# INTEGRACIÓ MÚLTIPLE
# INTEGRAL DE LEBESGUE

JESÚS GARCIA i FALSET
Departament d'Anàlisi Matemàtica
Universitat de València

1 de junio de 2005

# ÍNDEX GENERAL

València, 2005.

# Tema 1

# CONJUNTS NULS.

## 1.1. Definició i Propietats.

Siguen $A_1, A_2, ..., A_n$ intervals en $\mathbb{R}$, és a dir, cada $A_k$ pot ser fitat, no fitat, obert, tancat, etc. Un conjunt $A \subseteq \mathbb{R}^n$ de la forma

$$A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_k \in A_k\}$$

s'anomena **interval o rectangle general n-dimensional**.

Anomenarem interval o rectangle tancat, a un rectangle que coincideix amb la seua clausura. Direm que un interval és obert si coincideix amb el seu interior.

Direm que un interval n-dimensional és no fitat si alguna de les seues projeccions no està fitada en $\mathbb{R}$. Direm que un rectangle és impropi o degenerat si alguna de les seues projeccions es redueix a un punt.

Siga $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, denotem per $\mu(I)$ a la longitud de dit interval.

**Definició 1.1.1** *Siga $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ un rectangle en $\mathbb{R}^n$. Anomenarem mesura de A:*

$$\mu(A) := \prod_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

**Definició 1.1.2** *Les projeccions d'un interval n-dimensional es denominen* **arestes.** *Si totes les arestes són iguals, al rectangle se l'anomena* **cub.**

**Definició 1.1.3** *Siga $H \subseteq \mathbb{R}^n$, direm que $H$ és un hiperplà si $H$ es una varietat lineal de dimensió $n-1$.*

Siga $\alpha \in \mathbb{R}$ es defineix donat $i \in \{1, 2, ..., n\}$ fix:

$$H_\alpha^i = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = \alpha\}$$

és evident que $H_\alpha$ és un hiperplà.

Donat un interval fitat n-dimensional $I = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ es defineixen:

$$H_{a_i}^i = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = a_i\}$$

$$H_{b_i}^i = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = b_i\}$$

A aquests hiperplans se'ls denomina *hiperplans fitants de $I$* i a la intersecció d'aquests hiperplans amb $\bar{I}$ se'ls anomena *cares de $I$*.

Les *cares* d'un interval n-dimensional es poden considerar com intervals (n-1)-dimensionals.

**Definició 1.1.4** *Siga $A \subseteq \mathbb{R}^n$, direm que $A$ és un conjunt nul si donat $\epsilon > 0$ existeix una successió de rectangles fitats (oberts) n-dimensionals $\{I^{(j)}\}_{j=1}^\infty$ de manera que:*

*(1).- $A \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty I^{(j)}$*

*(2).- $\sum_{j=1}^\infty \mu(I^{(j)}) \leq \epsilon$.*

**Proposició 1.1.5** *(1).- Si $A$ és nul i $B \subseteq A$. Llavors $B$ també és nul.*

*(2).- Siga $\{A_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una successió de conjunts nuls. Llavors el conjunt $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m$ és un conjunt nul.*

**Demostració.-**

(1).- És evident per la definició de conjunt nul.

(2).- Siguen $\epsilon > 0$ i $m \in \mathbb{N}$.

Sabem que $A_m$ és un conjunt nul, llavors donat $\frac{\epsilon}{2^{m+1}} > 0$ existeix una successió de rectangles fitats $\{I^{(m,j)}\}_{j=1}^{\infty}$ de manera que per a tot $m \in \mathbb{N}$ tenim:

$$A_m \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I^{(m,j)}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(I^{(m,j)}) < \frac{\epsilon}{2^{m+1}}$$

D'aquesta forma podem escriure:

$I^{(1,1)}, I^{(1,2)} ... I^{(1,n)}$...... la successió que recobreix a $A_1$

$I^{(2,1)}, I^{(2,2)} ... I^{(2,n)}$...... la successió que recobreix a $A_2$

.....................................

$I^{(k,1)}, I^{(k,2)} ... I^{(k,n)}$...... la successió que recobreix a $A_k$

Sabem que aquests intervals es poden ordenar del mode següent:

$$I^{(1,1)}, I^{(1,2)}, I^{(2,1)}, I^{(1,3)}, I^{(2,2)}, I^{(3,1)}, ...$$

i a aquesta successió d'intervals la denotem de la forma següent: $\{J^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$, és clar que

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} J^{(i)}$$

i a més a més,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(J^{(i)}) := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(J^{(i)})$$

tenint en compte la definició dels intervals $J^{(i)}$ tenim:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(J^{(i)}) \leq \sum_{m+i\leq n+1} \mu(I^{(m,i)}) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(I^{(1,i)}) + ... + \sum_{i=1}^{n} \mu(J^{(n,i)}) \leq \epsilon(\frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n+1}}) < \frac{\epsilon}{2}$$

per tant

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(J^{(i)}) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

**Corol·lari 1.1.6** *Els conjunts numerables són conjunts nuls.*

**Demostració.-** És evident que un conjunt format per un sol element és un conjut nul. Com un conjunt numerable es pot escriure com unió numerable de conjunts d'un sol element, per l'apartat (2) de la proposició anterior, obtenim el resultat.

## 1.2. Exemples.

**Proposició 1.2.1** *Un hiperplà en $\mathbb{R}^n$ es un conjunt nul.*

**Demostració.-** Un hiperplà en $\mathbb{R}^n$ és una varietat lineal $(n-1)$-dimensional. Per tant, si $H$ és un hiperplà, podem afirmar que existeix $a \in \mathbb{R}^n$ i un subespai vectorial de dimensió $n-1$, $F$ tal que

$$H = \{a + v : \ v \in F\}$$

farem la prova per als hiperplans paral·lels als eixos coordenats, sense pèrdua de generalitat, podem suposar que

$$H = \{(x_1, ..., x_{n-1}, a) : \ x_k \in \mathbb{R}, \ k = 1, 2, ..., n-1\}$$

Vegem que $H$ és un conjunt nul.

En efecte; Siga $\epsilon > 0$, anomenem:

$$I_1 = ]-2, 2[\times ... \times]-2, 2[\times]a - \frac{\epsilon}{2^{2(n-1)+1+1}}, a + \frac{\epsilon}{2^{2(n-1)+1+1}}[$$

$$I_2 = ]-2^2, 2^2[\times \ldots \times ]-2^2, 2^2[\times ]a - \frac{\epsilon}{2^{(2+1)(n-1)+1+2}}, a + \frac{\epsilon}{2^{(2+1)(n-1)+1+2}}[$$

Així successivament, donat $k \in \mathbb{N}$, es defineix;

$$I_k = ]-2^k, 2^k[\times \ldots \times ]-2^k, 2^k[\times ]a - \frac{\epsilon}{2^{(k+1)(n-1)+1+k}}, a + \frac{\epsilon}{2^{(k+1)(n-1)+1+k}}[$$

tenint en compte la definició de $H$ està clar que

$$H \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$$

a més a més és clar que

$$\mu(I_k) = (\prod_{i=1}^{n-1} \mu(]-2^k, 2^k[) \mu(]a - \frac{\epsilon}{2^{(k+1)(n-1)+1+k}}, a + \frac{\epsilon}{2^{(k+1)(n-1)+1+k}}) =$$

$$(\prod_{i=1}^{n-1} 2^{k+1}) \frac{2\epsilon}{2^{(k+1)(n-1)+1+k}} = \frac{\epsilon}{2^k}$$

Per consegüent,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon.$$

**Proposició 1.2.2** *Siga $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ amb $I$ un interval. Si $f$ és continua en $I$ llavors $G(f)$ és un conjunt nul de $\mathbb{R}^2$.*

**Demostració.-** Primer farem la demostració per al cas en que $I$ és un interval compacte $[a, b]$.

Com $f$ és continua en $[a, b]$ pel teorema de Heine-Cantor sabem que $f$ es uniformement continua en $[a, b]$ la qual cosa significa que

Donat $\epsilon' > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$ llavors $|f(x) - f(y)| < \epsilon'$.

Considerem $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{b-a}{n} < \delta$, i ara anomenem $a_j = a + j\frac{b-a}{n}$ amb $j = 0, 1, \ldots, n$ és evident que $\{a_j\}_{j=0}^{n}$ és una partició de l'interval $[a, b]$. Això ens permet agafar els següents rectangles

$$I_j = [a_j, a_{j+1}] \times [f(a_j) - \epsilon', f(a_j) + \epsilon']$$

Vegem que $\{I_j\}_{j=0}^{n-1}$ és un recobriment de $G(f)$.

En efecte;

Donat $(x, f(x)) \in G(f)$ sabem que $x \in [a,b]$ per tant existirà $j \in \{0, 1, ..., n\}$ tal que $x \in [a_j, a_{j+1}]$ llavors, $|x - a_j| \leq |a_{j+1} - a_j| < \delta$ i per tant, $|f(x) - f(a_j)| < \epsilon'$ la qual cosa ens diu que:

$$G(f) \subseteq \bigcup_{j=0}^{n-1} I_j$$

a més a més,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \mu(I_j) = \sum_{j=0}^{n-1} (a_{j+1} - a_j) 2\epsilon' = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} 2\epsilon' = \epsilon' 2(b-a)$$

llavors prenent $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2(b-a)}$ s'obté el resultat.

El cas general,

Siga $I$ un interval, llavors podem escriure $I$ com unió numerable d'intervals compactes, es a dir $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Tenint en compte la definició de $G(f)$ es té

$$G(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x, f(x)) : x \in [a_n, b_n]\}$$

però pel cas anterior cadascun dels conjunts que formen la unió anterior és un conjunt nul. Ara aplicant que la unió numerable de conjunts nuls és al seu torn un conjunt nul obtenim el resultat.

## 1.3. Problemes proposats.

**Exercici 1** *Demostrar que* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *no és un subconjunt nul de la recta real.*

**Exercici 2** *Provar que existeixen conjunts de nombres reals nuls que no són numerables.*

**Exercici 3** *Demostrar que si $A$ és nul en $\mathbb{R}^n$ i $a \in \mathbb{R}^n$, llavors el conjunt $a + A := \{a + x \in \mathbb{R}^n : \ x \in A\}$ és nul també.*

**Exercici 4** *Siga $c \in \mathbb{R}$ i considerem el conjunt de $\mathbb{R}^2$ definit per: $\{(x, cx) : x \in \mathbb{R}\}$. Provar que dit conjunt és nul.*

**Exercici 5** *Demostrar que tota circumferència en $\mathbb{R}^2$ és un conjunt nul.*

Siga $P(x)$ una propietat que depén de $x \in \mathbb{R}^n$. Direm que la propietat $P(x)$ es verifica *quasi per totes parts,* quan existeix un conjunt nul $A$ tal que si $x \notin A$, llavors es compleix la propietat.

**Exercici 6** *Siguen les successiones funcionals, $(f_n)$ i $(g_n)$ de forma que $f_n \to f$ q.p.p. i $g_n \to g$ q.p.p. Si per a tot $n \in \mathbb{N}$ es té que $f_n = g_n$ q.p.p. LLavors, $f = g$ q.p.p.*

**Exercici 7** *El límit quasi per totes parts d'una successió de funcions si existeix és únic?. Per qué?.*

# Tema 2

# FUNCIONS ESGLAONADES.

## 2.1. Definicions i Propietats.

**Definició 2.1.1** *Siga $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Anomenarem funció característica de $A$ a la següent funció*

$$\begin{array}{rccl} \chi_A : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \chi_A(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{array} \right. \end{array}$$

**Definició 2.1.2** *Una funció s'anomena simple o esglaonada si es pot escriure com una combinació lineal finita de funcions característiques d'intervals fitats.*

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{I_k}$$

*on els $\alpha_k \in \mathbb{R}$ i els $I_k$ són intervals fitats.*

Denotarem per $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ al conjunt de les funcions esglaonades en $\mathbb{R}^n$. Evidentment $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ és un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$.

**Lema 2.1.3** *Siga $\phi$ una funció esglaonada en $\mathbb{R}^n$. LLavors $\phi$ es pot escriure com combinació lineal finita de funcions característiques d'intervals disjunts dos a dos.*

**Demostració.** Suposem que

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{I_k}$$

on els $I_k$ són els intervals que caracteritzen a $\phi$. Com tots aquests intervals són fitats podem considerar els seus hiperplans fitants.

Considerem els següents hiperplans:

$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = 0\}$$

Siga $p_i$ el número d'hiperplans fitants paral·lels a $H_i$.

Vegem quants intervals disjunts podem formar:

**Exemple 2.1.4** Siga $\phi = \alpha_1 \chi_{[a_1,b_1]} + \alpha_2 \chi_{]a_2,b_2[}$. En aquest cas, tenim que $i = 1$ i $p_i = 4$ els intervals disjunts seran (suposem a més a més que $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$)

$$[a_1, a_1], [a_2, a_2], [b_1, b_1], [b_2, b_2]$$

$$]-\infty, a_1[, ]a_1, a_2[, ]a_2, b_1[, ]b_1, b_2[, ]b_2, +\infty[$$

apareixen, $2p_i + 1$ intervals disjunts, dels quals $2p_i - 1$ són fitats.

En $\mathbb{R}^2$, si prenem $I_1 = [a_1, b_1] \times [a_1, b_1]$ $I_2 = [a_2, b_2] \times [a_2, b_2]$ ($a_1 < a_2 < b_1 < b_2$.) Siga $i \in \{1, 2\}$, llavors tenim que $p_i = 4$.

Intervals disjunts, segons hem vist abans:

$$[a_1, a_1] \times \{[a_1, a_1], [a_2, a_2], [b_1, b_1], [b_2, b_2], ]-\infty, a_1[, ]a_1, a_2[, ]a_2, b_1[, ]b_1, b_2[, ]b_2, +\infty[\}$$

és a dir, amb $[a_1, a_1]$ podem formar $2p_1 + 1$ intervals disjunts i $2p_1 - 1$ dels quals són fitats.

Fent això per a tots els intervals de la primera projecció obtenim $(2p_1 + 1)(2p_2 + 1)$ intervals disjunts i dels quals $(2p_1 - 1)(2p_2 - 1)$ són fitats.

Tenint en compte això i mitjançant un proces inductiu s'obté que si $p_i$ és el número d'hiperplans fitants paral·lels a $H_i$ es té que hi han $(2p_1+1)(2p_2+1)...(2p_n+1)$ intervals disjunts dos a dos i dels quals $(2p_1-1)(2p_2-1)...(2p_n-1)$ són fitats. De tots els intervals que obtenim ens quedem amb el fitats.

Aquest raonament ens diu que donats $I_1, ..., I_n$ intervals fitats, existeix $s \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bigcup_{i=1}^{n} I_i = \bigcup_{i=1}^{s} J_i$$

on els $J_i$ són intervals disjunts dos a dos i a més a més són fitats.

És clar aleshores que

$$\phi = \sum_{i=1}^{s} \beta_i \chi_{J_i}$$

on els $\beta_i$ venen donats de la forma següent:

Si donat $J_i$ existeix $i_0$ tal que $J_i \subseteq I_{i_0}$, llavors

$$\beta_i = \alpha_{i_0}$$

Si existeixen $i_1, ..., i_k$ tal que $J_i \subseteq I_{i_1} \cap ... \cap I_{i_k}$ aleshores definim

$$\beta_i = \alpha_{i_1} + ... + \alpha_{i_k}$$

d'on s'obté el resultat.

Com el concepte d'integral és una generalització de l'àrea, es tracta d'obtindre el següent:

Si $I$ és un interval fitat en $\mathbb{R}$, i $\chi_I$ és la seua funció característica, aleshores déu complir-se:

$$\int \chi_I = \mu(I)$$

Si tenim una funció esglaonada, tenint en compte el que hem fet abans, podem considerar que

$$\phi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{I_i}$$

on els intervals $I_i$ són fitats i disjunts dos a dos. Es defineix:

$$\int \phi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(I_i)$$

Per a que aquesta definició tinga sentit en les funcions esglaonades hem d'assegurar-nos que és independent del representant triat.

**Lema 2.1.5** *Suposem que* $\phi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{I_i}$ *i que* $\phi = \sum_{i=1}^{r} \beta_i \chi_{J_i}$. *(Els intervals disjunts dos a dos). LLavors*

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(I_i) = \sum_{i=1}^{r} \beta_i \mu(J_i)$$

**Demostració.** Considerem els intervals $I_1, ..., I_m, J_1, ..., J_r$, pel procediment descrit al Lema 2.1.3, podem obtindre $K_1, ..., K_s$ intervals fitats disjunts dos a dos que ens permetran escriure:

$$\phi = \sum_{i=1}^{s} \gamma_i \chi_{K_i}$$

Considerem dos casos especials:

(1). Siga $I$ un interval fitat en $\mathbb{R}^n$. Un hiperplà

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = a\}$$

pot utilitzar-se per a dividir a $I$ en tres intervals disjunts:

$$I_1 = \{x \in I : x_i < a\}$$

$$I_2 = \{x \in I : x_i = a\}$$

$$I_3 = \{x \in I : x_i > a\}$$

Així tenim

$$\chi_I = \chi_{I_1} + \chi_{I_2} + \chi_{I_3}$$

a més a més, com $\mu(I_2) = 0$ la definició d'integral ens diu que

$$\int \chi_I = \mu(I) = \mu(I_1) + \mu(I_3)$$

(2). Per a dos números reals $a, b$ i un interval fitat $I$ es té que $(a+b)\chi_I = a\chi_I + b\chi_I$ això és consistent amb la definició d'integral ja que $(a+b)\mu(I) = a\mu(I) + b\mu(I)$.

Com de $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{I_i}$ a $\sum_{i=1}^{s} \gamma_i \chi_{K_i}$ es passa fent una successió finita de transformacions de tipus (1) i (2) obtenim que

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(I_i) = \sum_{i=1}^{s} \gamma_i \mu(K_i)$$

de la mateixa manera podem fer l'altre cas.

Com a conseqüència dels lemes precedents es pot concloure que la definició d'integral d'una funció esglaonada és consistent.

**Proposició 2.1.6 ( Propietats.-)** *(a).- Linealitat: Si $\phi, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Aleshores, $\int(\alpha\phi + \beta\varphi) = \alpha \int \phi + \beta \int \varphi$.*

*(b).- Monotonia: Siguen $\phi, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi \leq \varphi$. LLavors $\int \phi \leq \int \varphi$.*

*(c).- Si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Aleshores $|\phi| \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ i a més a més, $|\int \phi| \leq \int |\phi|$.*

**Demostració.**

(b).- Escriurem $\phi = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{I_i}$, on els intervals involucrats són disjunts dos a dos.

Si $\phi \geq 0$ és perqué tots el $\alpha_i \geq 0$ amb la qual cosa, és fàcil veure que $\int \phi \geq 0$.

Suposem ara, que $\phi \leq \varphi$, llavors $\varphi - \phi \geq 0$ per tant, $\int(\varphi - \phi) \geq 0$ per (a) tenim que

$$0 \leq \int (\varphi - \phi) = \int \varphi - \int \phi.$$

## 2.2. Figures elementals.

**Definició 2.2.1** *Un subconjunt $A \subseteq \mathbb{R}^n$ és una figura si existeix $\{I_j\}_{j=1}^m$ intervals fitats disjunts dos a dos de forma que*

$$A = \bigcup_{j=1}^{m} I_j.$$

Al conjunt de totes les **figures elementals** de $\mathbb{R}^n$ el denotarem per $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$

**Teorema 2.2.2 (Caracterització)** *(a).- $A$ és una figura si, i només si, $\chi_A$ és esglaonada.*

*(b).- Siguen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ i $M > 0$ llavors, $A := \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \geq M\}$ és una figura.*

**Demostració.**

(a). ($\Rightarrow$) Sabem que

$$\begin{array}{rccl} \chi_A : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \chi_A(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{array} \right. \end{array}$$

Ara, utilitzant la definició de figura, si $x \in A$ existirà un únic $I_j$ tal que $x \in I_j$. Per tant,

$$\chi_A = \sum_{j=1}^{m} \chi_{I_j}$$

($\Leftarrow$) Suposem que $\chi_A = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{I_i}$ amb els $I_i$ disjunts dos a dos. També podem suposar que els $\alpha_i \neq 0$. Això significa que, si $x \in A$ aleshores

$$\chi_A(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{I_i}(x) = 1.$$

Per consegüent, existirà un únic $I_j$ tal que $x \in I_j$, el que ens porta a concloure que

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} I_j...(*)$$

D'altra banda, si $x \notin A$ aleshores

$$\chi_A(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{I_i}(x) = 0.$$

Així que

$$x \notin \bigcup_{j=1}^{m} I_j....(**)$$

Dels fets (*) i (**) concluim que,

$$A = \bigcup_{j=1}^{m} I_j.$$

(b). Com que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ podem escriure:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \chi_{J_i},$$

on els intervals involucrats són disjunts dos a dos.

Considerem

$$\phi = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \chi_{J_i},$$

on $\beta_i = 1$ si $\alpha_i \geq M$ i $\beta_i = 0$ si $\alpha_i < M$

Vegem que $\chi_A = \phi$. En efecte;

Si $x \in A$, aleshores $\varphi(x) \geq M$. Com a més a més, els intervals són disjunts dos a dos. Existirà un únic $J_i$ tal que $x \in J_i$. Per tant, $\varphi(x) = \alpha_i \geq M$ i per la definició dels $\beta_i$ es té que $\beta_i = 1$ d'on deduim que $\phi(x) = 1$.

Si $x \notin A$, llavors $\varphi(x) < M$ el que ens diu:

D'una banda que, si $x \in J_i$ aleshores $\alpha_i < M$ d'on $\beta_i = 0$.

D'altra que $x \notin \bigcup I_i$ la qual cosa implica que $\phi(x) = 0$

**Proposició 2.2.3** *Si $S; T \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. LLavors es té que:*

*(a).- $S \cap T \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.*

*(b).- $S \cup T \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.*

*(c).- $S \setminus T \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.*

*(d).- $S \triangle T \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.*

**Demostració.**

(a). L'únic que hem de demostrar és que $\chi_{S\cap T}$ és una funció esglaonada. Però, clarament

$$\chi_{S\cap T} = \chi_S \chi_T,$$

llavors, $S \cap T \in \mathcal{F}(\mathcal{R}^n)$.

(b). Com que

$$\chi_{S\cup T} = \chi_S + \chi_T - \chi_{S\cap T},$$

s'arriba al resultat.

(c).- És evident a partir del fet:

$$\chi_{S\setminus T} = \chi_S - \chi_{S\cap T}.$$

(d).- És clar, ja que

$$S \triangle T = (S \setminus T) \cup (T \setminus S).$$

Si $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, aleshores per la definició,

$$S = \bigcup_{i=1}^{m} I_i$$

on els $I_i$ són intervals disjunts dos a dos. Això ens permet definir la mesura de $S$ de la següent forma:

$$\mu(S) = \sum_{i=1}^{m} \mu(I_i)$$

i com a més a més, $\chi_S = \sum_{i=1}^{m} \chi_{I_i}$, s'obté que,

$$\int \chi_S = \sum_{i=1}^{m} \mu(I_i).$$

El fet anterior ens permet definir:

Donada $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ i $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\int_A \varphi := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \chi_A$$

Aquesta última expressió té sentit, ja que $\chi_A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, i per tant, $\varphi\chi_A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. A més a més, tenint en compte l'últim resultat, si $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ es té:

$$\int_{A\cup B} \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B})$$

llavors, si $A \cap B = \emptyset$ s'obté

$$\int_{A\cup B} \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\chi_A + \chi_B)$$

ara aplicant la linealitat de la integral, s'arriba:

$$\int_{A\cup B} \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\chi_A + \chi_B) = \int_A \varphi + \int_B \varphi.$$

## 2.3. Successions monòtones de funcions esglaonades.

Una successió de funcions reals $\{f_n\}$ definida sobre un conjunt $S$ s'anomena *monòtona creixent en $S$* si:

$$f_n(x) \le f_{n+1}(x)$$

per a tot $x \in S$ i per a tot $n \in \mathbb{N}$.

Una successió de funcions reals s'anomena *monòtona decreixent* si:

$$f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$$

per a tot $x \in S$ i per a tot $n \in \mathbb{N}$.

**Notació.** Si $\{f_n\}$ és una successió creixent de funcions definides en $S$ tal que $f_n \to f$ q.p.p. en $S$, escriurem

$$f_n \uparrow f \text{ } q.p.p. \text{ en } S.$$

De la mateixa forma, la notació $f_n \downarrow f$ q.p.p. en $S$ significarà que la successió $\{f_n\}$ és decrecixent en $S$ i convergeix quasi per totes parts a $f$.

**Teorema 2.3.1** *Siga $\{S_m\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $S_m \downarrow 0$ q.p.p. en $I$ ( on $I$ és un interval) i a més a mes, $S_m \geq 0$ per a tot $m \in \mathbb{N}$. Llavors*

$$\lim_{m\to\infty} \int_I S_m = 0.$$

**Demostració.** La demostració consisteix en escriure

$$\int_I S_m = \int_A S_m + \int_B S_m$$

on $A$ i $B$ són unió finita d'intervals (per tant, $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$). El conjunt $A$ s'obtindrà triant aquells intervals on l'integrand és xicotet quan $m$ és suficientment gran. En $B$ l'integrand no necessita ésser xicotet, però en canvi la suma de les mesures dels seus intervals serà xicoteta.

Com que $S_1$ és una funció esglaonada, aleshores existirà un interval compacte $I_0$ tal que $S_1(x) = 0$ sempre que $x \in \mathbb{R}^n \setminus I_0$.

Com que $0 \leq S_m(x) \leq S_1(x)$ per a tot $x \in I$. Cada $S_m$ s'anul·la fora de $I_0$. Ara be, $S_m$ és constant en cada subinterval obert d'una certa partició de

$I_0$. Designem $D_m$ al conjunt de les cares d'aquests subintervals, i siga $D = \bigcup D_m$. Com que cada $D_m$ és un conjunt finit de cares (les cares són conjunts nuls), $D$ serà un conjunt nul.

Siga $E$ el conjunt de punts de $I_0$ en els que la successió $(S_m)$ no convergeix a zero. Per hipòtesi $E$ és nul. Per tant, el conjunt $F = E \cup D$ serà també nul.

Això significa que:

Donat $\epsilon > 0$ existirà $(F_k)$ successió d'intervals oberts i fitats de manera que:

$$F \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k,$$

i a més a més,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k) < \epsilon.$$

Suposem que $x_0 \in I_0 \setminus F$. Aleshores, $x_0 \notin E$, d'on $S_m(x_0) \to 0$. Per tant, existirà $N(x_0) \in \mathbb{N}$ tal que $S_N(x_0) < \epsilon$. A més a més, $x_0 \notin D$, així que $x_0$ està a l'interior d'algun dels subintervals en els que $S_N$ és constant. Així podem afirmar que existeix un interval obert $B(x_0)$ de forma que $S_N(t) < \epsilon$ per a tot $t \in B(x_0)$.

Com que la successió $(S_m)$ és decreixent, tenim a més a més, que $S_m(t) < \epsilon$ per a tot $m \geq N$ i per a tot $t \in B(x_0)$.

El conjunt de tots els intervals $B(x)$ que s'obtenen quan $x \in I_0 \setminus F$ junt amb els intervals oberts $(F_k)$ formen un recobriment obert de $I_0$.

Com que $I_0$ és compacte

$$I_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i) \cup \bigcup_{r=1}^{q} F_r.$$

Siga $N_0 := \text{máx}\{N(x_1), ..., N(x_p)\}$. Aleshores

$$S_m(t) < \epsilon$$

per a tot $n \geq N_0$ i per a tot $t \in \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i)$.

Ara definim $A$ i $B$ de la següent manera:

$$B = \bigcup_{r=1}^{q} F_r$$

i

$$A = I_0 \setminus B,$$

és clar que

$$\int_I S_m = \int_{I_0} S_m = \int_A S_m + \int_B S_m.$$

Calculem la integral sobre $B$.

Com que $\{S_m\}$ és decreixent, tenim que $S_m(x) \leq S_1(x) \leq M$ per a tot $x \in I_0$.

La suma de les longituds dels intervals que pertanyen a $B$ és menor que $\epsilon$. D'on podem traure que:

$$\int_B S_m \leq \int S_m \chi_B \leq M\epsilon.$$

Ara calcularem la integral sobre $A$.

Com que $A = I_0 \setminus B \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i)$ es dedueix que $S_m(x) < \epsilon$ per a tot $x \in A$ i per a tot $m \geq N_0$.

Així, si $n \geq N_0$

$$\int_A S_m = \int S_m \chi_A < \epsilon\mu(A) \leq \epsilon\mu(I_0).$$

Aquests dos casos ens porten a la conclusió de que si $m \geq N_0$ llavors

$$\int_I S_m \leq (M + \mu(I_0))\epsilon$$

amb la qual cosa;

$$\lim_{m\to\infty} \int_I S_m = 0.$$

**Definició 2.3.2** *Siguen $f, g$ funcions reals definides sobre $\mathbb{R}^n$, anomenem* $\max\{f, g\} \equiv f \vee g$ *i* $\min\{f, g\} \equiv f \wedge g$ *respectivament, a les funcions:*

$$x \to \max\{f(x), g(x)\}$$

$$x \to \min\{f(x), g(x)\}$$

Amb aquestes definicions és senzill comprovar que:

$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}\{f + g + |f - g|\}, \quad \min\{f, g\} = \frac{1}{2}\{f + g - |f - g|\}.$$

$$\max\{f, g\} + \min\{f, g\} = f + g.$$

$$\max\{f + h, g + h\} = \max\{f, g\} + h, \quad \min\{f + h, g + h\} = \min\{f, h\} + h$$

Una conseqüència pràcticament inmediata de les definicions és la següent:
Si $f_n \to f$ q.p.p., i si $g_n \to g$ q.p.p. llavors

$$\max\{f_n, g_n\} \to \max\{f, g\} \quad \text{q.p.p.}$$

$$\min\{f_n, g_n\} \to \min\{f, g\} \quad \text{q.p.p.}$$

**Proposició 2.3.3** *Si $f, g$ són funcions esglaonades, aleshores* $\max\{f, g\}$ *i* $\min\{f, g\}$ *són també funcions esglaonades.*

**Teorema 2.3.4** *Siga $\{t_m\}$ una successió de funcions esglaonades en l'interval $I$ de manera que*

*(a). Existeix $f$ de forma que $t_n \uparrow f$ q.p.p. en $I$.*

*(b). La successió $\{\int_I t_m\}$ convergeix.*

*Llavors tota $t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $t(x) \leq f(x)$ q.p.p. en $I$, compleix que*

$$\int_I t \leq \lim_{m\to\infty} \int_I t_m.$$

**Demostració.** Definirem una nova successió de funcions esglaonades no negatives sobre $I$ de la forma següent:

$$\begin{array}{rccl} S_m : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & S_m(x) = \left\{ \begin{array}{ll} t(x) - t_m(x) & t(x) \geq t_m(x) \\ 0 & t(x) < t_m(x) \end{array} \right. \end{array}$$

Observeu que $S_m(x) = \max\{t(x) - t_m(x), 0\}$. Aleshores la successió $\{S_m\}$ és decreixent en $I$ ja que $\{t_m\}$ és una successió creixent. A més a més, $S_m \to \max\{t(x) - f(x), 0\}$ q.p.p. en $I$. Però com que $t(x) \leq f(x)$ q.p.p. en $I$ tenim que $S_m \downarrow 0$ q.p.p. en $I$.

D'aquesta manera aplicant el teorema anterior:

$$\lim_{m\to\infty} \int_I S_m = 0.$$

Com que $S_m(x) \geq t(x) - t_m(x)$ per a tot $x \in I$, la monotonia de la integral ens assegura que

$$\int_I S_m \geq \int_I t - \int_I t_m.$$

Així que

$$\lim_{m\to\infty} \int_I t_m \geq \int_I t.$$

## 2.4. Problemes proposats.

**Exercici 8** *Considerem en $\mathbb{R}^2$ els següents rectangles:*

$$I_1 = [1,2[\times]0,3],\ I_2 = [1,3[\times]1,2[,\ I_3 = [0,3] \times [0,3].$$

*Expressar les següents funcions esglaonades en termes d'intervals disjunts:*

$$\chi_{I_1} - \chi_{I_2},\ \chi_{I_1} + \chi_{I_3},\ \chi_{I_1} - \chi_{I_2} + \chi_{I_3}.$$

**Exercici 9** *És el producte de dues funcions esglaonades una funció esglaonada? En cas afirmatiu, ¿Es pot afirmar que la integral del producte és el producte de les integrals?*

**Exercici 10** *Agafem la successió de funcions esglaonades:*

$$\begin{array}{rccl} S_m: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & S_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{m} & x \geq \frac{1}{m} \\ 1 & x < \frac{1}{m} \end{cases} \end{array}$$

*Proveu que* $\lim_{m\to\infty} \int_{[0,1]} S_m = 0$, *sense calcular el límit.*

**Exercici 11** *Provar la Proposició 2.3.3.*

**Exercici 12** *Si* $f_n \to f$ *q.p.p., i si* $g_n \to g$ *q.p.p. Provar que*

$$\max\{f_n, g_n\} \to \max\{f, g\} \quad \text{q.p.p.} \quad \text{i} \quad \min\{f_n, g_n\} \to \min\{f, g\} \quad \text{q.p.p.}$$

**Exercici 13** *Siga* $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$. *Siga* $a \in \mathbb{R}^k$, *i siga* $r > 0$. *Definim*

$$\psi(x) := \phi(x + a)$$

$$\theta(x) = \phi(rx).$$

*Provar que* $\psi, \theta$ *són funcions esglaonades i que:*

$$\int \psi = \int \phi, \quad \int \theta = \frac{1}{|r|^k} \int \phi.$$

# Tema 3

# FUNCIONS SUPERIORS.

## 3.1. Definicions i Propietats.

**Definició 3.1.1** *Una funció real $f$ definida sobre $\mathbb{R}^n$ s'anomena funció superior, i s'escriu $f \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$, si existeix una successió creixent de funcions esglaonades $\{S_m\}$ tal que*

*(a). $S_m \uparrow f$ q.p.p. en $\mathbb{R}^n$*

*(b). la successió $\{\int_{\mathbb{R}^n} S_m\}$ està fitada superiorment.*

En aquest cas també direm que la successió $\{S_m\}$ genera a $f$.

La integral d'una funció superior $f$ es defineix:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f := \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} S_m.$$

**Observació.** Com la successió $\{\int_{\mathbb{R}^n} S_m\}$ está fitada superiorment i per la monotonia de la integral és una successió monòtona creixent, la condició (b) ve a dir que dita successió és convergent.

El proper resultat demostra que la definició de la integral d'una funció superior és consistent.

**Teorema 3.1.2** *Suposem que $f \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$ i siguen $\{S_m\}$ i $\{t_m\}$ successions de funcions esglaonades que generen a $f$. Llavors,*

$$\lim_{m\to\infty} \int S_m = \lim_{m\to\infty} \int t_m.$$

**Demostració.** La successió $\{t_m\}$ compleix les hipòtesis (a) i (b) del Teorema 2.3.4, ja que

(a). $t_m \uparrow f$ q.p.p.

(b). $\{\int t_m\}$ és convergent.

D'altra banda, sabem que $S_m \uparrow f$ q.p.p. el que significa que, $S_m(x) \leq f(x)$ q.p.p. A més a més, com la successió $\{S_m\}$ és de funcions esglaonades, utilitzant el Teorema 2.3.4, s'arriba a:

$$\int S_m \leq \lim_{m\to\infty} \int t_m$$

i per tant,

$$\lim_{m\to\infty} \int S_m \leq \lim_{m\to\infty} \int t_m$$

Intercanviant, ara, els papers de les dues successions obtindriem l'altra desigualtat i d'aquesta manera el resultat.

**Proposició 3.1.3 (Propietats de les funcions superiors.-)** *Suposem que $f, g \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$ llavors:*

*(a). $f + g \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$ i $\int (f+g) = \int f + \int g$.*

*(b). $cf \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$ per a tot $c \geq 0$ i a més a més, $\int cf = c \int f$.*

*(c). Si $f \leq g$ q.p.p. aleshores $\int f \leq \int g$.*

*(d). $\max\{f, g\}$ i $\min\{f, g\}$ són també funcions superiors.*

**Demostració.** Els apartats (a) i (b) són conseqüència inmediata de les propietats de les integrals de les funcions esglaonades.

Vegem (c).

Siga $(S_m)$ una successió que genera a $f$ i siga $(t_m)$ una successió que genera a $g$.

Llavors, com que $f \leq g$ q.p.p., tenim

$$S_m(x) \leq f(x) \leq g(x) = \lim_{m\to\infty} t_m(x)$$

q.p.p. Així, per la definició d'integral d'una funció superior i pel Teorema 2.3.4, es compleix

$$\int S_m \leq \lim_{m\to\infty} \int t_m = \int g.$$

i fent tendir $m \to \infty$ s'obté el resultat.

El següent resultat ens proporciona una conseqüència important de l'apartat (c) de les propietats de les funcions superiors.

**Teorema 3.1.4** *Si $f, g \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$ i $f = g$ q.p.p. Aleshores,*

$$\int f = \int g.$$

**Demostració.** Com que $f = g$ q.p.p.. Llavors

(1). $f \leq g$ q.p.p., aplicant (c), s'obté $\int f \leq \int g$.

(2). $g \leq f$ q.p.p., aleshores aplicant (c), s'arriba a que $\int g \leq \int f$.

De (1) i (2) es dedueix que,

$$\int f = \int g.$$

## 3.2. Exemples

**Obsevació.** En l'apartat (b) de la Proposició 3.1.3, el fet de que $c \geq 0$ és fonamental.

En efecte; siga $I = [0, 1]$. Considerem, ara $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ una ordenació en successió dels nombres racionals de l'interval $I$ i agafem $I_n = [r_n - \frac{1}{4^n}, r_n +$

$\frac{1}{4^n}]$. Definim,

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \begin{cases} 1 & \exists n \in \mathbb{N} : x \in I_n \\ 0 & x \notin I_n \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \end{array}$$

Ara considerem la següent successió funcional.

$$\begin{array}{rccl} f_n: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in I_n \\ 0 & x \notin I_n \end{cases} \end{array}$$

Des de la successió anterior, definim $S_m = \text{máx}\{f_1, f_2, ..., f_m\}$.

(a). Vegem que $\{S_m\}$ és una successió creixent de funcions esglaonades.

En efecte, és una successió creixent . A més a més, cada $S_m$ és esglaonada per ésser el màxim d'un nombre finit de funcions esglaonades.

(b). Vegem que $\text{lím}_{m\to\infty} S_m(x) = f(x)$ per a cada $x \in [0,1]$.

Donat $x \in [0,1]$, poden passar dos casos:

Cas 1. Existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in I_n$. Si passa això, aleshores $S_m(x) = 1$ per a tot $m \geq n$ el que ens diu que,

$$\text{lím}_{m\to\infty} S_m(x) = 1 = f(x).$$

Cas 2.- Donat $n \in \mathbb{N}$ suposem que $x \notin I_n$, llavors, $S_n(x) = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ per tant,

$$\text{lím}_{m\to\infty} S_m(x) = 0 = f(x).$$

A més a més, és clar que $\int_I S_m \leq 1$ per a tot $m \in \mathbb{N}$. Així que, $f \in \mathcal{U}(I)$.

(c).

$$\int_I f = \text{lím}_{m\to\infty} \int_I S_m = \text{lím}_{m\to\infty} (\int_{A_m} S_m + \int_{B_m} S_m) \leq ...(*)$$

on $A_m = \bigcup_{n=1}^m [r_n - \frac{1}{4^n}, r_n + \frac{1}{4^n}]$ i $B_m = [0,1] \setminus A_m$. Per tant, $S_m(x) = 0$ sempre que $x \in B_m$ i $S_m(x) \leq 1$ si $x \in A_m$. D'aquesta manera es té:

$$(*) \leq \text{lím}_{m\to\infty} \int_{A_m} S_m \leq \mu(A_m) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4^n} = 2\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

(d). Si $S$ és una funció esglaonada tal que $S \leq -f$ q.p.p. en $I$. Llavors es pot provar que $S(x) \leq -1$ q.p.p. en $I$, i per tant, $\int_I S \leq -1$.

En efecte, considerem la següent funció esglaonada

$$S = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \chi_{J_k}$$

on els $J_k$ són intervals disjunts dos a dos i fitats.

Com que $S \leq -f$ q.p.p. en $I$, siga $A$ un subconjunt nul tal que $S(x) \leq -f(x)$ per a tot $x \in I \setminus A$. Si $x \in I_n \setminus A$ per un $n \in \mathbb{N}$, llavors $x \in J_k$ per un $k \in \mathbb{N}$ ja que en cas contrari $S(x) = 0$ i $-f(x) = -1$.

D'aquesta manera, si $J_k = I(a_k, b_k)$ amb $b_r = 1$, i podem suposar que $b_i \leq a_{i+1}$.

Si $a_{i+1} - b_i > 0$ per un $i \in \{1, 2, ..., r-1\}$, llavors existirà $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b_i < r_{n_0} < a_{i+1}$ per tant, podem suposar que existeix $0 < \epsilon < \frac{1}{4^{n_0}}$ de manera que $]r_{n_0} - \epsilon, r_{n_0} + \epsilon[ \subset ]b_i, a_{i+1}[$. Ara és fàcil veure que si $x \in ]r_{n_0} - \epsilon, r_{n_0} + \epsilon[ \setminus A$, $S(x) = 0$ i $-f(x) = -1$, la qual cosa és una contradicció. El que ens diu que $a_{i+1} - b_i = 0$.

Aquesta última conclusió ens permet afirmar que els únics punts on $S(x)$ pot ésser major que $-1$ és quan $x \in \{a_1, b_1, ..., b_{r-1} b_r\}$ que per ésser un conjunt finit és nul. ( Això es dona, ja que en $J_k$ hi han $r_n$) i per tant $\alpha_k \leq -1$.

És a dir, $S(x) \leq -1$ q.p.p. en $[0, 1]$.

Suposem ara que $-f \in \mathcal{U}(I)$.

Sabem que si $f, g \in \mathcal{U}(I)$ aleshores, $\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g$ per tant,

$$\int_I (-f) = -\int_I f.$$

Això significa que $\int_I (-f) \geq -\frac{2}{3}$.

Però d'altra banda, si

$$\{S_m\} \uparrow -f \ q.p.p. \text{ en } I$$

i a més a més,

$$\lim_{m\to\infty}\int_I S_m = \int_I (-f),$$

com deu verificar-se, per (d), que $\int_I S_m \leq -1$ s'arriba a una contradicció.

L'exemple d'abans fica de relleu que les funcions superiors no formen un espai vectorial. Ara veurem que, tanmateix, les funcions superiors inclouen una gran quantitat de funcions.

**Teorema 3.2.1** *Siga $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funció fitada i continua q.p.p. en $[a,b]$. Llavors $f$ és una funció superior.*

**Demostració.** Siga $P_n := \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, ..., x_{2^n}^{(n)}\}$ una partició de $[a,b]$ en $2^n$ subintervals d'igual longitud $\frac{b-a}{2^n}$.

Els subintervals de $P_{n+1}$ s'obtenen dividint en dos els de $P_n$.

Siga

$$m_k^{(n)} := \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}]\} \text{ per a } 1 \leq k \leq 2^n$$

i definim una funció esglaonada $S_n$ en $[a,b]$ de la següent forma:

$$S_n(x) = m_k^{(n)} \text{ si } x_{k-1}^{(n)} < x \leq x_k^{(n)}, \quad S_n(a) = m_1^{(n)}.$$

Aleshores, $S_n(x) \leq f(x)$ per a tot $x \in [a,b]$. A més a més, la successió $\{S_m\}$ és creixent ja que l'inf$(f)$ en un subinterval d'una partició $P_n$ necessariament deu ésser menor que l'inf$(f)$ en el subinterval correspondent de $P_{n+1}$ (això és conseqüència del fet de que els intervals de la partició $P_{n+1}$ estàn dins dels intervals corresponents de la partició $P_n$).

A continuació vegem que $S_n(x) \to f(x)$ en cada punt de continuïtat de $f$.

Com que el conjunt de punts de discontinuïtat de $f$ en $[a,b]$ és nul, això demostrarà que $S_n \uparrow f$ q.p.p. en $[a,b]$.

Si $f$ és continua en $x$. Aleshores per a cada $\epsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ (que depén de $x$ i de $\epsilon$) tal que

$$f(x) - \epsilon < f(y) < f(x) + \epsilon$$

sempre que

$$x - \delta < y < x + \delta.$$

Siga $m(\delta) = \inf\{f(y) : y \in ]x - \delta, x + \delta[\}$. Llavors $f(x) - \epsilon < m(\delta)$, d'on $f(x) < m(\delta) + \epsilon$. Existeix una partició $P_N$ que té un subinterval que conté a $x$ i está contingut en l'interval $]x - \delta, x + \delta[$. Per tant,

$$S_N(x) = m_k^{(N)} \leq f(x) \leq m(\delta) + \epsilon \leq m_k^{(N)} + \epsilon = S_N(x) + \epsilon.$$

Però $S_n(x) \leq f(x)$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ i $S_N(x) \leq S_n(x)$ per a tot $n \geq N$. Així que,

$$S_n(x) \to f(x) \text{ quan } n \to \infty.$$

L'únic que ens queda per demostrar és que la successió $(\int_{[a,b]} S_n)$ és fitada superiorment.

En efecte, com que $f$ está fitada, existirà $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ per a tot $x \in [a, b]$ i per conseqüent;

$$\int_{[a,b]} S_n \leq \int_{[a,b]} M = M(b - a)$$

## 3.3. Problemes proposats.

**Exercici 14** *Avaluar les següents integrals:*

$$\int_{[1,2]} x dx, \int_{[0,1]} x^2 dx,$$

*mitjançant successions creixents de funcions esglaonades.*

**Exercici 15** *Provar l'apartat (d) de la Proposició 3.1.3*

**Exercici 16** *Provar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ és una funció monòtona, aleshores $f$ és superior.*

**Exercici 17** *Siga $\{I_k\}$ una successió d'intervals fitats de la recta continguts en un interval compacte. Si definim:*

$$A := \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k.$$

*Provar que $\chi_A$ és una funció superior. (Comproveu que això simplifica prou el raonament fet en l'exemple de que les funcions superiors no formen un espai vectorial).*

**Exercici 18** *Siguen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dues funcions reals. Suposem que $f$ és continua i que $f = g$ q.p.p. Raoneu les següent preguntes.*

*(a). És $g$ continua quasi per totes parts?*

*(b). És $g$ una funció superior?*

**Exercici 19** *Siga $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funció monòtona i $g = f$ q.p.p.*

*(a). És $f$ una funció superior?*

*(b). És $g$ una funció monòtona?*

*(c). És $g$ una funció superior?*

# Tema 4

# FUNCIONS INTEGRABLES LEBESGUE.

## 4.1. Definicions i propietats

Hem vist que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ és un espai vectorial real i a més a més, per definició de funció superior sabem que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$. Però hem observat que $\mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$ no és un espai vectorial. Això sugereix definir el següent conjunt:

$$L(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : f = g - h / g, h \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^n)\}$$

cada element de $L(\mathbb{R}^n)$ s'anomena *funció integrable Lebesgue* i la seua integral es defineix mitjançant l'equació:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} g - \int_{\mathbb{R}^n} h.$$

Tota funció $f \in L(\mathbb{R}^n)$ es pot escriure com diferència de dues funcions superiors i no necessàriament de forma única. El proper resultat prova que la definició d'integral de $f$ no depén de la forma de triar les funcions superiors.

**Observació.** És convenient ficar de relleu que com $0 \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$, llavors donada $f \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$ es té que,

$$f = f - 0.$$

Per tant,

$$\mathcal{U}(\mathbb{R}^n) \subseteq L(\mathbb{R}^n).$$

**Teorema 4.1.1** *Siguen $u, v, u_1, v_1 \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$ de forma que $u - v = u_1 - v_1$. Aleshores*

$$\int u - \int v = \int u_1 - \int v_1.$$

**Demostració.** Per les propietats de les funcions superiors sabem que $u + v_1, u_1 + v \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$ i a més a més , per les hipòtesis del teorema, podem afirmar que $u + v_1 = u_1 + v$, amb la qual cosa es té

$$\int (u + v_1) = \int u + \int v_1 = \int (u_1 + v) = \int u_1 + \int v$$

d'on s'obté la tesi del teorema.

En la secció dedicada a les funcions superiors s'ha vist que $\mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$ no és un espai vectorial real, ara provarem que $L(\mathbb{R}^n)$ si ho és, i a més a més, $L(\mathbb{R}^n) =< \mathcal{U}(\mathbb{R}^n) >$ (això significa que $L(\mathbb{R}^n)$ és el menor espai vectorial que conté a les funcions superiors).

**Proposició 4.1.2** *Siguen $f, g \in L(\mathbb{R}^n)$. Aleshores,*

*(a). $af + bg \in L(\mathbb{R}^n)$ per a tot $a, b \in \mathbb{R}$ i a més a més,*

$$\int (af + bg) = a \int f + b \int g$$

*(b).* $\int f \geq 0$ *si* $f \geq 0$ *q.p.p.*

*(c).* $\int f \geq \int g$ *si* $f \geq g$ *q.p.p.*

*(d).* $\int f = \int g$ *si* $f = g$ *q.p.p.*

La prova d'aquest resultat és conseqüència de les propietats de les funcions superiors i de la definició de funció integrable Lebesgue.

**Definició 4.1.3** *Si $f$ és una funció real, la seua part positiva designada per $f^+$ i la seua part negativa designada per $f^-$ es defineixen mitjançant les equacions:*

$$f^+ := \text{máx}\{f, 0\}$$

$$f^- := \text{máx}\{-f, 0\}$$

Observeu que les funcions $f^+$ i $f^-$ són funcions no negatives i verifiquen:

$$f = f^+ - f^-$$

$$|f| = f^+ + f^-$$

**Observació.** Si $f$ és integrable, aleshores existeixen $u, v$ funcions superiors, verificant que $f = u - v$, amb la qual cosa, $f^+ = \text{máx}\{u - v, 0\}$ per tant, deu complir-se: $f^+ = \text{máx}\{u, v\} - v$, ara tenint en compte que el màxim de dues funcions superiors és una funció superior, s'obté que $f^+$ és una funció integrable.

Raonaments anàlegs proven que si $f \in L(\mathbb{R}^n)$, aleshores $f^-, |f| \in L(\mathbb{R}^n)$.

Com una conseqüència del que s'acaba de veure i del fet que $L(\mathbb{R}^n)$ és un espai vectorial, es té que $\text{máx}\{f, g\},\ \text{mín}\{f, g\} \in L(\mathbb{R}^n)$ sempre que $f, g \in L(\mathbb{R}^n)$.

**Proposició 4.1.4** *Siga $f \in L(\mathbb{R}^n)$ i suposem que $f = g$ q.p.p.. Llavors, $g \in L(\mathbb{R}^n)$ i a més a més, $\int f = \int g$.*

**Demostració.** Si $f = g$ q.p.p., aleshores $f - g = 0$ q.p.p., com que la funció 0 és superior podem considerar $(\varphi_m)$ una successió que genere a 0. Això significa que $(\varphi_m)$ generarà a $f - g$. Així que $f - g \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$. A més a més,

$$\int (f-g) = \lim_{m\to\infty} \int \varphi_m = 0.$$

Ara be, podem escriure;

$$g = f - (f - g).$$

Per tant $g \in L(\mathbb{R}^n)$ i com que l'operador integral és lineal, $\int f = \int g$.

Seguidament estudiarem un exemple d'una funció que és integrable Lebesgue en $\mathbb{R}$

**Exemple 4.1.5** Siga la següent funció,

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Q} \\ 1 & x \in \mathcal{Q} \end{array} \right. \end{array}$$

És clar des de la definició que $f = 0$ q.p.p. en $\mathbb{R}$. Per tant, $f \in L(\mathbb{R})$ i la seua integral será $\int_{\mathbb{R}} f = 0$.

Tanmateix, sabem que $f$ no és integrable Riemann en cap interval real.

Una conseqüència d'aquests fets és que hi han funcions integrables Lebesgue que no són integrables en el sentit de Riemann.

La integral de Lebesgue està definida en $\mathbb{R}^n$, per a deixar constància d'aquest fet de vegades fiquem $\int f$ com:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f$$

també s'utilitza la notació:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, ..., x_n) d(x_1, ..., x_n)$$

**Definició 4.1.6** *Siga $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es diu que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és integrable en $A$ si $f\chi_A \in L(\mathbb{R}^n)$. En aquest cas, s'entendrà:*

$$\int_A f := \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_A.$$

*Escriurem*

$$L(I) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : f\chi_I \in L(\mathbb{R}^n)\}.$$

## 4.2. Teorema de Lebesgue-Vitali

El resultat que s'estudia en aquesta secció caracteritza a les funcions integrables Riemann, i a més a més, mostra que la integrabilitat Lebesgue és més general que la de Riemann.

Abans de començar el Teorema de de Lebesgue-Vitali veurem alguns resultats que facilitaràn la seua demostració.

**Definició 4.2.1** *Donada una funció $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fitada, es defineix;*

$$S(g, \delta, x) = \sup\{g(y) : \ i \in B_\delta(x)\}$$

$$s(g, \delta, x) = \inf\{g(y) : \ y \in B_\delta(x)\},$$

*on $B_\delta(x)$ és la bola oberta de centre $x$ i radi $\delta$.*

**Lema 4.2.2** *La funció $g$ és continua en $x$ si, i només si,*

$$\lim_{\delta \to 0}(S(g, \delta, x) - s(g, \delta, x)) = 0$$

**Demostració.**

($\Rightarrow$) Suposem que $g$ és continua en $a$. Aleshores, per a cada $\epsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que si $\|x - a\| < \delta$ llavors

$$|g(x) - g(a)| < \epsilon.$$

Ara, aplicant la desigualtat triangular, s'obté que

$$S(g,\delta,a) - s(g,\delta,a) \leq 2\epsilon.$$

($\Leftarrow$) Suposem que

$$\lim_{\delta\to 0}(S(g,\delta,a) - s(g,\delta,a)) = 0$$

Vegem que $g$ és continua en $a$.

Donat $\epsilon > 0$, existirà $h > 0$ tal que si $|\delta| < h$ aleshores,

$$|S(g,\delta,a) - s(g,\delta,a)| < \epsilon$$

això significa que:

Donat $x \in \mathbb{R}^n$ amb $\|x - a\| < \delta$ tenim

$$|g(x) - g(a)| \leq S(g,\delta,a) - s(g,\delta,a) < \epsilon$$

**Definició 4.2.3** *Anomenarem oscilació d'una funció fitada $g$ en un punt $x$ a:*

$$o(g,x) = \lim_{\delta\to 0}(S(g,\delta,x) - s(g,\delta,x))$$

**Observación.** Com una conseqüència del Lema 4.2.2 i de la definició anterior, es pot concloure que una funció fitada és continua en un punt si, i només si, l'oscilació en aquest punt és zero.

**Lema 4.2.4** *Siga $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funció fitada, les integrals de Darboux de $f$ es poden obtindre:*

$$\int_a^{-b} f(x)dx = \inf\{\int_{[a,b]} \phi : \ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ i \ f \leq \phi\}$$

$$\int_{-a}^{b} f(x)dx = \sup\{\int_{[a,b]} \varphi : \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ i \ f \geq \varphi\}$$

**Demostració.**

Farem la demostració per a la integral superior de Darboux, de la mateixa manera es pot demostrar el resultat per l'altra integral.

Siga $P = \{x_0, ..., x_n\}$ una partició de l'interval $[a, b]$, i considerem la suma superior

$$S^+(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

on $M_i = \sup\{f(y) \ : \ x_{i-1} \leq y \leq x_i\}, \ i = 1, 2, ..., n.$

Per a cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ Anomenem $I_i \ = ]x_{i-1}, x_i]$ i considerem la funció esglaonada:

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} M_i \chi_{I_i} + f(a)\chi_{[a,a]}$$

és clar que $f \leq \phi$. a més a més,

$$\int_{[a,b]} \phi = \sum_{i=1}^{n} M_i \mu(I_i) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = S^+(f, P)$$

Per tant,

$$\inf\{\int_{[a,b]} \phi : \ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ i \ f \leq \phi\} \leq S^+(f, P)$$

si ara prenem ínfims en les particions de l'interval s'obté la desigualtat $(\geq)$.

Recíprocament, si prenem $\phi$ una funció esglaonada tal que $f \leq \phi$. Obtenim;

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{I_i} / \ [a, b] = \bigcup_{i=1}^{n} I_i, \ I_i = [x_{i-1}, x_i[ \text{ disjunts.}$$

Siga $\epsilon > 0$, i siga $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ per a tot $x \in [a, b]$, considerem

$$P = \{x_0, x_0 + \alpha_1, x_1, ..., x_{n-1}, x_{n-1} + \alpha_n, x_n\}$$

on $x_i - x_{i-1} - \frac{\epsilon}{Mn} < \alpha_i < x_i - x_{i-1}$ és evident que $P$ és una partició de l'interval $[a, b]$ i com que $f \leq \phi$ llavors:

$$S^+(f, P) \leq \ \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(I_i) + \epsilon = \int_{[a,b]} \phi + \epsilon.$$

Amb la qual cosa,

$$\int_a^{-b} f(x)dx \leq \int_{[a,b]} \phi + \epsilon$$

d'on prenent ínfims i fent tendir $\epsilon$ cap a zero s'obté l'altra desigualtat.

**Lema 4.2.5** *Siguen* $\{\phi_m\}_{m=1}^{\infty}$ *i* $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ *dues successions de funcions esglaonades,* $\{\phi_m\}_{m=1}^{\infty}$ *creixent i* $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ *decreixent, de forma que*

$$\phi_m \leq f \leq \varphi_m \text{ per a tot } m \in \mathbb{N}$$

*i verificant que*

$$\lim_{m\to\infty} \int_{[a,b]} (\varphi_m - \phi_m) = 0.$$

*Aleshores,* $f \in \mathcal{R}([a,b])$, *(és a dir,* $f$ *és integrable Riemann en* $[a,b]$*). A més a més,*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{m\to\infty} \int_{[a,b]} \phi_m = \lim_{m\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_m.$$

**Demostració.** Hem de provar que $f$ és integrable Riemann. Per tant utilitzarem el teorema de caracterització, és a dir, hem de provar que:

Donat $\epsilon > 0$ existeix una partició $P$ tal que $S^+(f,P) - S_-(f,P) < \epsilon$

En efecte, agafem $\frac{\epsilon}{3}$.

Existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\int_{[a,b]}(\varphi_n - \phi_n) < \frac{\epsilon}{3}$ per a tot $n \geq n_0$.

Fent ús del Lema 4.2.4, considerem $P_{n_0}$ i $Q_{n_0}$ les particions de l'interval $[a,b]$ de forma que

$$S^+(f,Q_{n_0}) \leq \int_{[a,b]} \varphi_{n_0} + \frac{\epsilon}{3}$$

$$S_-(f,P_{n_0}) + \frac{\epsilon}{3} \geq \int_{[a,b]} \phi_{n_0}$$

Anomenem $P = P_{n_0} \cup Q_{n_0}$ com que, $\phi_{n_0} \leq f \leq \varphi_{n_0}$ es té,

$$S^+(f,P) \leq S^+(f,Q_{n_0}) \leq \int_{[a,b]} \varphi_{n_0} + \frac{\epsilon}{3}$$

i també,

$$\int_{[a,b]} \phi_{n_0} - \frac{\epsilon}{3} \leq S_-(f, P_{n_0}) \leq S_-(f, P)$$

Així que,

$$S^+(f.P) - S_-(f, P) \leq \int_{[a,b]} (\varphi_{n_0} - \phi_{n_0}) + \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon.$$

El que ens diu que $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Com a conseqüència del lema anterior tenim;

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{-b} f \leq \inf\{\int_{[a,b]} \varphi_m : m \in \mathbb{N}\} = \lim_{m\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_m.$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-a}^{b} f \geq \sup\{\int_{[a,b]} \phi_m : m \in \mathbb{N}\} = \lim_{m\to\infty} \int_{[a,b]} \phi_m.$$

D'on s'obté que:

$$\lim_{m\to\infty} \int_{[a,b]} \phi_m \leq \int_a^b f(x)dx \leq \lim_{m\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_m.$$

i com que

$$\lim_{m\to\infty} \int_{[a,b]} (\varphi_m - \phi_m) = 0.$$

s'arriba a l'altra part del resultat.

**Teorema 4.2.6 (Lebesgue-Vitali)** *Siga $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $f$ és integrable Riemann en $[a, b]$ si, i només si, $f$ és fitada en $[a, b]$ i és continua q.p.p. en $[a, b]$. A més a més, en aquest cas tenim:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f.$$

**Demostració.**

($\Rightarrow$)

Com que $f \in \mathcal{R}([a, b])$, $f$ estarà fitada en $[a, b]$. Siga $D$ el conjunt de punts de $[a, b]$, on la funció $f$ no és continua.

Realitzarem la prova per reducció al absurd. Suposem que $D$ no és un conjunt nul.

Com que $f$ és fitada, anomenem

$$D = \bigcup D_n \text{ on } D_n = \{x \in [a,b] : o(f,x) \geq \frac{1}{n}\}$$

Si suposem que $D$ no és nul, aleshores existirà $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $D_{n_0}$ no és nul. Per tant, existeix $\epsilon > 0$ de forma que qualsevol família numerable d'intervals oberts recobrint a $D_{n_0}$ tindrà mesura major que $\epsilon$.

Siga $P$ una partició de $[a,b]$, tenim:

$$S^+(f,P) - S_-(f,P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) =$$

$$\sum_{i \in S_1}(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i \in S_2}(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$$

on $S_1 := \{i \in \{1, 2, ..., n\} \ : D_{n_0} \cap ]x_{i-1}, x_i[ \neq \emptyset\}$ i $S_2$ és el complementari de $S_1$.

Els intervals oberts en que $i \in S_1$ recobreixen a $D_{n_0}$, excepte, possiblement en un nombre finit de punts. Per tant, la suma de les longituds és major que $\epsilon$. Ara, en aquests intervals es té que:

$$M_i - m_i \geq \frac{1}{n_0}$$

per tant $S_1 \geq \frac{\epsilon}{n_0}$. D'on

$$S^+(f,P) - S_-(f,P) \geq \frac{\epsilon}{n_0}.$$

El que ens diu que $f$ no és integrable Riemann.

$(\Leftarrow)$

Estem en les condicions del Teorema 3.2.1. Siga $\{\phi_m\}$ una successió creixent de funcions esglaonades, com en el Teorema 3.2.1. Com que la funció $-f$ també compleix les hipòtesis del teorema podem obtindre una successió creixent de funcions esglaonades $\{\varphi_m\}$ tal que $\varphi_m \leq -f$ i a més a més, $\int_a^b -f = \text{lím}_{m \to \infty} \int_a^b \varphi_m$

Siga $\chi_m = -\varphi_m$. Tenim, aleshores que $\{\chi_m\}$ és una successió decreixent de funcions esglaonades tal que $f \leq \chi_m$ i a més a més, $\int_a^b f = \lim_{m\to\infty} \int_a^b \chi_m$. Llavors, per les hipòtesis del Lema 4.2.5 es té $f \in \mathcal{R}([a,b])$ i que,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{m\to\infty} \int_a^b \chi_m = \int_{[a,b]} f$$

## 4.3. Problemes proposats.

**Exercici 20** *Provar la Proposició 4.1.2.*

**Exercici 21** *Siguen $f, g \in L(\mathbb{R}^n)$. Provar que $f \vee g, f \wedge g \in L(\mathbb{R}^n)$.*

**Exercici 22** *Demostrar que $f(x) = x^2$ és una función integrable Lebesgue en $[0,1]$ i calcular llur integral.*

**Exercici 23** *Siga $\phi \in L(\mathbb{R}^k)$. Siga $a \in \mathbb{R}^k$, i siga $r > 0$. Definim*

$$\psi(x) := \phi(x + a)$$

$$\theta(x) = \phi(rx).$$

*Provar que $\psi, \theta$ són funcions integrables i que:*

$$\int \psi = \int \phi, \quad \int \theta = \frac{1}{|r|^k} \int \phi.$$

**Exercici 24** *(a). Siguen $f$ i $g$ dues funcions esglaonades. És $f.g$ una funció esglaonada?*

*(b). Siguen $f$ i $g$ dues funcions superiors. És $f.g$ una funció superior?*

*(c). Siguen $f$ i $g$ dues funcions integrables Riemann en l'interval $[a,b]$. És $f.g$ una funció integrable Riemann en $[a,b]$?*

# Tema 5

# TEOREMES DE CONVERGÈNCIA.

Aquest Tema està dedicat als dos teoremes de convergència més importants que verifica la integral de Lebesgue: El teorema de la convergència monòtona y el de la dominada. Com varem dir en la indroducció aquests resultats fan de la integral de Lebesgue una de les integral més potents per a tractar, posteriorment, les necessitats de l'Anàlisi superior.

## 5.1. Teorema de la convergència monòtona

En $\mathbb{R}$ és clar que l'axioma de completitud és força important, ja que ens diu que entre una recta i el cos dels nombres reals hi ha una bijecció, és a dir, que $\mathbb{R}$ no deixa forats a la recta. Això es tradueix matemàticament dient que el límit d'una successió monòtona i fitada de nombres reals és un nombre real.

En aquesta secció ens plantegem el problema següent:

*Si* $\{f_n\}$ *és una successió monòtona de funcions de* $L(\mathbb{R}^n)$ tal que la successió de les seues integrals és fitada:

(a). Convergeix $\{f_n\}$ q.p.p. a una funció $f \in L(\mathbb{R}^n)$.?

(b). En cas afirmatiu, $\int f = \text{lím}_{n\to\infty} \int f_n$.

Com és habitual en el tractament dels resultats per aquesta integral. Primer farem el resultat per a funcions esglaonades, després per a superiors i finalment ho farem per a funcions integrables.

**Teorema 5.1.1** *Siga* $(\varphi_m)$ *una successió creixent de funcions esglaonades tal que* $(\int \varphi_m)$ *està fitada. Aleshores,* $(\varphi_m)$ *convergeix q.p.p. a una funció.*

**Demostració.**

*Cas I.-* Suposem que $\varphi_1 \geq 0$, com que $(\int \varphi_m)$ está fitada, existirà $M > 0$ tal que $\int \varphi_m \leq M$ per a tot $m \in \mathbb{N}$.

Definim el següent conjunt:

$$\mathcal{S} := \{x \in \mathbb{R}^n : (\varphi_m(x))_{m=1}^{\infty} \text{ divergeix}\}$$

l'únic que hem de provar és que $\mathcal{S}$ és un conjunt nul, ja que en aquest cas, definim:

$$g(x) := \lim_{m\to\infty} \varphi_m(x)$$

quan $x \notin \mathcal{S}$ i $g(x) = 0$ si $x \in \mathcal{S}$.

Vegem que $\mathcal{S}$ és nul.

Donat $\epsilon > 0$, considerem $B(m,\epsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_m(x) \geq \frac{M}{\epsilon}\}$.

Com que $\varphi_m \geq \varphi_1$ tenim que $\frac{M}{\epsilon}\chi_{B(m,\epsilon)} \leq \varphi_m$. (Ja que si $x \notin B(m,\epsilon)$ es té que $\chi_{B(m,\epsilon)}(x) = 0 \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_m(x)$.)

Com que $\varphi_m$ és una funció esglaonada, llavors $B(m,\epsilon)$ és una FIGURA (això és conseqüència del Teorema 2.2.2). Aleshores, $\chi_{B(m,\epsilon)} \in L(\mathbb{R}^n)$ i per la monotonia de la integral:

$$\int \frac{M}{\epsilon}\chi_{B(m,\epsilon)} \leq \int \varphi_m \leq M$$

amb la qual cosa, com que $B(m,\epsilon)$ és la unió finita de rectangles disjunts dos a dos,

$$\mu(B(m,\epsilon)) \leq \epsilon$$

per a tot $m \in \mathbb{N}$.

Anomenem

$$B := \bigcup_{m=1}^{\infty} B(m, \epsilon).$$

Vegem que $\mathcal{S} \subseteq B$.

Si $x \in \mathcal{S}$, per ésser $(\varphi_m)$ creixent i $(\varphi_m(x))$ divergent, tindrem que; $\text{lím}_{m\to\infty} \varphi_m(x) = \infty$ i per tant,

Danat $\frac{M}{\epsilon} > 0$ existirà $m' \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_{m'}(x) > \frac{M}{\epsilon}$, el que significa: $x \in B(m', \epsilon) \subseteq B$.

L'únic que ens queda per demostrar és que $B$ pot recobrir-se per una família numerable de rectangles amb mesura total menor que $\epsilon$.

$$B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B(m, \epsilon) = B(1, \epsilon) \cup (\bigcup_{m=1}^{\infty} (B(m+1, \epsilon) \setminus B(m, \epsilon))$$

Cada conjunt que apareix a la igualtat anterior és una FIGURA. Així que cada una d'elles serà una unió finita de rectangles disjunts dos a dos.

S'escriu,

$$S_j = \bigcup_{k=1}^{l(j)} I_k^j$$

on $S_1 = B(1, \epsilon)$ i $S_{j+1} = B(j+1, \epsilon) \setminus B(j, \epsilon)$. ( mirar Teorema 2.2.2, i Proposició 2.2.3.)

Ara considerem

$$\{I_k^j : 1 \leq k \leq l(j), j = 1, 2, ...\}.$$

Aquest conjunt està format per una quantitat numerable de conjunts finits, per tant és numerable. Això significa que el podem ordenar en successió de rectangles. Així tindrem

$$B = \bigcup_{J=1}^{\infty} ( \bigcup_{1 \leq k \leq l(j)} I_k^j) = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{k_i}^{j_i}$$

Considerem $I_{k_1}^{j_1}, ..., I_{k_p}^{j_p}$ i siga $m = \text{máx}\{j_1, ..., j_p\}$, llavors

$$\bigcup_{i=1}^{p} I_{k_i}^{j_i} \subseteq B(m, \epsilon)$$

i a més a més,

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{p} I_{k_i}^{j_i}) \leq \mu(B(m, \epsilon)) \leq \epsilon$$

però sabem que

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{p} I_{k_i}^{j_i}) = \sum_{i=1}^{p} \mu(I_{k_i}^{j_i})$$

per tant,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(I_{k_i}^{j_i}) \leq \epsilon.$$

En el cas general, com que la successió de funcions esglaonades és creixent, considerem: $\phi_m = \varphi_m - \varphi_1 \geq 0$ i a més a més, $\int \phi_m = \int \varphi_m - \int \varphi_1$.

Amb aquestes condicions ja podem aplicar el cas I i s'obté el resultat.

**Observació 5.1.2** *El resultat anterior ens diu que si* $(\varphi_m)$ *és una successió creixent de funcions esglaonades de forma que la succesió de les seues integrals és fitada, aleshores* $(\varphi_m)$ *és convergent q.p.p. a una funció superior* $g$ *i a més a més,* $\int g = \text{lím}_{m\to\infty} \int \varphi_m$.

**Lema 5.1.3** *Siga* $(f_n)$ *una successió creixent de funcions superiors de manera que* $(\int f_m)$ *està fitada. Llavors,* $(f_n)$ *és convergent q.p.p. a una funció superior* $f$ *i a més a més,* $\int f = \text{lím}_{n\to\infty} \int f_n$.

**Demostració.** Per la definició de funció superior sabem:
$(\varphi_j^1)_{j=1}^{\infty}$ és una successió d'esglaonades que genera a $f_1$.
$(\varphi_j^2)_{j=1}^{\infty}$ és una successió d'esglaonades que genera a $f_2$.

Així successivament s'arriba a que:

Donat $m \in \mathbb{N}$ podem pendre $(\varphi_j^m)_{j=1}^{\infty}$ successió d'esglaonades que genera a $f_m$.

Considerem, ara, les següents funcions esglaonades:

$$\psi_m = \varphi_m^1 \vee \varphi_m^2 \vee ... \vee \varphi_m^m$$

la successió $(\psi_m)$ és creixent, ja que: $\psi_{n+1} = \varphi_{n+1}^1 \vee ... \vee \varphi_{n+1}^n \vee \varphi_{n+1}^{n+1}$ i quan prenem $i \in \mathbb{N}$ fix, sabem que $\varphi_n^i \leq \varphi_{n+1}^i$ amb la qual cosa, $\varphi_n^1 \leq \varphi_{n+1}^1$,...,$\varphi_n^{n+1} \leq \varphi_{n+1}^{n+1}$. D'aquesta manera, es té

$$\psi_n = \varphi_n^1 \vee \varphi_n^2 \vee ... \vee \varphi_n^n \leq \varphi_{n+1}^1 \vee \varphi_{n+1}^2 \vee ... \vee \varphi_{n+1}^n \leq \psi_{n+1}.$$

A més a més sabem que:

$\varphi_n^1 \leq f_1$ q.p.p. i en general, $\varphi_n^i \leq f_i$ q.p.p. Per tant,

$$\psi_n \leq f_1 \vee f_2 \vee ... \vee f_n \ q.p.p.$$

Com que la successió de funcions superiors és creixent, clarament $f_1 \vee f_2 \vee ... \vee f_n = f_n$.

Així que $\psi_n \leq f_n$.

Com aquestes funcions són integrables. Aplicant la monotonia de la integral obtenim que

$$\int \psi_n \leq \int f_n.$$

Com que la successió $(\int f_n)$ està fitada per hipòtesi, aleshores la successió $(\int \psi_n)$ estarà fitada. Si ara li apliquem el Teorema 5.1.1 a la successió $(\psi_n)$ existirà $f$ de manera que $\psi_n \to f$ q.p.p.

Això significa que $f \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$ i a més a més,

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int \psi_n.$$

Vegem que $f_n \to f$ q.p.p.

Per definició de $\psi_n$ sabem que $\varphi_n^j \le \psi_n$ sempre que $1 \le j \le n$ i $n \in \mathbb{N}$. Ara fixem $j_0 \in \mathbb{N}$, llavors $\varphi_n^{j_0} \le \psi_n$ sempre que $n \ge j_0$, d'aquesta manera prenent límits en $n$ obtenim:

$\varphi_n^{j_0} \to f_{j_0}$ q.p.p.

$\psi_n \to f$ q.p.p.

Per tant, $f_{j_0} \le f$ q.p.p.

A més a més, sabem que $\psi_n \le f_n \le f$ q.p.p. Així que prenent límits en $n$, pel criteri de l'entrepà es compleix

$$f_n \to f \ q.p.p.$$

D'altra banda, per la monotonia de la integral

$$\int \psi_n \le \int f_n \le \int f.$$

Per tant,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

**Lema 5.1.4** *Siguen $f \in L(\mathbb{R}^n)$ i $\epsilon > 0$. Aleshores existeixen $u, v \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$ tal que $v \ge 0$ i $\int v < \epsilon$ verificant que $f = u - v$.*

**Demostració.** Com que $f \in L(\mathbb{R}^n)$, llavors existiran dues funcions superiors $l_1, l_2$ tal que $f = l_1 - l_2$. Considerem $(\varphi_m)$ la successió d'esglaonades que genera a $l_2$. Això vol dir que:

Donat $\epsilon > 0$ existirà $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int l_2 - \int \varphi_{m_0} = \int (l_2 - \varphi_{m_0}) \le \epsilon.$$

D'altra banda, com que $f = l_1 - \varphi_{m_0} - (l_2 - \varphi_{m_0})$ i a més a més, sabem que $l_2 - \varphi_{m_0} \ge 0$ q.p.p.

Anomenem

$$v = (l_2 - \varphi_{m_0})^+ \text{ i } u = l_1 - \varphi_{m_0} + (l_2 - \varphi_{m_0})^-$$

Així,

$$f = l_1 - \varphi_{m_0} - (l_2 - \varphi_{m_0})^+ + (l_2 - \varphi_{m_0})^- = u - v.$$

Com que $v = (l_2 - \varphi_{m_0})$ q.p.p., aleshores $v$ és una funció superior i a més a més, $(l_2 - \varphi_{m_0})^- = 0$ q.p.p. per tant, aquesta funció ha d'ésser superior. Llavors $u$ és una funció superior ja que la suma de funcions superiors també ho és. El que acabem de veure ens diu que $u$ i $v$ són funcions superiors que compleixen la tesi.

**Teorema 5.1.5 (Teorema de la convergència monòtona de Levi.-)** *Siga $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successió monòtona de funcions integrables tal que $\{\int f_n\}$ està fitada. Aleshores $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergeix q.p.p. a una funció integrable $f$ i a més a més,*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

.

**Demostració.** Podem considerar que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ és creixent. En altre cas, treballariem amb $\{-f_n\}_{n=1}^{\infty}$. I com que $L(\mathbb{R}^n)$ és un espai vectorial, de totes totes, s'obtendria resultat.

D'altra banda, podem considerar $f_1 \geq 0$. Ja que en altre cas, s'estudiaria la successió $\{f_n - f_1\}_{n=1}^{\infty}$.

Aquesta última suposició ens diu que $f_n \geq 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Anomenem $g_1 = f_1$ i $g_m = f_m - f_{m-1}$ si $m \geq 2$. Aleshores és clar que $g_m \in L(\mathbb{R}^n)$ i també $g_m \geq 0$. Per la definició d'aquestes funcions es té:

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} g_k$$

a cada $g_m$ li apliquem el Lema 5.1.4 amb $\epsilon = \frac{1}{2^m}$. Així s'obté:

Existeixen $\alpha_m, \beta_m \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$ tal que $g_m = \alpha_m - \beta_m$ amb $\beta_m \geq 0$ i $\int \beta_m \leq \frac{1}{2^m}$. (Noteu que $\alpha_m \geq 0$ ja que $g_m \geq 0$ i $\beta_m \geq 0$.

Anomenem:

$$F_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \geq 0$$

$$G_k = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \geq 0$$

és evident que $F_k, G_k \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$. A més a més, $\{F_k\}$ i $\{G_k\}$ són creixents i

$$\int G_k = \int \sum_{j=1}^{k} \beta_j = \sum_{j=1}^{k} \int \beta_j < \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^j} < 1.$$

Com que

$$f_k = \sum_{j=1}^{k} g_j = F_k - G_k.$$

obtenim que $\int F_k = \int f_k + \int G_k \leq M + 1$ (això és conseqüència de que la successió d'integrals está fitada.)

Ara aplicant el Lema 5.1.3, es té: $F_k \to F$ q.p.p. amb $F$ superior i $\int F = \text{lím}_{n\to\infty} \int F_n$.

$G_k \to G$ q.p.p. amb $G$ superior i $\int G = \text{lím}_{n\to\infty} \int G_n$.

Llavors, anomenem

$$f = F - G.$$

Obtenint que $f_m \to f$ q.p.p. i a més a més, com que $\int f_k = \int F_k - \int G_k$ s'arriba a que

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k = \int f.$$

### 5.1.1. Conseqüències.

**(a).**

**Corol·lari 5.1.6** *Siga $f \in L(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$, $\int f = 0$. Llavors $f = 0$ q.p.p.*

**Demostració.** Com que $f \geq 0$ considerem la successió $\{mf\}_{m=1}^{\infty}$, aquesta successió verifica les condicions del Teorema de la convergència monòtona, per tant; existirà $h \in L(\mathbb{R}^n)$ tal que $mf \to h$ q.p.p. i verificant que $\int h = \text{lím}_{n\to\infty} \int mf = 0$. Com que la successió $(mf)$ convergeix q.p.p. a $h$, l'única solució és que $f(x) = 0$ *q.p.p.*, ja que si $f(x) \neq 0$, aleshores $nf(x) \to +\infty$ i així es conclou que $f = 0$ *q.p.p.*

**(b).** Siga $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definim $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de manera que $c(x) = \alpha$. Aleshores $c \notin L(\mathbb{R}^n)$.

Per a provar-ho serà suficient amb demostrar que $1 \notin L(\mathbb{R}^n)$.

Anomenem

$$I_m := [-m, m]^n$$

i definim per a cada $m \in \mathbb{N}$

$$g_m = \chi_{I_m}.$$

Llavors $\{g_m\}$ és una successió de funcions esglaonades creixent, que a més a més, convergeix puntualment a la funció constantment igual a 1.

Si suposem que $1 \in L(\mathbb{R}^n)$, com que $g_m \leq 1$, per la monotonia de la integral, $\int g_m \leq \int 1$ i ara, aplicant el Teorema de la convergència monòtona es tindrà:

$$\int 1 = \lim_{m\to\infty} \int g_m = \lim_{m\to\infty} \mu(I_m) = \lim_{m\to\infty} (2m)^n = +\infty.$$

La qual cosa és una contradicció.

**Proposició 5.1.7 (Propietats.-)** *Siguen $a, b \in \mathbb{R}$, $I = [a, b]$ i $f \in L(I)$. Llavors,*

*(a). Donat $c \in [a, b]$ es compleix que*

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

*(b). Si $m \leq f(x) \leq M$ per a tot $x \in [a,b]$, es té:*

$$m(b-a) \leq \int_{[a,b]} f \leq M(b-a)$$

*(c). Si anomenem $F(x) = \int_{[a,x]} f$, aleshores $F$ és contínua en $[a,b]$.*

**Demostració.** Provarem (c). Per fer això distingirem dos casos:

(1). Existeix $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ per a tot $x \in [a,b]$

Siga $x, y \in ]a,b[$ de forma que $x < y$, aleshores:

$$|F(y) - F(x)| = |\int_{[x,y]} f| \leq \int_{[x,y]} |f| \leq M(y-x)$$

i això ens dona la continuïtat.

(2). Cas general.

Suposem primer que $f$ és una funció superior. Llavors podem considerar $(\varphi_m)$ la successió que genera a $f$ en $[a,b]$. Això vol dir que:

Donat $\epsilon > 0$ existeix $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{[a,b]} (f - \varphi_{m_0}) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Per tant,

$$|F(y) - F(x)| \leq |\int_{[x,y]} (f - \varphi_{m_0})| + |\int_{[x,y]} \varphi_{m_0}| \leq \frac{\epsilon}{2} + |\int_{[x,y]} \varphi_{m_0}| < \epsilon.$$

Aquesta última desigualtat és certa ja que $\varphi_{m_0}$ és una funció esglaonada i per tant fitada. Així que podem aplicar-li el cas 1.

Agafem $f$ una funció integrable general. Per definició existiran $u, v$ funcions superiores de forma que $f = u - v$ i a més a més,

$$\int_{[a,x]} f = \int_{[a,x]} u - \int_{[a,x]} v$$

on, pel raonament anterior, les funcions de la dreta de la igualtat són funcions contínues.

**Observació** El resultat anterior té sentit demostrar-ho fent la distinció anterior ja que existeixen funcions no fitades que són integrables.

En efecte, siga la funció

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\sqrt{x}} & 0 < x \leq 1 \\ \alpha & x = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Aquesta funció no està fitada en $[0,1]$ per tant no pot ésser integrable Riemann.

Vegem el que passa amb la seua integrabilitat Lebesgue.

Considerem la successió funcional:

$$\begin{array}{rccl} f_m: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f_m(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\sqrt{x}} & \frac{1}{m} \leq x \leq 1 \\ \alpha & 0 \leq x < \frac{1}{m} \end{array} \right. \end{array}$$

La successió $(f_m)$ és una successió creixent de funcions integrables. A més a més, $f_m(x) \to \frac{1}{\sqrt{x}}$ en $]0,1]$ i en quant a la successió de les seues integrals tenim:

$$\int_{[0,1]} f_m = \int_{\frac{1}{m}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}) < 2.$$

Llavors si apliquem el Teorema de la convergència monòtona apleguem a que $f$ és integrable i a més a més,

$$\int_{[0,1]} f = \lim_{m \to \infty} \int_{[0,1]} f_m = 2.$$

Aquest mateix exemple també fica de relleu que el Teorema de la convergència monòtona no és cert per a la integral de Riemann.

## 5.2. Teorema de la convergència dominada.

El resultat que farem a continuació és inclús més utilitzat que el teorema de la convergència monòtona, i a més a més, fou obtés anteriorment a aquest en el tractament original de la integral de Lebesgue. El teorema de la convergència monòtona fou publicat uns pocs anys més tard per Beppo-Levi. El teorema de la convergència dominada és considerablement més general que el de la monòtona. Tanmateix, veurem com aquest resultat pot ésser deduït de forma prou senzilla des de el Teorema de la convergència monòtona.

**Teorema 5.2.1 (Teorema de la convergència dominada.-)** *Siga* $\{f_m\}$ *una successió de funcions integrables de manera que* $f_m \to f$ *q.p.p. i suposem que la successió* $\{f_m\}$ *está DOMINADA per una funció integrable* $g$ *en el sentit que per a tot* $m \in \mathbb{N}$

$$|f_m| \leq g \quad \text{q.p.p.}$$

*Aleshores* $f$ *és integrable i a més a més*

$$\lim_{m\to\infty} \int f_m = \int f.$$

**Demostració.** Donat $k \in \mathbb{N}$ considerem les següents funcions:

$$u_k := \bigvee_{m=k}^{\infty} f_m$$
$$v_k := \bigwedge_{m=k}^{\infty} f_m$$

està clar que $u_k, v_k \to f$ q.p.p.

En efecte, com que $f_m$ convergeix q.p.p. a la funció $f$. Siga $A$ un conjunt nul de forma que $f_m(x) \to f(x)$ sempre que $x \notin A$. Aleshores donat un $x \notin A$ fix i un $\epsilon > 0$ sabem que existirà $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_m(x) - f(x)| < \epsilon$ sempre que $m \geq m_0$. Així que, per a cada $k \geq m_0$, es té:

$$f(x) - \epsilon - f(x) < \bigvee_{m=k}^{\infty} f_m(x) - f(x) < f(x) + \epsilon - f(x)$$

d'on es dedueix que

$$|u_k(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Per la construcció d'aquestes funcions sabem que, $\{u_k\}$ és una successió decreixent i $\{v_k\}$ és una successió creixent.

Vegem que per a cada $k \in \mathbb{N}$ les funcions $u_k, v_k \in L(\mathbb{R}^n)$.

Per a provar-ho, anomenem:

$$u_k^j := \bigvee_{m=k}^{k+j} f_m.$$

Per hipòtesi $f_m$ és integrable, llavors $u_k^j$ també és integrable, a més a més, la successió $(u_k^j)$ és monòtona creixent i evidentment $u_k^j \to u_k$.

Si ara anomenem

$$v_k^j := \bigwedge_{m=k}^{k+j} f_m$$

fent el mateix raonament que abans s'obté: $v_k^j$ també és integrable, a més a més, la successió $(v_k^j)$ és monòtona decreixent i evidentment $v_k^j \to v_k$.

Com que per hipòtesi $|f_m| \leq g$ q.p.p., tenim que

$$u_k^j \leq g \text{ q.p.p.}$$

$$v_k^j \geq -g \text{ q.p.p.}.$$

Llavors per la monotonia de la integral

$$\int u_k^j \leq \int g$$

i

$$\int v_k^j \geq -\int g.$$

És a dir, les successions $(\int u_k^j)$ i $(\int v_k^j)$ estàn fitades. Aleshores aplicant el T.C.M. apleguem a que $u_k, v_k$ són integrables.

A més a més,

$$-g \leq f_k \leq u_k \;\text{ q.p.p.} \Rightarrow \int (-g) \leq \int u_k$$

$$v_k \leq g \ \text{ q.p.p.} \Rightarrow \int v_k \leq \int g.$$

Aleshores aplicant el T.C.M. es té que $f$ és integrable i a més a més,

$$\int f = \lim_{m\to\infty} \int u_k = \lim_{m\to\infty} \int v_k,$$

i tenint en compte que, $v_k \leq f_k \leq u_k$, per la monotonia de la integral

$$\int v_k \leq \int f_k \leq \int u_k.$$

Aplicant ara el criteri de l'entrepà s'obté el resultat.

### 5.2.1. Conseqüències.

**Corol·lari 5.2.2 (Teorema de la convergència fitada.-)** *Siga $I$ un rectangle fitat en $\mathbb{R}^n$. Siga $\{f_m\}$ una successió de funcions integrables en $I$ tal que $f_m \to f$ q.p.p.. Si existeix $M > 0$ tal que $|f_m| \leq M$* q.p.p. *per a tot $m \in \mathbb{N}$, llavors $f$ és integrable i a més a més,*

$$\int_I f = \lim_{m\to\infty} \int_I f_m$$

**Demostració.** Com que $I$ és un rectangle fitat. Definim:

$$g := M\chi_I$$

que és una funció esglaonada.

D'altra banda, considerem la successió,

$$h_m := f_m \chi_I.$$

Llavors tenim que $h_m \in L(\mathbb{R}^n)$ ja que ($f_m \in L(I)$). A més a més, $h_m \to f\chi_I$ q.p.p. Com que també tenim que $|h_m(x)| \leq g(x)$ q.p.p.. Aleshores aplicant el Teorema de la convergència dominada s'obté:

$$f\chi_I \in L(\mathbb{R}^n)$$

i

$$\int f\chi_I = \lim_{m\to\infty} \int h_m.$$

Això significa:

$$f \in L(I)$$

i

$$\int_I f = \lim_{m\to\infty} \int_I f_m.$$

**Corol·lari 5.2.3 ( Lema de Fatou.-)** *Suposem que $\{f_m\}$ és una successió de funcions integrables tal que per a cada $m \in \mathbb{N}$ es compleix que $f_m \geq 0$. Si $f_m \to f$ q.p.p. i a més a més, existeix $K > 0$ tal que $\int f_m \leq K$. Llavors, $f$ és integrable i es té que*

$$\int f \leq K.$$

**Demostració.** La demostració d'aquest resultat és pràcticament la mateixa que la del Teorema de la convergència dominada. Però ací només utilitzarem la successió

$$v_k := \bigwedge_{m=k}^{\infty} f_m.$$

Com en el teorema de la convergència dominada sabem que $v_k \to f$ q.p.p. i que $\{v_k\}$ és monòtona creixent.

D'altra banda, si agafem la successió $v_k^j = \bigwedge_{m=k}^{k+j} f_m$, és clar que aquesta successió és una successió de funcions integrables monòtona decreixent i per hipòtesi es compleix que la successió de les seues integrals és fitada. Així que pel teorema de la convergència monòtona es té que $v_k \in L(\mathbb{R}^n)$.

Per les hipòtesis sabem que, $0 \leq \int v_k \leq K$. Per tant, aplicant-li el Teorema de la convergència monòtona a la successió $(v_k)$ es té que $f$ és integrable i també

$$\int f = \lim_{k\to\infty} \int v_k \leq K.$$

**Nota.** $v_k := \bigwedge_{m=k}^{\infty} f_m$, aleshores $v_k \leq f_k$, per la monotonia de la integral, $\int v_k \leq \int f_k$ per tant,

$$\liminf_{k\to\infty} \int v_k \leq \liminf_{k\to\infty} \int f_k.$$

Així obtenim,

$$\int f = \lim_{k\to\infty} \int v_k = \liminf_{m\to\infty} \int v_m \leq \liminf_{m\to\infty} \int f_m.$$

**Corol·lari 5.2.4** *Siga $\{f_m\}$ una successió de funcions integrables de forma que $f_m \to f$ q.p.p. Suposem que existeix $g$ integrable tal que $|f| \leq g$. Aleshores $f$ és integrable.*

**Demostració.** Anomenem

$$h_m := ((-g) \vee f_m) \wedge g$$

és clar que aquestes funcions són integrables. A més a més, $|h_m| \leq g$ i $h_m \to ((-g) \vee f) \wedge g$ q.p.p., com que $|f| \leq g$, llavors $((-g) \vee f) \wedge g = f$, és a dir,

$$h_m \to f$$

q.p.p.

Utilitzant ara el T.C.D. s'obté el resultat.

## 5.3. Problemes proposats.

**Exercici 25** *És el producte de dues funcions integrables Lebesgue una funció integrable Lebesgue? (Compareu aquest resultat amb l'exercici 24).*

**Exercici 26** *Provar que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{log(n+x)}{n} e^{-x} cosx dx = 0$$

**Exercici 27** *Siga* $\{I_m\}$ *una successió creixent d'intervals i siga* $S = \bigcup I_m$. *Si* $f \in L(I_m)$ *per a tot* $m \in \mathbb{N}$ *i la successió* $\{\int_{I_m} |f|\}$ *està fitada, llavors* $f \in L(S)$ *i*

$$\int_S f = \lim_{n\to\infty} \int_{I_m} f.$$

**Exercici 28** *Provar que la funció* $f(x) = x^p,\ x > 0,\ f(0) = 0$ *és integrable en* $[0, 1]$ *si* $p > -1$, *i calcular la seua integral.*

**Exercici 29** *Estudiar si la següent funció és integrable* $f(x) = e^{-x^2}$ *en* $[0, +\infty[$.

**Exercici 30** *Siga* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. *Demostrar que és integrable sobre* $\mathbb{R}$ *i calcular la seua integral.*

**Exercici 31** *Discutir segons els valors de p la integrabilitat de la funció*

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^p}$$

*en l'interval* $[0, +\infty[$. *Per a quins valors es compleix que existeix* $\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{\sin(x)}{x^p}$.?

**Exercici 32** *Quina relació hi ha entre la integral de Riemann impròpia i la integral de Lebesgue?*

*(a) Trobar funcions integrables Lebesgue en* $\mathbb{R}$ *que no són integrables Riemann impròpies.*

*(b) Trobar funcions integrables impròpies en* $[1, \infty[$ *que no són integrables Lebesgue.*

*(c) Provar que tota funció positiva i integrable Riemann impròpia en un interval no fitat és integrable Lebesgue en dit interval.*

**Exercici 33** *Donar un exemple d'una successió de funcions integrables (fitades) convergent quasi per totes parts a una funció no integrable. (Sugerencia, pensar en la funció* $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$*)*

**Exercici 34** *Provar que si* $f$ *és una funció contínua, positiva de forma que* $\int f = 0$*, llavors* $f \equiv 0$.

# Tema 6

# INTEGRACIÓ MÚLTIPLE. TEOREMA DE FUBINI.

La integral de Lebesgue fa integrables a una gran quantitat de funcions. Però ara ens trobem amb la dificultat d'avaluar aquestes integrals i podem dir que no hi han duplicats senzills al Teorema fonamental del càlcul quan pugem les dimensions de l'espai $\mathbb{R}^n$. Tanmateix, hi ha un resultat de molta importància el qual relaciona la integral sobre $\mathbb{R}^n$ amb successives integrals sobre espais de dimensió menor i d'aquesta forma amb integracions sobre $\mathbb{R}$.

## 6.1. Resultats previs

**Proposició 6.1.1** *Suposem que $S \subseteq \mathbb{R}^n$ és un conjunt nul. Aleshores existeix una successió creixent de funcions esglaonades $\{\chi_j\}_{j=1}^{\infty}$ de forma que per a cada $x \in S$ es compleix*

$$\lim_{j\to\infty} \chi_j(x) = \infty$$

*i $\{\int \chi_j\}$ està fitada.*

**Demostració.** Siga $\epsilon = \frac{1}{2^j}$, com que $S$ és nul, podem afirmar que existeix una successió de rectangles fitats $\{I_k^j\}$ que cobreixen a $S$ i de forma que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k^j) < \frac{1}{2^j}.$$

Fent això per a tot $j \in \mathbb{N}$ es té que:

D'una banda, $\{I_k^j\}_{k,j}$ és numerable, per tant el podem ordenar en successió. Anomenem a la successió $\{J_n\}$.

Això ens permet definir les següents funcions:

$$\chi_k := \chi_{J_1} + ... + \chi_{J_k}.$$

Evidentment aquestes funcions són esglaonades. A més a més,

$$\int \chi_k \leq \mu(J_1) + ... + \mu(J_k) \leq \frac{1}{2^{j_1}} + ... + \frac{1}{2^{j_k}} \leq \sum_{l=1}^{j_0} \frac{1}{2^l} < 1$$

on $j_0 := \text{máx}\{j_1, ..., j_k\}$. Siga $x \in S$, llavors $x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} I_{k(j)}^j$ el que significa que donat $m \in \mathbb{N}$ existeix $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\chi_{n_1}(x) \geq m$ i com que $\{\chi_k\}$ és creixent, aleshores

$$\lim_{k \to \infty} \chi_k(x) = \infty$$

## 6.2. El teorema de Fubini.

### 6.2.1. Plantejament general.

Considerem una funció $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ amb $n > 1$. Podem escriure $n = k + l$ on $k, l \in \mathbb{N}$ i $k, l \geq 1$. Llavors podem identificar:

$$\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$$

així $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ si, i només si, $x \in \mathbb{R}^k$ i $y \in \mathbb{R}^l$. Considerem a més a més, que $f \in L(\mathbb{R}^n)$. Aleshores construim les següents funcions:

$$F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \text{ tal que } F(x) = \int_{\mathbb{R}^l} f(x, y) dy$$

$$G : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R} \text{ tal que } G(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)dx$$

Primer intentarem provar que $F$ i $G$ estan definides correctament i després que ambdues funcions són integrables. Per a demostrar-ho, ho farem seguint els passos usuals, és a dir, primer ho estudiarem per a funcions esglaonades, i així fins arribar al cas general.

**Lema 6.2.1** *Siga $f$ una funció esglaonada. Llavors $F, G$ són també funcions esglaonades i a més a més*

$$\int_{\mathbb{R}^k} F = \int_{\mathbb{R}^l} G = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

**Demostració.** Com que estem suposant que $f$ és una funció esglaonada, podem escriure:

$$f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{I_i},$$

on $I_i$ són rectangles fitats disjunts dos a dos.

Evidentment, cada $I_i$ el podem projectar sobre $\mathbb{R}^k$ i sobre $\mathbb{R}^l$ obtenint els rectangles $I_i^k$ e $I_i^l$ respectivament.

Per la definició d'integral d'una funció esglaonada es té:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(I_i) = (*)$$

i per la definició de la mesura d'un rectangle s'obté:

$$(*) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(I_i^k)\mu(I_i^l).$$

D'altra banda, estudiant les funcions $F$ y $G$ es té:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^l} f(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}^l} (\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{I_i})(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}^l} (\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{I_i^k}(x)\chi_{I_i^l}(y))dy.$$

**Observació.** $\alpha_i \chi_{I_i^k}(x)$ és una constant, ja que $x$ és fix, i això significa que

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{I_i^k}(x)\chi_{I_i^l}(.)$$

és una funció esglaonada en $\mathbb{R}^l$.

Tenint en compte aquesta observació ens queda:

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}^l} f(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}^l} (\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{I_i^k}(x)\chi_{I_i^l}(y))dy = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{I_i^k}(x)\mu(I_i^l).$$

Aleshores, hem vist que $F$ és una funció esglaonada i llavors integrable en $\mathbb{R}^k$. A més a més,

$$\int_{\mathbb{R}^k} F = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(I_i^k)\mu(I_i^l).$$

Segons hem vist anteriorment es té que

$$\int_{\mathbb{R}^k} F = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

De la mateixa forma s'arriba al resultat per a $G$.

**Definició 6.2.2** *Considerem $S \subseteq \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$. Donat $x \in \mathbb{R}^k$ anomenem* **secció** *de $S$ determinada per $x$ al següent conjunt:*

$$S_x := \{y \in \mathbb{R}^l : (x,y) \in S\}.$$

*Anàlogament donat $y \in \mathbb{R}^l$ anomenarem* **secció** *determinada per $y$ al següent conjunt:*

$$S_y := \{x \in \mathbb{R}^k : (x,y) \in S\}.$$

**Lema 6.2.3** *Suposem que $S \subseteq \mathbb{R}^n$ és nul. Llavors $S_x$ és nul per a quasi tot $x \in \mathbb{R}^k$ i de la mateixa forma, $S_y$ és nul per a quasi tot $y \in \mathbb{R}^l$.*

**Demostració.** Suposem que $S$ és nul. Aleshores per la Proposició 6.1.1, sabem que existirà una successió creixent de funcions esglaonades $\{\chi_j\}$ de forma que $\{\int \chi_j\}$ està fitada i si $(x,y) \in S$, llavors $\lim_{j\to\infty} \chi_j(x,y) = \infty$.

Definim:

$$\varphi_j(x) := \int_{\mathbb{R}^l} \chi_j(x,y)dy.$$

Pel Lema anterior sabem que $\varphi_j$ són funcions esglaonades i a més a més, com que $\{\chi_j\}$ és una successió creixent i l'operador integral és monòton, podem afirmar que $\{\varphi_j\}$ és també creixent i

$$\int_{\mathbb{R}^k} \varphi_j = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_j.$$

Com que abans hem vist que $\{\int_{\mathbb{R}^n} \chi_j\}$ és fitada, aleshores $\{\int_{\mathbb{R}^k} \varphi_j\}$ és també fitada.

Això ens permet aplicar-li el T.C.M. a la successió $(\varphi_j)$ i d'aquesta forma afirmar:

$\varphi_j \to g$ q.p.p. en $\mathbb{R}^k$ (anomenem $A$ al conjunt nul de $\mathbb{R}^k$ on no es dona la convergència).

Prenem $z \in \mathbb{R}^k \setminus A$. Aleshores

$$\varphi_j(z) = \int_{\mathbb{R}^l} \chi_j(z,y)dy \leq g(z)...(*)$$

La desigualtat anterior és conseqüència de que $\varphi_j(z) \to g(z)$ i a més a més, aquesta successió és creixent.

Ara fixem aquest $z$, i considerem la successió de funcions $\{\chi_j(z,.)\}$, aquesta és una successió creixent de funcions esglaonades que verifica:

$$\{\int_{\mathbb{R}^l} \chi_(z,y)dy\}$$

és fitada, (veure (*)).

Llavors, pel T.C.M. es té que $\chi_j(z,.) \to h$ q.p.p. en $\mathbb{R}^l$ ( anomenem $A(z)$ al conjunt nul de $\mathbb{R}^l$ on no hi ha convergència ).

Estudiem la secció $S_z$.

Siga $y \in S_z$, aleshores $(z,y) \in S$ i per tant, $\lim_{j\to\infty} \chi_j(z,y) = \infty$. Llavors, $y \in A(z)$ amb la qual cosa $S_z \subseteq A(z)$. El que ve a dir que $S_z$ és un conjunt nul i això és cert per a cada $z \in \mathbb{R}^k \setminus A$. Podem afirmar aleshores, que $S_z$ és un conjunt nul per a tot $z \in \mathbb{R}^k \setminus A$.

Com que $A$ és un conjunt nul, s'obté el resultat.

**Teorema 6.2.4 (Teorema de Fubini.-)** *Suposem que* $f \in L(\mathbb{R}^n)$*. Definim les funcions:*

$$f_x : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R} : f_x(y) = f(x, y)$$

$$f_y : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} : f_y(x) = f(x, y)$$

*Llavors*

$f_x \in L(\mathbb{R}^l)$ *q.p.p. en* $\mathbb{R}^k$.

$f_y \in L(\mathbb{R}^k)$ *q.p.p. en* $\mathbb{R}^l$.

$F(x) = \int_{\mathbb{R}^l} f_x(y)dy \in L(\mathbb{R}^k)$.

$G(y) = \int_{\mathbb{R}^k} f_y(x)dx \in L(\mathbb{R}^l)$. *A més a més,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^k} F = \int_{\mathbb{R}^l} G.$$

**Demostració.** Suposem que $f$ és una funció superior i que $(\varphi_j)$ genera a $f$.

Anomenem $\chi_j(x) := \int_{\mathbb{R}^l} \varphi_j(x, y)dy$ que són funcions esglaonades, ja que així ho són les $\varphi_j$.

Com que $(\varphi_j)$ és una successió monòtona creixent es tindrà que $(\chi_j)$ és també monòtona creixent i a més a més,

$$\int_{\mathbb{R}^k} \chi_j = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j \leq \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

El que ens diu que la successió $(\int_{\mathbb{R}^k} \chi_j)$ és fitada.

Aleshores, aplicant-li el T.C.M. s'obté que $\chi_j \to g$ q.p.p. en $\mathbb{R}^k$ ( anomenem $A$ al conjunt nul on no es dona la convergència ).

Siga

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : (\varphi_j(x, y)) \text{ divergeix.}\}$$

Com que $(\varphi_j(x, y))$ genera a $f$, sabem que $S$ és nul.

Llavors, pel Lema 6.2.3, $S_x$ és nul per a tot $x \in \mathbb{R}^k \setminus B$ on $B$ és nul.

Ara traballarem amb $x \in \mathbb{R}^k \setminus (A \cup B)$. Si $x$ està en aquestes condicions. Per la definició de $\chi_j$ es té que

$$\chi_j(x) \leq g(x).$$

Fixem aquest $x$ i agafem la successió $\varphi_j(x,.) : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$. Evidentment, aquesta successió és de funcions esglaonades i la successió de les seues integrals està fitada. A més a més, com que $\varphi_j \to f$ q.p.p.( hi ha convergència sempre que $(x,y) \notin S$), per al $x$ fix, tenim que $\varphi_j(x,.) \to f(x,.)$ q.p.p. en $\mathbb{R}^l$( hi ha convergència sempre que $y \notin S_x$). Aplicant el T.C.M. s'obté que $f_x \in L(\mathbb{R}^l)$ i a més a més,

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^l} f(x,y)dy = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^l} \varphi_j(x,y)dy = \lim_{j\to\infty} \chi_j(x).$$

D'aquesta forma hem obtés que si $x \in \mathbb{R}^k \setminus (A \cup B)$

$$\chi_j \to F \text{ q.p.p.}$$

com que a més a més,

$$\chi_j \to g \text{ q.p.p..}$$

Llavors,

$$F = g \text{ q.p.p.}$$

i com que $g$ és integrable, s'arriba a que $F$ és integrable i també:

$$\int_{\mathbb{R}^k} F = \int_{\mathbb{R}^k} g = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^k} \chi_j = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j = \int_{\mathbb{R}^n} f$$

Per tant,

$$\int_{\mathbb{R}^k} F = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

Anàlogament per a $G$.

La comprovació de que el Teorema de Fubini es dona per a funcions integrables és, ara, evident a partir de les funcions superiors.

En efecte,

Si $f$ és integrable, existiràn dues funcions superiors $h, g$ tal que $f = h - g$ i a més a més:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} (h-g) = \int_{\mathbb{R}^n} h - \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

Aleshores aplicant-li el resultat a cadascuna de les dues integrals anteriors s'obté resultat.

### 6.2.2. Cas particular.

Siga $S \subseteq \mathbb{R}^2$ si $\chi_S$ és integrable, anomenem *mesura de* $S$ a:

$$\mu(S) := \int_{\mathbb{R}^2} \chi_S = (*)$$

que per Fubini ens queda:

$$(*) = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} \chi_S(x,y)dx)dy = \int_{\mathbb{R}} \mu(S_x)dx.$$

Aleshores la mesura de $S$ és l'àrea de $S$, ja que per a cada $x$ obtenim la mesura de $S_x$.

**Exemple 6.2.5** Calcular l'àrea del circle de radi $r$

Siga

$$S = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\mu(S) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_S$$

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_S(x,y)dy = \int_{[-\sqrt{r^2-x^2}, \sqrt{r^2-x^2}]} dy = \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy = 2\sqrt{r^2 - x^2}$$

D'aquesta forma hem fet:

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & F(x) = \begin{cases} 0 & x \notin ]-r, r[ \\ 2\sqrt{r^2 - x^2} & x \in [-r, r] \end{cases} \end{array}$$

Ara tenim:

$$\mu(S) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_S = \int_{\mathbb{R}} F(x)dx = \int_{[-r,r]} \sqrt{r^2 - x^2}dx = \pi r^2.$$

## 6.3. Problemes proposats.

**Exercici 35** *Provar que la funció* $f(x, y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$ *no és integrable en* $A = [0, 1] \times [0, 1]$.

**Exercici 36** *Provar que la funció* $f(x, y) = e^{x^2}$ *és integrable sobre el triangle de vèrtex* $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$. *Calcular aquesta integral.*

**Exercici 37** *Estudiar si la funció* $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{xy}}$ *és integrable en* $[0, 1] \times [0, 1]$. *En cas afirmatiu, calcular la seua integral.*

**Exercici 38** *Calcular la* $\int\int_A xE(1 + x + y)dxdy$, *on* $A = [0, 1] \times [0, 1]$ *i on* $E(t)$ *denota la part entera de* $t$, *estudiant abans la seua integrabilitat.*

**Exercici 39** *Provar que la funció* $f(x_1, x_2, ..., x_n) = e^{-\sum_{i=1}^{n} |x_i|}$ *és integrable Lebesgue en* $\mathbb{R}^n$ *i calcular la seua integral.*

# Tema 7

# FUNCIONS MESURABLES.

Sabem que l'espai $L(\mathbb{R}^n)$ conté gran quantitat de funcions, però encara així hi han funcions molt importants en Anàlisi que no són integrables. Per exemple, les funcions constants no nul·les no pertanyen a $L(\mathbb{R}^n)$. A més a més, hi han operacions de funcions que no són tancades respecte a la integrabilitat.

**Exemple 7.0.1** *Considerem la funció.*

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \begin{cases} x^{-\frac{1}{2}} & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \end{array}$$

*Sabem que $f \in L(\mathbb{R}^n)$, però $f^2 \notin L(\mathbb{R}^n)$.*

*En efecte,*

*Considerem la successió funcional:*

$$\begin{array}{rccl} f_n: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in [\frac{1}{n}, 1] \\ 0 & 0 \leq x < \frac{1}{n} \end{cases} \end{array}$$

*És clar que $f_n(x) \rightarrow f^2(x)$ per a tot $x \in ]0,1]$, amb la qual cosa, podem afirmar que la convergència és q.p.p. en $[0,1]$. A més a més, es compleix* *que* $|f_n| \leq f^2$ *per a tot* $n \in \mathbb{N}$. *Aleshores, pel Teorema de la convergència dominada, si* $f^2 \in L(\mathbb{R}^n)$ *es té que*

$$\int_{[0,1]} f^2 = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_m = \lim_{m\to\infty} \int_{[\frac{1}{m},1]} \frac{1}{x} = \lim_{m\to\infty} (-ln(\frac{1}{m})) = \infty.$$

*Llavors,* $f^2 \notin L(\mathbb{R}^n)$.

Aquest exemple fica de relleu que el producte de dues funcions integrables, en general, no és una funció integrable.

Per a resoldre el problema de quan el producte de funcions integrables és, de fet, integrable, així com per a l'obtenció de mètodes que ens diguen si una funció és integrable Lebesgue, s'introdueixen les *funcions mesurables.*

## 7.1. Definicions i propietats.

**Definició 7.1.1** *Una funció* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *direm que és mesurable (Lebesgue) si existeix una successió de funcions esglaonades* $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *tal que* $\chi_n \to f$ *q.p.p. en* $\mathbb{R}^n$.

Al conjunt de les funcions mesurables l'escriurem: $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Evidentment es compleix que $L(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Vegem que el recíproc no és ciert.

En efecte,

Considerem la funció $f(x) = 1$ per a tot $x \in \mathbb{R}$, és clar que la successió de funcions característiques $\{\chi_{[-n,n]}\}$ convergeix puntualment a $f$. Per tant, $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Però sabem que aquesta funció no pot ésser integrable en $\mathbb{R}$.

El següent resultat ens dona un mètode per a saber quan una funció mesurable és integrable:

**Proposició 7.1.2** *Siga $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ i siga $g \in L(\mathbb{R}^n)$, si $|f| \leq g$. Llavors $f \in L(\mathbb{R}^n)$.*

*Com un cas particular tenim que si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ y $|f| \in L(\mathbb{R}^n)$. Aleshores $f \in L(\mathbb{R}^n)$.*

**Demostració.** Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ existirà $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ successió de funcions esglaonades tal que $\chi_n \to f$ q.p.p., com que $|f| \leq g$ i a més a més, $g \in L(\mathbb{R}^n)$. Pel Corol·lari 5.2.4, s'obté el resultat.

El següent resultat ens permet, entre altres coses, l'obtenció de les propietats de les funcions mesurables.

**Proposició 7.1.3** *Siga $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua i verificant que $\varphi(0,0) = 0$.*

*Siguen $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ i anomenem $h(x) = \varphi(f(x), g(x))$. Llavors $h \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.*

**Demostració.** Com que $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, podem afirmar que existeixen $\{\chi_n\}, \{\sigma_n\}$ successions de funcions esglaonades tal que:

$\sigma_n \to f$ q.p.p. (i.e.,llevat en un conjunt nul $A$.)

$\chi_n \to g$ q.p.p. (i.e., llevat en un conjunt nul $B$.)

A més a més, pel raonament fet en el Lema 2.1.5, podem suposar que

$$\sigma_j = \sum_{i=1}^{m(j)} \alpha_i^j \chi_{I_i^j}, \ \chi_j = \sum_{i=1}^{m(j)} \beta_i^j \chi_{I_i^j}$$

on els intervals $I_i^j$ són disjunts dos a dos.

Aleshores l'únic que hem de comprovar es:

(a). $\varphi(\sigma_j, \chi_j)$ és esglaonada.

(b). $\varphi(\sigma_j, \chi_j) \to h$ q.p.p.

Vegem (a). Com que $\varphi(0,0) = 0$,

$$\varphi(\sigma_j, \chi_j) = \varphi(\sum_{i=1}^{m(j)} \alpha_i^j \chi_{I_i^j}, \sum_{i=1}^{m(j)} \beta_i^j \chi_{I_i^j}) = \sum_{i=1}^{m(j)} \varphi(\alpha_i^j, \beta_i^j) \chi_{I_i^j}$$

Segons aquesta última expressió la funció $\varphi(\sigma_i, \chi_i) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Vegem (b).

Com que la convergéncia en $\mathbb{R}^2$ és coordenada a coordenada, es té:

Si $x \in \mathbb{R}^n \setminus (A \cup B)$. Llavors

$$\lim_{j\to\infty} \sigma_j(x) = f(x)$$

$$\lim_{j\to\infty} \chi_j(x) = g(x),$$

i per consegüent:

$$\lim_{j\to\infty} (\sigma_j(x), \chi_j(x)) = (f(x), g(x))$$

Tenint en compte que $\varphi$ és contínua, s'onté el resultat.

**Corol·lari 7.1.4** *Siguen $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Aleshores*

*(a).* $f + g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$

*(b).* $fg \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$

*(c).* $f \vee g, f \wedge g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

*(d).* $|f| \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$

Seguidament veurem un resultat que ens diu quan el producte de dues funcions integrables és una funció integrable.

**Corol·lari 7.1.5** *Siga $f \in L(\mathbb{R}^n)$ i $g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ on $g$ és fitada. Aleshores $fg \in L(\mathbb{R}^n)$.*

**Demostració.** Sabem, pel corol·lari anterior, que $fg \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. A més a més, com que $g$ és fitada, existirà $M > 0$ tal que $|g| \leq M$ d'on podem afirmar que $|fg| \leq M|f|$, ara be, com que les funcions integrables formen un espai vectorial, per la Proposició 7.1.2, s'obté el resultat.

**Proposició 7.1.6** *Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. I $f(x) \neq 0$ per a tot $x \in \mathbb{R}^n$. Llavors $\frac{1}{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.*

**Demostració.** Aquest resultat es conseqüència de la següent observació:

Si $\varphi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{I_i}$ amb $\alpha_i \neq 0$ i els intervals $I_i$ són disjunts dos a dos, podem definir la següent funció esglaonada:

$$\phi = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i} \chi_{I_i}.$$

Des de la definició anterior, es té que si $\varphi_j \to f$ aleshores $\phi_j \to \frac{1}{f}$.

En efecte, siga $\varphi_j = \sum_{i=1}^{m(j)} \alpha_i^{(j)} \chi_{I_i^{(j)}}$, on podem suposar que tots els $\alpha_i^{(j)} \neq 0$ i a més a més, $\{I_i^{(j)} \ : \ i = 1, 2, ...m(j)\}$ són disjunts dos a dos.

Com que $\varphi \to f$ q.p.p., anomenem $A$ al conjunt nul on no hi ha convergencia. Llavors si $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$, sabem que podem trobar per a cada $j$ suficientment gran un únic $I_{i_j}^{(j)}$ tal que $x \in I_{i_j}^{(j)}$ i d'aquesta forma sabem que $\varphi_j(x) = \alpha_{i_j}^{(j)}$. Això ens diu que la successió $(\alpha_{i_j}^{(j)})$ convergeix cap a $f(x)$. Ara tenint en compte la definició de $\phi_j$ s'obté el resultat.

**Proposició 7.1.7** *Siga $\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_m \to f$ q.p.p.. Llavors $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.*

**Demostració.** Considerem una funció $h > 0$ tal que $h \in L(\mathbb{R}^n)$ (per exemple, si estem en $\mathbb{R}^n$, $h(x_1, ...x_n) = e^{-\sum_{k=1}^{n} |x_k|}$)

Prenem a partir de la funció $h$ la següent successió,

$$F_m = h \frac{f_m}{1 + |f_m|}.$$

Per les propietats de les funcions mesurables sabem que $F_m \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. A més a més,

$$F_m \to h \frac{f}{1 + |f|} \ \textit{q.p.p.}$$

Anomenem $F = \frac{hf}{1+|f|}$. Donat que cada $F_m \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, i que

$$|F_m| = |h \frac{f_m}{1 + |f_m|}| \leq |h| = h.$$

Per la Proposició 7.1.2 s'arriba a que $F_m \in L(\mathbb{R}^n)$. A més a més, es compleix que $|F_m| \leq h$. Pel T.C.D, $F \in L(\mathbb{R}^n)$.

Ara tenim:

$$f(h - |F|) = f(h - \frac{h|f|}{1 + |f|}) = \frac{hf}{1 + |f|} = F.$$

Per tant,

$$f = \frac{F}{h - |F|}.$$

Tenint en compte que, $F, h \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ i les propietats de les funcions mesurables, $h - |F| \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ i a més a més, $|F| < h$, aleshores $h - |F| > 0$, amb la qual cosa $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Ara farem una demostració alternativa del resultat anterior que encara que és més llerga la considerem més intuitiva:

**Demostració.** Primer estudiarem el cas particular en que la successió de funcions està formada per funcions integrables.

Com que $f_m \in L(\mathbb{R}^n)$, per definició, sabem que exiteixen $g_m, h_m \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$ de manera que $f_m = g_m - h_m$.

Ara per la definició de funció superior, podem considerar $(\alpha_n^{(m)})$ successió de funcions esglaonades que genera a $g_m$ i siga $(\beta_n^{(m)})$ una successió de funcions esglaonades que genera a $h_m$.

Per tant, donat el número $\frac{1}{2^{m+1}}$ podrem trobar un nombre natural $n(m) \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (g_m - \alpha_{n(m)}^{(m)}) \leq \frac{1}{2^{m+1}}$$

i al hora,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (h_m - \beta_{n(m)}^{(m)}) \leq \frac{1}{2^{m+1}}$$

Prenem ara la funció esglaonada:

$$T_m := \alpha_{n(m)}^{(m)} - \beta_{n(m)}^{(m)}$$

És clar que $f_m - T_m \in L(\mathbb{R}^n)$ per a cada $m \in \mathbb{N}$.

Ara definim la segúent successió de funcions:

Donat $k \in \mathbb{N}$ es defineix:

$$R_k := \sum_{m=1}^{k} |f_m - T_m|.$$

és clar que aquesta successió de funcions integrables és monòtona creixent i a més a més, si s'estudia la successió de les seues integrals, queda:

$$\int_{\mathbb{R}^n} R_k = \sum_{m=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^n} |f_m - T_m| \leq$$

$$\sum_{m=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^n} |g_m - \alpha_{n(m)}^{(m)}| + \sum_{m=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^n} |h_m - \beta_{n(m)}^{(m)}| \leq \sum_{m=1}^{k} \frac{2}{2^{m+1}} \leq 1.$$

Lo qual significa que la successió de les integrals és fitada. Això ens permet aplicar el Teorema de la convergència monòtona i d'aquesta manera assegurar que:

$$\sum_{m=1}^{\infty} |f_m - T_m| \in L(\mathbb{R}^n).$$

Com a conseqüència es té que $|f_m - T_m| \to 0$ q.p.p..

Vegem que $T_m \to f$ q.p.p..

En efecte

$$T_m = T_m - f_m + f_m$$

i com que $f_m \to f$ q.p.p. i $T_m - f_m \to 0$ q.p.p. és clar que $T_m \to f$ q.p.p.. És a dir, $f$ és límit quasi per totes parts d'una successió de funcions esglaonades.

Cas general:

Agafem l'interval $I_m := [-m, m]^n$. I definim:

$$g_m := \sup\{\inf\{f_m \chi_{I_m}, m\chi_{I_m}\}, -m\chi_{I_m}\}.$$

Com que $f_m \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, llavors per les propietats de les funcions mesurables es té que $g_m \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

D'altra banda, es compleix que $|g_m| \leq m\chi_{I_m} \in L(\mathbb{R}^n)$. Així, utilitzant la Proposición 7.1.2, es dedueix que $g_m \in L(\mathbb{R}^n)$. A més a més, no és difícil comprovar que $g_m \to f$ q.p.p.. Per tant, aplicant el cas anterior s'arriba al resultat.

**Proposició 7.1.8** *Siga $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ i siga $r \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Llavors, $r \circ f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.*

**Demostració.** Com que $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, sabem que existeix una successió de funcions esglaonades $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $\varphi_j \to f$ q.p.p.

Pel procés habitual podem escriure:

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^{m(j)} \alpha_i^j \chi_{I_i^j}.$$

Llavors

$$r(\varphi_j(x)) = r(\sum_{i=1}^{m(j)} \alpha_i^j \chi_{I_i^j}(x)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m(j)} r(\alpha_i^j)\chi_{I_i^j}(x) + r(0)(1 - (\chi_{I_1^j}(x) + ... + \chi_{I_{m(j)}^j}(x)))$$

Així, tenim:

(a). $\sum_{i=1}^{m(j)} r(\alpha_i^j)\chi_{I_i^j} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(b). $r(0)(1 - (\chi_{I_1^j} + ... + \chi_{I_{m(j)}^j})) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Per les propietats de les funcions mesurables, afirmem $r \circ \varphi_j \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Com que $r \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ i $\varphi_j \to f$ q.p.p., s'obté que $r \circ \varphi_j \to r \circ f$ q.p.p.. Ara aplicant el resultat anterior, es conclou

$$r \circ f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n).$$

**Teorema 7.1.9** *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és una funció contínua. Aleshores $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.*

**Demostració.** Siga $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, llavors agafem els intervals:

$$I_m = [-m, m]^n.$$

Com que $I_m$ és compacte i $f$ és contínua en $I_m$. Llavors pel teorema de Lebesgue-Viltali sabem que $f$ és integrable Riemann en $I_m$. Aquest fet ens permet afirmar que

$$f\chi_{I_m} \in L(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n).$$

Però, és clar que

$$f\chi_{I_m} \to f.$$

Aleshores utilitzant que el límit puntual de funcions mesurables és també una funció mesurable, s'arriba a:

$$f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n).$$

## 7.2. Criteri de Tonelli-Hobson

Fins ara hem vist com calcular la integral de Lebesgue d'una funció de diverses variables aplicant el Teorema de Fubini. El resultat següent ens proporciona una condició suficient per a que una funció mesurable de diverses variables siga integrable Lebesgue. D'aquesta manera, es pot considerar el resultat següent com una especie de recíproc al Teorema de Fubini.

El criteri de Tonelli-Hobson fou obtés independentment per E. W. Hobson i L. Tonelli en 1909.

**Teorema 7.2.1 ( Criteri de Tonelli-Hobson)** *Siga $n \geq 2$ i escribim $n = l + k$ amb $l, k \geq 1$. Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ i existeix alguna de les següents expressions:*

$$\int_{\mathbb{R}^l} (\int_{\mathbb{R}^k} |f(x,y)| dx) dy$$

*o*

$$\int_{\mathbb{R}^k} (\int_{\mathbb{R}^l} |f(x,y)| dy) dx.$$

*Aleshores*

$$f \in L(\mathbb{R}^n).$$

**Demostració.** Suposem que existeix la expressió:

$$\int_{\mathbb{R}^l} (\int_{\mathbb{R}^k} |f(x,y)| dx) dy.$$

Anomenem

$$g_m := |f| \wedge (m\chi_{[-m,m]^n}),$$

és clar que $g_m \to |f|$. Com que $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ i $(m\chi_{[-m,m]^n}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, per les propietats de les funcions mesurables no és difícil veure que $g_m \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. També és fàcil veure que $|g_m| = g_m$ i $g_m \leq m\chi_{[-m,m]^n} \in L(\mathbb{R}^n)$.

Llavors $g_m \in L(\mathbb{R}^n)$.

Vegem qué passa amb $\{\int_{\mathbb{R}^n} g_m\}_{m=1}^{\infty}$.

Aplicant Fubini, es té:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_m = \int_{\mathbb{R}^l} (\int_{\mathbb{R}^k} g_m(x,y) dx) dy \leq (*)$$

Com que $g_m \leq |f|$ tenim:

$$(*) \leq \int_{\mathbb{R}^l} (\int_{\mathbb{R}^k} |f(x,y)| dx) dy$$

Com que per hipòtesi aquesta última integral existeix, la successió $\{\int_{\mathbb{R}^n} g_m\}_{m=1}^{\infty}$ està fitada.

Ara, utilitzant el Teorema de la convergència monòtona, s'obté: $g_m \to g$ q.p.p. i a més a més, $g \in L(\mathbb{R}^n)$. Però des de la definició de les $g_m$ es dedueix que $g_m \to |f|$ q.p.p.. Per tant, es compleix que $|f| \in L(\mathbb{R}^n)$.

Per consegüent, com que

$$f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n),$$

$$|f| \in L(\mathbb{R}^n).$$

Per la Proposició 7.1.2, s'aplega al resultat.

## 7.3. Problemes proposats.

**Exercici 40** *Siga $f$ una funció mesurable sobre $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$, i $r \in \mathbb{R}$, definim*

$$g(x) = f(x+a), \quad h(x) = f(rx)$$

*per a tot $x \in \mathbb{R}^n$. Provar que $g$ i $h$ són mesurables.*

**Exercici 41** *Siguen $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si $f$ és mesurable i $g, h$ són integrables. Provar que $\text{mín}\{f, g, h\}$ és integrable.*

**Exercici 42** *Si $f$ es una funció fitada i integrable sobre $\mathbb{R}^n$, provar que $f^2$ és també integrable.*

**Exercici 43** *Utilitzar el Teorema de Tonelli-Hobson per a demostrar que*

$$\int_0^b \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_0^\infty (\int_0^b e^{-xy} \sin(x) dx) dy,$$

*per a $b > 0$. Si $b$ tendís cap a $+\infty$, provar que*

$$\lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{1}{2}\pi.$$

# Tema 8

# CONJUNTS MESURABLES.

## 8.1. Definició i Propietats.

**Definició 8.1.1** *Es diu que $S \subseteq \mathbb{R}^n$ és* **Mesurable** *si la seua funció característica $\chi_S$ és una funció mesurable.*

Anomenarem $\Omega(\mathbb{R}^n)$ a la família de tots els conjunts mesurables de $\mathbb{R}^n$.

**Definició 8.1.2** *Definim la* **mesura de Lebesgue** *d'un conjunt mesurable de la següent forma:*

$$\begin{array}{rccl} \mu : & \Omega(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ & S & \mapsto & \mu(S) = \left\{ \begin{array}{ll} +\infty & \chi_S \notin L(\mathbb{R}^n) \\ \int \chi_S & \chi_S \in L(\mathbb{R}^n) \end{array} \right. \end{array}$$

Com una conseqüència inmediata de les dues definicions anteriors es té que $\mathbb{R}^n \in \Omega(\mathbb{R}^n)$, i a més a més, $\mu(\mathbb{R}^n) = \infty$.

**Proposició 8.1.3 (Propietats)** *Si $S, T \in \Omega(\mathbb{R}^n)$. Llavors*

**1**$S \cup T$, $S \cap T$, $S \setminus T$ *són conjunts mesurables.*

**2.** *Si $S \subseteq T$, aleshores $\mu(S) \leq \mu(T)$.*

**3.** $\mu(S \cup T) + \mu(S \cap T) = \mu(S) + \mu(T)$.

**4.** *Si* $\mu(S) = 0$, *aleshores* $S$ *és nul. A més a més, si* $S$ *és nul, llavors* $S \in \Omega(\mathbb{R}^n)$ *i es té que* $\mu(S) = 0$.

**5.** *Si* $(S_n)$ *és una successió creixent de conjunts mesurables. Aleshores* $S = \bigcup S_n \in \Omega(\mathbb{R}^n)$ *y* $\mu(S) = \text{lím}_{n\to\infty} \mu(S_n)$.

**6.** *Si* $(T_n)$ *és una successió de conjunts mesurables. Llavors* $S = \bigcup T_n \in \Omega(\mathbb{R}^n)$ *i* $\mu(S) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(T_n)$. *Si els* $T_n$ *són disjunts dos a dos, aleshores* $\mu(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(T_n)$.

**Demostració.**

**1.** És clar que $\chi_{S\cup T} = \chi_S \vee \chi_T$. Com que $\chi_S, \chi_T \in M(\mathbb{R}^n)$. Per les propietats de les funcions mesurables:

$$\chi_S \vee \chi_T \in M(\mathbb{R}^n),$$

i per tant,

$$\chi_{S\cup T} \in M(\mathbb{R}^n).$$

El cas de $S \cap T$ es fa de la mateixa forma, sapiguent que $\chi_{S\cap T} = \chi_S \wedge \chi_T$.

Per últim, $\chi_{S\setminus T} = \chi_{S\cap \bar{T}} = (\chi_S - \chi_T)^+ = (\chi_S - \chi_T) \vee 0$, Com que la resta de funcions mesurables és mesurable i el suprem de dues funcions mesurables és també mesurable, s'arriba: $\chi_{S\setminus T} \in M(\mathbb{R}^n)$.

**2.** Si $\chi_T \notin L(\mathbb{R}^n)$, llavors $\mu(T) = \infty$, el que significa que $\mu(S) \leq \mu(T)$.

Suposem que $\chi_T \in L(\mathbb{R}^n)$, com que $S \subseteq T$ es té que $\chi_S \leq \chi_T$.

Per tant aplicant la Proposició 7.1.2, tenim:

$$\chi_S \in L(\mathbb{R}^n),$$

i a més a més,

$$\int \chi_S \leq \int \chi_T,$$

el que ens diu que $\mu(S) \leq \mu(T)$.

**3.** Com que $\chi_{S\cap T} + \chi_{S\cup T} = \chi_S + \chi_T$. A més a més, per (2) si suposem que $\mu(S \cup T) < \infty$, aleshores

$$\mu(S), \mu(T), \mu(S \cap T) < \infty,$$

és a dir,

$$\chi_S, \chi_T, \chi_{S\cap T} \in L(\mathbb{R}^n).$$

Per tant,

$$\mu(S \cap T) + \mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T).$$

Si suposem que $\mu(S \cup T) = \infty$, llavors $\chi_{S\cup T} \notin L(\mathbb{R}^n)$, per tant, $\chi_S \notin L(\mathbb{R}^n)$ o $\chi_T \notin L(\mathbb{R}^n)$. Aleshores

$$\mu(S \cap T) + \mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T).$$

**4.** Si $\mu(S) = 0$, per definició tenim que $\int \chi_S = 0$ i això vol dir, pel Corol·lari 5.1.6, que $\chi_S = 0$ q.p.p., és a dir $S$ és nul.

Si $S$ és nul, es té que $\chi_S = 0$ qpp, amb la qual cosa, per la Proposició 4.1.4, $\chi_S \in L(\mathbb{R}^n)$ i a més a més, $\int \chi_S = 0$ el que significa: $S \in \Omega(\mathbb{R}^n)$ i $\mu(S) = 0$.

Com a conseqüència d'aquest resultat s'obté:

Si $A \subseteq B$ i $\mu(B) = 0$, llavors $A \in \Omega(\mathbb{R}^n)$ i a més a més, $\mu(A) = 0$.

**5.** Suposem que agafem una successió creixent de conjunts mesurables $(S_n)$, aleshores $\chi_{S_n} \to \chi_S$ puntualment, (on $S = \bigcup S_n$.) Això vol dir que $\chi_S \in M(\mathbb{R}^n)$, (mirar Proposició 7.1.7). Ara, tenint en compte la definició de conjunt mesurable, es té:

$$S \in \Omega(\mathbb{R}^n).$$

Si ara s'aplica (2) (monotonia de la mesura), s'obté:

$(\mu(S_n))$ és creixent.

Si $\chi_S \in L(\mathbb{R}^n)$, com que $\chi_{S_n} \leq \chi_S$, llavors $\chi_{S_n} \in L(\mathbb{R}^n)$. Com a conseqüència d'això, aplicant el Teorema de la convergència monòtona, es té:

$$\int \chi_S = \mu(S) = \lim_{n\to\infty} \int \chi_{S_n} = \lim_{n\to\infty} \mu(S_n).$$

Si $\chi_S \notin L(\mathbb{R}^n)$, la successió $(\mu(S_n))$ no estarà fitada, ja que en cas contrari, pel Teorema de la convergència monòtona $\chi_S \in L(\mathbb{R}^n)$. Per tant, $(\mu(S_n))$ és creixent i no fitada. Aleshores $\mu(S_n) \to +\infty$. El que ens permet concloure:

$$\mu(S) = +\infty = \lim_{n\to\infty} \mu(S_n).$$

**6.** Anomenem

$$S_k = \bigcup_{m=1}^{k} T_m \in \Omega(\mathbb{R}^n)$$

és clar que la successió $(S_k)$ és creixent. Aleshores per (5), tenim que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k = \bigcup_{m=1}^{\infty} T_m \in \Omega(\mathbb{R}^n)$$

Ara utilitzant (2) es dedueix:

$$\mu(\bigcup_{m=1}^{k} T_m) \leq \sum_{m=1}^{k} \mu(T_m),$$

i com que la mesura és no negativa:

$$\sum_{m=1}^{k} \mu(T_m) \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \mu(T_m)$$

Aplicant (5) obtenim:

$$\mu(\bigcup_{m=1}^{\infty} T_m) = \lim_{m\to\infty} \mu(\bigcup_{m=1}^{k} T_m) \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \mu(T_m).$$

Així,

$$\mu(\bigcup_{m=1}^{\infty} T_m) \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \mu(T_m).$$

Si $(T_m)$ són disjunts dos a dos, llavors $\mu(T_i \cap T_j) = 0$ si $i \neq j$. Per tant, aplicant (2) es té:

$$\mu(\bigcup_{m=1}^{k} T_m) = \sum_{m=1}^{k} \mu(T_m).$$

Així que prenent límits:

$$\mu(\bigcup_{m=1}^{\infty} T_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(T_m).$$

**Proposició 8.1.4** *Tot subconjunt obert de $\mathbb{R}^n$ és un conjunt mesurable.*

**Demostració.**

Tot conjunt obert de $\mathbb{R}^n$ és localment compacte i Lindeloff. Així que, per a cada punt de l'obert podem agafar un cub centrat en ell (el cub el podem pendre obert) cobrim l'obert amb aquests cubs fitats i oberts.

Com que el conjunt obert és Lindeloff, podem traure un subrecobriment numerable. Com que cada cub obert i fitat és mesurable. Aleshores per (6) s'arriba al resultat.

Com a conseqüència d'aquest últim resultat i de la proposició d'abans es té que els conjunts *tancats* també són mesurables i a més a més, els conjunts *compactes* són mesurables amb mesura finita.

**Definició 8.1.5** *Donat $A \subset \mathbb{R}^n$ y $z \in \mathbb{R}^n$. Anomenem $A + z := \{x + z \; : \; x \in A\}$.*

**Teorema 8.1.6** *Si $A \in \Omega(\mathbb{R}^n)$. Aleshores $A + z \in \Omega(\mathbb{R}^n)$ i a més a més, $\mu(A) = \mu(A + z)$.*

**Demostració.** Per a veure que el conjunt $A+z$ és mesurable l'únic que hem de provar és que la seua funció característica és una funció mesurable. És fàcil comprovar que

$$\chi_{A+z}(x) = \chi_A(x-z) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

és a dir,

$$\chi_{A+z}(x) = \chi_A(h(x))$$

on, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es defineix de manera que $h(x) = x - z$.

Per tant, el problema es redueix a provar que $\chi_A \circ h \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. La qual cosa és conseqüència del fet d'èsser $\chi_A$ mesurable.

Com que $\chi_A$ és mesurable, existirà una successió de funcions esglaonades $(\alpha_n)$ de forma que $\alpha_n \to \chi_A$ q.p.p. És clar que $\alpha_n \circ h \to \chi_A \circ h$ q.p.p. Aleshores si provem que aquesta nova successió està formada per funcions esglaonades haurem demostrat el resultat.

Si $\alpha_n$ és una funció esglaonada

$$\alpha_n = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{I_i}$$

amb els intervals $I_i$ disjunts dos a dos.

Llavors

$$(\alpha_n(h(x)) = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{I_i}(x-z) = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{I_i+z}(x)$$

és a dir, $\alpha_n \circ h$ és també esglaonada.

Per a veure que $\mu(A) = \mu(A+z)$, és prou observar que

$$\int \alpha_n = \int \alpha_n \circ h,$$

ja que $\mu(I_i) = \mu(I_i + z)$. Ara el resultat és conseqüència inmediata del Teorema de la convergència monòtona.

**Observació.** El teorema anterior afirma que la mesura de Lebesgue és invariant per translacions. A més a més, la última part de la demostració anterior es pot llegir:

Si $f \in L(\mathbb{R}^n)$ i $z \in \mathbb{R}^n$.

Podem definir la funció,

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \ g(x) = f(x+z)$$

Entonces, $g \in L(\mathbb{R}^n)$ i a més a més, $\int g = \int f$.

**Exemple 8.1.7** A continuació donarem un conjunt de la recta real el qual no és mesurable Lebesgue.

En l'interval $[0,1]$ definim la següent relació d'equivalència:

$$x \sim y \leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Triem un representant de cada classe d'equivalència ( aci hem de fer us de l'axioma d'elecció) , i al conjunt resultant l'anomenem $E$.

Vegem que $E$ **no és mesurable**.

Agafem $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$, per ésser un subconjunt de nombres racionals, aquest conjunt és numerable, per tant el podem ordenar en successió

$$\mathbb{Q} \cap [-1,1] = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Anomenem $E_n := E + r_n$. Suposem que $E$ és mesurable.

Aleshores $E_n \in \Omega(\mathbb{R})$ i a més a més, $\mu(E_n) = \mu(E)$ (això és conseqüència de que la mesura és invariant per translació).

Vegem que $[0,1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Siga $x \in [0,1]$. Llavors existirà $e \in E$ tal que $x - e \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$. Amb la qual cosa, $x - e = r_{n_0}$. Així que $x \in E_{n_0}$. Per tant,

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq [-1,2].$$

Vegem que $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \neq m$.

En efecte,

Si $n \neq m$ es té que $r_n \neq r_m$. Suposem que existeix $z \in E_n \cap E_m$, llavors $z = e_n + r_n$ i $z = e_m + r_m$ complint-se que $e_n - e_m \in \mathbb{Q}$, la qual cosa és una contradicció ja que $e_n$ i $e_m$ són de classes d'equivalència diferents.

Com a conseqüència de l'anterior i de (6) es compleix

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Ara, podem diferenciar dos casos:

**a.** Suposem que $\mu(E) = 0$.

Com que $[0,1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq [-1,2]$ es tindrà:

$$1 \leq \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq 3.$$

El que ens porta a una contradicció.

**b.** Suposem que $\mu(E) > 0$. Aleshores

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = +\infty$$

el que també és una contradicció.

D'aquesta forma, hem deduït que $E$ no pot ésser un conjunt mesurable.

Com a conseqüència de l'exemple anterior, també es conclou que hi han funcions que no són mesurables $\chi_E$.

**Definició 8.1.8** *Siga $M \in \Omega(\mathbb{R}^n)$ i siga $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Direm que $f \in L(M)$ si $f\chi_M \in L(\mathbb{R}^n)$. A més a més, definirem*

$$\int_M f := \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_M.$$

És d'interés observar que si $f \in L(\mathbb{R}^n)$ llavors $f\chi_M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ i per la Proposició 7.1.2 $f\chi_M \in L(\mathbb{R}^n)$, és a dir, $f \in L(M)$.

## 8.2. Principi de Cavalieri.

Per a finalitzar farem una aplicació del Teorema de Fubini que és una generalització del mètode frequentment usat per al càlcul de volums.

**Teorema 8.2.1 ( Principi de Cavalieri)** *Siga $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunt mesurable amb $A \subset I \times [a,b]$, on $I$ és un interval fitat en $\mathbb{R}^n$. Llavors*

$$\mu(A) = \int_{[a,b]} \mu(A_t)$$

*on $A_t = \{x \in \mathbb{R}^n : (x,t) \in A\}$.*

**Demostració.** Com que $\chi_A$ és mesurable i $A \subset I \times [a,b]$ per ésser $I$ fitat. Aleshores $A$ està contingut en un compacte, llavors $\chi_A \in L(\mathbb{R}^{n+1})$. Per consegüent, aplicant el Teorema de Fubini s'arriba a que:

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \chi_A = \int_{I\times[a,b]} \chi_A = \int_{[a,b]} (\int_I \chi_A(x,t)dx)dt = \int_{[a,b]} \mu(A_t)dt.$$

L'aplicació més típica del principi de Cavalieri és l'avaluació de *volums de revolució en* $\mathbb{R}^3$.

Siga $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funció contínua i positiva. Denotem per $R(f) = \{(t,y,z) \ : \ t \in [a,b] \ y^2 + z^2 \leq f^2(t)\}$ el subconjunt de $\mathbb{R}^3$ engendrat per la gràfica de $f$ al girar sobre l'eix $0x$. Aleshores com que $R(f)_t$ és un circle de radi $f(t)$, tindrem:

$$\mu(R(f)_t) = \pi f(t)^2.$$

Per tant, aplicant el Principi de Cavalieri, el volum de la figura de revolució, ens queda:

$$\mu(R(f)) = \int_a^b \mu(R(f)_t)dt = \pi \int_a^b f(t)^2dt.$$

**Exemple 8.2.2** *Per a calcular el volum de la bola $B_r(0) \subset \mathbb{R}^3$ fem el següent:*

*Agafem la funció $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Llavors $R(f) = B_r(0)$, aleshores*

$$\mu(B_r(0)) = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

## 8.3. Problemes proposats.

**Exercici 44** *Agafem una successió de conjunts mesurables $(A_n)$ disjunts dos a dos. Si $f \in L(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$. Provar que $f \in L(A_n)$ i que,*

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f.$$

**Exercici 45** *Si tenim una successió creixent de conjunts mesurables $(B_n)$ i anomenem $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$. Suposem que $f \in L(B)$. Provar que*

$$\int_B f = \lim_{m \to \infty} \int_{B_m} f.$$

**Exercici 46** *Si $f \in \mathcal{C}(\mathcal{U})$ amb $\mathcal{U}$ obert, i $\mathcal{K}$ és un compacte contingut en $\mathcal{U}$. Provar que $f \in L(\mathcal{K})$.*

**Definició 8.3.1** *Una família $\Sigma$ de subconjunts de $\mathbb{R}^n$ s'anomena $\sigma$- àlgebra si compleix:*

*(a). $\mathbb{R}^n \in \Sigma$.*

*(b). Si $A \in \Sigma$, llavors $\mathbb{R}^n \setminus A \in \Sigma$.*

*(c) Si $A, B \in \Sigma$, llavors $A \cap B \in \Sigma$.*

*(d). Si $(T_n)$ és una successió de conjunts que pertanyen a $\Sigma$. Llavors $S = \bigcup T_n \in \Sigma$.*

La menor $\sigma$-àlgebra en $\mathbb{R}^n$ que conté als oberts de $\mathbb{R}^n$ s'anomena $\sigma$-àlgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ i la denotarem per $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

**Exercici 47** *Provar que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \Omega(\mathbb{R}^n)$.*

# Tema 9

# EL TEOREMA DEL CANVI DE VARIABLE.

L'objectiu d'aquest tema és obtindre el següent resultat:

"Siga $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ obert no buit. Siga $T : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ una aplicació de classe $\mathcal{C}^1$ invertible amb inversa de classe $\mathcal{C}^1$. Llavors $f$ és integrable en $T(\mathcal{U})$ si, i només si, $(f \circ T)|J_T|$ és integrable en $\mathcal{U}$ i a més a més,

$$\int_{T(\mathcal{U})} f = \int_{\mathcal{U}} (f \circ T)|J_T|."$$

**Definició 9.0.2** *Una transformació de coordenades serà una aplicació*

$$\varphi : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

*amb $\mathcal{U}$ un obert, que verifica:*

*(1). $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$.*

*(2). $\varphi$ és injectiva.*

*(3).- $J_\varphi(t) \neq 0$ per a tot $t \in \mathcal{U}$.*

Per les propietats (1), (2), (3) es pot aplicar el Teorema de la funció inversa i sabem que existeix $\varphi^{-1}$ local, però per (2), aquesta inversa serà global i a més a més, serà de classe $\mathcal{C}^1$.

**Exercici.** Si $\varphi, \chi$ són transformacions de coordenades. Provar que $\varphi \circ \chi$ és també una transformació de coordenades. (Per a veure la demostració aplicar la regla de la cadena.)

**Exemple 9.0.3** Coordenades polars en $\mathbb{R}^2$.

Siga $\mathcal{U} := \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : t_1 > 0, 0 < t_2 < 2\pi\}$ definim:

$$\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$$

de manera que:

$\varphi_1(t_1, t_2) = t_1 \cos(t_2)$.

$\varphi_2(t_1, t_2) = t_1 \sin(t_2)$.

$J_\varphi(t_1, t_2) = \cos(t_2) t_1 \cos(t_2) + t_1 \sin^2(t_2) = t_1$.

A més a més, $\varphi$ és injectiva i $\varphi(\mathcal{U}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \ : \ x \geq 0\}$.

## 9.1. Canvi de coordenades lineals i afins.

Siga $\sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ com que $\sigma \in \mathcal{C}^\infty$ i $d\sigma = \sigma$ es compleix que $det(\sigma) = J_\sigma(t)$. Per tant, $\sigma$ és injectiva si, i només si, $det(\sigma) \neq 0$. Aleshores $\sigma$ és una transformació de coordenades si, i només si, $det\sigma \neq 0$ o $\sigma$ és injectiva o $\sigma$ és suprajectiva.

**Definició 9.1.1** *Una aplicació $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ s'anomena transformació afí si $\varphi(t) = \sigma(t) + z$ tal que $z \in \mathbb{R}^n$ fix i $\sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.*

Com que $\sigma \in \mathcal{C}^\infty$, llavors $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ i a més a més, $J_\varphi = det\sigma$. Per tant, una transformació afí serà un canvi de coordenades si, i només si, $det\sigma \neq 0$.

Tota transformació de coordenades linial es pot expressar com una composició de tres tipus especials de transformacions de coordenades, anomenades *transformacions elementals,* a les que ens referirem com de tipus **a**, **b**, i **c**. Aquestes transformacions es defineixen de la forma següent:

**tipus a.** $\sigma_a(t_1, ..., t_k, ..., t_n) = (t_1, ..., \lambda t_k, ..., t_n)$, on $\lambda \neq 0$. En altres paraules. $\sigma_a$ multiplica una component de $\mathbf{t}$ per un escalar no nul $\lambda$. En particular, $\sigma_a$ transforma els vectores coordenats unitaris de la forma següent:

$$\sigma_a(e_k) = \lambda e_k$$

$$\sigma_a(e_i) = e_i,\ i \neq k.$$

la matriu de $\sigma_a$ s'obté multiplican els elements de la k-éssima fila de la matriu identitat per $\lambda$, i així ens queda que $det\sigma_a = \lambda$.

**tipus b.** $\sigma_b(t_1, ..., t_k, ..., t_n) = (t_1, ..., t_k + t_j, ..., t_n)$, on $j \neq k$. Aleshores, $\sigma_b$ reemplaça una component de $\mathbf{t}$ per ella mateixa més altra. En particular, $\sigma_b$ transforma els vectores coordenats unitaris de la següent forma:

$$\sigma_b(e_k) = e_k + e_j$$

per a certs $k$ i $j$ fixos, $k \neq j$.

$$\sigma_b(e_i) = e_i$$

per a tot $i \neq k$.

La matriu de $\sigma_b$ pot obtenir-se a partir de la matriu identitat reemplaçant la k-éssima fila de $\mathbf{I}$ per la k-éssima fila de $\mathbf{I}$ més la j-éssima fila de $\mathbf{I}$ i d'aquesta forma ens queda que $det\sigma_b = 1$.

**tipus c.** $\sigma_c(t_1, ..., t_i, ..., t_j, ..., t_n) = (t_1, ..., t_j, ..., t_i, ..., t_n)$, on $i \neq j$. És a dir, $\sigma_c$ intercanvia les components i-éssima i j-éssima de $\mathbf{t}$ per a certs $i$ i $j$ amb $i \neq j$. En particular, $\sigma_c(e_i) = e_j$, $\sigma_c(e_j) = e_i$, i $\sigma_c(e_k) = e_k$, per a tot $k \neq i, j$. La matriu de $\sigma_c$ és la matriu identitat amb les files $i$ i $j$ intercanviades. Així, $det\sigma_c = -1$.

La inversa d'una transformació elemental és altra transformació elemental del mateix tipus. La matriu d'una transformació elemental s'anomena *matriu elemental.* Cada transformació de coordenades linial $\sigma$ pot transformar-se en la matriu identitat **I** multiplicant la transformació $\sigma$ de l'esquerra per una successió finita de matrius elementals. (Això constitueix el conegut procediment de Gauss-Jordan de l'Àlgebra linial.) Així doncs,

$$I = T_1 T_2 ... T_r \sigma,$$

on cada $T_k$ és una matriu elemental. Per tant,

$$\sigma = T_r^{-1} ... T_2^{-1} T_1^{-1}.$$

Això ens dona una descomposició de $\sigma$ en composició de transformacions elementals.

**Exercici.** Si $f \in L(\mathbb{R})$, aleshores $g(x) = f(\lambda x)$ és també integrable y a més a més,$\int_{\mathbb{R}} f = |\lambda| \int_{\mathbb{R}} g$.

Aquest exercici és una conseqüència del problema **??**

**Teorema 9.1.2** *Siga $\sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ una transformació de coordenades. Siga $f \in L(\mathbb{R}^n)$. Aleshores $|J_\sigma| f \circ \sigma \in L(\mathbb{R}^n)$ i $\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} (f o \sigma) |J_\sigma|$.*

**Demostració.** Per a provar el resultat serà prou demostrar-ho per a les transformacions elementals, ja que com hem dit adés, tota transformació linial està formada per una composició finita d'aquest tipus transformacions elementals.

Suposem que $\sigma$ és del **tipus a.**

Pel teorema de Fubini és té:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} [\int_{\mathbb{R}} f(t_1, ..., t_n) dt_n] d(t_1 ... t_{n-1}) = (*)$$

Per l'exercici anterior, s'obté:

$$(*) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} [\int_{\mathbb{R}} |\lambda| f(t_1, ..., \lambda t_n) dt_n] d(t_1 ... t_{n-1}) = (*)$$

Suposem ara, que $f \geq 0$, com que $det\sigma = \lambda$ és compleix que $|J_\sigma| = |\lambda|$ amb la qual cosa:

$$(*) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} [\int_{\mathbb{R}} (fo\sigma)(t_1, ..., t_n) |J_\sigma(t_1, ..., t_n)| dt_n] d(t_1 ... t_{n-1}).$$

D'altra banda, com que $fo\sigma$ és mesurable, $fo\sigma \geq 0$ i la integral iterada existeix, aplicant Tonelli-Hobson s'arriba a que $(f \circ \sigma)|J_\sigma| \in L(\mathbb{R}^n)$. Ara, tornant a aplicar Fubini és té:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ g) |J_\sigma|.$$

Per als altres tipus de transformacions el procediment de la prova és anàleg. Quan $f$ és no necessariament positiva, farem la descomposició $f = f^+ - f^-$.

Quan la transformació linial és arbitraria com que

$$\sigma = T_k o T_{k-1} o ... T_1$$

on les $T_i$ són transformacions elementals. Llavors utilitzant el que hem fet abans, és té:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} (foT_k) |J_{T_k}| = (*)$$

Com que els jacobians de les transformacions elementals són constants, tenim:

$$(*) = |J_{T_k}| \int_{\mathbb{R}^n} (foT_k) = |J_{T_k}||J_{T_{k-1}}| \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ T_k \circ T_{k-1}) = ... = |J_\sigma| \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \sigma)$$

d'on s'obté:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} (fo\sigma) |J_\sigma|.$$

**Teorema 9.1.3** *Agafem $\varphi$ una transformació de coordenades afí. Siga $f \in L(\mathbb{R}^n)$. Llavors $(f \circ \varphi)|J_\varphi| \in L(\mathbb{R}^n)$ i a més a més, $\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \varphi)|J_\varphi|$.*

**Demostració.** Tenint en compte que $\varphi$ és una transformació afí, existirà una transformació linial $\sigma$ i un punt $z \in \mathbb{R}^n$ de manera que $\varphi(x) = \sigma(x) + z$. Per un resultat vist, sabem: (veure l'observació de que la mesura de Lebesgue és invariant per translacions)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+z)dx.$$

En conseqüència,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+z)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(\sigma(t)+z)|J_\sigma|dt =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\varphi(t))|J_\sigma|dt = \int_{\mathbb{R}^n} fo\varphi|J_\varphi|.$$

**Observació.** Siga $A \subseteq \mathbb{R}^n$ amb $\mu(A) < \infty$, així $\chi_A \in L(\mathbb{R}^n)$ i a més a més,$\mu(A) = \int \chi_A$.

Danada una transformació afí: $\varphi(x) = \sigma(x) + z$, anomenem $\varphi^1(x) = \sigma^{-1}(x) - \sigma^{-1}(z)$, aleshores

$$\varphi^1(\varphi(x)) = \sigma^{-1}(\sigma(x)+z) - \sigma^{-1}(z) = x,$$

així que $\varphi^1 = \varphi^{-1}$.

Si ara mirem la mesura de $A$ obtenim:

$$\mu(A) = \int \chi_A = \int (\chi_A o\varphi^1)|J_{\varphi^1}| = \int \chi_{\varphi(A)}|det\varphi|^{-1}$$

Per tant,

$$\mu(\varphi(A)) = |det\varphi|\mu(A).$$

Aquesta última igualtat és coneguda com *fòrmula de transformació de conjunts per a transformacions afins.*

### 9.1.1. Canvi de variable: casos pràctics.

El teorema del canvi de variable sol aplicar-se en els següents casos:

(1). El recinte d'integració és **complicat.**

(2).- No és evident la integració encara que el recinte siga senzill.

Entendrem per recinte senzill aquell on pot aplicar-se el Teorema de Fubini de forma mecànica i sense problemes.

**Diversos canvis de coordenades.**

*Coordenades cilíndriques.*

Siga $\mathcal{T} := \{(r, \theta, z) : r > 0, 0 < \theta < 2\pi, z \in \mathbb{R}\}$

Es defineix:

$$g(r, \theta, z) := (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

*Coordenades esfèriques.*

Siga $\mathcal{T} := \{(\rho, \theta, \varphi) : \rho > 0, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < \pi\}$

Es defineix

$$g(\rho, \theta, \varphi) := (\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi).$$

**Exemple 9.1.4** Calcular $\int_I e^{-(x^2+y^2)}$ on $I := [0, \infty[\times[0, \infty[$.

Fem el canvi a coordenades polars: $x = r \cos \theta$ i $y = r \sin \theta$. La funció $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ és integrable sobre $I$ si, i només si $f \circ \varphi(r, \theta)|J_\varphi(r, \theta)| = re^{-r^2}$ és integrable sobre $\varphi^{-1}(I)$.

Vegem que $f \circ \varphi(r, \theta)|J_\varphi(r, \theta)| = re^{-r^2} \in L(]0, \infty[\times]0, \frac{\pi}{2}[)$.

Com que la funció $(r, \theta) \to re^{-r^2}$ es continua, aleshores és mesurable i com que també és positiva si estudiem l'existència d'una de les seues iterades, pel teorema de Tonelli-Hobson, s'obtindrà el resultat.

Llavors,

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^{+\infty} re^{-r^2}dr)d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} re^{-r^2}dr = \frac{\pi}{2}\,\text{lím}_{t\to+\infty}([-\frac{1}{2}e^{-r^2}]_0^t) = \frac{\pi}{4}.$

És a dir, la funció $f\circ\varphi(r,\theta)|J_\varphi(r,\theta)|$ és integrable en $]0,\infty[\times]0,\frac{\pi}{2}[)$. Per conseqüent, aplicant el teorema del canvi de variable es té que $f$ és integrable en $I$ i a més a més

$$\int_I e^{-(x^2+y^2)} = \frac{\pi}{4}.$$

## 9.2. Problemes proposats.

**Exercici 48** *Calcular* $\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy$ *i deduir que* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

**Exercici 49** *Calcular* $\int\int_A x^2y^2dxdy$, *on* $A$ *és la regió del primer quadrant limitada per les hipèrboles* $xy = 1$, $xy = 2$ *i les rectes* $y = x$, $y = 4x$.

**Exercici 50** *Calcular el volum del sòlid limitat superiorment per la superficie esfèrica* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, *inferiorment pel plà* $XY$ *i lateralment pel cilindre* $x^2 + y^2 = 1$.

**Exercici 51** *Calcular el volum de la regió comprenguda entre els cilindres* $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, *i* $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

# Bibliografia


[1] Apostol, T. *Análisis Matemático,* Ed. Reverté $2^a$ edición, 1979.

[2] Chae, S.B. *Lebesgue Integration,* Marcel Dekker Inc. (1980).

[3] Stormberg, K. R. *An Introduction to Classical Real Analysis,* Wadsworth International Group, 1981.

[4] Weir, A. J. *Lebesgue integration and Measure,* Cambridge University Press, Volum I, 1973.