplo 3.0.25 La bola unidad $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ es una 3-superficie regular con frontera en $\mathbb{R}^3$.

Está claro que M es un conjunto compacto de $\mathbb{R}^3$. Además ya se ha visto que $Fr(M) = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ es una superficie regular de clase

C^1. Si ahora consideramos un punto $u \in Fr(M)$ es evidente que podemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $0 < r < \delta$ entonces

$$\begin{aligned} B(u,r) \setminus Fr(M) &= B(u,r) \cap \{(x,y,z) : \ x^2+y^2+z^2 < 1\} \\ &\cup B(u,r) \cap \{(x,y,z) : \ x^2+y^2+z^2 > 1\}. \end{aligned}$$

Ambos conjuntos son conexos y además

$$B(u,r) \cap \{(x,y,z) : \ x^2+y^2+z^2 < 1\} = B(u,r) \cap int(M).$$

Sea M una 3-superficie regular con frontera de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$. En particular, para cada $x_0 \in \partial M$ existe $r > 0$ tal que $B(x_0,r) \setminus Fr(M)$ tiene dos componentes conexas, U, V, donde U es la intersección de $B(x_0,r)$ con $int(M)$ y V es la intersección de la bola con el complementario de M. A continuación vamos a estudiar bajo qué circunstancias podemos hablar de vectores normales que apuntan hacia dentro o hacia fuera del interior de M.

Definición 3.0.26 *Sea $x_0 \in Fr(M)$. Un vector normal N a $T_{x_0}(Fr(M))$ se dice que es un vector normal exterior si existe $\delta > 0$ tal que*

$$x_0 + tN \in \mathbb{R}^3 \setminus M$$

siempre que $0 < t < \delta$.

Si suponemos que $Fr(M)$ es localmente un conjunto de nivel, la definición anterior nos dice:

Sabemos que $Fr(M)$ es una superficie regular, entonces dado $x_0 \in Fr(M)$, supongamos que existe $r > 0$ y una función de clase C^1 $\Phi : B(x_0,r) \to \mathbb{R}$ tal que

$$B(x_0,r) \cap Fr(M) = \{x \in B(x_0,r) : \ \Phi(x) = 0\}$$

Mientras que podemos suponer que

$$U = \{x \in B(x_0,r) : \ \Phi(x) < 0\}, \quad V = \{x \in B(x_0,r) : \ \Phi(x) > 0\}.$$

En este caso llamamos $N := \nabla\Phi(x_0)$, dicho vector es normal al espacio tangente $T_{x_0}(Fr(M))$. Ese espacio tangente divide a $\mathbb{R}^3$ en dos partes disjuntas: una de ellas consta de todos los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $\langle N, v\rangle > 0$ y la otra consta de todo los $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $\langle N, v\rangle < 0$.

Sea $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $\langle N, v\rangle > 0$. Entonces,

$$0 < \langle N, v\rangle = D_v\Phi(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi(x_0+tv)}{t}.$$

Lo cual prueba que

$$\Phi(x_0 + tv) > 0,$$

siempre que t sea positivo y suficientemente pequeño, lo que quiere decir que $x_0 + tv \in V$. Es decir, el vector v apunta hacia el exterior de M. El mismo argumento demuestra que si

$$\langle N, v\rangle < 0,$$

entonces $x_0 + tv \in U$ siempre que $t > 0$ sea suficientemente pequeño. Es decir, v apunta hacia el interior de M.

□

Ejemplo 3.0.27 Un caso simple que ilustra lo anterior es el siguiente. Sea $M = \{(x, y, z) : x \leq 0\}$. Considermos la función $\Phi(x, y, z) = x$ en este caso

$$M = \{(x, y, z) : \ \Phi(x, y, z) \leq 0\}$$

En este caso la frontera de M coincide con el plano $x = 0$, y el vector $\nabla\Phi(x, y, z) = (1, 0, 0)$ que apunta hacia el exterior del semiplano.

3.0.6. Orientación de una superficie con frontera

Definición 3.0.28 *Sea M una k-superficie regular con frontera de clase C^1 en $\mathbb{R}^n$ (donde $k = 1, 2$ y $n = 2, 3$). Diremos que M es orientable si existe un atlas $(\mathbb{A}_i, \varphi_i)_{i\in I}$ tal que para cada par de cartas $(\mathbb{A}_1, \varphi_1)$ y $(\mathbb{A}_2, \varphi_2)$ con $\varphi_1(\mathbb{A}_1) \cap \varphi_2(\mathbb{A}_2) \neq \emptyset$ se cumple que $det(J(\varphi^{-1} \circ \varphi_2)) > 0$ en su dominio de definición.*

Proposición 3.0.29 *Sea M una k-superficie regular con frontera en $\mathbb{R}^n$. M es orientable si, y sólo si, $M \setminus \partial M$ lo es.*

Sea M un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ cuya frontera topológica $(Fr(M))$ es una $(n-1)$-superficie regular de clase C^1. Se ha visto que la elección de una orientación sobre M es equivalente a una orientación sobre $U := M\setminus Fr(M)$. Diremos que la orientación sobre M es positiva si para cada $x \in M \setminus Fr(M)$ la carta que cubre a x (llamemosla (A, φ) verifica que si $\varphi(t) = x$, entonces el jacobiano de $\varphi(t)$ tiene determinante positivo.

3.1. Teorema de Stokes

Observación 3.1.1 (Conjuntos compactos en $\mathbb{R}^2$) Sea (x_0, y_0) un punto de $Fr(M)$ y $(\mathbb{A}, \varphi)$ una carta compatible con la orientación tal que $\varphi(0, t_0) = (x_0, y_0)$.

Llamemos

$$\widehat{\mathbb{A}} := \{t \in \mathbb{R} : \ (0, t) \in \mathbb{A}\}$$

este conjunto es un entorno abierto de t_0 en $\mathbb{R}$. Sea $]a, b[$ un intervalo abierto tal que $t_0 \in]a, b[\subset \widehat{\mathbb{A}}$. Notemos que

$$\gamma :]a, b[\to \mathbb{R}^2 : \quad \gamma(t) = \varphi(0, t),$$

es una trayectoria de clase C^1 de forma que el arco que define está contenido en $Fr(M)$ y contiene a (x_0, y_0). Además, $(]a, b[, \gamma)$ es una carta de $Fr(M)$ compatible con la orientación. El vector tangente a γ^* en el punto $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ es:

$$v_2 := \gamma'(t_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, t_0).$$

Por otra parte, para cada $s < 0$ tal que $(s, t_0) \in \mathbb{A}$ tenemos que

$$\{\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t_0), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t_0)\}$$

tiene determinante positivo (M está positivamente orientado).

Tomemos, $v_1 := \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, t_0)$, entonces por la continuidad de las derivadas parciales se cumplirá que

$$det[v_1, v_2] > 0.$$

Esto significa que la base $\{v_1, v_2\}$ está positivamente orientada en $\mathbb{R}^2$. Esto significa lo siguiente:

Si descomponemos el plano por dos semiplanos separados por la línea tangente a $Fr(M)$ y nos movemos a lo largo de dicha línea en la dirección dada por el vector v_2 entonces $-v_1$ apunta hacia la parte izquierda del semiplano. Además, el vector $-v_1$ apunta hacia el conjunto M. En efecto, para $s > 0$, $|s|$ suficientemente pequeño, tenemos que $\varphi(-s, t_0) \in M$ y también, desde la definición de diferencial se tendrá que

$$\varphi(-s, t_0) \approx (x_0, y_0) - sv_1.$$

Definición 3.1.2 *Sea M una superfice regular orientable con frontera de tal forma que $M \setminus \partial M$ está definida por un atlas finito. Si $\omega : M \to \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ es una 2-forma diferenciable continua. Entonces se define*

$$\int_M \omega := \int_{M \setminus \partial M} \omega.$$

Proposición 3.1.3 *Supongamos que $T \subseteq \mathbb{R}^2$ es una 2-superficie regular en $\mathbb{R}^2$ en el sentido de la definición 3.0.24 y sea $r : U \to \mathbb{R}^3$ tal que r es inyectiva y de clase C^1 en un abierto U que contine a T. Entonces $r(T)$ es una superficie regular con frontera en $\mathbb{R}^3$.*

Teorema 3.1.4 (Teorema de Stokes) *Sea M una superficie compacta regular con frontera de clase C^2 y sea ω una 1-forma diferencial de clase C^1 sobre un abierto que contiene a M. Entonces*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

Prueba.
Para demostrar el teorema basta establecer las tres fórmulas siguiente,

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{\partial M} Pdx &= \textstyle\int\int_M \left(-\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx\right), \\ \textstyle\int_{\partial M} Qdy &= \textstyle\int\int_M \left(-\frac{\partial Q}{\partial z} dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy\right), \\ \textstyle\int_{\partial M} Rdz &= \textstyle\int\int_M \left(-\frac{\partial R}{\partial y} dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz\right). \end{aligned} \tag{3.1}$$

La suma de esas tres ecuaciones nos da la tesis del teorema. Puesto que las tres son parecidas, tan sólo demostraremos la primera. El plan de la demostración consiste en expresar la integral de superficie como una integral doble sobre T. Entonces se aplica el teorema de Green para expresar la integral doble sobre T como una integral de línea sobre ∂T. Por último, demostraremos que esta integral de línea es igual a $\int_{\partial M} Pdx$.

Escribimos,

$$r(s,t) = X(s,t)e_1 + Y(s,t)e_2 + Z(s,t)e_3$$

y expresamos la integral de superficie sobre M en la forma:

$$\int_M \left(-\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx\right) = \int\int_T \left\{-\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(X,Y)}{\partial(s,t)} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(Z,X)}{\partial(s,t)}\right\} dsdt$$

Designemos ahora con p la función compuesta dada por

$$p(s,t) = P[X(s,t), Y(s,t), Z(s,t)].$$

El último integrando puede escribirse de la forma:

$$-\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(X,Y)}{\partial(s,t)} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(Z,X)}{\partial(s,t)} = \frac{\partial}{\partial s}(p\frac{\partial X}{\partial t}) - \frac{\partial}{\partial t}(p\frac{\partial X}{\partial s}). \tag{3.2}$$

Aplicando a la integral doble sobre T el teorema de Green obtenemos:

$$\int\int_T \left\{ \frac{\partial}{\partial s}(p\frac{\partial X}{\partial t}) - \frac{\partial}{\partial t}(p\frac{\partial X}{\partial s}) \right\} dsdt = \int_{\partial T} p\frac{\partial X}{\partial s}ds + p\frac{\partial X}{\partial t}dt,$$

en donde ∂T se recorre en sentido positivo. Parametrizamos ∂T mediante una función γ definida en un intervalo $[a, b]$ y sea

$$\alpha(u) = r(\gamma(u))$$

la correspondiente parametrización de ∂M. Expresando entonces cada integral de línea en función de su representación paramétrica encontramos que

$$\int_{\partial T} p\frac{\partial X}{\partial s}ds + p\frac{\partial X}{\partial t}dt = \int_{\partial M} Pdx.$$

lo cual completa la demostración.

$\square$

3.1.1. Teorema de la divergencia (Teorema de Gauss)

El teorema de Stokes expresa una relación entre una integral extendida a una superficie y una integral de línea tomada sobre la curva que constituye la frontera de la superficie. El teorema de la divergencia expresa una relación entre una integral triple extendida sobre un sólido compacto y una integral de superficie tomada sobre la frontera del sólido.

Teorema 3.1.5 *Si V es una 3-superficie compacta en $\mathbb{R}^3$ limitada por una superficie orientable S, si n es la normal unitaria exterior a S y si F es un campo vectorial definido sobre V, entonces*

$$\int_V Div(F)dxdydz = \int_S \langle F, n\rangle. \tag{3.3}$$

Observación 3.1.6 *Si expresamos F y n en función de sus componentes*

$$F(x, y, z) = P(x, y, z)e_1 + Q(x, y, z)e_2 + R(x, y, z)e_3,$$

$$n(x, y, z) = n_1(x, y, z)e_1 + n_2(x, y, z)e_2 + n_3(x, y, z)e_3.$$

la ecuación (3.3) puede entonces escribirse de la forma:

$$\int\int\int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \int\int_S (Pn_1 + Qn_2 + Rn_3)dS. \tag{3.4}$$

Demostración.
Bastará establecer la tres ecuaciones

1. $$\int\int\int_V \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \int\int_S Pn_1 dS,$$

2. $$\int\int\int_V \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \int\int_S Qn_2 dS,$$

3. $$\int\int\int_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \int\int_S Rn_3 dS.$$

Comenzaremos por la tercera de esas fórmulas y la demostración para sólidos de tipo especial.

Supongamos que V es de la forma siguiente:

$$V := \{(x, y, z) : \ g(x, y) \leq z \leq f(x, y) : \ (x, y) \in T\},$$

siendo T una región conexa del plano, y f, g son dos funciones continuas definidas sobre T, con la condición $g(x, y) \leq f(x, y)$ para cada punto de T. Geométricamente, esto significa que T es la proyección de V en el plano xy. Toda recta paralela al eje z que atraviese T corta al sólido V a lo largo de un segmento rectilíneo que une la superficie $z = g(x, y)$ a la $z = f(x, y)$. La superficie frontera S consta de un casquete superior S_1, dado de forma explícita por $z = f(x, y)$, otro inferior S_2 dado por $z = g(x, y)$, y en algunos casos por una porción de cilindro S_3 enegendrado por una recta que se mueve a lo largo de la frontera de T manteniéndose paralela al eje z. La normal exterior a S tiene componente z no negativa sobre S_1 y no positiva sobre S_2 y es paralela al plano horizontal en S_3. Los sólidos de este tipo se llaman "proyectables-xy".Este tipo incluye a todos los sólidos convexos (por ejemplo, esferas, elipsoides, cubos) y otros muchos que no son convexos (por ejemplo, el toro con eje paralelo al z).

La idea de la demostración es la siguiente: Expresamos la integral triple como una doble extendida a la proyección T. Entonces demostramos que esta integral doble tiene el mismo valor que la integral de superficie citada en el enunciado. Comencemos con la fórmula

$$\int\int\int_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \int\int_T \left[\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz\right] dxdy.$$

La integral unidimensional respecto de z puede calcularse mediante el segundo teorema fundamental del cálculo, dandonos

$$\int\int\int_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \int\int_T \{R(x,y,f(x,y)) - R(x,y,g(x,y))\}dxdy. \quad (3.5)$$

Para la integral de superficie podemos escribir:

$$\int\int_S Rn_3 dS = \int\int_{S_1} Rn_3 dS + \int\int_{S_2} Rn_3 dS + \int\int_{S_3} Rn_3 dS. \quad (3.6)$$

Sobre S_3 la normal es paralela al plano horizontal, de modo que $n_3 = 0$ sobre S_3 y la integral sobre S_3 será nula. Sobre la superficie S_1 usaremos la representación

$$r(x,y) = (x,y,f(x,y)),$$

y sobre S_2 la representación

$$s(x,y) = (x,y,g(x,y)).$$

En S_1 la normal tiene la misma dirección que el producto vectorial fundamental $\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y}$, con lo cual,

$$\int\int_{S_1} Rn_3 dS = \int\int_{S_1} R dx \wedge dy = \int\int_T R(x,y,f(x,y))dxdy.$$

En S_2 la normal n tiene la dirección opuesta a la de $\frac{\partial s}{\partial x} \times \frac{\partial s}{\partial y}$, con lo cual,

$$\int\int_{S_2} Rn_3 dS = -\int\int_{S_2} R dx \wedge dy = -\int\int_T R(x,y,g(x,y))dxdy.$$

Por consiguiente, obtenemos que la ecuación

$$\int\int\int_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \int\int_S Rn_3 dS, \quad (3.7)$$

es cierta.

En la demostración anterior la hipótisis de que V es proyectable-xy nos permite expresar la integral triple extendida a V como una integral doble sobre su proyección T sobre el palno horizontal. Es evidente que si V es proyectable-yz podemos razonar del mismo modo y demostrar que

$$\int\int\int_V \frac{\partial P}{\partial z} dxdydz = \int\int_S Pn_1 dS. \quad (3.8)$$

y si V es proyectable-xz obtenemos

$$\int\int\int_V \frac{\partial Q}{\partial z} dxdydz = \int\int_S Q n_2 dS. \tag{3.9}$$

Así vemos que el teorema de la divergencia es válido para todos los sólidos proyectables sobre los tres planos coordenados; en particular, para todo sólido convexo.

□

Bibliografía

[1] T. M. Apostol, *Calculus*(volumen II) Reverté (2 edición), (1978).

[2] C.L. Bradley, K.J. Smith, *Cálculo*(volumen 2), Prentice Hall (1998).

[3] C.H. Edwards, *Advanced calculus of several variables*, Academic Press, New York-London, (1973).

[4] Fleming, *Functions of several variables*, Springer-Verlag (1997).

[5] A. Galbis, M. Maestre, *Vector analysis versus vector calculus*, (to appear).

[6] J.E. Marsden, A.J. Tromba, *Cálculo Vectorial*, Addison Wesley, (5 edición) (2004).

[7] Cl. Pita Ruiz, *Cálculo Vectorial*, Prentice-Hall (1995).

[8] M.H. Protter, C.B. Morrey, *A first course in real analysis*, Springer-Verlag (1977).

[9] M. Spivak, *Cálculo en variedades*, Edit. Reverté (1972).