Matemáticas Generales (12907)
Licenciatura de Químicas

JESÚS GARCIA i FALSET
Departament d'Anàlisi Matemàtica
Universitat de València

5 de marzo de 2010

Índice general

Capítulo 1

Álgebra Lineal

1.1. Método de reducción de Gauss-Jordan

Definición 1.1.1 *Una ecuación lineal real es aquella de la forma:*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ...a_nx_n = b,$$

donde a_i, b son números reales conocidos (los a_i se llaman coeficientes y a b se le denomina término independiente) mientras que los x_i son las incógnitas.

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales que esencialmente comparten alguna de las incógnitas.

Definición 1.1.2 *Una solución de un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de valores, uno por cada una de las incógnitas, que es solución de todas y cada una de las ecuaciones que forman el sistema.*

Cuando existe solución se dice que el sistema es *compatible*, y en caso contrario se dice que el sistema es *incompatible*. Si un sistema tiene una única solución se denomina *compatible determinado* y cuando el sistema tiene varias soluciones se llamará *compatible indeterminado.*

1.1.1. Resolución de sistemas lineales.

La forma usual de expresar un sistema lineal de m-ecuaciones con n-incógnitas es:

$$\begin{array}{lllll} a_{1,1}x_1+ & a_{1,2}x_2+ & ...+ & a_{1,n}x_n & = b_1 \\ a_{2,1}x_1+ & a_{2,2}x_2+ & ...+ & a_{2,n}x_n & = b_2 \\ .... & & & & \\ a_{m,1}x_1+ & a_{m,2}x_2+ & ...+ & a_{m,n}x_n & = b_m \end{array} \tag{1.1}$$

Dos sistemas se llaman equivalentes si tienen las mismas soluciones. Se obtiene siempre un sistema equivalente a otro si se hacen cualquiera de las siguientes operaciones:

(i). Cambiar el orden de las incógnitas.
(ii). Cambiar el orden de las ecuaciones.
(iii). Multiplicar una ecuación por un número real no nulo.
(iv). Sustituir una ecuación por la suma de ella con otra.

1.1.2. Método de Gauss-Jordan.

Dado el sistema de ecuaciones 1.1, para simplificar lo podemos escribir:

$$\left(\begin{array}{llll||c} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,n} & b_2 \\ ... & & & & ... \\ a_{m,1} & a_{m,2} & ... & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$

Esta expresión se denominará matriz del sistema con los términos independientes.

Como consecuencia de las operaciones que se pueden realizar para obtener sistemas equivalentes, dejaremos que se puedan realizar las siguientes modificaciones en la matriz del sistema.

(GJ1). Cambiar el orden de sus primeras n-columnas.
(GJ2). Cambiar el orden de las filas.
(GJ3). Multiplicar todos los elementos de una fila por el mismo número no nulo.
(GJ4). Sustituir una fila por la suma, término a término, de ella con otra.

Ejemplo 1.1.3 *Discutir y resolver el sistema:*

$$\begin{array}{rrrl} 3x & +y & -z & = 2 \\ x & +2y & +z & = 5 \\ 2x & +3y & -2z & = 1 \end{array}$$

Como hemos dicho antes, escribimos el sistema en la forma:

$$\left(\begin{array}{ccc||c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora multiplicamos la segunda fila por -2 y se la sumamos a la tercera:

$$\left(\begin{array}{ccc||c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -4 & -9 \end{array}\right)$$

Cambiamos la primera fila por la segunda:

$$\left(\begin{array}{ccc||c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -9 \end{array}\right)$$

Multiplicamos la primera fila por -3 y se la sumamos a la segunda.

$$\left(\begin{array}{ccc||c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -4 & -13 \\ 0 & -1 & -4 & -9 \end{array}\right)$$

Cambiamos la segunda fila por la tercera.

$$\left(\begin{array}{ccc||c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -4 & -9 \\ 0 & -5 & -4 & -13 \end{array}\right)$$

Ahora multiplicamos la segunda fila por -5 y se la sumamos a la tercera.

$$\left(\begin{array}{ccc||c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 16 & 32 \end{array}\right)$$

De donde obtenemos el sistema equivalente:

$$\begin{array}{rrrr} x & +2y & +z & = 5 \\ 0x & -y & -4z & = -9 \\ 0x+ & 0y+ & 16z & = 32 \end{array}$$

Que evidentemente es un sistema compatible determinado, donde la solución es:

$$z = 2, \quad y = 1, \quad x = 1.$$

Ejemplo 1.1.4 *Aplicando el método de reducción discutir, según los valores de a y b, el sistema*

$$\begin{array}{rrrl} 2x & -y & +3z & = 1 \\ x & -y & +z & = a \\ x & +2y & +bz & = 3 \end{array}$$

Resolver en el caso compatible.

Para aplicar el método de reducción pasamos la segunda fila a la primera y escribimos el sistema en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{rrr||c} 1 & -1 & 1 & a \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & b & 3 \end{array}\right)$$

Sustituimos la segunda fila por el resultado de restar a la segunda dos veces la primera y sustituimos la tercera fila por el resultado de restar de la tercera la primera. Se tiene

$$\left(\begin{array}{rrr||r} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1-2a \\ 0 & 3 & b-1 & 3-a \end{array}\right)$$

Ahora sustituimos la nueva tercera fila por el resultado de restarle la segunda multiplicada por tres. Así

$$\left(\begin{array}{rrr||r} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1-2a \\ 0 & 0 & b-4 & 5a \end{array}\right)$$

La última matriz corresponde a un sistema equivalente cuya última ecuación es $(b-4)z = 5a$.

(i). Si $b \neq 4$ se tiene que $z = \frac{5a}{b-4}$, $y = 1 - 2a - \frac{5a}{b-4}$, $x = 1 - a - \frac{10a}{b-4}$. Luego el sistema es compatible determinado.

(ii) Si $b = 4$, se tiene que $0z = 5a$, luego si $a \neq 0$ el sistema es incompatible. Si $a = 0$, queda el sistema

$$\begin{array}{rrrl} x & -y & +z & = 0 \\ 0x & +y & +z & = 1 \end{array}$$

en el que dándole a z el valor t se obtiene el conjunto de soluciones

$$z = t, \quad y = 1 - t, \quad x = 1 - 2t.$$

Luego el sistema es compatible indeterminado.

1.1.3. Sistemas homogéneos

El proceso que hemos desarrollado anteriormente es valido para todos los sistemas de ecuaciones lineales pero conviene mencionar un tipo especial de ellos: aquellos que tienen sus términos independioentes nulos:

$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +... & +a_{1n}x_n & =0 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +... & +a_{2n}x_n & =0 \\ ... \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +... & +a_{mn}x_n & =0 \end{array}$$

se les denomina sistemas homogéneos. La matriz del sistema tiene la última columna con todos sus elementos nulos. Para simplificar la notación, para estos sistemas, eliminaremos dicha columna:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Un sistema homogéneo siempre es compatible ya que admite como solución $x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0$. Una propiedad interesante de los sistemas homogéneos es que si dicho sistema tiene más incógnitas que ecuaciones $(n > m)$ es siempre indeterminado.

1.1.4. Problemas

Problema 1.1.5 *Discutir y resolver el siguiente sistema*

$$\begin{array}{rrrr} 2x & -5y & +4z & =-3 \\ x & -2y & +z & =5 \\ x & -4y & +6z & =10 \end{array}$$

Problema 1.1.6 *Aplicando el método de reducción estudiar y resolver los sistemas:*

(a).

$$\begin{array}{rrrr} x & +2y & -z & =1 \\ -3x & +y & -2z & =2 \\ -x & +5y & -4z & =-2 \end{array}$$

(b).

$$\begin{array}{rrrr} 2x & +4y & -z & =0 \\ x & -y & +4z & =0 \\ 11x & +7y & +17z & =0 \end{array}$$

Problema 1.1.7 *Aplicando el método de reducción discutir y resolver (cuando tenga solución única) el sistema:*

$$\begin{array}{rrrl} ax & +y & +z & = a \\ x & +ay & +z & = a^2 \\ x & +y & +az & = a^3 \end{array}$$

Problema 1.1.8 *Hallar los valores a, b que hacen compatible determinado al siguiente sistema:*

$$\begin{array}{rrl} (a+1)x & +2y & = a \\ x & -y & = 2 \\ bx & -4y & = 4 \end{array}$$

Problema 1.1.9 *Discutir y en su caso resolver el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro λ.*

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x & +y & +\lambda z & = 0 \\ -x & +\lambda y & -z & = 2 \\ x & -y & +z & = 0 \end{array} \right.$$

1.2. Espacios vectoriales.

A lo largo de la Matemática se encontraran muchos ejemplos de objetos matemáticos que pueden sumarse unos con otros y multiplicarse por números reales. Ante todo, los números reales son objetos de tal naturaleza. Otros ejemplos son:

$$\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

Sobre este conjunto podemos definir una suma de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lrcl} (+): & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) & \mapsto & (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \end{array}$$

Se puede definir en este conjunto una multiplicación con los reales de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lrcl} (.): & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (\lambda, (x, y)) & \mapsto & (\lambda x, \lambda y) \end{array}$$

Sobre el conjunto

$$\mathbb{R}^3 := \{(x, y, z) \ : \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

se pueden definir

$$\begin{array}{lrcl} (+): & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & ((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) & \mapsto & (x_1 + x_2, , y_1 + y_2, z_1 + z_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} (.): & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (\lambda, (x, y, z)) & \mapsto & (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \end{array}$$

Dado $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$, se entenderá por

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, ...x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R} \ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}\}$$

$$\begin{array}{lrcl} (+): & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & ((x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n)) & \mapsto & (x_1 + y_1, , x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} (.): & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (\lambda, (x_1, x_2, ..., x_n)) & \mapsto & (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) \end{array}$$

En todos los casos que hemos escrito arriba se puede verificar fácilmente que se cumplen las siguientes propiedades:

(i). la suma de dos elementos de $\mathbb{R}^n$ es un elemento del mismo conjunto.

(ii). El orden en que se suman dos elementos es indiferente (Propiedad conmutativa).

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (y_1, y_2, ..., y_n) + (x_1, x_2, ..., x_n).$$

(iii). Para sumar tres elementos podemos agrupar como queramos (Propiedad asociativa).

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + [(y_1, y_2, ..., y_n) + (z_1, z_2, ..., z_n)] =$$

$$[(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n)] + (z_1, z_2, ..., z_n).$$

(iv) Existencia de elemento neutro. El elemento $(0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ tiene la propiedad siguiente

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (0, 0, ..., 0) = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

(v). Existencia de elemento simétrico. Dado un elemento $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ podemos construir otro $(-x_1, -x_2, ..., -x_n)$ de forma que

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (-x_1, -x_2, ..., -x_n) = (0, 0, ..., 0).$$

(vi) Distributividad escalares vector. Dados $t, s \in \mathbb{R}$ y dado $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$(t+s)(x_1, x_2, ..., x_n) = t(x_1, x_2, ..., x_n) + s(x_1, x_2, ..., x_n).$$

(vii). Distributividad escalar vectores. Dado $t \in \mathbb{R}$ y dos elementos $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, se verifica:

$$t[(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n)] = t(x_1, x_2, ..., x_n) + t(y_1, y_2, ..., y_n).$$

(viii) Asociatividad escalares vector.

$$t[s(x_1, x_2, ..., x_n)] = (ts)(x_1, x_2, ..., x_n).$$

(ix). Estabilidad del escalar 1.

$$1(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

En esta sección trataremos un concepto matemático general, llamado espacio vectorial, que incluye todos los ejemplos anteriores y muchos otros.

Definición 1.2.1 *Un espacio vectorial real será un subconjunto no vacío, V sobre el cual se pueden definir una suma $(+)$ y un producto por números reales $(.)$ que cumplen las nueve propiedades anteriores.*

A los elementos de un espacio vectorial se les llama vectores.

Problema 1.2.2 *Probar que el conjunto formado por todas las funciones reales de variable real,i.e. $\mathcal{F} : \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ forman un espacio vectorial real. Si se define la suma como:*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

y el producto por un número real por

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

1.2.1. Subespacios vectoriales.

Algunos subconjuntos de un espacio vectorial mantienen esa misma estructura con las operaciones que heredan del conjunto.

Definición 1.2.3 *Sea $(V, +, .)$ un espacio vectorial real. Un subconjunto no vacio $H \subseteq V$ se llama subespacio vectorial de V siempre que $(H, +, .)$ cumpla las nueve condiciones de espacio vectorial.*

Teorema 1.2.4 (Teorema de caracterización) *Sea* $(V, +, .)$ *un espacio vectorial real y* H *un subconjunto no vacío de* V. H *es un subespacio vectorial si, y sólo si, dados dos números reales* $t, s \in \mathbb{R}$ *y dados dos vectores* $\mathbf{u},\ \mathbf{v} \in H$

$$t\mathbf{u} + s\mathbf{v} \in H.$$

Ejemplo 1.2.5 *Probar que el conjunto* $H := \{(0, x)\ :\ x \in \mathbb{R}\}$ *es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^2$.

En efecto, sean $t, s \in \mathbb{R}$ y $(0, x), (0, y) \in H$, entonces se tiene:

$$t(0, x) + s(0, y) = (0, tx + sy) \in H.$$

Ejemplo 1.2.6 *Probar que el conjunto* $H = \{(1, x)\ :\ x \in \mathbb{R}\}$ *no es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^2$.

En efecto, tomando $t = 2,\ s = 0$ y los vectores $(1, 1), (1, 0) \in H$ se tiene que

$$2(1, 1) + 0(1, 0) = (2, 2) \notin H.$$

Definición 1.2.7 *En un espacio vectorial* V *un vector* $\mathbf{v} \in V$ *es combinación lineal del conjunto de vectores* $\{\mathbf{u_1}, ..., \mathbf{u_m}\}$ *si podemos encontrar números reales* $t_1, ..., t_m$ *de forma que:*

$$\mathbf{v} = t_1\mathbf{u_1} + ... + t_m\mathbf{u_m} := \sum_{i=1}^{m} t_i\mathbf{u_i}.$$

Ejemplo 1.2.8 *El vector* $(2, 5)$ *es combinación lineal de los vectores* $\{(1, 0), (0, 1)\}$ *y del vector* $\{(4, 10)\}$.

En efecto, en el primer caso tenemos

$$(2, 5) = 2(1, 0) + 5(0, 1).$$

En el segundo caso,

$$(2, 5) = \frac{1}{2}(4, 10).$$

Desde las definiciones de subespacio vectorial y de combinación lineal se puede concluir que un espacio vectorial es cerrado para combinaciones lineales, i.e., las combinaciones lineales de elementos del subespacio son vectores del subespacio.

Definición 1.2.9 *Un conjunto de vectores* $\{\mathbf{u_1}, ..., \mathbf{u_n}\}$ *en* V *se llama libre o sus vectores son linealmente independientes si la única combinación lineal de ellos que nos de el cero (combinación que llamaremos nula), es aquella en la que todos los números reales que intervienen son cero. En caso contrario, diremos que el sistema es ligado o está formado por vectores linealmente dependientes.*

Ejemplo 1.2.10 *El sistema formado por los vectores* $\{(2,0),(3,0)\}$ *es un sistema ligado.*

En efecto si consideramos la igualdad:

$$(0,0) = x(2,0) + y(3,0)$$

nos queda la ecuación $2x + 3y = 0$ *que tiene varias soluciones, por ejemplo* $x = 3, y = -2$.

Ejemplo 1.2.11 *El sistema formado por los vectores* $\{(1,0),(0,1)\}$ *es un sistema libre.*

En efecto, si consideramos la igualdad $(0,0) = \lambda(1,0) + \beta(0,1)$, *se obtine que* $\lambda = 0$ *y* $\beta = 0$.

Definición 1.2.12 *Se llama rango de un conjunto de vectores al mayor número de vectores linealmente independientes que contenga.*

Ejemplo 1.2.13 *Calcular el rango de los vectores de* $\mathbb{R}^4$,

$$\{(1,2,1,1),(0,1,2,3),(1,3,3,2)\}$$

Veamos primero si los vectores son linealmente independientes:

$$(0,0,0,0) = x(1,2,1,1) + y(0,1,2,3) + z(1,3,3,2)$$

de aquí obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\begin{array}{rrrr} x+ & 0y & +z & = 0 \\ 2x & +y & +3z & = 0 \\ x & +2y & +3z & = 0 \\ x & +3y & 2z & = 0 \end{array}$$

Aplicando el método de reducción, sabiendo que es homogéneo, nos queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

multiplicando la primera fila por -2 y sumandola a la segunda, nos queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ahora restando a la tercera fila la primera, se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Haciendo lo mismo con la última fila, queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, multiplicando la segunda fila por -2 y sumandola a la tercera queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos ahora la segunda fila por -3 y la sumamos a la cuarta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Con lo que nos queda un sistema determinado, y esto nos dice que el rango es 3.

Definición 1.2.14 *Dado un conjunto de vectores* $\{\mathbf{u_1}, ..., \mathbf{u_n}\}$, *el conjunto de todas sus combinaciones lineales posibles es un subespacio vectorial (basta aplicar el teorema de caracterización) que se denomina envoltura lineal de dicho sistema. En tal caso denotaremos ese subespacio como*

$$\langle \{\mathbf{u_1}, ..., \mathbf{u_n}\} \rangle.$$

Se dice entonces que el conjunto de vectores es un sistema generador del subespacio.

Ejemplo 1.2.15 *El conjunto* $\{(1,0);(0,1)\}$ *genera todo* $\mathbb{R}^2$ *ya que se cumple:*

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$$

Ejemplo 1.2.16 *El conjunto* $\{(1,1);(1,2);(2,1)\}$ *genera a todo* $\mathbb{R}^2$ *ya que:*

$$(x,y) = 0(1,1) + \frac{2y-x}{3}(1,2) + \frac{2x-y}{3}(2,1)$$

Los dos ejemplos anteriores ponen de manifiesto que un sistema generador no es único, es decir, dos conjuntos distintos de vectores pueden generar el mismo subespacio.

Definición 1.2.17 *Un sistema de vectores que es a la vez sistema generador y libre se llama base del subespacio que genera.*

Además si el sistema que genera es todo el espacio vectorial, entonces se denomina base del espacio.

Teorema 1.2.18 *Todas las bases de un mismo espacio vectorial tienen el mismo número de vectores.*

Definición 1.2.19 *Al número de vectores de una base se le llama dimensión del espacio vectorial.*

Corolario 1.2.20 *Si un sistema libre tiene tantos vectores como indica su dimensión del espacio vectorial, entonces es una base.*

Ejemplo 1.2.21 *(i).* $\mathbb{R}$ *es de dimensión uno puesto que el conjunto* $\{1\}$ *es libre y además todo número real* t *se puede escribir como* t,1.

(ii) $\mathbb{R}^2$ *es de dimensión dos ya que el sistema* $\{(1,0),(0,1)\}$ *es una base.*

(iii) $\mathbb{R}^3$ *es de dimensión tres puesto que el conjunto* $\{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$ *es una base.*

(iv) $\mathbb{R}^n$ *es de dimensión* n *ya que si* $\mathbf{e_i}$ *es el vector cuyas componentes son todas cero salvo la i-ésima que vale* 1. *El conjunto* $\{\mathbf{e_1}, ..., \mathbf{e_n}\}$ *es una base. A dicha base se la llama canónica.*

Ajustar la siguiente reacción

$$HNO_3 + Cu \Rightarrow NO + CuN_2O_6 + H_2O$$

En esta reacción aparecen 4 elementos distintos de la tabla periódica. Con lo cual podemos pensar que estamos en un espacio vectorial de dimensión 4. Si identificamos cada uno de los elementos de la tabla con un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^4$, por ejemplo:

$$H = (1,0,0,0), \quad N = (0,1,0,0), \quad O = (0,0,1,0), \quad Cu = (0,0,0,1)$$

Ajustar la reacción sera encontrar números naturales (los menores posibles) de forma que:

$a[(1,0,0,0)+(0,1,0,0)+3(0,0,1,0)]+b(0,0,0,1) = c[(0,1,0,0)+(0,0,1,0)]+ d[(0,0,0,1) + 2(0,1,0,0) + 6(0,0,1,0)] + e[2(1,0,0,0) + (0,0,1,0)]$

Con lo cual nos queda la igualdad:

$$(a, a, 3a, b) = (2e, c + 2d, c + 6d + e, d)$$

De la expresión anterior obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{cccccc} a & & & & -2e & = 0 \\ a & & -c & -2d & & = 0 \\ 3a & & -c & -6d & -e & = 0 \\ & +b & & -d & & = 0 \end{array}$$

Si estudiamos este sistema de ecuaciones vemos que es compatible indeterminado y el conjunto de soluciones viene dado por:

$$\{d(\frac{8}{3}, 1, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}) \ : \ d \in \mathbb{R}\}$$

Como la solución que nos interesa debe estar formada por números naturales, dando el valor $d = 3$. obtenemos:

$a = 8, \ b = 3, \ c = 2$ y $e = 4$.

1.2.2. Problemas

Problema 1.2.22 *Estudia si los siguiente conjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales:*

(a). $H_1 = \{(1, x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$.

(b). $H_2 = \{(0, x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$.

(c). $H_3 = \{(x, x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$.

(d). $H_4 = \{(x, y, z) \ : \ x + y + z = 1\}$.
(e). $H_5 = \{(x, y, z) \ : \ x + y + z = 0\}$.

Problema 1.2.23 *En $\mathbb{R}^3$, comprobar si los sistemas siguientes están formados por vectores libres , hallando su relación de dependencia, si la hay:*
a). $S_1 = \{(1, 0, -2); (-1, 1, 3); (1, 2, 0)\}$.
b). $S_2 = \{(1, -1, 3); (0, -1, 2)\}$.
c) $S_3 = \{(0, 0, 0); (1, 1, 1); (2, 2, 2)\}$.

Problema 1.2.24 *Encontrar la dimensión y una base de los subespacios:*
(i). $E_1 = \{(x, y, z) \ : \ y = 0, \ z = -x\}$
(ii). $E_2 = \{(x, y, z) \ : \ x = 0\}$
(iii). $E_3 = \{(x, y, z) \ : \ x = y = 4z\}$
(iv). $E_4 = \{(x, y, z) \ : \ x + y - z = 0, \ x + y = 0, \ z = 0\}$.

Problema 1.2.25 *Hallar una base y la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores*

$$\{(1, -1, -1); (2, 0, -3); (-1, -3, 3)\}$$

Problema 1.2.26 *Ajustar las siguientes reacciones químicas:*
(a). $Pb(N_3)_2 + Cr(MnO_4)_2 \Rightarrow Cr_2O_3 + MnO_2 + Pb_3O_4 + NO$
(b). $C + O_2 \Rightarrow CO_2 + CO$
(c). $NaOH + HCl \Rightarrow NaCl + H_2O$
(d). $Na + H_2SO_4 \Rightarrow Na_2SO_4 + H_2$

1.3. Matrices y determinantes.

Definición 1.3.1 *Una matriz $m \times n$ es una disposición ordenada de $m.n$ números escritos en m filas y n columnas*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Cuando se escribe en general la matriz $M = (a_{ij})_{m \times n}$ el elemento a_{ij} es el número que aparece en la fila i y en la columna j. El conjunto de todas las matrices $m \times n$ se denota por $\mathcal{M}_{m \times n}$.

Sean $M = (a_{ij})$, $N = (b_{ij})$ dos matrices de $\mathcal{M}_{m \times n}$. Definimos la suma de matrices de la siguiente forma

$$M+N=(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})=\left(\begin{array}{cccc} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & ... & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & ... & a_{2n}+b_{2n} \\ ... & & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & ... & a_{mn}+b_{mn} \end{array}\right)$$

El producto de una matriz por un número real t se define como

$$tM=t(a_{ij})=(ta_{ij})=\left(\begin{array}{cccc} ta_{11} & ta_{12} & ... & ta_{1n} \\ ta_{21} & ta_{22} & ... & ta_{2n} \\ ... & & & \\ ta_{m1} & ta_{m2} & ... & ta_{mn} \end{array}\right)$$

Teorema 1.3.2 *$\mathcal{M}_{m\times n}$ es un espacio vectorial real.*

Problablemente la base más sencilla que podemos obtener en el espacio vectorial $\mathcal{M}_{m\times n}$ es aquella formada por las $m.n$ matrices que tienen como elementos un uno y el resto ceros. Por analogía con el caso de $\mathbb{R}^n$ a dicha base la llamaremos base canónica de $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Ejemplo 1.3.3 *La base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ está formada por las matrices:*

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

Consideremos ahora una matriz $M=(a_{ij})_{m\times n}\in\mathcal{M}_{m\times n}$ y otra matriz $N=(b_{ij})_{n\times p}\in\mathcal{M}_{n\times p}$ es decir que M tiene tantas columnas como filas tiene N. Definimos el producto $M.N$ de la siguiente forma:

$$M.N:=\left(\begin{array}{cccc} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2p} \\ ... & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & ... & c_{mp} \end{array}\right);\ c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},\ (1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq p)$$

Ejemplo 1.3.4 *Multiplicar las siguientes matrices*

$$M=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right),\ N=\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right)$$

Teniendo en cuenta la regla de multiplicación se tiene:

$$M.N = \begin{pmatrix} 1+0-1 & 0+3+1 \\ 0+0+1 & 0+2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En general el producto de matrices no es conmutativo, para verlo es suficiente considerar las dos matrices del ejemplo anterior y ver que no tiene sentido el producto $N.M$

1.3.1. Matrices cuadradas.

Una matriz se llama cuadrada si tiene el mismo número de filas que de columnas. El conjunto de las matrices $\mathcal{M}_{n\times n}$ se denota por $\mathcal{M}_n$. Las matrices cuadradas se pueden multiplicar entre ellas y el resultado sigue siendo una matriz del mismo tipo. Sin embargo, hay algunas diferencias entre el producto de matrices cuadradas y el producto de números, por ejemplo:

Ejemplo 1.3.5

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Otra diferencia con el producto de números es el hecho de que el producto de matrices cuadradas no es, en general, conmutativo.

Ejemplo 1.3.6

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Las matrices cuadradas $\mathcal{M}_n$ tienen elemento neutro respecto al producto, el cual viene dado por:

$$I_n = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

1.3.2. Matrices traspuestas, simétricas y antisimétricas.

Dada una matriz $M \in \mathcal{M}_{m\times n}$ se llama traspuesta a la matriz $M^t \in \mathcal{M}_{n\times m}$ resultante de cambiar las filas por las columnas en M.

Ejemplo 1.3.7 *Dada la matriz*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$M^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices que coinciden con su traspuesta se llaman *matrices simétricas*, mientras que aquellas que coinciden con la opuesta de su traspuesta se llaman *matrices antisimétricas.*

En una matriz se llama diagonal principal al conjunto de elementos de la forma a_{ii}. Una matriz cuyos elementos situados por encima o por debajo de la diagonal principal sean cero se llamará respectivamente matriz triangular superior o triangular inferior. Una matriz que sea, a la vez, triangular superior e inferior se llama matriz diagonal. Un ejemplo de matriz diagonal es I_n.

1.3.3. Determinantes

Los determinantes se refieren únicamente a las matrices cuadradas y su definición la daremos subiendo el orden de dichas matrices.

Para matrices cuadradas de orden 1, los números reales en realidad, el determinante será ese mismo número, esto es $det(a_{11}) = a_{11}$. Dada una matriz cuadrada de orden 2, $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, llamaremos determinante de la misma a

$$det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

El determinante de una matriz de orden tres, se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} =$$

$$a_{21}\Delta_{21} + a_{22}\Delta_{22} + a_{23}\Delta_{23} = a_{31}\Delta_{31} + a_{32}\Delta_{32} + a_{33}\Delta_{33}$$

donde Δ_{ij} es el producto de $(-1)^{i+j}$ por el determinante dos por dos resultante de quitar a la matriz anterior la fila i y la columna j.

Las igualdades se pueden comprobar fácilmente obteniendose:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Para matrices cuadradas de orden superior se define el determinante por recurrencia de la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\Delta_{kj}$$

Las propiedades fundamentales de los determinantes las reunimos en la siguiente proposición:

Proposición 1.3.8 *PD1. Si una matriz tiene todos los términos de una fila o de una columna iguales a cero su determinante es cero.*

PD2. Si los términos de una fila o de una columna de una matriz se multiplican por un mismo número el determinante de la matriz queda multiplicado por ese número.

PD3. Si intercambiamos dos filas (dos columnas) de un determinante éste cambia de signo.

PD4. Si a una matriz se le suma a una fila (rep. columna) el múltiplo de otra el determinante no varía.

PD5. $det(M) = det(M^t)$.

PD6. $det(A.B) = det(A).det(B)$.

Ejemplo 1.3.9 *Calcular el deterimante* $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

En vista de la proposición anterior se tendrá, por PD4, se multiplica la primera fila por 2 y se le suma a la segunda, entonces, $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

ahora multiplicamos la primera fila por -1 y el resultado lo sumamos a la tercera fila, por PD4, nos queda $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ Ahora aplicamos la misma propiedad y multiplicamos la primera fila por -2 y se la sumamos a la tercera, con lo cual nos quedará: $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

Ahora aplicando la definición de determinante, desarrollando por la primera columna, se tiene: $D = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

Este último determinante se puede calcular mediante la fórmula que hemos dado antes, pero de todas formas podemos seguir aplicando las propiedades y de este modo nos queda:

Ahora aplicamos PD3 e intercambiamos la primera y la segunda:
$D = - \begin{vmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -1 & 5 & -5 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix}$. Por PD4, sumamos a la segunda fila la primera:

$$D = - \begin{vmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -(-1)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -12$$

1.3.4. La inversa de una matriz.

Definición 1.3.10 *Dada una matriz cuadrada $M \in \mathcal{M}_n$ diremos que M tiene inversa si existe otra matriz $N \in \mathcal{M}_n$ de forma que $M.N = I_n$. A la matriz N la denotaremos por M^{-1} y la llamaremos matriz inversa de M.*

Proposición 1.3.11 *Una matriz $M \in \mathcal{M}_n$ tiene inversa si, y sólamente si, $det(M) \neq 0$.*

Dada una matriz cuadrada $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ llamaremos matriz adjunta de M a la matriz que se obtiene de M mediante la fórmula

$$Adj(M) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & ... & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & ... & \Delta_{2n} \\ ... & & & \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & ... & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

Teorema 1.3.12 *Sea M una matriz cuadrada con $det(M) \neq 0$, entonces $M^{-1} = \frac{1}{det(M)} Adj(A^t)$.*

Ejemplo 1.3.13 *Calcular la inversa, si tiene, de la matriz* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Primero estudiaremos su determinante, es claro que $det(M) = -2 \neq 0$. Luego podemos asegurar que existe M^{-1}.

Por otra parte, como la matriz M es simétrica se tendrá que $M = M^t$. Para calcular $Adj(M^t)$, obtenemos:

$$\Delta_{11} = -1,\ \Delta_{12} = -1,\ \Delta_{21} = -1,\ \Delta_{22} = 1.$$

Con lo cual

$$M^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1.3.5. Problemas

Problema 1.3.14 *Si* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$*, calcular $A^2 - 7A + 7I_2$.*

Problema 1.3.15 *Sea $A \in \mathcal{M}_n$ tal que $A^2 = A$. Si $B = 2A - I_n$, comprobar que $B^{-1} = B$.*

Problema 1.3.16 *Utilizando las propiedades de los determinantes, comprobar que el siguiente vale cero.*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

Problema 1.3.17 *Calcular, si existen, las inversas de las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.3.6. Sistemas de ecuaciones: Teoría matricial.

Si tenemos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & ...+ & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & ...+ & a_{2n}x_n & = b_2 \\ .... & & & & \\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+ & ...+ & a_{mn}x_n & = b_m \end{array}$$

Lo podemos escribir en forma matricial del siguiente modo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

Abreviadamente $M.X = B$. A la matriz M se le llama matriz del sistema, a la matriz X matriz de las incógnitas y a la matriz B matriz de los términos independientes.

Si $n = m$ es decir si el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas y $det(M) \neq 0$, entonces el sistema es compatible determinado y además la única solución viene dada por la fórmula:

$$x_i = \frac{1}{det(M)} \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ji} b_j \quad 1 \leq i \leq n.$$

Si analizamos el sumatorio anterior nos encontramos que es el desarrollo del determinante de la matriz M a la que se ha cambiado la columna i-ésima por la columna de los términos independientes. (Este método de resolución de sistemas se denomina **Regla de Cramer**).

Definición 1.3.18 *Dada una matriz $M \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Llamamos rango de M al orden de la mayor submatriz cuadrada con determinante no nulo.*

Teorema 1.3.19 (Rouché-Frobenius) *El sistema $M.X = B$ es compatible si, y sólo si, el rango de su matriz y el de la matriz ampliada coinciden. En tal caso es determinado si ese valor común coincide con el número de incógnitas, siendo indeterminado en otro caso.*

Corolario 1.3.20 *Un sistema homogéneo es determinado si el rango de su matriz coincide con el número de incógnitas e indeterminado en otro caso.*

1.3.7. Problemas

Problema 1.3.21 *Calcular el rango de las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Problema 1.3.22 *Discutir y resolver, utilizando la teoría matricial, el siguiente sistema*

$$\begin{array}{rrrl} 2x & -5y & +4z & = -3 \\ x & -2y & +z & = 5 \\ x & -4y & +6z & = 10 \end{array}$$

Problema 1.3.23 *Aplicando la teoría matricial estudiar y resolver los sistemas:*

(a).

$$\begin{array}{rrrl} x & +2y & -z & = 1 \\ -3x & +y & -2z & = 2 \\ -x & +5y & -4z & = -2 \end{array}$$

(b).

$$\begin{array}{rrrl} 2x & +4y & -z & = 0 \\ x & -y & +4z & = 0 \\ 11x & +7y & +17z & = 0 \end{array}$$

Problema 1.3.24 *Aplicando la teoría matricial discutir y resolver (cuando tenga solución única) el sistema:*

$$\begin{array}{rrrl} ax & +y & +z & = a \\ x & +ay & +z & = a^2 \\ x & +y & +az & = a^3 \end{array}$$

Problema 1.3.25 *Hallar los valores a, b que hacen compatible determinado al siguiente sistema:*

$$\begin{array}{rrl} (a+1)x & +2y & = a \\ x & -y & = 2 \\ bx & -4y & = 4 \end{array}$$

1.4. Aplicaciones lineales.

Las aplicaciones entre conjuntos nos permiten transformar un elemento de un conjunto en un elemento y sólo en uno de otro conjunto.

Definición 1.4.1 *Llamaremos aplicación lineal a una aplicación f entre dos espacios vectoriales V y W ($f : V \to W$) que cumpla:*
(L1). $f(u + v) = f(u) + f(v)$ para todo $u, v \in V$.
(L2). $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $u \in V$.

Se puede comprobar que las condiciones de la definición equivalen a:

$$f(\lambda u + \beta v) = \lambda f(u) + \beta f(v) \ \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} \text{ y } \ \forall u, v \in V.$$

Como consecuencia de la definicón de aplicación lineal se tiene:

Proposición 1.4.2 *Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal, entonces $f(0_V) = 0_W$.*

Ejemplo 1.4.3 *La aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x + 2y$ es lineal. En efecto,*

$$f(\lambda(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2)) =$$

$$f(\lambda x_1 + \beta x_2, \lambda y_1 + \beta y_2) = \lambda x_1 + \beta x_2 + 2(\lambda y_1 + \beta y_2) =$$

$$\lambda f(x_1, y_1) + \beta f(x_2, y_2).$$

Ejemplo 1.4.4 *La aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por*

$$f(x, y) = (1, x + 2y, y)$$

no es lineal. En efecto,

$$f((0, 0) = (1, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$$

Definición 1.4.5 *Dada una aplicación lineal $f : V \to W$. Llamaremos núcleo de f y lo denotaremos por $N(f)$ al conjunto de vectores de V cuya imagen sea 0_W, i.e.,*

$$N(f) := \{u \in V \ : \ f(u) = 0_W\}.$$

Ejemplo 1.4.6 *el núcleo de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x + 2y$ es:*

$$N(f) = \{(x, y) \;\; x + 2y = 0\} = \{(x, y) \;:\; x = -2y\} =$$

$$\{(-2y, y) \;\; y \in \mathbb{R}\} = \{y(-2, 1) \;\; y \in \mathbb{R}\} = \langle\{(-2, 1)\}\rangle$$

Teorema 1.4.7 *El núcleo de una aplicacón lineal $f : V \to W$ es un subespacio vectorial de V.*

Definición 1.4.8 *Dada una aplicación lineal $f : V \to W$ llamamos conjunto imagen de f y la denotamos por $f(V)$ al siguiente conjunto:*

$$f(V) := \{f(u) \;:\; u \in V\}.$$

Teorema 1.4.9 *Dada una aplicación lineal $f : V \to W$, $f(V)$ es un subespacio vectorial de W.*

Se llama rango de f a la dimensión de $f(V)$.

Teorema 1.4.10 (Teorema del rango) *Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal, entonces*

$$dim(V) = dim(N(f)) + dim(f(V))$$

donde $dim(K)$ significa dimensión del espacio vectorial K.

Definición 1.4.11 *Sean A, B dos conjuntos no vacíos. Una aplicación $f : A \to B$ se llama inyectiva si siempre que $f(x) = f(y)$ se tiene que $x = y$.*

La aplicación f se llama sobre o suprayectiva si $f(A) = B$.

La aplicación f se dice que es biyectiva si es inyectiva y suprayectiva.

Teorema 1.4.12 *Una aplicación lineal $f : V \to W$ es inyectiva si,y sólo si, $N(f) = \{0_V\}$.*

Una consecuencia del teorema del rango es que dada una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ para que sea biyectiva basta con probar sólo que es inyectiva o suprayectiva.

Ejemplo 1.4.13 *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (x + y + z, ax - y + z, 2x - y + az)$. Encontrar los valores de a para que f sea biyectiva.*

Como consecuencia del teorema del rango, sólamente tenemos que encontrar los valores de a para los cuales f sea inyectiva. Según hemos visto, f será inyectiva cuando $N(f) = \{(0,0,0)\}$.

Es decir, tenemos que estudiar cuando el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & =0 \\ ax & -y & +z & =0 \\ 2x & -y & +az & =0 \end{array}$$

es compatible determinado.

Según hemos visto antes, esto ocurrirá cuando la matriz del sistema tenga determinante no nulo.

Calculemos dicho determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix} = -a^2 - 2a + 5$$

Luego este determinante se anula cuando a es solución de la ecuación $-a^2 - 2a + 5 = 0$. Los valores de a que son solución de la ecuación anterior son $a = -1 + \sqrt{6}$ y $a = 1 - \sqrt{6}$.

Finalmente, se puede concluir que si a es distinto de los dos valores anteriores, entonces el determinante anterior será distinto de cero y por lo tanto la aplicación será inyectiva.

1.4.1. La matriz de una aplicación lineal.

Definición 1.4.14 *Dada una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Llamaremos matriz asociada a f a aquella $M_f = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ tal que*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Las siguientes son propiedades de la matriz asociada a la aplicación linea f

Proposición 1.4.15 *Las columnas de M_f son los transformados de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, i.e., $f(e_i) = (a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{mi})$*

El rango de la aplicación lineal y de su matriz asociada coinciden.

Ejemplo 1.4.16 *Calcular la matriz asociada a la aplicación lineal $f(x,y) = (y,x)$.*

Como $f(1,0) = (0,1)$ y $f(0,1) = (1,0)$ la matriz asociada será $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1.4.2. Composición de aplicaciones

Con aplicaciones se pueden realizar operaciones que nos generan nuevas aplicaciones. Así, por ejemplo si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ son sendas aplicaciones, se llama composición de ambas a la siguiente aplicación $h := g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$definida como $h(u) = g(f(u))$.

Cuando f y g son aplicaciones lineales se puede ver que su composición es también lineal.

Proposición 1.4.17 *Si f y g son aplicaciones lineales con M_f, M_g sus matrices asociadas respectivas, entonces la matriz asociada a su composición $M_{g\circ f} = M_g M_f$.*

Ejemplo 1.4.18 *Consideremos las aplicaciones lineales $f(x,y) = (x,y,x+y)$, $g(u,v,z) = (v,u,z)$. Es claro que se puede obtener la aplicación composición $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Para calcularla utilizamos sus matrices asociadas*

$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Con lo cual la matriz $M_{g\circ f}$ será*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Con lo cual $(g \circ f)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (y, x, x+y)$

1.4.3. Problemas

Problema 1.4.19 *Indicar cuales de las siguientes aplicaciones son lineales:*

(a) $f(x,y) = (2x,y)$.
(b). $g(x,y) = (x^2,y)$.
(c) $h(x,y) = (2x+y, x-y)$.

Problema 1.4.20 *Obtener una base del núcleo de la aplicación lineal $h(x,y) = (2x+y, x-y)$. ¿Qué dimensión tiene? ¿Cual es su rango?*

Problema 1.4.21 *Dada la aplicación* $f(x, y, z) = (x + y + z, x + y - z)$.
(c). Calcular $f(1, 2, 3)$ *y* $f(5, 0, 6)$.
(b). Demostrar que es lineal.
(c). Hallar su matriz asociada.

Problema 1.4.22 *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
(a) Hallar las ecuaciones de la aplicación lineal que A *define.*
(b) Hallar su núcleo y su rango.
(c) Clasificar la aplicación lineal.

Problema 1.4.23 *Sean* $f(x, y, z) = (x + y - z, x + 2y + 3z)$, $g(x, y) = (x + y, x - y, x, y)$. *Hallar las ecuaciones de la aplicación compuesta* $g \circ f$.

Problema 1.4.24 *Consideremos las siguientes aplicaciones* $f(x, y, z) = (3x - z, 2x - y), g(u, v) = (u - v, v, v + u)$.

1. *Obtener las matrices asociadas.*
2. *Probar que ambas aplicaciones son lineales.*
3. *Obtener la aplicación compuesta.*
4. *Calcular la matriz de la composición* $g \circ f$.

1.5. Diagonalización de Matrices.

Definición 1.5.1 *Dada una matriz cuadrada* $M \in \mathcal{M}_n$. *Llamaremos ecuación característica de dicha matriz a*

$$det(M - \lambda I_n) = 0.$$

Donde λ *es el número real incógnita.*

A los números reales que són solución de la ecuación característica se les denomina valores propios de M.

Ejemplo 1.5.2 *Los valores propios de la matriz* $M = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *se calcular resolviendo la siguiente ecuación:*

$$det\left(\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

Con lo cual los valores propios son -2 *y* 3.

Definición 1.5.3 *Para cada valor propio* λ *de una matriz* M *el conjunto de vectores propios asociados a* λ *es el núcleo de la aplicación lineal* $M-\lambda I_n$. *Esto es* $E_\lambda := N(M-\lambda I_n)$.

Ejemplo 1.5.4 *Calcular los vectores propios asociados a los valores propios correspondientes al ejemplo anterior.*

Consideremos el caso $\lambda = -2$ *buscamos el núcleo de* $M + 2I_2$ *es decir vectores* (x, y) *tales que*

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así pues, $E_{-2} = \{(x,y) \ : \ 3x+6y=0, \ x+2y=0\} = \langle\{(-2,1)\}\rangle$.

Consideremos ahora el caso $\lambda = 3$, *buscamos el núcleo de* $M - 3I_2$ *es decir los vectores* (x, y) *tales que*

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así pues, $E_3 = \{(x,y) \ : \ -2x+6y=0, \ x-3y=0\} = \langle\{(3,1)\}\rangle$.

Definición 1.5.5 *Una matriz cuadrada* A *se dice que es semejante a una matriz* B *si existe una matriz invertible* P, *llamada matriz de paso, tal que* $A = P^{-1}BP$.

Una matriz cuadrada se denomina diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal.

Teorema 1.5.6 *Una matriz* $A \in \mathcal{M}_n$ *es diagonalizable si, y sólo si, tiene* n *vectores propios linealmente independientes. En tal caso la matriz diagonal semejante* D *tiene en la diagonal los valores propios asociados a* A, *y* $D = P^{-1}AP$ *siendo la matriz de paso* P *la que tiene por columnas los vectores propios citados ordenados según hayamos puesto los valores propios.*

Corolario 1.5.7 *Toda matriz* $A \in \mathcal{M}_n$ *que tenga* n *valores propios reales distintos es diagonalizable.*

Teorema 1.5.8 *Para una matriz* $A \in \mathcal{M}_n$ *son equivalentes:*

(a) A *es diagonalizable.*

(b) Si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ *son los valores propios de* A, *entonces*

$$n = dim(E_{\lambda_1}) + ... + dim(E_{\lambda_p}).$$

Ejemplo 1.5.9 *La matriz* $M = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *es diagonalizable, ya que su orden es* 2 *y hemos visto que tiene dos valores propios distintos, además la matriz diagonal semejante será* $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *y la matriz de paso* $P = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Multiplicar un número grande de veces una matriz diagonalizable es razonablemente sencillo. Si A es una matriz diagonalizable D es una matriz diagonal semejante y P es su matriz de paso se tiene la fórmula

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Ejemplo 1.5.10 *Una población de una especie de insectos se reproduce de la siguiente forma: Si* x *es la cantidad de hembras e* y *es la cantidad de machos que hay en un momento dado, entonces el día siguiente hay* $2x + y$ *hembras e* y *machos. Si hoy hay* 10 *hembras y* 5 *machos ¿Cuantos individuos de cada sexo habrá dentro de 10 días?.*

La reproducción de esta especie de insectos sigue la siguiente regla de reproducción

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ : \ f(x, y) = (2x + y, y).$$

Evidentemente, nuestro objetivo es calcular $f^{10}(10, 5)$.

La matriz asociada a f la podemos escribir calculando $f(1, 0) = (2, 0),\ f(0, 1) = (1, 1)$, por lo tanto

$$M_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como la composición de aplicaciones lineales coincide con el producto de sus matrices asociadas, el problema se reduce a calcular:

$$M_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Para hacer el cálculo anterior veamos si M_f es diagonalizable. Para ello tenemos que obtener sus valores propios

$$0 = |M_f - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(1 - \lambda)$$

Como los valores propios son $\lambda = 1, 2$ la matriz es diagonalizable.

Calculemos ahora E_1 y E_2. Para $\lambda = 1$ tenemos que calcular los vectores (x, y) de forma que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego nos queda el sistema $x + y = 0$. Luego $E_1 = \langle (1, -1) \rangle$.

Para calcular E_2 tenemos que estudiar:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos que $E_2 = \langle (1, 0) \rangle$.

De esta forma obtenemos que una matriz diagonal semejante a M_f es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y para esta matriz semejante la matriz de paso será: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Finalmente, se tiene que

$$f^{10}(10, 5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

De donde se debe calcular:

$$f^{10}(10, 5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1024 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Con lo cual se desprende que $f^{10}(10, 5) = (15355, 5)$.

1.5.1. Problemas

Problema 1.5.11 *Estudiar si las siguientes matrices son diagonalizables y, en caso afirmativo, calcular la matriz de paso:*

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 1.5.12 *Estudiar si la siguiente matriz es diagonalizable y, en caso afirmativo, hallar la matriz de paso:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 1.5.13 *Siendo* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, *calcular la potencia* A^{10}.

Problema 1.5.14 *Hallar la potencia* 1000 *de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Problema 1.5.15 *Un individuo se desplaza, cada año, siguiendo la siguiente regla: Si un año su posición es* (x, y, z) *el año siguiente se muda a la posición* $(2x + y + z, x + 2y + z, x + y + z)$. *Determinar la posición que ocupará dentro de* 10 *años si sabemos que en el actual año está en* $(1, 1, 1)$.

Problema 1.5.16 *Para qué valores del parámetro* a *es diagonalizable la matriz* $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. *En el caso que* M *sea diagonalizable encontrar una matriz diagonal semejante y su matriz de paso.*

Problema 1.5.17 *Estudiar la diagonalización de la matriz* $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *según los valores de* a, b.

1.6. Resolución de los problemas

Problema 1.6.1 *Aplicando el método de reducción discutir y resolver (cuando tenga solución única) el sistema:*

$$\begin{array}{rrrl} ax & +y & +z & = a \\ x & +ay & +z & = a^2 \\ x & +y & +az & = a^3 \end{array}$$

Escribimos el sistema de ecuaciones en forma matricial, intercambiando de orden las filas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^3 \\ 1 & a & 1 & a^2 \\ a & 1 & 1 & a \end{array}\right)$$

Ahora, a la segunda fila le restamos la primera y a la tercera fila le restamos la primera multiplicada por a.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^3 \\ 0 & -(1-a) & 1-a & a^2(1-a) \\ 0 & 1-a & (1-a)(1+a) & a(1-a^3) \end{array}\right)$$

En este caso hacemos la primera consideración sobre los posibles valores del parámetro a.

Si $a = 1$, entonces el sistema equivalente que nos queda es:

$$x + y + z = 1,$$

es decir sólamente tenemos una ecuación, puesto que las otras son cero. Luego el sistema es compatible indeterminado y el conjunto de soluciones viene dado por:

si $x = \lambda$ e $y = \beta$, entonces $z = 1 - \lambda - \beta$.

Sigamos estudiando el sistema suponiendo que $a \neq 1$.

En este caso dividimos las dos últimas filas por $1 - a$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^3 \\ 0 & -1 & 1 & a^2 \\ 0 & 1 & 1+a & a(a^2+a+1) \end{array}\right)$$

Seguidamente sustituimos la tercera fila por la suma de la segunda y la tercera, con lo que nos queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^3 \\ 0 & -1 & 1 & a^2 \\ 0 & 0 & 2+a & a^3+2a^2+a \end{array}\right)$$

Estudiando el sistema que nos ha quedado, se obtiene:

Si $a = -2$ el sistema es incompatible.

Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado.

Problema 1.6.2 *Aplicando el método de reducción discutir y resolver (cuando tenga solución única) el sistema:*

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 2x & +y & +az & = 1 \\ x & -y & -z & = 2 \\ 5x & +y & +z & = 0 \end{array}\right.$$

Escribimos el sistema de ecuaciones en forma matricial, intercambiando de orden las filas:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$

Ahora, a la segunda fila le restamos la primera multiplicada por 5 y a la tercera fila le restamos la primera multiplicada por 2.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 6 & -10 \\ 0 & 3 & a+2 & -3 \end{array}\right)$$

Ahora, intercambiamos el orden de la segunda y la tercera fila:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & a+2 & -3 \\ 0 & 6 & 6 & -10 \end{array}\right)$$

Multiplicamos la segunda fila por -2 y el resultado se lo sumamos a la tercera fila

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & a+2 & -3 \\ 0 & 0 & 2-2a & -4 \end{array}\right)$$

Si multiplicamos la tercera fila por $\frac{1}{2}$ nos queda:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & a+2 & -3 \\ 0 & 0 & 1-a & -2 \end{array}\right)$$

En este caso hacemos la primera consideración sobre los posibles valores del parámetro a.

Si $a = 1$, entonces el sistema equivalente que nos queda es incompatible puesto que la última ecuación no tiene sentido.

Sigamos estudiando el sistema suponiendo que $a \neq 1$. En este caso el sistema es compatible determinado ya que la solución vendrá dada por $z = \frac{-2}{1-a}$, ahora de la segunda ecuación obtenemos el valor de y. Finalmente de la primera ecuación sacaremos el valor de x.

Problema 1.6.3 *En $\mathbb{R}^3$, comprobar si los sistemas siguientes están formados por vectores libres , hallando su relación de dependencia, si la hay:*
a). $S_1 = \{(1,0,-2);(-1,1,3);(1,2,0)\}$.
b). $S_2 = \{(1,-1,3);(0,-1,2)\}$.
c) $S_3 = \{(0,0,0);(1,1,1);(2,2,2)\}$.

(a) En este caso nos tenemos que plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(0,0,0) = x(1,0,-2)+y(-1,1,3)+z(1,2,0) = (x-y+z, y+2z, -2x+3y).$$

Igualando coordenada a coordenada, podemos escribir el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & -y & +z & =0 \\ 0x & +y & +2z & =0 \\ -2x & +3y & 0z & =0 \end{array}\right.$$

Ahora, aplicamos para la resolución el método de reducción:
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Multiplicando la primera fila por 2 y sumándosela a la tercera fila queda la matriz: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. De donde se deduce que el sistema equivalente que nos queda sólamente tiene dos ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & -y & +z & =0 \\ 0x & +y & +2z & =0 \end{array}\right.$$

Luego el sistema es compatible indeterminado y por lo tanto el sistema de vectores es ligado.

Las soluciones del sistema son de la forma: para cada valor de z se tiene que $y = -2z$ y $x = -3z$.

En particular, tomando $z = -1$, se tiene que $(1,2,0) = 3(1,0,-2) + 2(-1,1,3)$.

(b). En este caso se debe plantear el sistema

$$(0,0,0) = x(1,-1,3) + y(0,-1,2) = (x, -x-y, 3x+2y).$$

Igualando coordenada a coordenada queda:

$$x = 0, \quad x + y = 0, \quad 3x + 2y = 0.$$

Claramente se observa que los únicos valores para x e y que verifican las ecuaciones anteriores son $x = 0$ e $y = 0$. Luego el sistema es libre.

(c) Como la familia de vectores contiene al vector $(0, 0, 0)$ claramente esta familia es ligada ya que para cualquier $\lambda \neq 0$ se tiene que

$$(0, 0, 0) = \lambda(0, 0, 0) + 0(1, 1, 1) + 0(2, 2, 2).$$

En este caso concreto, aunque no estuviese el vector nulo, la familia seguiría siendo ligada ya que $(2, 2, 2) = 2(1, 1, 1)$.

Problema 1.6.4 *Hallar una base y la dimensión del subespacio de* $\mathbb{R}^3$ *generado por los vectores*

$$\{(1, -1, -1); (2, 0, -3); (-1, -3, 3)\}$$

Si consideramos el subespacio vectorial generado por la familia

$$\{(1, -1, -1); (2, 0, -3); (-1, -3, 3)\},$$

para obtener una base debemos estudiar si dicha familia está formada por vectores linealmente independientes. Para este estudio nos planteamos la siguiente ecuación vectorial:

$$(0, 0, 0) = x(1, -1, -1) + y(2, 0, -3) + z(-1, -3, 3) = (x+2y-z, -x-3z, -x-3y+3z).$$

Luego lo que tenemos que estudiar es el carácter del sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x & +2y & -z & = 0 \\ -x & +0y & -3z & = 0 \\ -x & -3y & 3z & = 0 \end{array} \right.$$

Si estudiamos este sistema por el método de reducción nos queda:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. Si ahora intercambiamos la segunda fila por la tercera y después la segunda fila la multiplicamos por (-1) y el resultado se lo sumamos a la tercera fila, nos queda:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$. Ahora, si le sumamos a la segunda fila la primera, obtenemos: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$. Finalmente si multiplicamos la segunda fila

por 3 y el resultado se lo sumamos a la tercera fila, tenemos: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Esto nos permite afirmar que un sistema equivalente es:

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x & +2y & -z & = 0 \\ 0x & -y & +2z & = 0 \end{array} \right.$$

Por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado lo que nos dice que el sistema de vectores es ligado. Además, tomando $z = \lambda$ una solución de dicho sistema será: $y = 2\lambda$, $x = -3\lambda$.

Tomando $\lambda = -1$, podemos concluir que

$$(-1, -3, 3) = 3(1, -1, 1) - 2(2, 0, -3).$$

Esto quiere decir que el sistema formado por los vectores $\{(1, -1, 1); (2, 0, -3)\}$ es sistema generador del subespacio que estamos estudiando. Como además este sistema es libre, entonces es una base, lo cual quiere decir que la dimensión de dicho subespacio es 2.

Problema 1.6.5 *Ajustar la siguiente reacción química*

$$NaOH + HCl \Rightarrow NaCl + H_2O$$

Para ajustar la reacción tenemos que encontrar números racionales x, y, z, u de forma que

$$xNaOH + yHCl \Rightarrow zNaCl + uH_2O$$

quede totalmente ajustada. Como en la reacción aparecen cuatro elementos, podemos considerar que nos encontramos en el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, e identificamos a cada elemento de la reacción con un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^4$. De este modo, hacemos

$$Na = (1, 0, 0, 0),\ O = (0, 1, 0, 0),\ H = (0, 0, 1, 0),\ Cl = (0, 0, 0, 1).$$

Con lo cual se debe cumplir que

$$x[(1, 0, 0, 0) + (0, 1, 0, 0 + (0, 0, 1, 0)] + y[(0, 0, 1, 0) + (0, 0, 0, 1)] =$$

$$z[(1, 0, 0, 0) + (0, 0, 0, 1)] + u[2(0, 0, 1, 0) + (0, 1, 0, 0)],$$

operando, queda

$$(x, x, x, 0) + (0, 0, y, y) = (z, 0, 0, z) + (0, u, 2u, 0).$$

Igualando coordenada a coordenada se tiene el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrl} x & -z & = 0 \\ x & -u & = 0 \\ x + y & -2u & = 0 \\ y & -z & = 0 \end{array} \right.$$

Evidentemente el sistema es compatible indeterminado y tomando como parámetro z las soluciones son: $x = y = u = z$. Con lo cual, el conjunto de soluciones es:

$$S = \{(z, z, z, z) \ : \ z \in \mathbb{R}\} = \{z(1, 1, 1, 1) \ : \ z \in \mathbb{R}\} = \langle \{(1, 1, 1, 1)\} \rangle.$$

Problema 1.6.6 *Ajustar la reacción química*

$$Pb(N_3)_2 + Cr(MnO_4)_2 \Rightarrow Cr_2O_3 + MnO_2 + Pb_3O_4 + NO$$

Si deseamos ajustar la reacción tenemos que encontrar números a, b, c, d, e, f tales que

$$aPb(N_3)_2 + bCr(MnO_4)_2 \Rightarrow cCr_2O_3 + dMnO_2 + ePb_3O_4 + fNO$$

quede totalmente equilibrada. Como en la reacción aparecen cinco elementos asignaremos a cada uno de ellos un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^5$, a saber

$$Pb = (1, 0, 0, 0, 0), \ N = (0, 1, 0, 0, 0),$$

$$Cr = (0, 0, 1, 0, 0), \ Mn = (0, 0, 0, 1, 0), \ O = (0, 0, 0, 0, 1).$$

El orden, obviamente no es importante. De la reacción equilibrada se deduce:

$$a(1, 6, 000) + b(0, 0, 1, 2, 8) =$$

$$c(0, 0, 2, 0, 3) + d(0, 0, 0, 1, 2) + e(3, 0, 0, 0, 4) + f(0, 1, 0, 0, 1)$$

de donde nos queda el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} a & = & 3e \\ 6a & = & f \\ b & = & 2c \\ 2b & = & d \\ 8b & = & 3c + 2d + 4e + f \end{array} \right.$$

El cual podemos simplificar tomando una incognita como parámetro, por ejemplo a, y quedándonos con las tres últimas incognitas

$$\left\{\begin{array}{rcr} b-2c & = & 0 \\ 2b-d & = & 0 \\ 8b-3c-2d & = & \frac{22}{3}a \end{array}\right.$$

Para resolverlo aplicamos el método de Gauss-Jordan (usamos el orden (b, c, d)).

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & -3 & -2 & \frac{22}{3}a \end{array}\right)$$

Que pasando al orden (d, b, c), nos queda:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & -3 & \frac{22}{3}a \end{array}\right)$$

Intercambiando las dos primeras filas

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -3 & \frac{22}{3}a \end{array}\right)$$

Multipicando la primera fila por (-1) queda

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -3 & \frac{22}{3}a \end{array}\right)$$

Multiplicamos la primera fila por 2 y se la sumamos a la tercera fila, así queda:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & \frac{22}{3}a \end{array}\right)$$

Finalmente, multiplicando la segunda fila por (-4) y sumándosela a la tercera fila, queda:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \frac{22}{3}a \end{array}\right)$$

De donde obtenemos que las soluciones son:

$$\{(a, \frac{44}{15}a, \frac{22}{15}a, \frac{88}{15}a, \frac{1}{3}a, 6a) \ : \ a \in \mathbb{R}\}.$$

Es decir es el siguiente subespacio

$$\langle\{(1, \frac{44}{15}, \frac{22}{15}, \frac{88}{15},, \frac{1}{3}, 6)\}\rangle.$$

Si queremos ajustar la reacción con números naturales, es suficiente tomar:

$$a = 15, \ b = 44, \ c = 22, \ d = 88, \ e = 5, \ f = 90.$$

Problema 1.6.7 *Encontrar la dimensión y una base del subespacio*

$$E_4 = \{(x, y, z) \ : \ x + y - z = 0, \ x + y = 0, \ z = 0\}$$

Teniendo presente que los vectores de E_4 han de tener la tercera coordenada nula nos queda:

$$E_4 = \{(x, y, 0) \ : \ x + y = 0\}$$

La relación $x + y = 0$ nos dice que la primera y la segunda coordenada de los vectores de E_4 es la misma cambiada de signo, i.e., $y = -x$, con lo cual

$$E_4 = \{(x, -x, 0) \ : \ x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, -1, 0) \ : \ x \in \mathbb{R}\}$$

Esto significa que E_4 está formado por todas las combinaciones lineales que se pueden hacer con el vector $(1, -1, 0)$. Por lo tanto,

$$E_4 = \langle\{(1, -1, 0)\}\rangle.$$

Es decir $\{(1, -1, 0)\}$ es un sistema generador de E_4, además como todo vector no nulo es un sistema libre, se tiene que $\{(1, -1, 0)\}$ es una base de E_4.

Por otra parte, como la dimensión de un subespacio vectorial es el número de vectores que aparecen en una de sus bases, queda claro que $dim(E_4) = 1$.

Problema 1.6.8 *Sea* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. *Calcular* $A^2 - 7A + 7I_2$

Teniendo presente la multiplicación de matrices se tiene que:
$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 & 2+5 \\ 6+15 & 3+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 21 & 28 \end{pmatrix}$.
Por lo tanto,
$A^2 - 7A + 7I_2 = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 21 & 28 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 21 & 28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 & -7 \\ -21 & -35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 21 & 28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & -7 \\ -21 & -28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 1.6.9 *Utilizando las propiedades de los determinantes calcular la inversa de la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos primero cuanto vale el determinante de la matriz:
Aplicando la propiedad PD4, le restamos a la segunda fila la primera, así queda

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ahora desarrollando por la primera columna nos queda que el determinante en cuestión es

$$2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

Como el determinante es distinto de cero, sabemos que se puede calcular su matriz inversa y que ésta responde a la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A^t).$$

Calculemos la traspuesta: $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Para calcular la adjunta de A^t tenemos:

$$A_{11} = 0,\ A_{12} = -2,\ A_{13} = 4,\ A_{21} = -2,$$

$$A_{22} = 2,\ A_{23} = -6,\ A_{31} = 2,\ A_{32} = -2,\ A_{33} = 2.$$

Por lo tanto la matriz inversa será:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Problema 1.6.10 *Utilizando las propiedades de los determinantes, comprobar que el siguiente vale cero.*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

Teniendo presente las propiedades de los determinantes. Multiplicamos la primera fila por (-1) y se la sumamos a la segunda fila, entonces queda

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 0 & b-a & a-b \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

Ahora, multiplicamos la primera fila por (-1) y se la sumamos a la tercera fila, con lo cual

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 0 & b-a & a-b \\ 0 & c-a & a-c \end{vmatrix}$$

Como la segunda fila está multiplicada por $(b-a)$ y la tercera por $(c-a)$ nos queda que

$$D = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Finalmente, multiplicando la segunda fila por (-1) y sumandosela a la tercera, se tiene

$$D = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Problema 1.6.11 *Sean $f(x, y, z) = (x + y - z, x + 2y + 3z)$, $g(x, y) = (x + y, x - y, x, y)$. Hallar las ecuaciones de la aplicación compuesta $g \circ f$.*

Primero lo haremos utilizando la definición de composición de aplicaciones:

$$(g \circ f)(x,y,z) = g\left(f(x,y,z)\right) = g\left(x+y-z, x+2y+3z\right) =$$

$$(x+y-z+x+2y+3z, x+y-z-(x+2y+3z), x+y-z, x+2y+3z) =$$

$$(2x+3y+2z, -y-4z, x+y-z, x+2y+3z)$$

Ahora, lo haremos utilizando la expresión matricial de las aplicaciones lineales.

Como f es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$, calculamos la imagen, mediante f, de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Nos queda:

$$f(1,0,0) = (1,1),\ f(0,1,0) = (1,2),\ f(0,0,1) = (-1,3),$$

con lo cual la matriz asocada a f será:

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, como $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, calculamos la imagen, mediante g, de la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Así

$$g(1,0) = (1,1,1,0),\ g(0,1) = (1,-1,0,1),$$

de donde se tiene que

$$M_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por las propiedades de las dos aplicaciones, sabemos que la aplicación $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. Además, su matriz asociada será:

$$M_{g\circ f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ahora haciendo la siguiente operación:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y+2z \\ -y-4z \\ x+y-z \\ x+2y+3z \end{pmatrix}$$

Se tiene que
$h(x,y,z) = (2x+3y+2z, -y-4z, x+y-z, x+2y+3z)$.

Problema 1.6.12 *Consideremos las siguientes aplicaciones* $f(x,y,z) = (3x-z, 2x-y), g(u,v) = (u-v, v, v+u)$.

1. *Obtener las matrices asociadas.*
2. *Probar que ambas aplicaciones son lineales.*
3. *Obtener la aplicación compuesta.*
4. *Calcular la matriz de la composición* $g \circ f$.

(1) Para obtener la matriz asociada a la aplicación f tenemos que calcular:

$$f(1,0,0) = (3,2),\ f(0,1,0) = (0,-1),\ f(0,0,1) = (-1,0).$$

Una vez tenemos las imagenes de la base canónica, la matriz asociada viene dada por:

$$M_f = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, calculando la imagen, mediante g, de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ obtendremos la matriz asociada a g.

Como $g(1,0) = (1,0,1)$ y $g(0,1) = (-1,1,1)$. Se tiene que

$$M_g = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2). Para comprobar que las aplicaciones anteriores son lineales será suficiente con ver que:

$$f(x,y,z) = \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right]^t = (3x-z, 2x-y)$$

$$g(u,v)=\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right]^t=(u-v,v,v+u).$$

(3) La aplicación compuesta se define de la siguiente forma:

$$(g\circ f)(x,y,z)=g(3x-z,2x-y)=(x+y-z,2x-y,5x-y-z).$$

(4) La matriz de la composición se puede obtener de dos formas:
La primera forma es haciendolo directamente. De este modo tendremos que como $(g\circ f)(1,0,0)=(1,2,5)$, $(g\circ f)(0,1,0)=(1,-1,-1)$, $(g\circ f)(0,0,1)=(-1,0,-1)$. La matriz asociada viene dada por

$$M_{(g\circ f)}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La otra forma de obtener la matriz asociada es multiplicando las matrices:

$$M_{(g\circ f)}=M_gM_f=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Problema 1.6.13 *Estudiar si la siguiente matriz es diagonalizable y, en caso afirmativo, hallar su matriz de paso:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lo primero que tenemos que hacer es calcular los valores propios de la matriz. Para ello resolvemos la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 4 \\ -1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Resolviendo el determinante nos queda:

$$-\lambda^3+3\lambda^2+\lambda-3=0$$

Las raices de esta ecuación son:

$$\lambda = 1,\ \lambda = -1\ \lambda = 3.$$

Como la matriz es de orden 3 y hay tres valores propios distintos entonces, la matriz es diagonalizable.

Para calcular la matriz de paso tenemos que obtener los subespacios de vectores propios asociados a cada uno de los valores propios.

$$E_1 := \{(x, y, z) :\ x + y + z = 0,\ 2x + 2y + 4z = 0,\ -x - y - 3z = 0\}$$

Resolviendo el sistema, queda que

$$E_1 = \{(x, y, z) :\ z = 0, y = -x\} = \langle\{(1, -1, 0)\}\rangle.$$

$$E_{-1} = \{(x, y, z) :\ 3x + y + z = 0,\ 2x + 4y + 4z = 0,\ -x - y - z = 0\}$$

Resolviendo el sistema queda:

$$E_{-1} = \{(x, y, z) :\ x = 0, z = -y\} = \langle\{(0, 1, -1)\}\rangle.$$

Finalmente,

$$E_3 = \{(x, y, z) :\ -x + y + z = 0,\ 2x + 4z = 0,\ -x - y - 5z = 0\}$$

Resolviendo queda que

$$E_3 = \{(x, y, z) :\ y = -3z,\ x = -2z\} = \langle\{(-2, -3, 1)\}\rangle.$$

Con lo cual si tomamos como matriz diagonal semejante la siguiente:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

entonces la matriz de paso será:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 1.6.14 *Un individuo se desplaza, cada año, siguiendo la siguiente regla: Si un año su posición es* (x, y, z) *el año siguiente se muda a la posición* $(2x+y+z, x+2y+z, x+y+z)$. *Determinar la posición que ocupará dentro de* 10 *años si sabemos que en el actual año está en* $(1, 1, 1)$.

La regla de desplazamiento viene dada por la aplicación lineal:

$$f(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + z)$$

Queremos calcular $f^{10}(1, 1, 1)$.

Como f es lineal, calculamos la matriz asociada a f.

$$f(1, 0, 0) = (2, 1, 1),\ f(0, 1, 0) = (1, 2, 1),\ f(0, 0, 1) = (1, 1, 1).$$

Así su matriz asociada será:

$$M_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Teniendo presente la relación entre la composición de aplicaciones lineales y el producto de sus matrices asociadas, tenemos que calcular:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Veamos que M_f es diagonalizable.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 1)$$

Por lo tanto los valores propios de la matriz M_f serán las soluciones de la ecuación: $(1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$. Las soluciones son: $\lambda = 1,\ \lambda = 2 - \sqrt{3},\ \lambda = 2 + \sqrt{3}$.

Como la matriz tiene tres valores propios distintos dos a dos será diagonalizable. Ahora solo nos falta calcular la matriz de paso.

Los vectores propios asociados a $\lambda = 1$ se obtienen:

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De donde nos queda el sistema:

$$\begin{array}{cccc} x & +y & +z & = & 0 \\ x & +y & +z & = & 0 \\ x & +y & 0z & = & 0 \end{array}$$

Las soluciones del sistema son: $E_1 = \langle\{(1,-1,0)\}\rangle$.

Los vectores propios asociados a $\lambda = 2-\sqrt{3}$ se obtienen:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 \\ 1 & 1 & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De donde nos queda el sistema:

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt{3}x & +y & +z & = & 0 \\ x & +\sqrt{3}y & +z & = & 0 \\ x & +y & +(\sqrt{3}-1)z & = & 0 \end{array}$$

Las soluciones del sistema anterior son: a $E_{2-\sqrt{3}} = \langle\{(1,1,\frac{-2}{\sqrt{3}-1})\}\rangle$

Los vectores propios asociados a $\lambda = 2+\sqrt{3}$ se obtienen:

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 1 & -1-\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De donde nos queda el sistema:

$$\begin{array}{ccccc} -\sqrt{3}x & +y & +z & = & 0 \\ x & -\sqrt{3}y & +z & = & 0 \\ x & +y & +(-\sqrt{3}-1)z & = & 0 \end{array}$$

Las soluciones del sistema anterior son: a $E_{2+\sqrt{3}} = \langle\{(1,1,\frac{2}{\sqrt{3}+1})\}\rangle$

Con lo cual se tiene que una matriz diagonal semejante es:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

y para dicha matriz, la matriz de paso viene dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{3}-1} & \frac{2}{\sqrt{3}+1} \end{pmatrix}.$$

Si calculamos P^{-1} nos queda:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3-\sqrt{3}}{12} & \frac{3-\sqrt{3}}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{12} & \frac{3+\sqrt{3}}{12} & \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$$

Finalmente, el problema quedará resuelto haciendo

$$f^{10}(1,1,1) = PD^{10}P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 1.6.15 *Calcular* A^{1000} *siendo*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación característica:

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-4)$$

Lo que nos dice que los valores propios son $\lambda = 1$, y $\lambda = 4$.

Calculemos los vectores propios asociados a los valores propios:

$$E_1 = \{(x,y,z): \ z = -y - x\} = \langle\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}\rangle$$

$$E_4 = \{(x,y,z): \ x = y = z\} = \langle\{(1,1,1)\}\rangle.$$

Como se cumple que $dim(E_1) + dim(E_4) = 3$, entonces la matriz es diagonalizable.

Podemos considerar como matriz diagonal semejante $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

y como matriz de paso $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Por lo tanto, $A^{1000} = PD^{1000}P^{-}1$.

Calculemos P^{-1}. Lo primero que tenemos que hacer es obtener el determinante de P :

$$det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Luego, $P^{-1} = \frac{1}{3}adj(P^t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Problema 1.6.16 *Estudiar la diagonalización de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

según los valores de a, b.

Primero estudiamos los valores propios asociados. Para ello calculamos la ecuación característica:

$$0 = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda)$$

Las soluciones de dicha ecuación son: $\lambda = a,\ \lambda = -1,\ \lambda = 1$. Por lo tanto, si $a \neq \pm 1$ como la matriz A tendrá tres valores propios distintos dos a dos y además es de orden tres, dicha matriz será diagonalizable.

Estudiemos ahora lo que ocurre cuando $a = \pm 1$.

Si $a = 1$, los valores propios de la matriz son $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$. Para ver si A es diagonalizable tenemos que estudiar los subespacios de los vectores propios asociados:

$E_1 = \{(x,y,z) : \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \{(x,y,z) :\ by = 0,\ -2y = 0\}$

Esto significa que $E_1 = \langle\{(1,0,0),(0,0,1)\}\rangle$, y por lo tanto $dim(E_1) = 2$.

No es dificil comprobar que $E_1 = \langle\{(\frac{-b}{2},1,0)\}\rangle$, con lo cual $dim(E_{-1}) = 1$

Como $dim(E_1) + dim(E_{-1}) = 3$ se tiene que A es diagonalizable independientemente del valor de b.

Finalmente, estudiemos que pasa cuando $a = -1$. En este caso los valores propios de la matriz siguen siendo $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$. Para ver si A es diagonalizable tenemos que estudiar los subespacios de los vectores propios asociados:

$$E_1 = \{(x,y,z) : \begin{pmatrix} -2 & b & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} = \langle \{(0,0,1)\} \rangle.$$

$$E_{-1} = \{(x,y,z) : \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} = \{(x,y,z) : \; by = 0, \; z = 0\}$$

Con lo cual si $b \neq 0$, entonces $E_1 = \langle \{(1,0,0)\} \rangle$. Lo que nos dice que $dim(E_1) + dim(E_{-1}) = 2 < 3$. Es decir, la matriz A no es diagonalizable

Si $b = 0$, entonces $E_{-1} = \langle \{(1,0,0),(0,1,0)\} \rangle$. Y por lo tanto A es diagonalizable.

Como conclusión podemos afirmar que A es diagonalizable salvo en los casos en que $a = -1$ y $b \neq 0$.

Capítulo 2

Cálculo diferencial

2.1. Sistemas de coordenadas en el plano.

2.1.1. Coordenadas cartesianas

Un punto de un plano se representa en un sistema de coordenadas cartesianas refiriendo su posición a un par de rectas perpendiculares (a la horizontal la llamaremos eje de abcisas y a la vertical eje de ordenadas). De este modo, al punto intersección de las dos rectas se le llama origen de coordenadas y se suele representar numéricamente como $O = (0, 0)$.

Dado un punto P en dicho plano, para calcular sus coordenadas cartesianas se calcula la distancia de dicho punto a la recta vertical, digamos que vale x, y su distancia a la recta horizontal, digamos y. Si el punto P está en el primer cuadrante sus coordenadas cartesianas serán $P = (x, y)$. Si el punto P está en el segundo cuadrante $P = (-x, y)$. Si está en el tercero $P = (-x, -y)$ y si está en el cuarto $P = (x, -y)$.

Como consecuencia de lo descrito en el párrafo anterior un plano se puede identificar a todos los efectos con $\mathbb{R}^2$, ya que a un punto del plano le hacemos corresponder un vector de $\mathbb{R}^2$, y sólo uno.

Definición 2.1.1 *Dados dos puntos del plano en coordenadas cartesianas $P(x_0, y_0)$ y $Q(x_1, y_1)$. Llamaremos distancia euclideana entre estos dos puntos a:*

$$dist(P, Q) := +\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

Teniendo en cuenta lo anterior describimos, mediante ecuaciones, algunos subconjuntos del plano:

Una recta que no sea paralela al eje de ordenadas será:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = ax + b\}.$$

Las rectas paralelas al eje de ordenadas son

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = a\}.$$

Una parábola es el lugar geométrico de los puntos que verifica la ecuación

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = ax^2 + bx + c\}.$$

Si $a > 0$ la parábola está abierta hacia arriba y si $a < 0$ está abierta hacia abajo.

La circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio $r > 0$ es el lugar geométrico del palno que dista del centro una cantidad fija r, i.e.,

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}.$$

La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. Los puntos fijos se llaman focos. Sin embargo, la manera estándar de representar una elipse centrada en (x_0, y_0) y de semiejes $a > 0$, $b > 0$ es

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1\}.$$

2.1.2. Coordenadas polares

La forma cartesiana de representar un punto de un plano no es única.

Un sistema de coordenadas polares viene definido por un punto fijo O, llamado polo y una semirrecta con origen en O, que se llama semieje polar, y que habitualmente coincide con la parte positiva del eje de abcisas (de hecho nosotros siempre lo tomaremos así). Cada punto del plano se representa por un par ordenado $P(r, \theta)$ donde:

1. r es la distancia del punto P al polo.

1. θ es un ángulo . Es el ángulo (en radianes) que forman el semieje polar con la semirecta que pasa por los puntos O y P si P está por encima del semieje polar y 2π menos el ángulo que forman si está por abajo.

A los números (r, θ) se les denomina coordenadas polares de P.

La relación entre coordenadas cartesianas y polares es la siguiente:

Proposición 2.1.2 *Si un punto P tiene coordenadas polares (r, θ), sus coordenadas cartesianas vienen dadas por*

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta).$$

Si un punto Q tiene como coordenadas cartesianas (x, y), entonces sus coordenadas polares seran:

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2}, \ \theta = \arctan(\frac{y}{x}) \in [0, 2\pi[.$$

Ejemplo 2.1.3 *Las coordenadas cartesianas del punto cuyas coordenadas polares son $(3, \frac{5\pi}{4})$ serán:*

$$x = 3\cos(\frac{5\pi}{4}) = 3(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad y = 3\sin(\frac{5\pi}{4}) = 3(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Ejemplo 2.1.4 *Si las coordenadas cartesianas de un punto son $(5, 5)$, sus coordenadas polares serán*

$$r = \sqrt{5^2 + (5)^2} = 5\sqrt{2}, \quad \theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Determinados conjuntos del plano tienen, en coordenadas polares, ecuaciones más simples que en coordenadas cartesianas:

Ejemplo 2.1.5 *Representar gráficamente el conjunto del plano que viene dado por $\{(r, \theta) \ : \ r = 6\}$.*

Como según la relación entre las coordenadas polares y las cartesianas, se tiene que $x^2 + y^2 = r^2$, entonces el conjunto anterior se puede expresar:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 6^2\},$$

que según sabemos es la ecuación de una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 6

Ejemplo 2.1.6 *Describir geométricamente el conjunto $\{(r, \theta) \ : \ r = 3\cos(\theta)\}$.*

Por la ecuación anterior, multiplicandola por r, nos queda $r^2 = 3r\cos(\theta)$. Ahora, teniendo en cuanta que $x = r\cos(\theta)$ y que $x^2 + y^2 = r^2$, obtenemos:

$$x^2 + y^2 = 3x \Rightarrow x^2 + y^2 - 3x = 0 \Rightarrow (x - \frac{3}{2})^2 + y^2 = (\frac{3}{2})^2$$

Es decir, es una circunferencia de centro $(\frac{3}{2}, 0)$ y radio $\frac{3}{2}$.

2.1.3. Problemas

Problema 2.1.7 *Describir geométricamente los conjuntos*
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 5\}$.
$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y - 1 \leq 0, y \geq x^2\}$.
$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y \geq 0, \ x^2 + y^2 < 9\}$
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 4x^2 + y^2 \leq 4\}$

Problema 2.1.8 *Describir geométricamente los conjuntos*
$A = \{(r, \theta) \ : \ r = 4, \ \theta = \frac{\pi}{4}\}$.
$B = \{(r, \theta) \ : \ r \leq 6\cos(\theta)\}$.
$C = \{(r, \theta) \ : \ r > 4\sin(\theta)\}$.
$D = \{(r, \theta) \ : \ r = \frac{6}{2\sin(\theta)+\cos(\theta)}\}$.

2.2. Sistemas de coordenadas en el espacio tridimensional.

2.2.1. Coordenadas cartesianas.

Un punto del espacio se representa en un sistema de coordenadas cartesianas refiriendo su posición a tres rectas (ejes) que se cortan en un punto y son perpendiculares entre sí. Al punto intersección de las tres rectas se le llama origen de coordenadas y se suele representar numéricamente como $O = (0, 0, 0)$. Se eligen los semiejes positivos de acuerdo con la siguiente regla: Si se supone una persona de pie sobre el origen, con el brazo derecho extendido en el sentido del semieje x positivo y el izquierdo en el semieje y positivo, entonces su cabeza irá en la dirección del semieje z positivo. Siguiendo esta regla a cada punto P del espacio le podemos hacer corresponder una terna de números reales (x, y, z), donde $|x|$ es la distancia euclidea del punto P al plano formado por ejes y y z, $|y|$ es la distancia del punto P al plano formado por los ejes x y z, $|z|$ es la distancia del punto al plano formado por los ejes x e y.

Como consecuencia de lo descrito en el párrafo anterior el espacio se puede identificar a todos los efectos con $\mathbb{R}^3$, ya que a un punto del espacio le hacemos corresponder un vector de $\mathbb{R}^3$, y sólo uno.

Definición 2.2.1 *Dados dos puntos del espacio en coordenadas cartesianas $P(x_0, y_0, z_0)$ y $Q(x_1, y_1, z_1)$. Llamaremos distancia euclideana entre estos dos puntos a:*

$$dist(P, Q) := +\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}$$

Representación, mediante ecuaciones, de algunos subconjuntos del espacio.

Un plano es el lugar geométrico del espacio que verifica la siguiente ecuación:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ ax + by + cz = d\}$$

donde a b c son números no nulos simultáneamente.

Una recta en el espacio es la intersección de dos planos.

Una esfera es el conjunto de todos los puntos del espacio que distan una cantidad fija (radio) de un punto fijo (centro). En particular, la ecuación de una esfera de radio $r > 0$ y centro (x_0, y_0, z_0) viene dada por

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2\}$$

Ejemplo 2.2.2 *Describir geométricamente el conjunto* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 3 = 0\}$.

Agrupando las variables x e y se tiene:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 3 = 0 \Rightarrow (x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) + z^2 = 3$$

Completando los cuadrados de las variables x e y obtenemos

$$(x^2 + 4x + 2^2) + (y^2 - 6y + (-3)^2) + z^2 = 3 + 4 + 9$$

Con lo cual,

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 16.$$

Es decir, es una esfera centrada en el punto $(-2, 3, 0)$ y de radio 4.

Para representar conjuntos en el espacio es útil el concepto de sección.

Dado un conjunto del espacio se llama *sección* a una curva del espacio que se obtiene cortando el conjunto por un plano.

Por ejemplo, si un haz de planos paralelos corta al conjunto en curvas iguales, el conjunto se llama *cilindro*. Se define el cilindro de directriz la curva C y generatriz la recta L como el conjunto que se obtiene trasladando L paralelamente a sí misma siguiendo la curva C.

2.2.2. Problemas

Problema 2.2.3 *Describir geométricamente el conjunto* $A = \{(x, y, z) : x = 5\}$

Problema 2.2.4 *Describir el conjunto* $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4\}$.

Problema 2.2.5 *Describir geométricamente el conjunto* $V = \{(x, y, z) : z > x^2 + y^2\}$

Problema 2.2.6 *Describir el conjunto* $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < z^2\}$

Problema 2.2.7 *Describir el conjunto* $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 9\}$.

2.3. La geometría euclideana de $\mathbb{R}^n$.

En esta sección veremos que la geometría euclídea del plano y del espacio tridimensional se puede extender al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

2.3.1. Producto escalar euclídeo y norma euclídea

Definición 2.3.1 *Llamamos producto escalar euclídeo en* $\mathbb{R}^n$ *a la aplicación del producto cartesiano* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *en los números reales* $\mathbb{R}$, *que viene dada por la siguiente expresión*

$$\langle (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

Proposición 2.3.2 *Las propiedades fundamentales del producto escalar son:*

a) $\langle x, x \rangle > 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
b) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.
c) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.
d) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

Ejemplo 2.3.3 *Si* $v = (4, -1, 3)$ *y* $w = (-1, -2, 5)$. *El producto escalar de estos dos vectores es:*

$$\langle v, w \rangle = \langle (4, -1, 3), (-1, -2, 5) \rangle = 4(-1) + (-1)(-2) + 3(5) = 13$$

Definición 2.3.4 *Dado un vector $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ llamamos norma euclideana de dicho vector a:*

$$\|(x_1, ..., x_n)\| = +\sqrt{\langle (x_1, ..., x_n), (x_1, ..., x_n)\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Este concepto da lugar a la noción de longitud del vector $(x_1, ..., x_n)$ (ver en el plano y en el espacio tridimensional, la relación de este concepto con la distancia al origen).

Proposición 2.3.5 *Las propiedades fundamentales de la norma euclidea son:*
a) $\|x\| \geq 0$ *y* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.
c) Desigualdad de Cuachy-Schwarz $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.
c) Desigualdad triangular: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ejemplo 2.3.6 *La norma euclidea del vector* $v = (-1, 1, 0)$ *es* $\|v\| = \|(-1, 1, 0)\| = +\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = +\sqrt{2}$.

El ángulo de dos vectores no nulos del plano o del espacio tridimensional v y w se define como el ángulo en radianes $\theta \in [0, \pi]$ que forman las semirectas que tienen como origen el origen de coordenadas y pasan por los puntos v y w respectivamente.

Este concepto de ángulo se puede generalizar a $\mathbb{R}^n$ de la siguiente forma:

Teorema 2.3.7 *Si θ es el ángulo de dos vectores no nulos v y w, se tiene que*

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|}.$$

El teorema anterior nos permite ver que si v y w son dos vectores no nulos, entonces $\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\| \cos(\theta)$.

Definición 2.3.8 *Dos vectores v y w se llaman perpendiculares u ortogonales si* $\langle v, w\rangle = 0$.

Ejemplo 2.3.9 *Los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ son ortogonales. En efecto, si calculamos su producto escalar nos queda:*

$$\langle e_1, e_2\rangle = \langle (1, 0), (0, 1)\rangle = 1(0) + (0)1 = 0.$$

2.3.2. Proyecciones.

Sean v y w dos vectores de $\mathbb{R}^n$ con origen común. Si trazamos la perpendicular por el extremo de v a la recta que contiene a w, queda determinado un vector, que se llama *el vector proyección* de v sobre w, y que denotaremos por $P(v,w)$.

Se comprueba de forma fácil que dicho vector viene dado por:

$$P(v,w) = \frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}w.$$

Una de las aplicaciones importantes del producto escalar y de las proyecciones se da en el campo de la físisca, cuando hay que calcular la cantidad de trabajo realizada por una fuerza constante. Se define el trabajo realizado W por una fuerza constante de dirección la trayectoria rectilínea de un objeto, como el número Fd, donde F es la magnitud de la fuerza y d la distancia recorrida.

Vemos ahora a considerar el caso de una fuerza que actua en otra dirección.

Experimentalmente se comprueba que, cuando una fuerza F mueve un objeto sobre una recta desde el punto P hasta Q, (con lo cual el vector desplazamiento viene dado por PQ el trabajo realizado es la norma del vector proyección de F sobre PQ multiplicado por la distancia recorrida, i.e.,

$$W = \|P(F,PQ)\|\|PQ\| = \langle F, PQ\rangle$$

Ejemplo 2.3.10 *Supongamos que el viento ejerce una fuerza de* 2500 *newtons sobre la vela de un barco en dirección* $30^o NE$*. Hallar el trabajo realizado por el viento cuando desplaza el barco* $100m$ *hacia el norte.*

Sabemos que $\|F\| = 2500$newtons. El vector desplazamiento es $PQ = (0,100)$, luego $\|(0,100)\| = 100m$. Por lo tanto

$$F = (2500\cos(60^o), 2500\sin(60^o)) = (1250, 1250\sqrt{3})$$

Así, el trabajo realizado es

$$W = \langle(1250, 1250\sqrt{3}), (0,100)\rangle = 125000\sqrt{3} \text{ julios}$$

2.3.3. Problemas

Problema 2.3.11 *Dados los vectores* $u = (1,-1,1)$ *y* $v = (2,0,3)$*, calcular el producto escalar* $\langle u, v\rangle$*.*

Problema 2.3.12 *Dados los vectores* $u = (1, -1, 1)$ *y* $v = (2, 0, 3)$, *calcular el coseno del ángulo que forman u y v.*

Problema 2.3.13 (teorema de Pitágoras) *Probar que si u y v son vectores no nulos ortogonales, entonces* $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Problema 2.3.14 *¿ Por qué se llama teorema de Pitágoras el resultado del problema anterior?*

Problema 2.3.15 *Hallar el trabajo realizado por la fuerza* $F = (\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7})$ *cuando desplaza un objeto desde el punto* $(-3, -5, -4)$ *hasta* $(4, 9, 11)$ *a lo largo de la recta que los une.*

Problema 2.3.16 *Supongamos que el viento ejerce una fuerza de* 5000 *newtons sobre la vela de un barco en dirección* $60^o N0$. *Hallar el trabajo realizado por el viento cuando desplaza el barco* $50m$ *hacia el norte.*

2.3.4. Conceptos topológicos.

Definición 2.3.17 *Dados dos puntos* $x = (x_1, ..., x_n)$, *e* $y = (y_1, ..., y_n)$. *Llamaremos distancia euclidea entre ambos puntos a:*

$$dist(x, y) = \|x - y\| = +\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}.$$

Proposición 2.3.18 *Las propiedades de la distancia son:*
i) $dist(x, y) \geq 0$
ii)$dist(x, y) = dist(y, x)$.
iii) $dist(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
iv) $dist(x, y) = dist(x, z) + dist(z, y)$.

Definición 2.3.19 *Dado* $a \in \mathbb{R}^n$, *y* $r > 0$.
i) Llamaremos bola abierta de centro a y radio r al siguiente conjunto:

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : dist(a, x) < r\}$$

ii)Llamaremos bola cerrada de centro a y radio r al siguiente conjunto:

$$U(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : dist(a, x) \leq r\}$$

iii)Llamaremos esfera de centro a y radio r al siguiente conjunto:

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : dist(a, x) = r\}$$

Definición 2.3.20 *Un subconjunto* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *se llama acotado si existe una constante* $M > 0$ *tal que* $\|x\| \leq M$ *para todo* $x \in \Omega$. *Equivalentemente, si* $\Omega \subseteq U(0, M)$.

Definición 2.3.21 *Un subconjunto* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *se llama abierto si para cada* $a \in \Omega$ *podemos encontrar un número* $r > 0$ *(este número depende de a) de forma que* $B(a, r) \subset \Omega$.

Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *se llama cerrado si* $\mathbb{R}^n \setminus A$ *es abierto.*

2.4. Funciones de varias variables

Llamaremos función f con dominio un subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y cuya imagen está en $\mathbb{R}^m$ y lo denotaremos por $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ a una relación por la cual a cada vector $x \in \Omega$ le hacemos corresponder uno y sólo uno de $\mathbb{R}^m$, el cual se llamara imagen por f de x y se escribirá como $f(x)$. Si escribimos $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))$, entonces cada $f_1, ..., f_m$ es una función con dominio Ω y con imagen en $\mathbb{R}$, estas funciones se llaman *las funciones coordenadas* de f, y a veces se escribe $f = (f_1, ..., f_m)$.

Una función se llama *real de variable real* cuando su dominio es un subconjunto de números reales y su imagen también es un subconjunto de numeros reales:

Ejemplo 2.4.1 *a)* $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$.

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x^2$.

Ejemplo 2.4.2 *la expresión* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \frac{1}{x}$ *no es una función ya que la relación anterior no tiene sentido cuando* $x = 0$.

Una función cuyo dominio es un subconjunto de números reales y su imagen es un subconjunto de algún $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$ se llama *función vectorial de variable real.*

Ejemplo 2.4.3 $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$. *En este caso* α *tiene dos funciones coordenadas que son*

$$\alpha_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \ : \ \alpha_1(t) = \cos(t).$$

$$\alpha_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \ : \ \alpha_2(t) = \sin(t).$$

Una función cuyo dominio es un subconjunto de algun $\mathbb{R}^n$, con $n > 1$ y cuya imagen sea un subconjunto de los reales se llama *función real de varias variables.*

Ejemplo 2.4.4 *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Una función cuyo dominio es un subconjunto de algún $\mathbb{R}^n$, con $n > 1$ y cuya imagen sea un subconjunto de algún $\mathbb{R}^m$, con $m > 1$ se llama *función vectorial de varias variables.*

Ejemplo 2.4.5 *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $f(x, y) = (x^2 + y^2, x, 2yx)$. *En este caso sus funciones coordenadas será:*

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ : \ f_1(x, y) = x^2 + y^2.$$

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ : \ f_2(x, y) = x.$$

$$f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ : \ f_3(x, y) = 2yx.$$

Este tipo de funciones no son sólo abstracciones matemáticas, sino que aparecen de manera natural en la mayoría de las ramas de la ciencia. Por ejemplo, para especificar la temperaura T de una región A del espacio se requiere una función $T : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de forma que $T(x, y, z)$ representa la temperatura del punto $(x, y, z) \in A$. Otro ejemplo puede ser el siguiente, supongamos que tenemos un fluido moviéndose sobre una región del espacio. Para representar sus velocidad se utiliza una función $V : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de forma que $V(x, y, z, t)$ representa el vector velocidad del fluido en el punto (x, y, z) del espacio y en el tiempo t.

2.4.1. Gráficas

Definición 2.4.6 *Llamaremos gráfica de una función* $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *al siguiente subconjunto de* $\mathbb{R}^2$

$$G(f) = \{(x, f(x)) \ : \ x \in \Omega\}.$$

A este tipo de gráfica se le llama curva en $\mathbb{R}^2$.

Llamaremos gráfica de una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *al siguiente subconjunto de* $\mathbb{R}^{n+1}$

$$G(f) = \{(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)) \ : \ (x_1, ..., x_n) \in \Omega\}.$$

Cuando $n = 2$ *la gráfica se llama superficie en* $\mathbb{R}^3$.

En general, se llama gráfica de una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *al siguiente subconjunto de* $\mathbb{R}^{n+m}$

$$G(f) = \{(x_1, ..., x_n, f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n)) \ : \ (x_1, ..., x_n) \in \Omega\}.$$

Donde $f_1, ..., f_m$ *son las funciones coordenadas de* f.

Muchos subconjuntos del espacio tridimensional se pueden ver como gráficas de funciones $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y para representarlos geométricamente son de utilidad las curvas de nivel:

Definición 2.4.7 *Sea* $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *y* $a \in \mathbb{R}$ *Llamaremos curva de nivel de* f *de valor* a, *al siguiente conjunto*

$$C(f, a) := \{x \in \Omega \ \ f(x) = a\}.$$

Las curvas de nivel de una función se pueden obtener cortando su gráfica,i.e., $z = f(x, y)$ por medio del plano $z = a$ y proyectando las curvas de intersección perpendiculares sobre el plano xy.

Ejemplo 2.4.8 *Describir geométricamente el conjunto* $A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z = 0\}$.

Teniendo presente la definición de gráfica de una función, si definimos $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $f(x, y) = x^2 + y^2$ se tiene de manera obvia que $G(f) = A$.

Calculemos los conjuntos de nivel:

$$C(f, a) = \{x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a\}$$

Con lo cual,

$C(f, 0) = \{(0, 0)\}$

Si $a < 0$, $C(f, a) = \emptyset$

Si $a > 0$, $C(f, a) = \{x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a\}$ que es una circunferencia centrada en (0,0) y de radio $\sqrt{a}$.

Así al elevar las curvas de nivel $C(f, a)$ a la altura a sobre el plano xy, la curva de nivel es un circulo de radio $\sqrt{a}$.

Podemos tener información adicional sobre A examinando las secciones perpendiculares a las otras dos direcciones principales. Los planos perpendiculares al eje x son de la forma $x = A$ y cortan a $G(f)$ en parábolas de la forma $z = A^2 + y^2, \ x = A$. De manera análoga, los planos perpendiculares al eje y que cortan a $G(f)$ también son parabolas. Resumiendo, la superficie $z = f(x,y)$ tiene secciones circulares perpendiculares al eje z y parabólicas respecto de los otros ejes. Por esta razón se llama a esta superficie un paraboloide de revolución.

2.4.2. Problemas

Problema 2.4.9 *Hallar el dominio de la expresión* $f(x,y) = \sqrt{x+y}$.

Problema 2.4.10 *Hallar el dominio de la correspondencia*

$$f(x,y) = \sqrt{5 - x^2 - 3y^2}.$$

Problema 2.4.11 *Hallar las curvas de nivel y esbozar la gráfica de* $f(x,y) = x^2 + 4y^2$.

Problema 2.4.12 *Hallar las curvas de nivel y esbozar la gráfica de* $f(x,y) = x^2 - y^2$.

2.4.3. Operaciones con funciones.

Operaciones con funciones vectoriales de variable real.

Sean $F, G : \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y sea $h : \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Entonces $F+G$, $F-G$ hF son funciones vectoriales, mientras que $\langle F, G\rangle$ es una función real. En resumen

Funciones vectoriales:

$(F+G)(t) = F(t)+G(t)$, $(F-G)(t) = F(t)-G(t)$, $(hF)(t) = h(t)F(t)$.

Función escalar, $\langle F, G\rangle(t) = \langle F(t), G(t)\rangle$.

Ejemplo 2.4.13 *Si tenemos las funciones* $f(t) = \cos(t)$, *y* $F(t) = (t^2, t+1)$ *y queremos calcular la función* fF, *actuamos según su definición, y nos queda:*

$$(fF)(t) = f(t)F(t) = \cos(t)(t^2, t+1) = (t^2\cos(t), (t+1)\cos(t))$$

Por lo tanto si nos piden calcular $(fF)(0)$, *se tiene que*

$$(fF)(0) = (0^2\cos(0), (0+1)\cos(0)) = (0,1)$$

Operaciones de funciones reales de varias variables.

Sean $F, G : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces $F+G$, $F-G$, FG, λF, se definen de la siguiente forma:
$(F+G)(x_1, ..., x_n) = F(x_1, ..., x_n) + G(x_1, ..., x_n)$,
$(F-G)(x_1, ..., x_n) = F(x_1, ..., x_n) - G(x_1, ..., x_n)$,
$(FG)(x_1, ..., x_n) = F(x_1, ..., x_n)G(x_1, ..., x_n)$,
$(\lambda F)(x_1, ..., x_n) = \lambda F(x_1, ..., x_n)$.

Operaciones de funciones vectoriales de varias variables.

Sean $F, G : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces $F+G$, $F-G$, λF, se definen de la siguiente forma:
$(F+G)(x_1, ..., x_n) = F(x_1, ..., x_n) + G(x_1, ..., x_n)$,
$(F-G)(x_1, ..., x_n) = F(x_1, ..., x_n) - G(x_1, ..., x_n)$,
$(\lambda F)(x_1, ..., x_n) = \lambda F(x_1, ..., x_n)$.

Ejemplo 2.4.14 *Si nos piden obtener la función $f+g$, donde f y g vienen dadas de la forma: $f(x,y) = (x^2, y, x+y)$, $g(x,y) = (y, x, -y)$. Entonces, por la definición se tiene:*
$(f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y) = (x^2, y, x+y) + (y, x, -y) =$
$(x^2+y, y+x, x+y-y) = (x^2+y, y+x, x)$. *Por lo tanto, si deseamos calcular $(f+g)(2,0)$, tendremos*

$$(f+g)(2,0) = (2^2+0, 0+2, 2) = (4,2,2).$$

2.5. Continuidad

Para funciones reales de variable real, intuitivamente, una función diremos que es continua si su gráfica no presenta interrupciones, ni saltos ni oscilaciones indefinidas. Aunque esta descripción es, por lo general, suficiente para decidir si una función es continua observando su gráfica es fácil engañarse, y la definición rigurosa es muy importante.

Definición 2.5.1 *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diremos que es continua en $a \in \mathbb{R}$ si se cumple que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Recordemos que la definición de límite para una función real de variable real es la siguiente:

Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y dado un vector $x_0 \in \mathbb{R}$. Diremos que el límite de f en x_0 es un número real L, y lo detotaremos por

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

Para funciones vectoriales de variable real se define el límite de la siguiente forma:

Definición 2.5.2 *Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea $f = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, donde $f_1, ..., f_m$ son las funciones coordenadas de f. Se define el límite de f en a de la siguiente forma:*

$$\lim_{x \to a} f(x) := (\lim_{x \to a} f_1(x), ..., \lim_{x \to a} f_m(x)).$$

Ejemplo 2.5.3 *Sea f la función vectorial $f(x) = (x^2, \frac{x^2-1}{x-1})$. Si nos piden calcular $\lim_{x \to 1} f(x)$, actuamos del modo siguiente:*

Las funciones coordenadas son: $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 1}(x^2, \frac{x^2-1}{x-1}) = (\lim_{x \to 1} x^2, \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}) = (1, \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}) = (1, 2)$$

Con esta definición de límite tenemos:

Definición 2.5.4 *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ diremos que es continua en $a \in \mathbb{R}$ si se cumple que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

La definición formal de límite para una función real de varias variables es:

Definición 2.5.5 *Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y dado un vector $x_0 = (x_1^0, ..., x_n^0) \in \mathbb{R}^n$. Diremos que el límite de f en x_0 es un número real L, y lo detotaremos por*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - x_0\| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

La expresión anterior exige que, para un intervalo dado de radio ϵ y de centro L, se encuentre una bola abierta de radio δ y de centro x_0, que obligue a la función a estar dentro del intervalo en todos los puntos de la bola. Es decir , el enunciado

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

significa que los valores de la función se pueden aproximar a L tanto como se quiera, eligiendo x suficientemente próximo a x_0, pero no igual a x_0.

Cuando estudiamos los límites de una función de varias variables tenemos que considerar la aproximación del punto $(x_1, ..., x_n)$ a $(x_1^0, ..., x_n^0)$ a lo largo de cualquier camino. Si el valor de

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

no es el mismo para todos los caminos, el límite no existe.

Proposición 2.5.6 *Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, y sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{ y } \lim_{x \to x_0} g(x) = M,$$

entonces

a) $\lim_{x \to x_0} af(x) = aL$, *para toda constante a.*
b) $\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = L + M$.
c) $\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = LM$

Definición 2.5.7 *Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diremos que es continua en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si se cumple que*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ahora ya podemos definir límite y continuidad para funciones vectoriales de varias variables:

Definición 2.5.8 *Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea $f = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, donde $f_1, ..., f_m$ son las funciones coordenadas de f. Se define el límite de f en x_0 de la siguiente forma:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) := (\lim_{x \to x_0} f_1(x), ..., \lim_{x \to x_0} f_m(x)).$$

La función f se dice que es continua en x_0 si se cumple

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

2.6. Diferenciación de funciones.

2.6.1. Derivadas.

Definición 2.6.1 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Se dice que f es derivable en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si existe y es finito el siguiente límite*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

o equivalentemente

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

en tal caso a dicho valor se le llama derivada de f en x_0 y se denota por $f'(x_0)$.

La interpretación geométrica de la derivada de la función f en el punto x_0 es la de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(x_0, f(x_0))$. Entonces dicha recta tangente es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

La interprestación física de la derivada es la siguiente: Supongase que una partícula se mueve en una recta sobre la cual se ha introducido un sistema de referencia. Sea $f(t)$ la coordenada de la particula en el instante t. Se define la velocidad instantánea de la partícula en el instante t_0 como

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0},$$

es decir, como $f'(t_0)$.

Proposición 2.6.2 (Derivadas usuales)

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x^p	px^{p-1}
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
a^x	$a^x\ln(a)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$1-\tanh^2(x)$

Proposición 2.6.3 *Sean* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dos funciones derivables en* x_0 *y sea* $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. *Entonces:*
a) $(\lambda f + \beta g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \beta g'(x_0)$.
b) $(f.g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
c) Si $g(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.
c) (Regla de la cadena) $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$.

A partir de la regla de la cadena se obtienen las derivadas de las funciones inversas.

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arc}\cos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$arg\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$arg\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$arg\tanh(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$

2.6.2. Problemas

Problema 2.6.4 *Usando la definición de derivada probar:*
a) Si $f(x) = 1$, *entonces* $f'(x) = 0$.
b) Si $f(x) = x$, *entonces* $f'(x) = 1$.
c) Si $f(x) = x^2$, *entonces* $f'(x) = 2x$.

Problema 2.6.5 *Sabemos que* $(\sin(x))' = \cos(x)$ *y que* $(\cos(x))' = -\sin(x)$. *Obtener la derivada de* $\tan(x)$ *usando las reglas de derivación.*

Problema 2.6.6 *Calcular las derivadas de:*
(a) $f(x) = \sin(x^2)$. *Dar el valor de la derivada en* $x = 0$
(b) $f(x) = x^3 \cos^3(x^3)$. *Dar el valor de la derivada en* $x = 0$.
(c) $f(x) = x^x$ *Dar el valor de la derivada en* $x = 1$
(d) $f(x) = 2^x$. *Dar el valor de la derivada en* $x = 1$
(e) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ *Dar el valor de la derivada en* $x = 0$.

Problema 2.6.7 *Dadas las funciones hiperbólicas:*
$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ *seno hiperbólico.*
$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ *coseno hiperbólico.*
Probar que:

1. $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
2. $(\sinh(x))' = \cosh(x)$, $(\cosh(x))' = \sinh(x)$.

2.6.3. Derivadas de funciones vectoriales.

Definición 2.6.8 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función vectorial de variable real (sean $f_1, ...f_n$ sus funciones coordenadas). Se dice que f es derivable en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si existen y son finitos los siguientes límites*

$$f_i'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_i(x_0 + h) - f_i(x_0)}{h}, \quad i = 1, ..., n.$$

o equivalentemente

$$f_i'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f_i(x) - f_i(x_0)}{x - x_0} \quad i = 1, ..., n$$

en tal caso al vector $(f_1'(x_0), ..., f_n'(x_0))$ se le llama derivada de f en x_0 y se denota por $f'(x_0)$.

Ejemplo 2.6.9 *Hallar la derivada de la función*

$$F(x) = (e^x, \sin(x), x^3 + 5x).$$

Como las funciones coordenadas de F son:

$$F_1(x) = e^x, \quad F_2(x) = \sin(x), \quad F_3(x) = x^3 + 5x.$$

Derivamos cada una de ellas y nos queda:

$$F_1'(x) = e^x, \quad F_2'(x) = \cos(x), \quad F_3'(x) = 3x^2 + 5$$

Luego, $F'(x) = (e^x, \cos(x), 3x^2 + 5)$.

Según hemos dicho antes la derivada $f'(a)$, de una función real de variable real, es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$. Si ahora estamos en la situación siguiente:

Consideremos $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x) = (x, f(x))$, donde f es la función del párrafo anterior. Es claro que el conjunto $F(\mathbb{R}) = G(f)$. Si calculamos la derivada de la función F en el punto a, nos queda $F'(a) := (1, f'(a))$. Si ahora construimos la recta que tiene como vector director $F'(a)$ y pasa por el punto $F(a) = (a, f(a))$. La ecuación de la recta en paramétricas será:

$$(x, y) = (a, f(a)) + t(1, f'(a)),$$

con lo cual la ecuación implícita de tal recta es:

$$y - f(a) = (x - a)f'(a).$$

Que es justamente, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$.

Dada una función vectorial de variable real $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, al conjunto imagen $F(\mathbb{R})$ se le llama curva en $\mathbb{R}^n$ definida por la función F.

Teniendo presente lo anterior y la forma en que se ha introducido la derivada de una función vectorial, no es de estrañar que su interpretación geométrica sea la siguiente:

Supongamos que la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, sea derivable en a, y que $F'(a)$ no sea el vector nulo, entonces $F'(a)$ es el vector director (vector tangente) de la recta tangente a la curva $F(\mathbb{R})$ que pasa por el punto $F(a)$.

Ejemplo 2.6.10 *Sea la función vectorial $F(x) = (e^{2x}, x^2 - x, \ln(x))$. Calcular la recta tangente a la curva definida por F en el punto $F(3)$.*

Primero, calculamos $F(3) = (e^6, 6, \ln(3))$.
Segundo, la derivada de la función es: $F'(x) = (2e^{2x}, 2x - 1, \frac{1}{x})$.
Tercero, el vector director de la recta que nos piden es $F'(3) = (2e^6, 5, \frac{1}{3})$.
Finalmente, la ecuación de la recta será:

$$(x, y, z) = (e^6, 6, \ln(3)) + t(2e^6, 5, \frac{1}{3}).$$

Recordemos de la sección anterior que la velocidad instantánea de un objeto es la derivada de la función de posición. Expresemos ahora este concepto en términos de funciones vectoriales:

Consideremos un punto móvil cuya posición en el instante t viene dada por la función de posición $R(t)$ (se supone que se toman todos los vectores $R(t)$ con origen en el de coordenadas).

El vector de posición o de desplazamiento es $R(t)$.
El vector velocidad es $V(t) = \frac{d}{dt}R(t) = R'(t)$.
Llamaremos velocidad a $\|V(t)\|$, que es la norma del vector velocidad.

Ejemplo 2.6.11 *El vector de posición de una partícula en el instante t es*

$$R(t) = (t^2 + 1, \sin(t), \cos(t))$$

Hallar la velocidad de la particula en el instante $t = \pi$.

Para calcular la velocidad, primero debemos obtener el vector velocidad y este viene dado por:

$$V(t) = R'(t) = (2t, \cos(t), -\sin(t)) \Rightarrow V(\pi) = (2\pi, -1, 0).$$

Así, la velocidad de la particula en el instante $t = \pi$, es

$$\|V(\pi)\| = +\sqrt{(2\pi)^2 + (-1)^2 + 0^2} = +\sqrt{4\pi^2 + 1}.$$

Teorema 2.6.12 (Reglas de derivación) *Sean las funciones vectoriales $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real. Si las tres funciones son derivables en un punto a, también lo son $\lambda F + \beta G$ (λ y β constantes), hF, $\langle F, G\rangle$ y verifican las reglas siguientes:*
i) $(\lambda F + \beta G)'(a) = \lambda F'(a) + \beta G'(a)$.
ii) $(hF)'(a) = h'(a)F(a) + h(a)F'(a)$.
iii) $\langle F, G\rangle'(a) = \langle F'(a), G(a)\rangle + \langle F(a), G'(a)\rangle$,

2.6.4. Problemas

Problema 2.6.13 *Usando la definición probar que la derivada de la función $F(x) = (k, x, x^2)$, en el punto $x = 2$ es $(0, 1, 4)$.*

Problema 2.6.14 *Calcular las derivadas de las siguientes funciones:*
a) $f(x) = (e^x \cos(x), e^x \sin(x))$.
b) $R(x) = (\ln(x^2), 0, \tan(x))$.
c) $S(x) = (\sqrt{x^2 + x}, 2^x)$.
d) $\langle f, S\rangle(x)$.

Problema 2.6.15 *Hallar la recta tangente a la curva dada por la función $F(x) = (x^2, x^3)$ en el punto $(1, 1)$.*

Problema 2.6.16 *Una partícula se desplaza por el espacio siguiendo la trayectoria plana $F(t) = (t, t^2 + t + 1, 0)$. Calcular el vector velocidad de dicha particula en el instante $t = 2$. Hallar su velocidad en dicho instante.*

2.6.5. Derivadas direccionales

Definición 2.6.17 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n > 1)$ una función real de varias variables y sea v un vector no nulo de $\mathbb{R}^n$. Dado $a \in \mathbb{R}^n$, llamaremos derivada direccional de f en a en la dirección de v al valor del siguiente límite:*

$$D_v f(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

Ejemplo 2.6.18 *Sea $f(x,y) = x + y$, sea $v = (1,1)$, y sea $a = (0,2)$. Entonces,*

$$D_v f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,2) + t(1,1)) - f(0,2)}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t, 2+t) - f(0,2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2 + 2t - 2}{t} = 2.$$

La interpretación geométrica de la derivada direccional $D_v f(a)$ es: Si consideramos la gráfica de f, $G(f)$ que es un subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ y sobre dicho subcontunto consideramos la curva $A := \{(a + tv, f(a + tv)) : t \in \mathbb{R}\}$ el vector $(v, D_v f(a))$ es el vector director de una recta tangente A. De este modo, la ecuación de la recta en $\mathbb{R}^{n+1}$ dada por: $(x, \lambda) = (a, f(a)) + t(v, D_v f(a))$, es la ecuación de la recta tangente a A que pasa por el punto $(a, f(a))$.

La derivada de una función real de variable real se puede interpretar como una tasa de variación. Las derivadas direccionales tienen una interpretación análoga.

Se puede interpretar también la derivada direccional $D_v f(a)$ como la tasa a la que la función $f(x)$ varía cuando el punto se mueve, partiendo de a, sobre la recta que tiene como vector director a v y en el sentido de v.

De entre las derivadas direccionales, las que adquieren mayor importancia son las que van en la dirección de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Si, como es habitual, denotamos la base canónica de $\mathbb{R}^n$ por $\{e_i\ : i = 1, 2, .., n\}$.

Definición 2.6.19 *Llamaremos derivada parcial respecto de la variable i-ésima de la función f en el punto a :*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(a) = D_i f(a) = D_{e_i} f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$

Ejemplo 2.6.20 *Sea $f(x,y)) = x + y^2$. Entonces,*

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x_0, y_0) + t(1,0)) - f(x_0, y_0)}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x_0, y_0) + t(0,1)) - f(x_0, y_0)}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{2ty_0+t^2}{t}=2y_0$$

La derivada parcial respecto de la variable x_i se calcula derivando la función con respecto a dicha variable, considerando a todas las demas variables como constantes.

Ejemplo 2.6.21 *Si* $f(x,y)=x^3y+xy^2$*, se tiene*

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=3x^2y+y^2,\quad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=x^3+2xy.$$

A partir de la interpretación geométrica de las derivadas direccionales se obtiene, en particular, la interpretación geométrica de las derivadas parciales.

Además, si $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ es un punto de $\mathbb{R}^n$ que se mueve alejándose del punto $a=(a_1,a_2,...,a_n)$, la función $f(x)$ varía a una tasa $\frac{\partial}{\partial x_i}f(a)$ en la dirección positiva del eje coordenado x_i.

Ejemplo 2.6.22 *En un circuito eléctrico de* E *voltios de fuerza electromotriz y resistencia* R *ohmios, la intensidad es de* $I=\frac{E}{R}$ *amperios. Hallar las derivadas parciales* $\frac{\partial I}{\partial E}$ *y* $\frac{\partial I}{\partial R}$ *en el instante* $E=120$ *y* $R=15$*, interpretándolas como tasas de variación.*

Como $I=ER^{-1}$ *se tiene que*

$$\frac{\partial I}{\partial E}=R^{-1},\quad \frac{\partial I}{\partial R}=-ER^{-2}$$

y así, cuando $E=120$ *y* $R=15$*, es*

$$\frac{\partial I}{\partial E}=15^{-1},\quad \frac{\partial I}{\partial R}=-(120)(15)^{-2}.$$

Esto significa que, si se fija la resistencia en 15 *ohmios, la intensidad de corriente crece (porque la derivada es positiva) con respecto al voltaje a la tasa de* 15^{-1} *amperios por voltio cuando la fuerza electromotriz es de* 120 *voltios. También significa que, si se fija la fuerza electromotriz en* 120 *voltios, la intensidad de corriente disminuye (porque la derivada es negativa) con respecto a la resistencia a la tasa de* $120(15)^{-2}$ *amperios por ohmio cuando la resistencia es de* 15 *ohmios.*

Definición 2.6.23 *Sea* $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $(n>1)$ *una función real de varias variables. Supongamos que existen todas las derivadas parciales de* f *en un* *punto a. Se llama vector gradiente de f en a, (lo denotaremos por $\nabla f(a)$) al vector formado por las todas las derivadas parciales en dicho punto, i.e.,*

$$\nabla f(a) := (\frac{\partial}{\partial x_1} f(a), ..., \frac{\partial}{\partial x_n} f(a))$$

Ejemplo 2.6.24 *Calcular el vector gradiente de la función*

$$f(x, y) = x\sqrt{x + y}$$

en el punto $(1, 3)$.

Primero, calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \sqrt{x + y} + x\frac{1}{2\sqrt{x + y}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = x\frac{1}{2\sqrt{x + y}}$$

Segundo, sustituimos las derivadas parciales en el punto $(1, 3)$.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(1, 3) = \frac{9}{4}, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(1, 3) = \frac{1}{4}.$$

Finalmente, se tiene que $\nabla f(1, 3) = (\frac{9}{4}, \frac{1}{4})$.

2.6.6. Problemas

Problema 2.6.25 *Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:*

i) $f(x, y) = e^{xy}$.
ii) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$.
iii) $f(u, v, w) = \ln(u^2 + vw - v^2)$.
iv) $f(r, \theta) = r^3 \cos(\theta)$.
v) $f(x, y, z) = \sin(x + y \cos(z))$.

Problema 2.6.26 *Calcular el vector gradiente de las siguientes funciones en el punto que se indica:*

i) $f(x, y, z) = 2x \ln(y) - z^2y^2$, *en* $(1, 1, 0)$.
ii) $f(x, y, z) = \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, *en* $(1, -1, 1)$.
iii) $f(x, y) = x^2 + \ln(\sqrt{xy})$, *en* $(2, 1)$.
iv) $f(x, y) = \ln(\frac{1}{xy})$, *en* $(5, \sqrt{2})$.
v) $f(x, y) = \ln(x^2 + 2y + 1) + \sin(x + y)$, *en* $(0, 0)$.

Problema 2.6.27 *En un circuito eléctrico de E voltios de fuerza electromotriz y resistencia R ohmios, la intensidad es de* $I = \frac{E}{R}$ *amperios. Si se fija la resistencia en* 25 *ohmios y la furza electromotiz en* 100 *voltios. ¿ Cómo varia la intersidad respecto de la resistencia? ¿ y respecto a la fuerza electromotriz.*

Problema 2.6.28 *La ley de los gases ideales dice que* $PV = kT$*, donde* P *es la presión,* V *el volumen,* T *la temperatura y* k *una constante física. Hallar* $\frac{\partial V}{\partial T}$ *y* $\frac{\partial V}{\partial P}$*. Demostrar que*

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

Problema 2.6.29 *La temperatura en el punto* (x, y) *de una cierta lámina metálica en el palno* xy *obedece a la fórmula* $T(x, y) = x^3 + 2xy^2 + y$ *grados. Hallar la tasa de variación de la temperatura respecto de la distancia si comenzamos en el punto* $(2, 1)$ *y nos movemos paralelamente al eje* y*.*

2.6.7. La diferencial.

Si tenemos una función real de variable real $f : \mathbb{R} :\to \mathbb{R}$ la cual es derivable en un punto a, podemos definir la siguiente aplicación lineal:

$$df_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ df_a(x) = xf'(a).$$

Además esta aplicación cumple que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - df_a(h)}{h} = 0.$$

A la aplicación df_a se le llama, usualmente, diferencial de f en el punto a.

Definición 2.6.30 *Sea* $f : \mathbb{R}^n :\to \mathbb{R}$ *una función real de varias variables tal que existe* $\nabla f(a)$*. Diremos que* f *es diferenciable en* a *si:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \langle \nabla f(a), h\rangle}{\|h\|} = 0.$$

En tal caso, llamaremos diferencial de f *en* a *a la siguiente aplicación lineal:*

$$df_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ : \ df_a(h) = \langle \nabla f(a), h\rangle.$$

Se pueden encontrar ejemplos sencillos que ponen de manifiesto que no todas las funciones que admiten un vector gradiente en un punto son diferenciables en dicho punto. Sin embargo, durante este curso no prestaremos mucha atención a este hecho ya que la mayoría de las funciones con las que trabajaremos si que serán diferenciables. Siguidamente damos una regla que nos garantiza este hecho.

Teorema 2.6.31 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función real de varias variables y sea $a \in \mathbb{R}^n$. Si existen todas las derivadas parciales y son funciones continuas en a, entonces f es diferenciable en a.*

Cuando una función es diferenciable en un punto se verifica la siguiente regla para las derivadas direccionales:

Proposición 2.6.32 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función real de varias variables diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n$, y sea v un vector no nulo, entonces:*

$$D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle.$$

Ejemplo 2.6.33 *Sea la función $f(x, y) = x + y$, sea $v = (1, 1)$ y sea $a = (0, 2)$.*

Si calculamos las derivadas parciales de la función se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 1$$

que por ser constantes serán continuas. Entonces f es diferenciable en el punto $(0, 2)$. Con lo cual,

$$D_v f(0, 2) = \langle \nabla f(0, 2), (1, 1) \rangle = \langle (1, 1), (1, 1) \rangle = 2.$$

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en el punto (a, b). Entonces es posible obtener la **ecuación del plano tangente** a $G(f)$ que contenga al punto $(a, b, f(a, b))$, de la siguiente forma:

$$z - f(a, b) = \langle \nabla f(a, b), (x - a, y - b) \rangle.$$

Según esta fórmula, la interpretación geométrica del gradiente es la del vector normal al plano tangente a $G(f)$ en el punto (a, b). Además, desde la definición de diferencial se tiene que

$$\langle \nabla f(a, b), (x - a, y - b) \rangle$$

es la mejor aproximación lineal a los valores de $f(x, y)$ cuando estamos suficientemente cerca del punto (a, b).

Definición 2.6.34 *Sea S la superficie formada por los puntos (x, y, z) tales que $f(x, y, z) = k$, para k una constante. El* **plano tangente** *a S en el punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$ está definido por la ecuación:*

$$\langle \nabla f(x_0, y_0, z_0), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0,$$

si $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$. Esto es, el plano tangente es el conjunto de puntos (x, y, z) que satisfacen la ecuación anterior.

Ejemplo 2.6.35 *Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $f(x, y) = \arctan(\frac{y}{x})$ en el punto de coordenadas $(1, \sqrt{3}, \frac{\pi}{3})$.*

Lo primero que debemos comprobar es que el punto $(1, \sqrt{3}, \frac{\pi}{3}) \in G(f)$. Es decir, debemos calcular $f(1, \sqrt{3}) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.

Ahora, calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{-yx^{-2}}{1 + (\frac{y}{x})^2} \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(1, \sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{4}.$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \frac{x}{1 + (\frac{y}{x})^2} \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial y} f(1, \sqrt{3}) = \frac{1}{4}.$$

La ecuación del plano tangente es:

$$z - \frac{\pi}{3} = \langle \triangledown f(1, \sqrt{3}), (x - 1, y - \sqrt{3}) \langle = \langle (\frac{-\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}), (x - 1, y - \sqrt{3}) \rangle$$

De donde queda la ecuación

$$3\sqrt{3}x - 3y + 12z = 4\pi.$$

Ejemplo 2.6.36 *Un cajón tiene longitud 3 m, anchura 1 m y altura 2 m. Está construido con un material que cuesta 20 euros por m^2 de lateral y 30 euros por m^2 de fondo. Calcular el coste total del cajón y estimar la variación del coste cuando la longitud y la anchura aumentan 3 cm y la altura decrece 4 cm.*

El área del cajón es $S = xy + 2xz + 2yz$, donde xy es el área del fondo y xz, yz son las áreas de los laterales distintos. El coste total es:

$$C(x, y, z) = 30xy + 20(2xz + 2yz).$$

En nuestor caso $C(3, 1, 2) = 90 + 20(12 + 4)$ *euros*.

Como tenemos que estimar la variación del coste, calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial x}C(x,y,z) = 30y + 40z, \quad \frac{\partial}{\partial y}C(x,y,z) = 30x + 40z,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}C(x,y,z) = 40x + 40y.$$

Como las dimensiones de la caja cambian en:

$$x - 3 = 0{,}03m \quad y - 1 = 0{,}03m, \quad z - 2 = -0{,}04m$$

Entonces la variación del precio será:

$$C(x,y,z) - C(3,1,2) \simeq \langle \nabla C(3,1,2), (0{,}03, 0{,}3, -0{,}04)\rangle =$$

$$\langle (110, 170, 160), (0{,}03, 0{,}03, -0{,}04)\rangle \simeq 2.$$

Es decir, el coste aumenta en 2 euros aproximadamente.

En ciertas ocasiones hay que calcular la mayor tasa de crecimiento o decrecimiento de una función en un cierto punto.

Si suponemos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto a, tal que $\nabla f(a)$ no es el vector nulo. Entonces se tiene que dado v un vector no nulo tal que $\|v\| = 1$:

$$D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v\rangle = \|\nabla f(a)\|.\|v\| \cos(\theta),$$

donde θ es el ángulo que forman los dos vectores.

Con lo cual,

$$-\|\nabla f(a)\| \leq D_v f(a) \leq \|\nabla f(a)\|.$$

Este hecho nos permite afirmar:

Teorema 2.6.37 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en el punto a, tal que $\nabla f(a)$ no es el vector nulo, y sea v un vector con norma 1. entonces:*

i) El máximo valor de la derivada direccional $D_v f(a)$ es $\|\nabla f(a)\|$ y se alcanza cuando $v = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$.

ii) El mínimo valor de la derivada direccional $D_v f(a)$ es $-\|\nabla f(a)\|$ y se alcanza cuando $v = -\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$.

Ejemplo 2.6.38 *Consideremos una caja en el espacio definida por* $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 2$. *La temperatura en un punto de la caja viene dada por la función*

$$T(x, y, z) = xy + yz + xz.$$

Un misil sensible a la temperatura se encuentra situado en el punto $(1, 1, 1)$ *¿ En qué sentido se tiene que mover el misil para que la temperatura crezca lo más posible?¿Cuál es la mayor tasa de variación de la temperatura en el punto* $(1, 1, 1)$.*?*

Según el resultado anterior, el mayor crecimiento se obtiene en la dirección del gradiente. Por lo tanto debemos calcular $\nabla T(1, 1, 1)$.

Primero, calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial x}T(x, y, z) = y + z, \quad \frac{\partial}{\partial y}T(x, y, z) = x + z$$

$$\frac{\partial}{\partial z}T(x, y, z) = y + x$$

Esto significa que,

$$\frac{\partial}{\partial x}T(1, 1, 1) = 2 = \frac{\partial}{\partial y}T(1, 1, 1) = \frac{\partial}{\partial z}T(1, 1, 1).$$

Luego la dirección de máximo crecimiento será:

$$\nabla T(1, 1, 1) = (2, 2, 2), \text{y la tasa } \|\nabla T(1, 1, 1)\| = +\sqrt{12}.$$

Proposición 2.6.39 (Propiedades básicas del gradiente) *Sean* $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dos funciones diferenciables en el punto* a.

i) $\nabla c = 0$ *para toda constante* c.

ii) $\nabla(bf + cg)(a) = b\nabla f(a) + c\nabla f(a)$.

iii) $\nabla(fg)(a) = f(a)\nabla g(a) + g(a)\nabla f(a)$.

iv) $\nabla(\frac{f}{g})(a) = \frac{g(a)\nabla f(a) - f(a)\nabla g(a)}{g^2(a)}$.

2.6.8. Problemas

Problema 2.6.40 *Hallar el plano tangente y la recta normal a la gráfica de la función* $f(x, y) = 2xy^2 + x^2y$, *en el punto* $(1, -1, 1)$.

Problema 2.6.41 *Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie* $z = x^3 + y^3 - 3x^2y + 3xy^2$, *en el punto* $(1, 1, 2)$.

Problema 2.6.42 *Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, *en el punto* $(0, 0, 1)$.

Problema 2.6.43 *Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie* $xy^2 + 3x - z^2 = 4$, *en* $(2, 1, -2)$.

Problema 2.6.44 *Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie* $z = x^2 + y^3$ *en el punto* $(3, 1, 10)$.

Problema 2.6.45 *La temperatura en cada uno de los puntos de una placa cuadrada está determinada por la función* $T(x, y) = (x-1)^3(y-2)^2$. *Se desea conocer cuales son, en el punto* $(0, 0)$, *las direcciones de mayor crecimiento y decrecimiento de la temperatura.*

Problema 2.6.46 *Denotamos por* $z = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ *la altura de una montaña en la posición* (x, y). *¿ En qué dirección desde* $(1, 0)$ *hay que comenzar a caminar para escalar lo más rápidamente posible?*

Problema 2.6.47 *Sea* $T(x, y) = 1 - 2x^2 - y^2$ *el indice de toxicidad en cada punto del plano. Un insecto está situado en el punto* $(1, 2)$. *Obtener el camino que debe tomar para que la toxicidad disminuya lo más rápido posible.*

Problema 2.6.48 *Hallar la derivada direccional de la función* $f(x, y, z) = z(x - y)^5 + xy^2z^3$ *en el punto* $(2, 1, -1)$ *y en la dirección de la recta normal a la superficie* $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ *en dicho punto.*

Problema 2.6.49 *Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie descrita por* $xe^{\frac{x^2}{2}} + y^2 + z^2 = 1$ *en los puntos* $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}), (0, 0, 1)$. *Es algunos de estos planos horizontal?*

Problema 2.6.50 *La densidad en cada uno de los puntos* (x, y) *de la placa metálica* $[-1, 1] \times [-1, 1]$ *es* $T(x, y) = 100 + (x - 1)^3(y - 2)^2 + \ln(1 + x^2)$. *Se desea conocer cuales son, la dirección de mayor crecimiento de la densidad en el punto* $(0, 0)$ *y la dirección de mayor decrecimiento de la densidad en el punto* $(0, \frac{1}{2})$.

Problema 2.6.51 *Calcular la derivada direccional de la función* $f(x, y, z) = xy\sin(xz)$ *en el punto* $P(1, -2, \pi)$ *y en la dirección* $v = (-2, 3, -5)$.

2.7. Extremos de funciones de varias variables.

Definición 2.7.1 *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se dice que la función f tiene un máximo absoluto en $a \in \Omega$ si $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in \Omega$. De forma análoga, la función f tiene un mínimo absoluto en $b \in \Omega$ si $f(x) \geq f(b)$ para todo $x \in \Omega$. A los máximos y mínimos absolutos se les llama extremos absolutos.*

Definición 2.7.2 *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se dice que el punto $a \in \Omega$ es un máximo relativo de f si podemos encontrar un número positivo $\delta > 0$ de forma que $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in \Omega \cap B(a, \delta)$. Diremos que $b \in \Omega$ es un mínimo relativo si podemos encontrar un número positivo $\delta > 0$ de forma que $f(b) \leq f(x)$ para todo $x \in \Omega \cap B(b, \delta)$. A los máximos y mínimos relativos los llamaremos extremos relativos.*

Cuando una función es diferenciable y su dominio es un conjunto abierto los extremos relativos, si existen, se encuentran entre los puntos que anulan el gradiente.

Teorema 2.7.3 *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función difenciable en todos los puntos de su dominio. Si $x_0 \in \Omega$ es un extremo relativo de f se debe cumplir que $\nabla f(x_0) = 0$.*

El resultado anterior nos da una condición necesaria que deben cumplir los extremos relativos de una función diferenciable. Sin embargo, esta condición no es suficiente, es decir hay puntos que anulan el gradiente pero que no son extremos relativos.

Ejemplo 2.7.4 *Consideremos la función $f(x, y) = xy$ es fácil comprobar que $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$, pero sin embargo el punto $(0, 0)$ no es un extremo relativo ya que, si $x < 0, y > 0$, entonces $f(x, y) < 0 = f(0, 0)$ y si $x > 0, y > 0$, entonces $f(x, y) > 0 = f(0, 0)$.*

Es decir, tan cerca como queramos del punto $(0, 0)$ podemos encontrar puntos cuya imagen sea mayor que $f(0, 0)$ y puntos cuya imagen sea menor.

El teorema y el ejemplo anteriores nos inducen a llamar punto crítico de una función diferenciable a todo aquel punto en el cual su gradiente es el vector nulo.

Ahora, nos preguntamos cómo saber si un punto crítico es un extremo relativo. Es bien conocido que para funciones reales de variable real la derivada segunda juega un papel primordial.

Como estamos estudiando funciones de varias variables, introducimos las derivadas parciales de orden superior:

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $a \in \mathbb{R}^n$. Las derivadas parciales segundas se definen:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(a) := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a). \quad i, j = 1, 2, ..., n.$$

Teorema 2.7.5 (Schwartz) *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que las derivadas parciales de segundo orden de f son continuas en a. Entonces*

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(a) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(a) \quad i, j = 1, 2, ...n$$

Ejemplo 2.7.6 *La ecuación del calor*

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t)$$

describe la distribución de temperatura de una barra aislada, donde x representa el punto de la barra y t el instante de la medición. La constante c depende del material del que está hecha la barra.

Comprobar que $T(x,t) = e^{-t}\cos(x/c)$ satisface la ecuación del calor.

Tenemos que calcular, por una parte:

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x,t) = -e^{-t}\cos(x/c)$$

Por otra parte,

$$\frac{\partial}{\partial x} T(x,t) = -\frac{1}{c} e^{-t}\sin(x/c) \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}(-\frac{1}{c} e^{-t}\sin(x/c)) = -\frac{1}{c^2} e^{-t}\cos(x/c)$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t)$$

Para funciones de dos variables tenemos la siguiente regla para saber si un punto crítico es un extremo relativo.

Definición 2.7.7 *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función que tiene derivadas parciales segundas. Llamamos Hessiano de f en el punto (x_0, y_0) al siguiente determinante*

$$H(f,(x_0,y_0)) := \begin{vmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0,y_0) & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x_0,y_0) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_0,y_0) \end{vmatrix}$$

Teorema 2.7.8 *Supongamos que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función que tiene derivadas parciales segundas continuas. Si (x_0, y_0) es un punto crítico de f. Entonces*

i) Si $H(f,(x_0,y_0)) > 0$ y $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0,y_0) < 0$, entonces (x_0,y_0) es un máximo relativo.

ii) Si $H(f,(x_0,y_0)) > 0$ y $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0,y_0) > 0$, entonces (x_0,y_0) es un mínimo relativo.

iii)Si $H(f,(x_0,y_0)) < 0$, entonces (x_0,y_0) no es extremo relativo.

Ejemplo 2.7.9 *Hallar los extremos relativos de la función $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$.*

Como los extremos relativos, si existen, estan entre los puntos críticos, vamos a calcular los puntos criticos:

$$\nabla f(x,y) = (-2x, -2y) = (0,0)$$

El único punto crítico es el $(0,0)$. Ahora estudiaremos el hessiano en dicho punto:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = -2 \Longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(0,0) = -2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = -2 \Longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(0,0) = -2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(0,0) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0,0) = 0$$

Como

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(0,0) = -2 < 0, \text{y } H(f,(0,0)) = 4 > 0.$$

El punto $(0,0)$ es un máximo relativo.

Teorema 2.7.10 (Weierstrass) *Una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tiene máximo y mínimo absoluto siempre que f sea continua en Ω y además, Ω sea un conjunto cerrado y acotado.*

A partir de los resultados anteriores para el cálculo de los estremos absolutos se seguirán los siguientes pasos:
1) Hallar los puntos críticos de la función.
2) Estudiar el caracter de los puntos críticos.
3) Comparar los puntos anteriores con los puntos de la frontera de Ω.

2.7.1. Multiplicadores de Lagrange

En muchos problemas aplicados hay que optimizar una función de varias variables sujeta a una restricción de las variables.

Ejemplo 2.7.11 *Considermos una región del espacio que se calienta de tal modo que la temperatura en el punto (x, y, z) viene dada por $T(x, y, z) = 100 + x^2 + y^2$. Supongamos que la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 50$ está dentro de la región. ¿En qué puntos de la superficie la temperatira será mínima?.*

Para resolver esta problematica utilizaremos el siguiente resultado.

Teorema 2.7.12 (Lagrange) *Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos funciones con derivadas parciales continuas. Si x_0 es un extremo de f sobre el conjunto de nivel $g(x) = c$. Si $\nabla g(x_0) \neq 0$, entonces existe un número real λ tal que*

$$\nabla f(x_0) + \lambda \nabla g(x_0) = 0.$$

Ahora veremos cómo podemos utilizar el teorema anterior para resolver el ejemplo (2.7.11).

La temperatura $T(x, y, z) = 100 + x^2 + y^2$ es la función que tenemos que minimizar. El conjunto donde debemos buscar el mínimo viene dada por $g(x, y, z) = 50$, siendo $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Como la función T es continua y $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; g(x, y, z) = 50\}$ es un conjunto cerrado y acotado. Entonces el teorema de Weierstrass nos asegura la existencia de mínimos absolutos.

La primera condición que debemos verificar es que $\nabla g(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ para todo $(x, y, z) \in \Omega$.

En efecto, $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) = (0, 0, 0)$ lo cual se cumple si, y sólo si, $(x, y, z) = (0, 0, 0) \notin \Omega$.

En estas condiciones, si (x, y, z) es el mínimo que estamos buscando,el teorema de Lagrange nos dice que, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x, y, z) + \lambda \nabla g(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

Calculando los gradientes anteriores nos queda:

$$(2x, 2y, 0) + \lambda(2x, 2y, 2z) = (0, 0, 0)$$

Como además el punto que buscamos debe estar en Ω. Obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{llll} 2x + \lambda 2x & & & = 0 \\ & 2y + \lambda 2y & & = 0 \\ & & +\lambda 2z & = 0 \\ x^2 & +y^2 & +z^2 & = 50 \end{array}$$

De la primera ecuación se tiene que $x = 0$ o $\lambda = -1$

Supongamos que $\lambda = -1$, de la tercera ecuación se desprede que $z = 0$, y por lo tanto todos los puntos de la forma $(x, y, 0)$ tal que $x^2 + y^2 = 50$ son posibles mínimos.

Por otra parte, si $x = 0$ y $\lambda \neq -1$, entonces de la segunda ecuación $y = 0$, con lo cual, por la última ecuación obtenemos que $z^2 = 50$. Esto nos dá dos puntos $(0, 0, \sqrt{50})$ y $(0, 0, -\sqrt{50})$.

Finalmente, para obtener el máximo evaluamos las función T sobre los puntos que hemos obtenido. De este modo,

Si estudiamos el valor T para los puntos $(x, y, 0)$ donde $x^2 + y^2 = 50$, tenemos

$$T(x, y, 0) = 100 + 50 = 150.$$

Si estudiamos el valor de T para los puntos $(0, 0, \sqrt{50}), (0, 0, -\sqrt{50})$ se tiene:

$$T(0, 0\sqrt{50})) = T(0, 0 - \sqrt{50}) = 100$$

Es decir la temperatura mínima se alcanza en los puntos $(0, 0, \sqrt{50})$, $(0, 0, -\sqrt{50})$.

2.7.2. Problemas

Problema 2.7.13 *Calcular los extremos relativos de las funciones siguientes:*

i) $f(x, y) = x^2 y^2$.

ii) $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.
iii) $f(x,y) = xye^{x+2y}$

Problema 2.7.14 *Hallar tres números positivos cuya suma sea* 30 *y su producto máximo.*

Problema 2.7.15 *Hallar todos los puntos críticos de la función* $T(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ *y usar el Hessiano para clasificarlos.*

Problema 2.7.16 *Diseñar una lata cilíndrica (con tapa) que contenga* 1 *litro de agua, usando la mínima cantidad de metal.*

Problema 2.7.17 *Calcular los puntos del elipsoide* $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$ *cuya distancia al origen es máxima y mínima.*

Problema 2.7.18 *Calcular los extremos absolutos de la función* $f(x,y) = x - y$ *en la región*

$$A = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, \ y \geq 0\}.$$

Problema 2.7.19 *La temperatura en un punto* (x,y) *de una piedra plana es* $T(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2$*. Una hormiga camina sobre la piedra describiendo una circunferencia centrada en* $(0,0)$ *de radio* 5*. Determinar las temperaturas máxima y mínima que encontrará la hormiga.*

Problema 2.7.20 *Determinar los extremos absolutos de la función* $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy$ *sobre el conjunto*

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{y^2}{8} \leq 1\}.$$

Problema 2.7.21 *Determinar los extremos absolutos de la función* $f(x,y) = 2x + y^2$ *sobre el conjunto*

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1\}.$$

Problema 2.7.22 *Una placa metálica circular puede describirse como* $P := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 4\}$ *se calienta según la función* $T(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2x + 3$*. Obtener los puntos de la placa donde la temperatura es máxima y los puntos donde la temperatura es mínima.*

2.8. Funciones vectoriales de varias variables.

Si tenemos una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, podemos escribirla mediante sus funciones coordenadas $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ donde cada $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Dado un vector no nulo $v \in \mathbb{R}^n$. Llamaremos derivada direccional de f en la dirección de v y en el punto $a \in \mathbb{R}^n$

$$D_v f(a) = (D_v f_1(a), D_v f_2(a), ..., D_v f_m(a)).$$

De la misma forma, se definen las derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(a) = (\frac{\partial}{\partial x_i} f_1(a), \frac{\partial}{\partial x_i} f_2(a), ..., \frac{\partial}{\partial x_i} f_m(a)), \quad i = 1, 2, ..., n$$

Definición 2.8.1 *Dada la función $f = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, y dado $a \in \mathbb{R}^n$. Llamaremos matriz Jacobiana de f en a a la siguiente matriz siempre que exista:*

$$MJ_f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(a) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(a) & ... & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(a) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2(a) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(a) & ... & \frac{\partial}{\partial x_n} f_2(a) \\ ... & & & \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(a) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_m(a) & ... & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m(a) \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.8.2 *Calcular la matriz Jacobiana, en el punto (x_0, y_0), de la función $f(x, y) = (x^2, x + y, xy)$*

Las funciones coordenadas de f son:

$$f_1(x, y) = x^2, \; f_2(x, y) = x + y, \; f_3(x, y) = xy.$$

Calculando las derivadas parciales de las funciones anteriores, nos queda:

$$MJ_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 & 0 \\ 1 & 1 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix}$$

Si existe la matriz jacobiana de una función en un punto a, se puede definir la aplicación lineal:

$df_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que si $h = (h_1, h_2, ..., h_n)$, entonces

$$df_a(h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(a) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(a) & ... & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(a) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2(a) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(a) & ... & \frac{\partial}{\partial x_n} f_2(a) \\ ... & & & \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(a) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_m(a) & ... & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ ... \\ h_n \end{pmatrix}$$

Definición 2.8.3 *Sea la función* $f = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, y dado* $a \in \mathbb{R}^n$*. Diremos que* f *es diferenciable en el punto* a *siempre que exista la matriz Jacobiana de* f *en* a *y además:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - df_a(h)}{\|h\|} = 0$$

En este caso a la aplicación lineal df_a *la llamaremos aplicación diferencial de* f *en* a*.*

Una condición que asegura la diferenciabilidad de una función es la siguiente:

Teorema 2.8.4 *la función* $f = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, es diferenciable en un punto* $a \in \mathbb{R}^n$*, si existen todas las derivadas parciales y son continuas en* a*.*

Cuando una función es diferenciable las derivadas direccionales se pueden obtener a partir de la matriz Jacobiana:

Proposición 2.8.5 *Sea* $f = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, una función diferenciable en* $a \in \mathbb{R}^n$*. Si* $v = (v_1, ..., v_n)$ *es un vector no nulo, entonces*

$$D_v f(a) = df_a(v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(a) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(a) & ... & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(a) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2(a) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(a) & ... & \frac{\partial}{\partial x_n} f_2(a) \\ ... & & & \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(a) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_m(a) & ... & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ... \\ v_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.8.6 *Sea* $f(x, y) = (x^2, x + y, xy)$*. Calcular la derivada direccional de* f *en* $(0, 1)$ *y en la dirección* $(1, 1)$*.*

Según hemos visto en el ejemplo anterior dicha función tiene derivadas parciales continuas en el punto $(0, 1)$*, por lo tanto es diferenciable en dicho punto.*

Teniendo en consideración el resultado anterior se tendrá:

$$D_v f(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, 2, 1)$$

2.8.1. Regla de la cadena

La regla de la cadena es un método que nos permite obtener la diferencial de la composición de dos funciones diferenciables. El resultado general se puede expresar en los siguientes términos:

Teorema 2.8.7 (Regla de la cadena) *Sea $f = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, una función diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n$ y sea $g = (g_1, ..., g_p) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, una función diferenciable en $f(a) \in \mathbb{R}^m$. Entonces la función $h := g \circ f = (h_1, ..., h_p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, es diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n$. Además,*

$$dh_a = dg_{f(a)} \circ df_a.$$

La forma matricial de la regla de la cadena es:

$$\begin{pmatrix} D_1h_1(a) & ... & D_nh_1(a) \\ & ... & \\ D_1h_p(a) & ... & D_nh_p(a) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} D_1g_1(f(a)) & ... & D_mg_1(f(a)) \\ & ... & \\ D_1g_p(f(a)) & ... & D_mg_p(f(a)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1f_1(a) & ... & D_nf_1(a) \\ & ... & \\ D_1f_m(a) & ... & D_nf_m(a) \end{pmatrix}.$$

De aquí se obtiene que

$$D_ih_j(a) = \sum_{k=1}^{m} D_kg_j(f(a))D_if_k(a).$$

2.8.2. Casos particulares de la regla de la cadena.

Corolario 2.8.8 *Sea $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una función derivable en el punto t_0 y sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $f(t_0)$. Entonces la función $h := g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en t_0 y además,*

$$h'(t_0) = \frac{\partial}{\partial x} g(t_0) f_1'(t_0) + \frac{\partial}{\partial y} g(t_0) f_2'(t_0)$$

Ejemplo 2.8.9 *Sean $g(x, y) = x^2+y^2$, y $f(t) = (\frac{1}{t}, t^2)$. Calcular la derivada de la función $h = g \circ f$ en el punto $t = 2$.*

Por el corolario anterior, tenemos que calcular:
$f_1'(t) = -\frac{1}{t^2}$, $f_2'(t) = 2t$, $\frac{\partial}{\partial x} g(x, y) = 2x$, $\frac{\partial}{\partial y} g(x, y) = 2y$.
Ahora, como cuando $t = 2$ se tiene que $f(2) = (\frac{1}{2}, 4)$. Tenemos
$h'(2) = \frac{\partial}{\partial x} g(\frac{1}{2}, 4) f_1'(2) + \frac{\partial}{\partial y} g(\frac{1}{2}, 4) f_2'(2) = -\frac{1}{4} + 32.$

Corolario 2.8.10 *Sea $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función derivable en el punto (x_0, y_0) y sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $f(x_0, y_0)$. Entonces la función $h := g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en (x_0, y_0) y además,*

$$\frac{\partial}{\partial x}h(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}g(f(x_0, y_0))\frac{\partial}{\partial x}f_1(x_0, y_0) + \frac{\partial}{\partial y}g(f(x_0, y_0))\frac{\partial}{\partial x}f_2(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}h(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}g(f(x_0, y_0))\frac{\partial}{\partial y}f_1(x_0, y_0) + \frac{\partial}{\partial y}g(f(x_0, y_0))\frac{\partial}{\partial y}f_2(x_0, y_0)$$

Algunas veces es de interés escribir el resultado anterior en la forma siguiente:

Corolario 2.8.11 *Sea $z = f(x, y)$ diferenciable en (x, y) y supongamos que existen las derivadas parciales de $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ Entonces la función compuesta $z = f[x(u, v), y(u, v)]$ es diferenciable en (u, v) y:*

$$\frac{\partial}{\partial u}z = \frac{\partial}{\partial x}z\frac{\partial}{\partial u}x + \frac{\partial}{\partial y}z\frac{\partial}{\partial u}y$$

$$\frac{\partial}{\partial v}z = \frac{\partial}{\partial x}z\frac{\partial}{\partial v}x + \frac{\partial}{\partial y}z\frac{\partial}{\partial v}y$$

Ejemplo 2.8.12 *Si queremos calcular las derivadas parciales, en coordenadas polares, de la función $z = f(x, y)$. Aplicando el resultado anterior se tiene: $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$. Por lo tanto,*

$$\frac{\partial}{\partial r}z = (\frac{\partial}{\partial x}z)\cos(\theta) + (\frac{\partial}{\partial y}z)\sin(\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}z = (\frac{\partial}{\partial x}z)(-r\sin(\theta)) + (\frac{\partial}{\partial y}z)r\cos(\theta)$$

2.8.3. Problemas

Problema 2.8.13 *Sea f una función real de variable real derivable. Consideremos la función $z = f(x^2 + y^2)$. Calcular las derivadas parciales de z.*

b) Aplicar el resultado anterior para calcular las parciales de las funciones $z = \sin(x^2 + y^2)$ y $z = e^{x^2+y^2}$.

Problema 2.8.14 *Sea* $z = \sqrt{x^2 + 2xy}$. *Calcular la derivada de* z *respecto de la variable* θ *sabiendo que* $x = \cos(\theta),\ y = \sin(\theta)$.

Problema 2.8.15 *Transformar la expresión* $x\frac{\partial^2}{\partial x^2}z - y\frac{\partial^2}{\partial y^2}z + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}z$ *en coordenadas polares*

Problema 2.8.16 *Si* $z = f(uv^2)$, *probar que*

$$2u\frac{\partial z}{\partial u} - v\frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

Problema 2.8.17 *Sean* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *y* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *funciones con derivadas parciales continuas de forma que* $f(x, y, g(x, y)) = e^{x^2+y^2}$. *Si* $g(0, 0) = 0$ *y* $\nabla f(0, 0, 0) = (1, 2, 1)$, *calcular* $\nabla g(0, 0)$.

Problema 2.8.18 *Sea* $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función de clase* $\mathcal{C}^1$. *Transformar a coordenadas polares las siguientes expresiones:*

- $x\frac{\partial}{\partial y}z - y\frac{\partial}{\partial x}z$.
- $x\frac{\partial}{\partial x}z - y\frac{\partial}{\partial y}z$.

Problema 2.8.19 *Sean* f, g *funciones de una variable dos veces derivables y sea*

$$u(x, t) = f(x + tc) + g(x - ct)$$

donde c *es una constante. Demostrar que* u *satisface la siguiente ecuación de ondas*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u$$

2.9. Resolución de los problemas.

Problema 2.9.1 *Describir geométricamente el conjunto:*
$C = \{(r, \theta)\ :\ r > 4\sin(\theta)\}$.

Teniendo presente la relación entre las coordenadas cartesianas y las polares se tiene:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{e} \quad y = r\sin(\theta).$$

Con lo cual, si deseamos representar el conjunto $r = 4\sin(\theta)$, nos queda:

$$r = 4\frac{y}{r} \Rightarrow r^2 = 4y,$$

De donde se desprende que:

$$x^2 + y^2 - 4y = 0 \Rightarrow x^2 + (y-2)^2 = 2^2.$$

Que es la ecuación de la circunferencia de centro el punto $(0,2)$ y radio 2. Por otra parte, como el conjunto que deseamos representar es: $r > 4\sin(\theta)$, una mera comprobación nos permite afirmar que el conjunto descrito es la parte del plano que queda fuera de la circunferencia anterior.

Problema 2.9.2 *Describir geométricamente el conjunto*

$$D = \{(r,\theta) : \; r = \frac{6}{2\sin\theta + \cos\theta}\}.$$

Teniendo en cuenta la relación entre las coordenadas cartesianas y las polares tenemos que:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Por lo tanto en el conjunto D se tiene:

$$r = \frac{6}{2\sin\theta + \cos\theta} \Rightarrow r(2\sin\theta + \cos\theta) = 6,$$

con lo cual,

$$2r\sin\theta + r\cos\theta = 6 \Rightarrow 2y + x = 6,$$

despejando la y nos queda:

$$y = -\frac{1}{2}x + 3.$$

Lo que significa que el conjunto D es la recta del plano que pasa por los puntos $(0,3), (6,0)$. También, se puede decir que es la recta que tiene pendiente $-\frac{1}{2}$ y pasa por el punto $(0,3)$.

Problema 2.9.3 (Teorema de Pitágoras) *Probar que si u, v son vectores no nulos ortogonales, entonces $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.*

Teniendo presente las propiedades del producto escalar y que $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle$, se tiene

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle.$$

Ahora, utilizando el hecho de que los vectores son ortogonales, es decir que $\langle u, v\rangle = 0$. Se concluye

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Problema 2.9.4 *Hallar el trabajo realizado por la fuerza $F = (\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7})$ cuando desplaza un objeto desde el punto $(-3,-5,-4)$ hasta $(4,9,11)$ a lo largo de la recta que los une.*

Como la particula se mueve desde el punto $P = (-3,-5,-4)$ hasta el punto $Q = (4,9,11)$ siguiendo la recta que une dichos puntos el vector de posición será:

$$PQ = (4,9,11) - (-3,-5,-4) = (7,14,15).$$

Teniendo presente la definición de trabajo nos queda:

$$W = \langle(\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7}), (7,14,15)\rangle = 6 - 4 + \frac{90}{7} = \frac{104}{7} \text{ unidades}$$

Problema 2.9.5 *Calcular las derivadas de las siguientes funciones:*
a) $f(x) = \sin(x^2)$. Dar el valor de la derivada en $x = 0$.
b) $f(x) = x^3\cos^3(x^3)$. Dar el valor de la derivada en $x = 0$.
c) $f(x) = x^x$. Dar el valor de la derivada en $x = 1$.
d) $f(x) = 2^x$. Dar el valor de la derivada en $x = 1$.
e) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Dar el valor de la derivada en $x = 0$.

a) Para obtener la derivada de $f(x) = \sin(x^2)$ aplicaremos la regla de la cadena. Teniendo en cuenta que podemos considerar $h(x) = \sin(x)$ y $g(x) = x^2$. Se tiene que $f(x) = (h \circ g)(x)$.

Por lo tanto,

$$f'(x) = (h \circ g)'(x) = h'(g(x))g'(x).$$

Como $h'(x) = \cos(x)$ y $g'(x) = 2x$, nos queda que

$$f'(x) = \cos(x^2)2x.$$

Finalmente, cuando $x = 0$ nos queda que $f'(0) = 0$.

b) Para obtener la derivada de la función $f(x) = x^3\cos^3(x^3)$, debemos tener presente la derivación del producto de dos funciones así como la regla de la cadena. Si llamamos $h(x) = x^3$ y $g(x) = \cos(x)$. se tiene que

$$f(x) = h(x)(h \circ (g \circ h))(x)).$$

Ahora, como $h'(x) = 3x^2$ y $g'(x) = -\sin(x)$. Aplicando la regla de la cadena, se cumple:

$$(h \circ (g \circ h))'(x) = h'(g \circ h)(x))(g \circ h)'(x) = h'(\cos(x^3))g'(h(x))h'(x) =$$

$$3\cos^2(x^3)(-\sin(x^3))3x^2 = -9x^2\cos^2(x^3)\sin(x^3).$$

Para obtener la derivada de la función f aplicamos la regla de derivación del producto:

$$f'(x) = 3x^2\cos^3(x^3) - 9x^5\cos^2(x^3)(\sin(x^3)).$$

Finalmente, sustituyendo en $x = 0$, se tiene que $f'(0) = 0$.

c) La derivada de $f(x) = x^x$ se puede calcular haciendo lo siguiente:

Si tomamos logaritmos, queda que $\ln(f(x)) = \ln(x^x) = x\ln(x)$. Derivando esta expresión tenemos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(x) + 1$$

por lo tanto,

$$f'(x) = f(x)(\ln(x) + 1) = x^x(\ln(x) + 1).$$

Sustituyendo $x = 1$ se tiene que $f'(1) = 1$.

d) Para derivar la función $f(x) = 2^x$ razonamos como en el apartado anterior:

$$\ln(f(x)) = \ln(2^x) = x\ln(2).$$

Ahora derivando nos queda que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(2).$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = 2^x\ln(2).$$

Sustituyendo en $x = 1$ queda que $f'(1) = 2\ln(2)$.

e) La derivada de la función $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ se puede obtener teniendo en cuenta la regla de la cadena y la derivada de un cociente. En efecto,

$$f'(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}.$$

Simplificando,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{2}{(1-x)^2}(\frac{1-x}{1+x})^{\frac{1}{2}}.$$

Sustituyendo en $x=0$, se obtiene que $f'(0)=1$.

Problema 2.9.6 *Calcular las derivadas de las siguientes funciones:*
a) $f(x) = (e^x\cos(x), e^x\sin(x))$.
b) $R(x) = (\ln(x^2), 0, \tan(x))$.
c) $S(x) = (\sqrt{x^2+x}, 2^x)$.
d) $\langle f, S\rangle(x)$.

(a). Las funciones cooredenadas de f son:

$$f_1(x) = e^x\cos(x),\ f_2(x) = e^x\sin(x).$$

Ahora derivamos las funciones coordenadas y nos queda:

$$f_1'(x) = e^x\cos(x) - e^x\sin(x),\ f_2'(x) = e^x\sin(x) + e^x\cos(x).$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$f'(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x), \sin(x) + \cos(x)).$$

(b). Las funciones coordenadas de R son:

$$R_1(x) = \ln(x^2),\ R_2(x) = 0,\ R_3(x) = \tan(x).$$

Con lo cual,

$$R_1'(x) = \frac{2}{x},\ R_2'(x) = 0,\ R_3'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

De donde se concluye que:

$$R'(x) = (\frac{2}{x}, 0, \frac{1}{\cos^2(x)}).$$

(c). Las funciones coordenadas de S son:

$$S_1(x) = \sqrt{x^2+x},\quad S_2(x) = 2^x.$$

Las derivadas de las funciones coordenadas vienen dadas por:

$$S_1'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+1}},\quad S_2'(x) = 2^x\ln(2).$$

Luego, la derivada de la función S será:

$$S'(x) = (\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+1}}, 2^x \ln(2)).$$

d) Teniendo presente la fórmula de derivación del producto escalar, sabemos que:

$$\langle f, S\rangle'(x) = \langle f'(x), S(x)\rangle + \langle f(x), S'(x)\rangle$$

Por lo tanto,

$$\langle f, S\rangle'(x) = \langle e^x(\cos(x) - \sin(x), \sin(x) + \cos(x)), (\sqrt{x^2+x}, 2^x)\rangle +$$

$$+\langle (e^x \cos(x), e^x \sin(x)), (\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+1}}, 2^x \ln(2))\rangle.$$

Con lo cual,

$$\langle f, S\rangle'(x) = e^x \sqrt{(\cos(x) - \sin(x))\sqrt{x^2+x} + (\sin(x) + \cos(x))2^x} +$$

$$e^x \sqrt{\cos(x)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+1}} + \sin(x)2^x \ln(2)}.$$

Problema 2.9.7 *Calcular el vector gradiente de las siguientes funciones en el punto que se indica:*
ii) $f(x, y, z) = \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, *en* $(1, -1, 1)$.
iii) $f(x, y) = x^2 + \ln(\sqrt{xy})$, *en* $(2, 1)$.
iv) $f(x, y) = \ln(\frac{1}{xy})$, *en* $(5, \sqrt{2})$.
v) $f(x, y) = \ln(x^2 + 2y + 1) + \sin(x + y)$, *en* $(0, 0)$.

ii) $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = \frac{z\sqrt{x^2+y^2} - x^2 z(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{x^2+y^2}$. Simplificando,

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = \frac{z\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2 z}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{zy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) = \frac{-xzy(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{x^2+y^2} = \frac{-xyz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$
$\frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Luego el vector gradiente es:

$$\nabla f(1,-1,1) = (\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

iii) $f(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}\ln(xy)$.
$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2x + \frac{1}{2}\frac{y}{xy} = 2x + \frac{1}{2x}$.
$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{1}{2}\frac{x}{xy} = \frac{1}{2y}$.
Por lo tanto,

$$\nabla f(2,1) = (\frac{17}{4}, \frac{1}{2}).$$

iv) $f(x,y) = -\ln(xy)$. Con lo cual,
$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = -\frac{1}{x}$ y $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = -\frac{1}{y}$. Consecuentemente

$$\nabla f(5,\sqrt{2}) = (-\frac{1}{5}, -\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

v) $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{2x}{x^2+2y+1} + \cos(x+y)$ y $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{2}{x^2+2y+1} + \cos(x+y)$. Luego,

$$\nabla f(0,0) = (1,3).$$

Problema 2.9.8 *En un circuito eléctrico de E voltios de fuerza electromotriz y resistencia R ohmios, la intensidad es de $I = \frac{E}{R}$ amperios. Si se fija la resistencia en 25 ohmios y la fuerza electromotiz en 100 voltios. ¿ Cómo varia la intersidad respecto de la resistencia? ¿ y respecto a la fuerza electromotriz.*

Como $I = ER^{-1}$ se tiene que

$$\frac{\partial I}{\partial E} = R^{-1}, \quad \frac{\partial I}{\partial R} = -ER^{-2}$$

y así, cuando $E = 100$ y $R = 25$, es

$$\frac{\partial I}{\partial E} = 25^{-1}, \quad \frac{\partial I}{\partial R} = -(100)(25)^{-2}.$$

Esto significa que, si se fija la resistencia en 25 ohmios, la intensidad de corriente crece (porque la derivada es positiva) con respecto al voltaje a la tasa de 25^{-1} amperios por voltio cuando la fuerza electromotriz es de 100 voltios. También significa que, si se fija la fuerza electromotriz en 100 voltios, la intensidad de corriente disminuye (porque la derivada es negativa) con respecto a la resistencia a la tasa de $100(25)^{-2}$ amperios por ohmio cuando la resistencia es de 25 ohmios.

Problema 2.9.9 *La ley de los gases ideales dice que $PV = kT$, donde P es la presión, V el volumen, T la temperatura y k una constante física. Hallar $\frac{\partial V}{\partial T}$ y $\frac{\partial V}{\partial P}$. Demostrar que*

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

Por la ley de los gases ideales podemos suponer que el volumen, la presión y la temperatura son funciones de dos variables que vienen dadas por

$$V(P,T) = k\frac{T}{P},\ P(V,T) = k\frac{T}{V},\ T(V,P) = \frac{1}{k}PV$$

Por lo tanto, calculando las derivadas parciales correspondientes queda:

$$\frac{\partial}{\partial T}V = k\frac{1}{P},\ \frac{\partial}{\partial V}P = -k\frac{T}{V^2}\ \frac{\partial}{\partial P}T = \frac{1}{k}V.$$

Luego,

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -k\frac{T}{V^2}k\frac{1}{P}\frac{1}{k}V = -k\frac{T}{PV} = -1.$$

Problema 2.9.10 *Sea $T(x,y) = 1 - 2x^2 - y^2$ el indice de toxicidad en cada punto del plano. Un insecto está situado en el punto $(1,2)$. Obtener el camino que debe tomar para que la toxicidad disminuya lo más rápido posible.*

La dirección donde la toxicidad disminuye más rápidamente es la de menos el gradiente, por lo tanto tenemos que calcular $\nabla T(1,2)$. Para ello calculamos las correspondiente derivadas parciales:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x,y) = -4x,\ \frac{\partial T}{\partial y}(x,y) = -2y.$$

Consecuentemente la dirección que se debe seguir es:

$$-\nabla T(1,2) = (4,4).$$

Problema 2.9.11 *La temperatura en cada uno de los puntos de una placa cuadrada está determinada por la función $T(x,y) = (x-1)^3(y-2)^2$. Se desea conocer cuales son, en el punto $(0,0)$, las direcciones de mayor crecimiento y decrecimiento de la temperatura.*

Para obtener las direcciones de mayor y menor crecimiento de la temperatura desde el punto $(0,0)$ tenemos que calcular $\nabla T(0,0)$. Para esto, pasamos a calcular las derivadas parciales, así:

$$\frac{\partial}{\partial x}T(x,y) = 3(x-1)^2(y-2)^2, \quad \frac{\partial}{\partial y}T(x,y) = 2(x-1)^3(y-2).$$

Con lo cual se tiene que

$$\nabla T(0,0) = (12,4).$$

Es decir, la dirección en la que más rápidamente aumenta la temperatura es $(12,4)$ y la dirección $(-12,-4)$ es en la que disminuye más rápidamente.

Problema 2.9.12 *Denotamos por $z = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ la altura de una montaña en la posición (x,y). ¿ En qué dirección desde $(1,0)$ hay que comenzar a caminar para escalar lo más rápidamente posible?*

La dirección desde el punto $(1,0)$ donde la pendiente aumenta más rápidamente es la de $\nabla f(1,0)$, por lo tanto tenemos que calcular las derivadas parciales en dicho punto. así que:

$$\frac{\partial}{\partial x}z = -4xe^{-x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}z = -6ye^{-3y^2}.$$

Por lo tanto, $\nabla z(1,0) = (-4e^{-1}, 0)$.

Problema 2.9.13 *Calcular los extremos relativos de la función $f(x,y) = xye^{x+2y}$.*

Lo primero que haremos es calcular los puntos críticos de f. Para ello, calculamos las derivadas parciales de la función:

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = ye^{x+2y} + xye^{x+2y} = (y+xy)e^{x+2y},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = xe^{x+2y} + 2xye^{x+2y} = (x+2xy)e^{x+2y}.$$

Ahora, tenemos que igualar a cero cada una de las derivadas parciales y resolver el sistema resultante:

$$y + xy = 0, \quad x + 2xy = 0.$$

Las soluciones son: $(0,0)$ y $(-1,-\frac{1}{2})$.

Para ver si estos puntos críticos son extremos relativos estudiaremos las derivadas parciales de segundo orden de la función f.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y) = 2ye^{x+2y} + xye^{x+2y},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y) = 4xe^{x+2y} + 4xye^{x+2y},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x,y) = e^{x+2y} + 2ye^{x+2y} + xe^{x+2y} + 2xye^{x+2y}.$$

Si ahora calculamos las derivadas parciales de segundo orden en el punto $(0,0)$ se obtiene:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(0,0) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(0,0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(0,0) = \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(0,0) = 1.$$

Por lo tanto el $Hf(0,0) < 0$, lo que nos dice que el punto $(0,0)$ es un punto de silla.

Por último, veamos que ocurre con el punto $(-1,-\frac{1}{2})$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(-1,-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}e^{-2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(-1,-\frac{1}{2}) = -2e^{-2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(-1,-\frac{1}{2}) = 0$$

Por lo tanto, $Hf(-1,-\frac{1}{2}) > 0$, y además $\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(-1,-\frac{1}{2}) < 0$, lo cual nos dice que el punto $(-1,-\frac{1}{2})$ es un máximo relativo.

Problema 2.9.14 *La temperatura en un punto (x,y) de una piedra plana es $T(x,y) = 4x^2-4xy+y^2$. Una hormiga camina sobre la piedra describiendo una circunferencia centrada en $(0,0)$ de radio 5. Determinar las temperaturas máxima y mínima que encontrará la hormiga.*

El problema nos pide que calculemos los extremos absolutos de la función $T(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$.

Para resolverlo, utilizaremos multiplicadores de Lagrange. Entonces lo primero que hacemos es considerar las restricciones de las variables de la siguiente forma:

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 25$$

ahora tenemos que calcular el gradiente de g :

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) = 2x, \quad \frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = 2y$$

Por lo tanto, $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$. Claramente, el único punto que anula al gradiente anterior es el $(0,0)$, que evidentemente no está en la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. Esto significa que podemos utilizar los multiplicadores de Lagrange.

Consideremos la función

$$F(x,y) = T(x,y) + \lambda g(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 25).$$

Ahora, calculamos las derivadas parciales de F, así nos queda:

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = 8x - 4y + 2x\lambda, \quad \frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = -4x + 2y + 2y\lambda.$$

Ahora, tenemos que resolver el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 8x & -4y & +2x\lambda & = 0 \\ -4x & +2y & +2y\lambda & = 0 \\ x^2 & +y^2 & -25 & = 0 \end{array} \right.$$

Para resolver el sistema anterior razonamos de la forma siguiente:

Multiplicamos la segunda ecuación por 2 y se la sumamos a la primera ecuación, con lo cual nos queda:

$$2x\lambda + 4y\lambda = 0,$$

de donde se obtiene que

$$2\lambda(x + 2y) = 0,$$

con lo cual se deduce que $\lambda = 0$ o $x = -2y$.

Estudiemos ahora que ocurre si $\lambda = 0$:

En este caso, la primera ecuación nos dice que $y = 2x$, y si ahora sustituimos estos valores en la tercera ecuación nos queda:

$x^2 + 4x^2 = 25$, de donde se obtiene que $x^2 = 5$, es decir $x = \pm\sqrt{5}$, luego obtenemos los puntos $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}), (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$.

Estudiamos ahora el caso en que $x = -2y$:

Sustituyendo estos valores en la tercera ecuación se tiene: $4y^2 + y^2 = 25$, es decir $y^2 = 5$, luego los puntos que nos quedan son $(-2\sqrt{5}, \sqrt{5}), (2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$.

Finalmente, para saber en qué puntos la temperatura es máxima o mínima debemos calcular:

$T(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}) = 0 = T(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}), T(-2\sqrt{5}, \sqrt{5}) = 125 = T(2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$.
Luego, los puntos donde la temperatura es máxima son: $(-2\sqrt{5}, \sqrt{5}), (2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$.
Los puntos donde la temperatura es mínima son: $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}), (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$.

Problema 2.9.15 *Determinar los extremos absolutos de la función* $f(x, y) = 2x + y^2$ *sobre el conjunto*

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1\}.$$

Como la función f es continua y el conjunto M es cerrado y acotado, entonces el teorema de Weierstrass nos asegura la existencia de los extremos absolutos.

Podemos escribir el conjunto M como la unión de su interior con su frontera. Respecto a los candidatos a extremos que podemos encontrar en su interior, tendremos que ver qué puntos anulan el gradiente de f. Si calculamos

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 2 \neq 0,$$

queda claro que en el interior de M no hay extremos.

Si ahora estudiamos lo que ocurre en la frontera de M. Obtenemos que si se define $g(x, y) := \frac{x^2}{2} + y^2$ se tiene.

$$\partial M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ g(x, y) = 1\}.$$

Para ver que sobre ∂M se puede aplicar el teorema de los multiplicadores tenemos que calcular el gradiente de g.

$$\nabla g(x, y) = (x, 2y)$$

que solo se anula cuando estamos en el punto $(0, 0) \notin \partial M$.

El sistema que debemos resolver es el siguiente:

$$2 + \lambda x = 0, \quad 2y + \lambda 2y = 0, \quad \frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

Resolviendo el sistema nos quedan solo dos soluciones que son: $(\sqrt{2}, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$. Calculando el valor de la función f es los dos puntos anteriores se concluye que $(\sqrt{2}, 0)$ es el máximo absoluto y que $(-\sqrt{2}, 0)$ es el mínimo absoluto.

Problema 2.9.16 *Sean f, g funciones de una variable dos veces derivables y sea*

$$u(x,t) = f(x+tc) + g(x-ct)$$

donde c es una constante. Demostrar que u satisface la siguiente ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u$$

Evidentemente para ver que la función $u(x,t) = f(x+tc) + g(x-ct)$ verifica la ecuación de ondas, utilizaremos la regla de la cadena.

Llamamos

$$h(x,t) = x + tc, \quad \text{y} \quad r(x,t) = x - tc.$$

Teniendo presente la composición de funciones escribimos:

$$u(x,t) = (f \circ h)(x,t) + (g \circ r)(x,t).$$

Ahora por la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x,t) = f'(h(x,t)) \frac{\partial}{\partial x} h(x,t) + g'(r(x,t)) \frac{\partial}{\partial x} r(x,t) = f'(x+ct) + g'(x-ct).$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = f'(h(x,t)) \frac{\partial}{\partial t} h(x,t) + g'(r(x,t)) \frac{\partial}{\partial t} r(x,t) = cf'(x+ct) - cg'(x-ct)$$

Ahora repitiendo el proceso anterior, i.e., aplicando la regla de la cadena a las funciones anteriores nos queda:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} (f'(x+ct) + g'(x-ct)) = f''(x+ct) + g''(x-ct)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} (cf'(x+tc) - cg'(x-ct)) = c^2 f''(x+tc) + c^2 g''(x-ct).$$

Con lo cual queda claro que la función $u(x,t)$ verifica la ecuación de ondas.

Problema 2.9.17 *Escribir en coordenadas polares la expresión:*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Según se ha visto en teoría sabemos que:

$$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(\theta)\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\cos(\theta)}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta} + \sin(\theta)\frac{\partial z}{\partial r}$$

De donde obtenemos que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = r\cos(\theta)\left(\cos(\theta)\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) - r\sin(\theta)\left(\frac{\cos(\theta)}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta} + \sin(\theta)\frac{\partial z}{\partial r}\right)$$

Reordenando se tiene:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = \left(r\cos^2(\theta) - r\sin^2(\theta)\right)\frac{\partial z}{\partial r} - \left(\cos(\theta)\sin(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta)\right)\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

Ahora simplificando nos queda:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = r\cos(2\theta)\frac{\partial z}{\partial r} - \sin(2\theta)\frac{\partial z}{\partial \theta}.$$

Problema 2.9.18 *Probar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función con derivada continua, entonces las funciones de la forma $z = f(uv^2)$ son solución de la ecuación diferencial*

$$2u\frac{\partial z}{\partial u} - v\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Si definimos la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $g(u, v) = uv^2$. Entonces está claro que $z = (f \circ g)(u, v)$.

Como necesitamos conocer las derivadas parciales de z, aplicamos la regla de la cadena:

$$\frac{\partial}{\partial u}z = \frac{\partial}{\partial u}(f \circ g)(u, v) = f'(uv^2)v^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial v} z = \frac{\partial}{\partial v}(f \circ g)(u,v) = f'(uv^2)2vu.$$

Ahora sustituyendo en la ecuación, nos queda:

$$2u\frac{\partial z}{\partial u} - v\frac{\partial z}{\partial v} = 2u\left(f'(uv^2)v^2\right) - v\left(f'(uv^2)2uv\right) = 2uv^2 f'(uv^2) - 2uv^2 f'(uv^2) = 0.$$

Capítulo 3

Cálculo Integral.

3.1. Cálculo de primitivas.

Definición 3.1.1 *Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Llamaremos primitiva de f, si existe, a una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumpla: $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Un resultado inmediato a partir de las propiedades de las derivadas es: Si F es una una primitiva de f, entonces cualquier otra primitiva G de f es de la forma $G = F + k$ para alguna constante k.

Como consecuencia de lo anterior denotaremos:

$$\int f(x)dx := \{F : F \text{ es primitiva de } f\} = F + k \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

Las propiedades fundamentales de las primitivas son:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

En este apartado daremos algunos de los métodos más sencillos de cálculo de primitivas.

3.1.1. Primitivas inmediatas.

1. $\int f^n(x)f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + k$ si $n \neq -1$

2. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + k$

3. $\int a^{f(x)} f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln(a)} + k \ (a > 0)$

4. $\int \cos(f(x))f'(x)dx = \sin(f(x)) + k$

5. $\int \sin(f(x))f'(x)dx = -\cos(f(x)) + k$

6. $\int \tan(f(x))f'(x)dx = -\ln|\cos(f(x))| + k$

7. $\int \sinh(f(x))f'(x)dx = \cosh(f(x)) + k$

8. $\int \cosh(f(x))f'(x)dx = \sinh(f(x)) + k$

9. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}dx = \arcsin(f(x)) + k$

10. $\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = \arctan(f(x)) + k$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = arg\sinh(x) + k$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = arg\cosh(x) + k$

13. $\int \frac{dx}{1-x^2} = arg\tanh(x) + k$

Ejemplo 3.1.2 *Calcular* $\int(3x^2-5)^3 xdx$.
Si llamamos $f(x) = 3x^2 - 5$, *entonces* $f'(x) = 6x$. *Con lo cual*

$$\int (3x^2-5)^3 xdx = \int f^3(x)\frac{f'(x)}{6}dx$$

Aplicando las propiedades de las primitivas, se tiene

$$= \frac{1}{6}\int f^3(x)f'(x)dx =$$

Ahora teniendo en cuenta la integral 1 de la tabla de integrales inmediatas:

$$= \frac{1}{6}\frac{f(x)^4}{4} + k = \frac{(3x^2-5)^4}{24} + k.$$

3.1.2. Integración por partes

Si el integrando se puede descomponer en el producto de una función $f(x)$ por la derivada de otra función $g(x)$ entonces

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Este método se aplicará siempre que $\int f'(x)g(x)dx$ tenga menos dificultad de cálculo que la integral de partida.

Usualmente este método se utiliza cuando el integrando está formado por el producto de una función polinómica y una trigonométrica, o por una exponencial y una polinómica, o una exponencial y una trigonométrica.

Ejemplo 3.1.3 *Calcular* $\int xe^x dx$.

En este caso, llamamos $f(x) = x$ *y* $g'(x) = e^x$*. Es fácil comprovar que* $f'(x) = 1$ *y que* $g(x) = \int g'(x)dx = e^x$*. Por lo tanto, aplicando integración por partes, nos queda:*

$$\int xe^x dx = \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx =$$

$$xe^x - \int e^x dx = e^x(x-1) + k$$

3.1.3. Integración por sustitución

A veces un cambio $x = \phi(t)$ transforma la integral dada en otra más sencilla

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Si efectivamente es así se resuelve la última integral y se sustituye t por $\phi^{-1}(x)$.

Ejemplo 3.1.4 *Calcular* $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$.

Aquí, se tiene que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$*. Si hacemos el cambio* $x = \phi(t) = t^2$ *nos queda que* $f(\phi(t)) = \frac{1}{t(1+t^2)}$

Con lo cual,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int \frac{1}{t(1+t^2)} 2tdt = 2\arctan(t) + k$$

Finalmente, como $t = \sqrt{x}$, *obtenemos que*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2\arctan(\sqrt{x}) + k$$

3.1.4. Integrales racionales

Se desea calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ donde ($P(x), Q(x)$ son polinomios).

Supondremos que el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$ ya que en caso contrario dividiríamos en primer lugar. En este caso se factoriza el denominador.

a) Supongamos que $Q(x)$ no tiene raíces complejas múltiples. La descomposición en fracciones será:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1)^m(x-x_2)^n...(x^2+a_1x+b_1)(x^2+a_2x+b_2)...}$$

$$= \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + ... + \frac{A_m}{(x-x_1)^m} + \frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + ... + \frac{B_n}{(x-x_2)^n} +$$

$$... + \frac{M_1x+N_1}{x^2+a_1x+b_1} + \frac{M_2x+N_2}{x^2+a_2x+b_2} + ...$$

El problema está resuelto teniendo en cuenta que:

$\int \frac{dx}{x-x_1} = \ln|x-x_1| + k$

$\int \frac{dx}{(x-x_1)^k} = \frac{(x-x_1)^{-k+1}}{-k+1} + k$ si $k \neq 1$

$\int \frac{M_1x+N_1}{x^2+a_1x+b_1}dx = \frac{M_1}{2}\ln(x^2+a_1x+b_1) + \frac{M_1\alpha+N_1}{\beta}\arctan(\frac{x-\alpha}{\beta}) + k.$

Ejemplo 3.1.5 *Calcular* $\int \frac{x^3+2x^2}{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}dx$.

Si factorizamos el denominador, se tiene:

$$x^4+3x^3+4x^2+3x+1 = (x+1)^2(x^2+x+1)$$

Por lo tanto, nos tenemos que plantear el sistema:

$$\frac{x^3+2x^2}{x^4+3x^3+4x^2+3x+1} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}$$

De donde se obtiene:

$$x^3+2x^2 = A(x^2+x+1) + B(x+1)(x^2+x+1) + (Mx+N)(x+1)^2$$

Para $x = -1$ *se obtiene que* $A = 1$.
Luego,

$$x^3 + 2x^2 = (x^2 + x + 1) + B(x+1)(x^2 + x + 1) + (Mx + N)(x + 1)^2$$

Identificando coeficientes y resolviendo el sistema resultante queda:

$$B = 0,\ M = 1,\ N = -1$$

Con lo cual,

$$\int \frac{x^3 + 2x^2}{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2}dx + \int \frac{x-1}{x^2 + x + 1}dx =$$

$$-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) + K$$

b) Si el denominador tiene raíces complejas múltiples es útil el método de Hermite:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1)^m(x-x_2)^n...(x^2 + a_1x + b_1)^p(x^2 + a_2x + b_2)^q...} =$$

$$\frac{d}{dx}(\frac{p(x)}{(x-x_1)^{m-1}(x-x_2)^{n-1}...(x^2 + a_1x + b_1)^{p-1}(x^2 + a_2x + b_2)^{q-1}...})+$$

$$\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{B_1}{x - x_2} + ... + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + a_1x + b_1} + \frac{M_2x + N_2}{x^2 + a_2x + b_2} + ...$$

donde $p(x)$ es un polinomio indeterminado de grado una unidad menor que el grado del polinomio $(x-x_1)^{m-1}(x-x_2)^{n-1}...(x^2 + a_1x + b_1)^{p-1}(x^2 + a_2x + b_2)^{q-1}...$

Luego

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{p(x)}{(x-x_1)^{m-1}(x-x_2)^{n-1}...(x^2 + a_1x + b_1)^{p-1}(x^2 + a_2x + b_2)^{q-1}...} +$$

$$\int \frac{A_1}{x-x_1}dx + \int \frac{B_1}{x-x_2}dx + ... + \int \frac{M_1x + N_1}{x^2 + a_1x + b_1}dx + \int \frac{M_2x + N_2}{x^2 + a_2x + b_2}dx + ...$$

Ejemplo 3.1.6 *Calcular* $\int \frac{3x^4+4x^2+2x+1}{x(x^2+1)^2}dx$

Puesto que el denominador presenta raíces complejas múltiples, utilizamos el método de Hermite.

$$\frac{3x^4+4x^2+2x+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{d}{dx}(\frac{ax+b}{x^2+1}) + \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+1}$$

Operando,

$$\frac{3x^4+4x^2+2x+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{a(x^2+1)-2x(ax+b)}{(x^2+1)^2} + \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+1}$$

Reduciendo a denominador común e identificando:

$$3x^4+4x^2+2x+1 = -ax^3-2x^2+ax+A(x^4+2x^2+1)+(Mx+N)x(x^2+1)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, nos queda:

$$A=1,\ M=2,\ a=1,\ N=1,\ b=0.$$

En consecuencia:

$$\int \frac{3x^4+4x^2+2x+1}{x(x^2+1)^2}dx = \frac{x}{x^2+1} + \ln|x| + \int \frac{2x+1}{x^2+1}dx =$$

$$\frac{x}{x^2+1} + \ln|x| + \ln(x^2+1) + \arctan(x) + k.$$

3.1.5. Integrales racionales en seno y coseno.

$\int R(\sin(x),\cos(x))dx$ (R es una función racional de sus variables)

1) Si $R(-\sin(x),\cos(x)) = -R(\sin(x),\cos(x))$ efectuamos el cambio $\cos(x) = t$ y la convertimos en una integral racional.

2) Si $R(\sin(x),-\cos(x)) = -R(\sin(x),\cos(x))$ efectuamos el cambio $\sin(x) = t$ y la convertimos en una integral racional.

3) Si $R(-\sin(x),-\cos(x)) = R(\sin(x),\cos(x))$ efectuamos el cambio $\tan(x)=t$ y la convertimos en una integral racional.

4) En cualquier caso es valido el cambio $\tan(\frac{x}{2}) = t$ y la integral queda racional.

Si hacemos el cambio $\sin(x)=t$ queda: $\cos(x)=\sqrt{1-t^2},\ dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Si hacemos el cambio $\cos(x) = t$ queda: $\sin(x) = \sqrt{1-t^2}$, $dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Si hacemos el cambio $\tan(x) = t$ queda: $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\sin(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Ejemplo 3.1.7 *Calcular* $\int \frac{dx}{\sin(x)\cos^2(x)}$

Si llamamos $R(x, y) = \frac{1}{xy^2}$ *es claro que* R *es una función racional y además* $R(-\sin(x), \cos(x)) = -R(\sin(x), \cos(x))$ *Luego efectuamos el cambio* $\cos(x) = t$. *Entonces,*

$$\int \frac{dx}{\sin(x)\cos^2(x)} = -\int \frac{dt}{(1-t^2)t^2}.$$

Esta última integral es racional y por lo tanto la sabemos resolver.

3.1.6. Integrales irracionales.

(a) Integrales del tipo $\int R\left[x, [\frac{ax+b}{cx+d}]^{\frac{m}{n}}, [\frac{ax+b}{cx+d}]^{\frac{p}{q}}, ..., [\frac{ax+b}{cx+d}]^{\frac{u}{v}}\right] dx$

donde R designa una función racional de sus variables, se transforma en una integral racional mediante el cambio:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^{\alpha}, \text{ donde } \alpha = m.c.m(n, q, ..., v).$$

Ejemplo 3.1.8 *Calcular*

$$\int \frac{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$$

Como

$$\frac{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{1 + \sqrt[3]{x}} = \frac{x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}}}{1 + x^{\frac{1}{3}}}$$

$m.c.m(2, 3) = 6$ *luego el cambio que se hace es* $x = t^6$, *de donde se tiene que* $dx = 6t^5 dt$. *Por lo tanto,*

$$\int \frac{x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}}}{1 + x^{\frac{1}{3}}} dx = \int \frac{t^2 + 2t^3 + t^4}{1 + t^2} 6t^5 dt.$$

Como el polinomio del numerador tiene grado mayor que el denominador, lo primero que debemos hacer es dividir los polinomios, y nos queda:

$$6\int \frac{t^2+2t^3+t^4}{1+t^2}t^5dt = 6\int (t^7+2t^6-2t^4+2t^2-2+\frac{2}{1+t^2}dt =$$

$$6(\frac{t^8}{8}+\frac{2t^7}{7}-\frac{2t^5}{5}+\frac{2t^3}{3}-2t+2\arctan(t))+k$$

ahora, teniendo presente que $t=\sqrt[6]{x}$, *se obtiene el resultado.*

(b) Integrales del tipo

$$\int \frac{A_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

donde $A_n(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, se resuelven por la igualdad:

$$\int \frac{A_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = A_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+k\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

donde $A_{n-1}(x)$ es un polinomio indeterminado de grado $n-1$ y k es una constante indeterminada.

Derivando ambos miembros, multiplicando por la raíz del trinomio e identificando coeficientes obtenemos un sistema que nos permite calcular los coeficientes de A_{n-1}.

La resolución de la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ se efectúa descomponiendo el trinomio en suma o diferencia de cuadrados.

Ejemplo 3.1.9 *Calcular* $\int \frac{-4x+10}{\sqrt{-x^2+4x-3}}dx$

Por la fórmula de reducción de este tipo de integrales tenemos:

$$\int \frac{-4x+10}{\sqrt{-x^2+4x-3}}dx = A\sqrt{-x^2+4x-3}+B\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$$

Calculemos las constantes A *y* B*:*

$$\frac{-4x+10}{\sqrt{-x^2+4x-3}} = \frac{A(-2x+4)}{2\sqrt{-x^2+4x-3}}+\frac{B}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$$

Entonces,

$$-8x+20=-2Ax+4A+2B \Rightarrow A=4,\ B=2$$

Por otra parte, $-x^2+4x-3 = 1-(x-2)^2 \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} =$ $\arcsin(x-2)+k$

Luego,

$$\int \frac{-4x+10}{\sqrt{-x^2+4x-3}}dx = 4\sqrt{-x^2+4x-3} + 2\arcsin(x-2)+k$$

(c) Integrales del tipo $\int R(f(x))dx$, donde R es una función racional y $f(x)$ tiene inversa y la derivada de su inversa es una función racional. Se hace el cambio de variable $t = f(x)$ y así se reduce a una integral racional.

Ejemplo 3.1.10 *Calcular* $\int \frac{e^x+e^{2x}}{1+e^x}dx$

Hacemos el cambio $t = e^x$*, entonces* $dx = \frac{1}{t}dt$*, con lo cual*

$$\int \frac{e^x+e^{2x}}{1+e^x}dx = \int \frac{t+t^2}{1+t}\frac{dt}{t} = \int dt = t+k = e^x+k.$$

3.1.7. Aplicaciones

Sea f una función real de variable real y sea $G(f)$ su gráfica (es decir una curva en el plano). Supongamos que conocemos la gráfica de una función derivable, entonces la pendiente de la recta tangente a la gráfica en un punto $(x, f(x))$ viene dada por $f'(x)$. Recíprocamente, cuando la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto (x, y) viene dada por $m = f'(x)$, se puede hallar una familia de funciones, por integración, de forma que la pendiente de la recta tangente a sus gráficas sea justamente m.

Una ecuación $s = f(t)$, donde s es la distancia en el instante t de un cuerpo respecto de un punto fijo en su trayectoria (linea recta), define completamente el movimiento del cuerpo. Su velocidad y su aceleración en el instante f vienen dadas por

$$v = \frac{d}{dt}s = f'(t), \quad a = \frac{d}{dt}v = \frac{d^2}{dt^2}s = f''(t)$$

Reríprocamente, si la velocidad (o aceleración) se conoce en el instante t junto con la posición en algún instante dado, la ecuación del movimiento puede ser deducida por integración indefinida.

Ejemplo 3.1.11 *Hallar la ecuación de la función, de forma que la pendiente a su gráfica en un punto sea igual al negativo del doble de su abcisa en* *el punto y que en $x = 0$ la función tome el valor 2, (es decir que $(0, 2)$ sea un punto de su gráfica).*

Esto quiere decir, que buscamos funciones $f(x)$ de forma que $f'(x) = -2x$. Teniendo en cuenta que la integración es la operación inversa de la derivación, nos queda:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int -2xdx = -x^2 + k$$

Entre todas estas funciones, queremos la que cumpla que $2 = f(0) = -0^2 + k$. Resolviendo la ecuación, se concluye que la función buscada es

$$f(x) = -x^2 + 2.$$

Ejemplo 3.1.12 *Una sustancia se está transformando en otra a un ritmo proporcional a la cantidad que queda sin transformar. Si la cantidad inicial era 50 y es 25 cuando $t = 3$ ¿ Cuándo quedará 10^{-1} de la sustancia.*

Sea $q(t)$ la sustancia no transformada en el instante t. Entonces $q'(t) = -kq(t)$, de donde
$\frac{q'(t)}{q(t)} = -k$*, entonces integrando queda:*

$$\ln(q(t)) = \int \frac{q'(t)}{q(t)}dt = -\int kdt = -kt + c$$

De donde obtenemos que

$$q(t) = e^{-kt}e^c$$

Como sabemos que $q(0) = 50$ y $q(3) = 25$, se tiene:

$$50 = q(0) = e^{-k0}e^c = e^c \Rightarrow 25 = q(3) = e^{-k3}50$$

es decir, $\frac{1}{2} = e^{-k3} \Rightarrow -k3 = -\ln(2) \Rightarrow k = \frac{1}{3}\ln(2) \simeq 0{,}23$
Ahora tenemos que calcular el tiempo t de forma que
$e^{-0{,}23t}50 = \frac{50}{10} \Rightarrow 0{,}23t = \ln(10) \Rightarrow t = \frac{100}{23}\ln(10) \simeq 10$

3.1.8. Problemas

Problema 3.1.13 *Calcular las siguientes primitivas*
a) $\int \frac{dx}{x\ln(x)}$
b) $\int x\sqrt{3+4x}dx$
c)$\int e^x \cos(x)dx$
d) $\int \arctan(x)dx$

e) $\int x^2 e^x dx$
f) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} dx$

Problema 3.1.14 *Calcular*
a) $\int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx$ *(b)* $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)^3} dx$
c) $\int \frac{x^4}{x^3-2x^2-2x-3} dx$ *(d)* $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

Problema 3.1.15 *Calcular*
(a) $\int \frac{dx}{1+\sin(x)}$ *(b)* $\int (\cos(x)\sin(2x) dx$
(c) $\int \frac{dx}{1+\sin(x)^2}$ *(d)* $\int \cos^3(x)\sin^2(x) dx$
(e) $\int x^2\sqrt{x-7} dx$ *(f)* $\int \frac{\cos^3(x)}{\sin^2(x)} dx$
(g) $\int \sin(2x) sin(3x) dx$

Problema 3.1.16 *Calcular*
(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+1}} dx$ *(b)* $\int \frac{x^4+7x^3-x}{\sqrt{-x^2-2x}} dx$
(c) $\int \frac{\tan^2(x)+3\tan(x)}{1+\tan(x)} dx$

Problema 3.1.17 *Calcular la família de funciones de forma que la pendiente de la recta tangente a su gráfica en un punto $(x, f(x))$ viene dada por la expresión $m = \sin^2(x)$.*

Problema 3.1.18 *Una partícula se mueve a lo largo de una recta desde el origen en $(t = 0)$ con la velocidad $v = t^2 - 3t + 2$. Calcular la distancia recorrida cuando $t = 4$.*

3.1.9. Integral definida

La idea geométrica de la integral definida es la siguiente: si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces

$$\int_a^b f(x) dx$$

representa el área de la región del plano comprendida entre los puntos a y b del eje de abcisas y la gráfica de la función $G(f)$.

Sean f, g dos funciones continuas tales que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para $a \leq x \leq b$. Entonces el área de la región del plano comprendida entre las gráficas $G(f)$, $G(g)$ y las rectas $x = a$, $x = b$ viene dada por

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$

La regla de Barrow nos muestra un método para obtener integrales definidas a partir del cálculo de primitivas.

Teorema 3.1.19 (Regla de Barrow) *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que admite como primitiva a $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b := F(b) - F(a).$$

El teorema fundamental del cálculo es:

Teorema 3.1.20 *Si f es una función integrable en $[a, b]$ y definimos la función*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

entonces F es continua. Si además f es continua, entonces F es derivable y $F'(x) = f(x)$

Una propiedad que es interesante es la siguiente:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

siempre que $a < c < b$.

Ejemplo 3.1.21 *Hallar el área comprendida entre la parábola $y = x^2$ y las rectas $x = 1$, $x = 3$.*

El área que nos piden es el área comprendida por la gráfica de la función $f(x) = x^2$, entre los puntos $\{1, 3\}$. Consecuentemente:

$$A = \int_1^3 x^2 dx$$

Por la regla de Barrow, para calcular la integral anterior, primero calculamos

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + k$$

de todas estas primitivas elegimos una, por ejemplo $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Entonces

$$A = \int_1^3 x^2 dx = F(3) - F(1) = 9 - \frac{1}{3}$$

Ejemplo 3.1.22 *Calcular la derivada de la función* $F(x) = \int_0^x \cos^3(t)dt$

Consideremos la función $f(x) = \cos^3(x)$ *está claro que dicha función es continua entonces, por el teorema fundamental del cálculo, la función* $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ *es derivable y además*

$$F'(x) = f(x) = \cos^3(x).$$

3.1.10. Problemas

Problema 3.1.23 *Calcular el área encerrada entre las curvas:*
(a) $y = x^2$, $x = y^2$.
(b) $y = x^2$, $x + y = 2$.
(c) $y = e^x$, $y = 2$, $x = 0$.
(d) $y = \cos(x)$, $y = \sin(x)$ *entre* $x = 0$ *y* $x = \frac{\pi}{2}$

Problema 3.1.24 *Calcular el área que encierra la gráfica de* $f(x) = x\ln(1+x^2)$, $x \in [0, 1]$, *por encima del eje* $0x$.

Problema 3.1.25 *Calcular el área del recinto del primer cuadrante encerrado por las curvas:* $x^2 + y^2 = 3$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $x = \frac{1}{2}y^2$.

Problema 3.1.26 *Derivar las funciones:*
(a) $F(x) = \int_1^x \frac{\sin(t)}{t}dt$
(b) $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^t}{t}dt$
(c) $F(x) = \int_x^{x^2} t\sin(t^2)dt$.
(d) $F(x) = \int_{\ln(x)}^3 e^{-t}\cos(e^t)dt$.

3.2. Integrales dobles

Consideremos una función continua real de dos variables $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde Ω es un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados. Así dicho rectangulo lo podemos escribir como $\Omega = [a, b] \times [c, d]$. Supongamos que $f(x, y) \geq 0$ en Ω, de forma que la gráfica de f, $z = f(x, y)$ es una superficie que está arriba del rectángulo Ω. Esta superficie, el rectángulo Ω y los planos $x = a,\ x = b,\ y = c,\ y = d$ forman la frontera de una región V en el espacio. El volumen de la región del espacio V se llama integral doble de f sobre Ω y se denota por

$$\int\int_\Omega f(x, y)dxdy.$$

Ejemplo 3.2.1 *Si* $f(x,y) = 2$ *entonces* $\int\int_{[a,b]\times[c,d]} 2dxdy = 2(b-a)(d-c)$, *pues la integral es igual al volumen de una caja rectangular con base* $[a,b] \times [c,d]$ *y altura* 2.

3.2.1. Integrales sobre rectángulos

Ahora estudiamos el principio de Cavalieri para calcular integrales dobles.

Consideremos la región sólida bajo la gráfica $z = f(x,y)$ definida en $[a,b] \times [c,d]$, donde f es continua y positiva. Hay dos funciones naturales para el área de la sección trasversal. Una se obtiene utilizando planos que corten perpendicularmente el eje y. Así, el área A_{x_0} de la sección trasversal determinada por el plano $x = x_0$, se puede calcular por

$$A_{x_0} = \int_c^d f(x_0, y)dy.$$

Se calculamos el área de la sección trasversal determinada por el plano $y = y_0$ (utilizando planos perpendiculares al eje x) nos quedará:

$$A_{y_0} = \int_a^b f(x, y_0)dx.$$

El principio de Cavalieri dice que el volumen, V, de la región sólida anterior es:

$$V = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Cada una de las integrales que aparecen en la expresión anterior se llaman integrales iteradas.

Teorema 3.2.2 (Fubini) *Si* $f : \Omega = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *es una función continua entonces*

$$\int\int_\Omega f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Ejemplo 3.2.3 *Si* $f(x,y) = 2$ *que es una función continua, entonces por el teorema de Fubini se tiene:*

$$\int_a^b \left(\int_c^d 2dy \right) dx = \int_a^b 2(d-c)dx = 2(d-c)(b-a).$$

Ejemplo 3.2.4 *Calcular el volumen acotado por la gráfica de* $f(x,y) = 1 + 2x + 3y$ *el rectángulo* $[1,2] \times [0,1]$ *y los cuatro lados del rectángulo.*

Como la función $f(x,y)$ *es positiva sobre el rectángulo* $[1,2] \times [0,1]$ *sabemos que:*

$V = \int\int_{[1,2]\times[0,1]} f(x,y)dxdy.$

Por otra parte, como $f(x,y)$ *es una función continua, el teorema de Fubini nos garantiza que:*

$$V = \int\int_{[1,2]\times[0,1]} f(x,y)dxdy = \int_1^2 \left(\int_0^1 f(x,y)dy\right) dx$$

Calculando, primero

$\int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 (1 + 2x + 3y)dy = 1 + 2x + \frac{3}{2}$

Obtenemos,

$$V = \int\int_{[1,2]\times[0,1]} f(x,y)dxdy = \int_1^2 (1 + 2x + \frac{3}{2})dx = \frac{11}{2}.$$

3.2.2. Integrales sobre conjuntos más generales

En esta sección trabajaremos con tres tipos especiales de conjuntos:

Definición 3.2.5 *Supongamos que tenemos dos funciones reales* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *que cumplen* $f(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in [a,b]$. *Si* $D = \{(x,y) \ : \ x \in [a,b], \ f(x) \leq y \leq g(x)\}$ *diremos que* D *es una región de tipo I.*

Definición 3.2.6 *Diremos que una región del plano,* D, *es de tipo II si existen dos funciones* $h, r : [a,b] \to \mathbb{R}$ *tal que* $h(y) \leq r(y)$ *para todo* $y \in [a,b]$ *de forma que* $D = \{(x,y) \ : y \in [a,b], \ h(y) \leq x \leq r(y)\}$

Definición 3.2.7 *Diremos que* D *es una región de tipo III si es a la vez de tipo I y de tipo II.*

Definición 3.2.8 *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función continua y sea de* D *una región del plano:*

(a) Si D *es de tipo I, se define*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy := \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} f(x,y)dy\right) dx$$

(b) Si D *es de tipo II, se define*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy := \int_a^b \left(\int_{h(y)}^{r(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

(c) Si D es de tipo III, entonces $\int\int_D f(x,y)dxdy$ *es como en (a) o como en (b) indistintamente.*

Ejemplo 3.2.9 *Calcular* $\int\int_T (x^3y + \cos(x))dxdy$*, donde* T *es la región del plano acotada por el triángulo de vertices* $(0,0), (\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Está claro que T *es una región de tipo I ya que si tomamos* $f(x) = 0$ *para todo* $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ *y* $g(x) = x$ *para todo* $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$*. Tenemos:*

$$T = \{(x,y) \ : \ x \in [0, \frac{\pi}{2}], \ f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

Con lo cual

$$\int\int_T (x^3y + \cos(x))dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^x (x^3y + \cos(x))dy \right) dx$$

Ahora calculamos $\int_0^x (x^3y + \cos(x))dy = \frac{x^5}{2} + x\cos(x)$

Por lo tanto,

$$\int\int_T (x^3y + \cos(x))dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{x^5}{2} + x\cos(x))dx = \frac{(\frac{\pi}{2})^6}{12} + \frac{\pi}{2} - 1$$

Teorema 3.2.10 *Sean* D_1, D_2 *dos regiones del plano de tipo I, II o III, de forma que* $D_1 \cap D_2$ *no contiene a ningún rectangulo.*

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *es una función continua, entonces*

$$\int\int_{D_1 \cup D_2} f(x,y)dxdy = \int\int_{D_1} f(x,y)dxdy + \int\int_{D_2} f(x,y)dxdy$$

Ejemplo 3.2.11 *Calcular la integral de la función* $f(x,y) = x$ *en la región,* D*, de ordenada positiva y limitada por las circunferencias centradas en el origen y radios* 2 *y* 3 *respectivamente.*

Llamamos

$$D_1 = \{(x,y) \ : \ x \in [-2,2] \ \ \sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2}\} \ \text{ tipo I}$$

$$D_2 = \{(x,y) \ : \ x \in [-3,-2] \ : \ 0 \leq y \leq \sqrt{9-x^2}\} \ \text{ tipo I}$$

$$D_3 = \{(x,y) \ : \ x \in [2,3] \ : \ 0 \leq y \leq \sqrt{9-x^2}\} \ \text{ tipo I}$$

Es claro que $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ *y además las intersecciones de tales conjuntos no contienen rectángulos. Por lo tanto*

$$\int\int_D xdxdy = \int\int_{D_1} xdxdy + \int\int_{D_2} xdxdy + \int\int_{D_3} xdxdy$$

Observación 3.2.12 *La integral doble también nos permite el cálculo de áreas de regiones del plano. Para verlo es suficiente pensar que si queremos calcular el área de* D *(una región de tipo I, II o III) si consideramos la función constante* $f(x, y) = 1$, *entonces*

$$\int\int_D 1dxdy$$

representa el volumen del cilindro de base D *y altura* 1. *Como el volumen de un cilindro es el área de la base por su altura, se tiene que podemos considerar la integral anterior como el área de* D.

3.2.3. Cambio de variable

Sean D y D^* dos regiones de tipo I o II en el plano. Una función diferenciable $T : D^* \to D$ tal que $T(D^*) = D$ y sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función integrable. Pretendemos expresar la integral $\int\int_D f(x, y)dxdy$ como una integral sobre D^* de la función $f \circ T$.

Supongamos que D^* es de tipo I, con coordenadas (u, v). Más aún, supongamos que D es un conjunto con variables (x, y) de tipo I. La función T viene dada por

$$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) \ \text{ para } \ (u, v) \in D^*$$

Podríamos pensar que

$$\int\int_D f(x, y)dxdy = \int\int_{D^*} f(x(u, v), y(u, v))dudv,$$

donde $(f \circ T)(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$.

En particular, se cumpliría:

$$A(D) = \int\int_D dxdy = \int\int_{D^*} dudv.$$

Pero, si tomamamos $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ y $T(u, v) = (-u^2 + 4u, v)$. Se tiene que $T(D^*) = [0, 3] \times [0, 1]$ y es claro que $A(D) \neq A(D^*)$.

Para arreglar el hecho anterior, introducimos los siguientes conceptos.

Definición 3.2.13 *Dada $T : D^* \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función con derivadas parciales continuas, de forma que $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$. Llamaremos Jacobiano de T en un punto (u,v) al determinante de la matriz Jacobiana:*

$$dJ_T(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 3.2.14 *Si consideramos en el plano el cambio a coordenadas polares:*

$T(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ *entonces su jacobiano es:*

$$dJ_T(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r$$

Teorema 3.2.15 (cambio de variable) *Sean D y D^* dos regiones elementales del plano, $T : D^* \to D$ una función con derivadas parciales continuas tal que es inyectiva y sobre. Entonces si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función continua:*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{D^*} (f \circ T)(u,v) dJ_T(u,v) dudv.$$

Ejemplo 3.2.16 *Calcular el área del circulo de radio $R > 0$.*

Para simplificar los cálculos supondremos el circulo centrado en el origen, y lo denotamos por D. Ahora, consideremos la transformación a polares:

$$T : [0,R] \times [0,2\pi] \to D,$$

está claro que T es biyectiva. Entonces aplicando el teorema del cambio de variable:

$$A(D) = \int\int_D dxdy = \int\int_{[0,R]\times[0,2\pi]} (1 \circ T)(r,\theta) dJ_T(r,\theta) dr d\theta =$$

$$\int_0^R \left(\int_0^{2\pi} r d\theta\right) dr = \int_0^r r 2\pi dr = 2\pi [\frac{r^2}{2}]_0^R = \pi R^2.$$

3.2.4. Problemas

Problema 3.2.17 *Calcular la integral $\int\int_T e^{x+y} dxdy$, donde T es la región del plano limitada por el triangulo de vertices $\{(0,0),(2,2),(4,0)\}$.*

Problema 3.2.18 *Hallar el volumen de un sólido limitado por arriba por el plano* $z = y$ *y por debajo por el plano* xy *sobre el cuadrante de disco* $x^2 + y^2 \leq 1$ *con* $x, y \geq 0$.

Problema 3.2.19 *Calcular el volumen bajo la superficie* $z = x + 2y + 4$ *sobre la región* D *limitada por las rectas* $y = 2x$, $y = 3 - x$ *e* $y = 0$.

Problema 3.2.20 *Calcular el volumen de la región del primer octante limitada por arriba por la superficie* $z = xy$ *y por debajo por la región* $x^2+y^2 \leq 1$.

Problema 3.2.21 *Calcular el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones* $y = (x-1)^2$, *e* $y = +\sqrt{1-x^2}$.

Problema 3.2.22 *Calcular el área de la región del plano que se encuentra en el primer cuadrante y está limitada por las curvas* $y = \frac{4}{x^2}$ *e* $y = 5 - x^2$.

Problema 3.2.23 *Calcular* $\int\int_D (x^2 + y^2 + 1)dxdy$, *donde* D *es la región interior a la circunferencia* $x^2 + y^2 = 4$.

Problema 3.2.24 *Calcular el volumen de una esfera de radio* $R > 0$.

Problema 3.2.25 *Calcular la integral* $\int\int_D xydxdy$, *donde* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, y \leq 0, \ x^2 + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$.

Problema 3.2.26 *Calcular la integral* $\int\int_D xdxdy$, *donde* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

Problema 3.2.27 *Calcular la integral impropia* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$.

Problema 3.2.28 *Hallar el volumen bajo la superficie* $z = x + y + 2$ *sobre la región* D *delimitada por las curvas* $y = x^2$ *e* $y = 2$.

Problema 3.2.29 *Calcular la integral* $\int\int_D \ln(x^2+y^2+2)dxdy$ *donde* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 4, \ 0 \leq y \leq x\}$.

3.3. Cálculo vectorial.

Para construir modelos matemáticos de ciertas nociones físicas, como trabajo o potencial, hay que generalizar el concepto original de integral. Esto nos llevará al concepto de integral de línea.

3.3.1. Trayectorias

Definición 3.3.1 *Dado un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, llamaremos trayectoria o camino en $\mathbb{R}^n$ a toda función continua $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.*

Al punto $\alpha(a)$ lo llamaremos punto inicial del camino.

Al punto $\alpha(b)$ lo llamaremos punto final del camino.

Cuando $\alpha(a) = \alpha(b)$ diremos que la trayectoria es cerrada.

Llamaremos curva parametrizada por α al conjunto $\alpha([a, b]) \subset \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 3.3.2 *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces $G(f)$ es una curva en $\mathbb{R}^2$ que viene parametrizada por el siguiente camino:*

$$\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \quad \alpha(x) = (x, f(x))$$

es claro que $\alpha([a, b]) = G(f)$.

Ejemplo 3.3.3 *La esfera $S = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 = R^2\}$ es una curva en el plano que viene parametrizada por*

$$\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \quad \alpha(\theta) = (R\cos(\theta), R\sin(\theta))$$

es claro que $\alpha([0, 2\pi]) = S$.

Hay que tener presente que una curva puede tener muchas paramentrizaciones:

Ejemplo 3.3.4 *El conjunto $A = \{(x, y) \ : \ x, y \geq 0, \ x^2 + y^2 = 4\}$ es una curva en el plano que puede ser paramentrizada por:*

$$\alpha : [0, 2] \to \mathbb{R}^2 \quad \alpha(x) = (x, +\sqrt{4 - x^2})$$

es claro que $\alpha([0, 2]) = A$.

$$\beta : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2 \quad \beta(\theta) = (2\cos(\theta), 2\sin(\theta))$$

es claro que $\beta([0, \frac{\pi}{2}]) = A$.

$$\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2 \quad \gamma(\theta) = (2\sin(\theta), 2\cos(\theta))$$

es claro que $\gamma([0, \frac{\pi}{2}]) = A$.

Definición 3.3.5 *Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria. Diremos que α es de clase C^1 si es derivable y su derivada es continua.*

Definición 3.3.6 *Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria de clase C^1. Llamaremos longitud de la trayectoria al valor de la siguiente integral:*

$$l(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Ejemplo 3.3.7 *Calcular la longitud de una circunferencia de radio $R > 0$.*

Consideremos la parametrización de la circunferencia dada por $\alpha(\theta) = (R\cos(\theta), R\sin(\theta))$. Claramente, esta trayectoria es de clase C^1 ya que

$$\alpha'(\theta) = (-R\sin(\theta), R\cos(\theta))$$

Por lo tanto

$$l(\alpha) = \int_0^{2\pi} \|(-R\sin(\theta), R\cos(\theta))\| d\theta = R\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi R.$$

Definición 3.3.8 *Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria. Diremos que α es de clase C^1 a trozos, si existe $\{a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b\}$ de forma que α es de clase C^1 en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.*

Diremos que la curva $C = \alpha([a,b])$ es simple si α es inyectiva en $]a,b[$.

Cada curva simple tiene dos posibles orientaciones o direcciones asociadas con ella. Si P y Q son los extremos de la curva, entonces podemos considerar que P sea el punto inicial y Q el punto final o bien que Q sea el punto inicial y P el final.

Una curva simple diremos que está orientada positivamente si su recorrido es el anti horario.

Definición 3.3.9 *Diremos que una curva C es una curva cerrada simple si se puede paramentrizar mediante una trayectoria de clase C^1 a trozos $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ inyectiva en $]a,b[$ y de forma que $\alpha(a) = \alpha(b)$.*

3.3.2. Integral de trayectoria

Definición 3.3.10 *Llamaremos campo escalar a toda función real de varias variable continua.*

Definición 3.3.11 *Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria de clase C^1 y sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar. Llamaremos integral de trayectoria del campo escalar f sobre la trayectoria α a la siguiente integral*

$$\int_\alpha f = \int_a^b f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\| dt.$$

interpretación física.

Las integrales de trayectoria se presentan en problemas relativos a la distribución de masa a lo largo de una curva. Imaginemos una curva $C = \alpha([a,b])$ en el espacio como un alambre delgado de densidad variable. Supongamos que la densidad en cada punto se representa por un campo escalar f, i.e., $f(x,y,z)$ es la masa por unidad de longitud en el punto (x,y,z). La masa total del alambre vendrá dada entonces por

$$M = \int_\alpha f$$

Ejemplo 3.3.12 *Calcular la masa total de un alambre que tiene la forma $\alpha([0,2\pi])$ donde $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, sabiendo que su densidad viene dada por $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.*

Según hemos visto,

$$M = \int_\alpha f = \int_0^{2\pi} (\cos^2(t) + \sin^2(t) + t^2)\sqrt{(-\sin(t))^2 + \cos^2(t) + 1}dt =$$

$$\int_0^{2\pi} (1+t^2)\sqrt{2}dt = \sqrt{2}[t + \frac{t^3}{3}]_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}(3 + 4\pi^2)$$

Interpretación geométrica

Consideremos una curva plana que tiene una parametrización $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ inyectiva y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un campo escalar tal que $f(x,y) \geq 0$, entonces podemos considerar la valla que sobre el plano tiene la forma de $\alpha([a,b])$ y en cada punto de la curva $\alpha(t)$ su altura es de $f(\alpha(t))$. Con lo cual,

$$\int_\alpha f$$

representará el área de la valla.

3.3.3. Problemas

Problema 3.3.13 *Calcular la masa total de un alambre de densidad variable $f(x,y,z) = xe^{yz}$, sabiendo que el alambre adopta la forma $\alpha : [1,2] \to \mathbb{R}^3$ donde $\alpha(t) = (t,t,-t)$.*

Problema 3.3.14 *Calcular la longitud de la curva* $\alpha(t) = (t, t^2)$ *si* $t \in [0, 5]$.

Problema 3.3.15 *Calcular la longitud de la curva* $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ *si* $t \in [-1, 1]$

Problema 3.3.16 *Calcular el área de una valla de dos metros de altura en cada punto cuya forma viene dada por* $\alpha(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ *si* $t \in [0, 2\pi]$.

3.3.4. Integral de línea

Definición 3.3.17 *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}^n$, *llamaremos campo vectorial en* $\mathbb{R}^n$ *con dominio* A, *a toda función continua* $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Definición 3.3.18 *Sea* $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *un campo vectorial y sea* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *una trayectoria de clase* C^1, *tal que* $\alpha([a, b]) \subseteq A$. *Llamaremos integral de línea de* F *a lo largo de* α *a la siguiente integral:*

$$\int_\alpha F ds = \int_a^b \langle F(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle dt.$$

Ejemplo 3.3.19 *Clacular la integral de línea del campo vectorial* $F(x, y, z) = (x, y, z)$ *a lo largo de la trayectoria* $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $\alpha(t) = (\sin(t), \cos(t), t)$.

$$\int_\alpha F ds = \int_0^{2\pi} \langle (\sin(t), \cos(t), t), (\cos(t), -\sin(t), 1)\rangle dt =$$
$$\int_0^{2\pi} (\sin(t)\cos(t) - \sin(t)\cos(t) + t)dt = \int_0^{2\pi} tdt = 2\pi^2.$$

Otra forma de expresar la integral de línea, quizás más usual, es la siguiente

$$\int_\alpha F ds = \int_a^b \langle F(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle dt =$$
$$\int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(\alpha(t))\alpha_i'(t)dt = \sum_{i=1}^n \int_a^b F_i(\alpha(t))\alpha_i'(t)dt.$$

Si definimos

$$\int_\alpha F_i dx_i := \int_a^b F_i(\alpha(t))\alpha_i'(t)dt,$$

entonces podemos escribir:

$$\int_\alpha Fds := \sum_{i=1}^{n} \int_\alpha F_i dx_i = \int_\alpha F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + ... + F_n dx_n.$$

Donde $F = (F_1, F_2, ..., F_n)$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$.

Ejemplo 3.3.20 *Calcular $\int_\alpha x^2dx + xydy + dz$, donde $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(t) = (t, t^2, 1)$.*

Si utilizamos las definiciones antriores el campo vectorial que debemos integrar es $F(x,y,z) = (x^2, xy, 1)$.

Además,

$$\int_\alpha x^2dx + xydy + dz = \int_0^1 F_1(\alpha(t))\alpha_1'(t)dt + \int_0^1 F_2(\alpha(t))\alpha_2'(t)dt +$$

$$\int_0^1 F_3(\alpha(t))\alpha_3'(t)dt = \int_0^1 t^2dt + \int_0^1 t^3 2tdt + \int_0^1 0dt = [\frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5}]_0^1 = \frac{11}{15}.$$

Teorema 3.3.21 (Propiedades) *Sean I_1, I_2 dos intervalos cerrados y acotados y sea $h : I_1 \to I_2$ una función biyectiva con derivada continua tal que $h'(t) > 0$ para todo $t \in I_1$. Sea $\alpha : I_2 \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria de clase C^1. Entonces la composición $\rho(t) = \alpha(h(t))$ define una trayectoria tal que $\rho(I_1) = \alpha(I_2)$ y además*

$$\int_\rho Fds = \int_\alpha Fds.$$

Si $h'(t) < 0$, entonces

$$\int_\rho Fds = -\int_\alpha Fds.$$

Si F, G son campos vectoriales, entonces $\int_\alpha (F+G)ds = \int_\alpha Fds + \int_\alpha Gds$.
Si $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$, entonces $\int_\alpha Fds = \int_{\alpha_1} Fds + \int_{\alpha_2} Fds$

Interprestación física

Una de las aplicaciones físicas más importantes de las integrales de línea es el cálculo del trabajo. Recordemos que si un objeto se mueve sobre una línea recta un desplazamiento R en presencia de un campo de fuerzas constante F, el trabajo realizado es $\langle R, F \rangle$.

El caso en que la fuerza F no es constante y el objeto se mueve sobre una curva lisa $C = \alpha([a,b])$ (en lugar de sobre una recta) requiere atención adicional. Si la partícula se mueve de $\alpha(t)$ a $\alpha(t+h)$ el vector desplazamiento será, para valores pequeños de h, aproximadamente: $\alpha(t+h) - \alpha(t)$

Teniendo presente la interpretación geométrica de la derivada se tendrá que $\alpha(t+h)-\alpha(t) \simeq \alpha'(t)dt$. Como cuando h es suficientemente pequeño podemos considerar que la trayectoria está sobre una recta y la fuerza es constante. Entonces el trabajo realizado será

$$\langle F(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle dt$$

Por lo tanto, el trabajo para desplazar la partícula desde $\alpha(a)$ hasta $\alpha(b)$ vendrá dado por

$$T = \int_a^b \langle F(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle dt = \int_\alpha F ds.$$

Ejemplo 3.3.22 *Un objeto se mueve en el campo de fuerzas $F(x,y) = (y^2, 2(x+1)y)$, en sentido contrario a las agujas del reloj, desde el punto $(2,0)$ sobre el camino eliptico $\frac{x^2}{4}+y^2 = 1$ hasta el punto $(-2,0)$ y luego vuelve al punto $(2,0)$ moviendose sobre el eje x. ¿ Cuál es el trabajo realizado por el campo de fuerzas sobre el objeto.?*

Primero calcularemos el trabajo realizado para trasladar el objeto desde el punto $(2,0)$ hasta $(-2,0)$.

Como la trayectoria que sigue es un arco de elipse donde el punto inicial es el $(2,0)$ y el final es $(-2,0)$ parametrizamos el arco de la elipse del siguiente modo:

$$\alpha : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2 \; : \; \alpha(t) = (2\cos(t), \sin(t)).$$

Por lo tanto, el trabajo será:

$$T_1 = \int_\alpha F ds = \int_0^\pi \langle F(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle dt =$$

$$\int_0^\pi \langle (\sin^2(t), 2(2\cos(t)+1)\sin(t)), (-2\sin(t), \cos(t))\rangle dt =$$

$$\int_0^\pi (6\cos^2(t) + 2\cos(t) - 2)\sin(t) dt$$

$$|\text{se hace el cambio } u = \cos(t)| =$$

$$\int_{-1}^{1}(6u^2+2u-2)du=0$$

Ahora para mover el punto desde $(-2,0)$ hasta $(2,0)$ sigue una recta que podemos parametrizar como

$$\beta:[-2,2]\to\mathbb{R}^2\ :\ \beta(t)=(x,0).$$

Luego,

$$T_2=\int_\beta Fds=\int_{-2}^{2}0dt=0$$

Luego el trabajo realizado es $T=T_1+T_2=0$.

3.3.5. Campos conservativos

Definición 3.3.23 *Un campo vectorial $F:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ se llama conservativo si existe una función $f:\Omega\to\mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas de forma que $F=\nabla f$. A la función f se le llama potencial del campo conservativo.*

Teorema 3.3.24 *Sea $F:\Omega\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^n$ un campo conservativo de forma que $F=\nabla f$, si $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ una trayectoria de clase C^1 tal que $\alpha([a,b])\subseteq\Omega$, entonces*

$$\int_\alpha Fds=f(\alpha(b))-f(\alpha(a)).$$

Como la integral de línea de un campo conservativo sólo depende del punto inicial y del punto final de la trayectoria, se desprende de forma sencilla que si la trayectoria es cerrada, es decir si el punto inicial y final coinciden, entonces la integral es cero.

Ejemplo 3.3.25 *Calcular $\int_\alpha ydx+xdy$ donde $\alpha:[0,1]\to\mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(t)=(\frac{t^4}{4},\sin^3(\frac{t\pi}{2}),0)$.*

Si consideramos la función $f(x,y,z)=xy$, claramente $\nabla f=F$ donde $F(x,y,z)=(y,x,0)$. Por lo tanto

$$\int_\alpha ydx+xdy=\int_\alpha Fds=\int_\alpha\nabla fds=f(\alpha(1))-f(\alpha(0))=\frac{1}{4}$$

3.3.6. Campos conservativos en el plano y en el espacio

Teorema 3.3.26 *Sea $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial con derivadas parciales continuas. F es conservativo si, y sólo si, se cumple que*

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Si $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un campo conservativo, para calcular su función potencial podemos utilizar varios métodos, por ejemplo

$$f(x,y) = \int_0^x F_1(t,0)dt + \int_0^y F_2(x,t)dt$$

Siempre que la expresión anterior tenga sentido.

Otra forma de hacerlo es utilizando la integración parcial

$$f(x,y) = \int F_1(x,y)dx = \int F_2(x,y)dy$$

Ejemplo 3.3.27 *Estudiar si el campo vectorial $F(x,y) = (e^x \sin(y) - y, e^x \cos(y) - x - 2)$ es conservativo. En caso afirmativo obtener su potencial.*

En este caso sabemos que $F_1(x,y) = e^x \sin(y) - y$, $F_2(x,y) = e^x \cos(y) - x - 2$. Entonces

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = e^x \cos(y) - 1 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

Luego el campo es conservativo.

Para hallar el potencial, observemos que $F_1(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $F_2(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Integrando parcialmente, queda:

$$f(x,y) = \int (e^x \sin(y) - y)dx = e^x \sin(y) - yx + C(y)$$

donde $C(y)$ depende únicamente de y. Si ahora derivamos respecto de la segunda variable, tenemos:

$$e^x \cos(y) - x + C'(y) = e^x \cos(y) - x - 2 \Rightarrow C'(y) = -2 \Rightarrow C(y) = -2y.$$

Con lo cual

$$f(x,y) = e^x \sin(y) - yx - 2y$$

Definición 3.3.28 *Sea $F = (F_1, F_2, F_3) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial con derivadas parciales continuas. Llamaremos campo rotacional asociado a F al siguiente campo*

$$rot(F) = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})$$

Una técnica interesante para obtener el campo rotacional de F es el siguiente: llamemos $i = e_1,\ j = e_2,\ k = e_3$, donde e_1, e_2, e_3 son los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Entonces

$$rot(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Observación 3.3.29 *Si un fluido se mueve en una región del plano xy, se puede imaginar el rotacional como la circulación del fluido. Una buena manera de medir el efecto de la circulación (módulo, dirección y sentido) es colocar una pequeña rueda con aspas en el fluido. El rotacional mide la tasa de rotación del fluido en el punto P, en el que se coloca la rueda con aspas, en la dirección de su eje. El rotacional es positivo para la rotación en sentido anti horario, y negativo en sentido horario. Sea $V(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ la velocidad de un fluido y supongamos que introducimos una rueda con aspas en el fluido, de tal forma que su eje es el eje z. El fluido tiende a arremolinarse alrededor del eje z haciendo que giren las aspas. Podemos estudiar el movimiento del fluido mediante el de las aspas. Se puede ver que la velocidad angular del líquido*

alrededor del eje x es proporcional a $(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z})$

Alrededor del eje y es proporcional a $(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x})$

Alrededor del eje z es proporcional a $(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})$

Así la tendencia del fluido a formar un remolino viene dada por $rot(V)$. En el caso particular en que $rot(V) = 0$, el fluido no tiene movimiento rotacional.

El rotacional se puede utilizar para estudiar si un campo vectorial en el espacio es conservativo.

Teorema 3.3.30 *Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 excepto, a lo sumo, en un número finito de puntos. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) Para cualquier curva cerrada simple orientada C,

$$\int_C F ds = 0.$$

b) Si C_1, C_2 son dos curvas cerradas simples orientadas con los mismos extremos, entonces

$$\int_{C_1} F ds = \int_{C_2} F ds.$$

c) F es conservativo.
d) $rot(F) = (0,0,0)$.

Ejemplo 3.3.31 *Estudiar si el campo $F(x,y,z) = (y, z\cos(yz)+x, y\cos(yz))$ es conservativo. En caso afirmativo, calcular la función potencial.*

Según el resultado anterior, calcularemos el rotacional:

$$rot(F) = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})$$

$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \cos(yz) - yz\sin(yz)$
$\frac{\partial F_2}{\partial z} = \cos(yz) - zy\sin(yz)$
$\frac{\partial F_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = 0$
$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$
Entonces.

$$rot(F) = (\cos(yz) - y\sin(yz)z - \cos(yz) + z\sin(yz)y, 0, 1-1) = (0,0,0)$$

Por lo tanto F es conservativo.

$$f(x,y,z) = \int_0^x F_1(t,,0,0)dt + \int_0^y F_2(x,t,0)dt + \int_0^z F_3(x,y,t)dt$$

En este caso concreto, tenemos:

$$F_1(t,0,0) = 0, \quad F_2(x,t,0) = x, \quad F_3(x,y,t) = y\sin(yt)$$

Con lo cual

$$f(x,y,z) = \int_0^x 0dt + \int_0^y xdt + \int_0^z y\sin(yt)dt = xy + \sin(yz)$$

3.3.7. Problemas

Problema 3.3.32 *Calcular* $\int_\alpha \frac{y^2dx+x^2dy}{1+x^2+y^2}$, *siendo* α *el triángulo de vertices* $(0,0),(1,0),(1,1)$ *recorrido en sentido anti horario.*

Problema 3.3.33 *Calcular* $\int_\alpha (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, *siendo* α *la gráfica de* $y=x^2$ *recorrida de* $(-1,1)$ *hasta* $(1,1)$.

Problema 3.3.34 *Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas* $F(x,y)=(x^2-y^2,2xy)$ *al mover la partícula en sentido anti horario recorriendo una vez el contorno del cuadrado limitado por los ejes coordenados y las rectas* $x=a$, $y=a$ $(a>0)$.

Problema 3.3.35 *Probar que los siguientes campos son conservativos y calcular el correspondiente potencial:*
a) $F(x,y)=(2xy+3,x^2+7y)$.
b) $F(x,y)=(e^x\cos(y),-e^x\sin(y))$.
c) $F(x,y,z)=(yz,xz,zy)$.

Problema 3.3.36 *El campo gravitatorio* G *entre dos partículas de masas* M *(en el origen de coordenadas) y* m *separadas una distancia* r *es*

$$G(x,y,z)=\frac{KmM}{r^3}(-x,-y-z)$$

donde K *es la constante gravitatoria.*
a) Probar que G *es conservativo.*
b) Calcular su potencial (se llama potencial newtoniano).
c) Calcular el trabajo realizado por G *para mover un objeto del punto* P *hasta el punto* Q.

Problema 3.3.37 *Consideremos el campo de fuerzas* $F(x,y)=(2xy\sin(x^2y)+\cos(x),x^2\sin(x^2y)-\frac{1}{y})$ *definido en el semiplano* $y>0$.
i) ¿ Es F *conservativo.?*
ii) Calcular el trabajo realizado al trasladar una partícula bajo ese campo por el camino $\alpha(t)=(t\cos(t),1-\frac{t}{\pi}+t^{\cos(t)})$, *con* $t\in[0,\pi]$.

Problema 3.3.38 *Probar que el campo vectorial* $F(x,y,z)=(2xyz+z^2-2y^2+1,x^2z-4xy,x^2y+2xz-2)$ *es conservativo. Calcular su potencial. Calcular la integral de línea* $\int_\alpha Fds$, *donde* $\alpha:[0,1]\to\mathbb{R}^3$ *está definida por* $\alpha(t)=(t^2,\sin(\frac{t\pi}{2}),\cos(\pi t))$.

3.3.8. El teorema de Green

El teorema de Green relaciona la integral de línea de un campo vectorial en el plano a lo largo de una curva cerrada simple con una integral doble sobre la región encerrada por dicha curva.

Teorema 3.3.39 *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ una región de tipo I o II o III y sea C su frontera (que viene parametrizada positivamente por α). Supongamos que $F = (F_1, F_2) : D \to \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial de clase C^1. Entonces:*

$$\int_\alpha F ds = \int\int_D (\frac{\partial}{\partial x} F_2 - \frac{\partial}{\partial y} F_1) dxdy.$$

Mediante el teorema de Green podemos calcular áreas de regiones del plano:

Sea D una región el plano donde se puede aplicar el teorema de Green, entonces

$$Ar(D) = \int\int_D 1dxdy = \int\int_D (\frac{\partial}{\partial x} F_2 - \frac{\partial}{\partial y} F_1) dxdy$$

Tomando por ejemplo $F_1 = 0$, $F_2 = x$ o bien tomando $F_1 = -y,\ F_2 = x$, nos queda, aplicando Green:

$$Ar(D) = \int_{\partial D^+} xdy = \frac{1}{2} \int_{\partial D^+} -ydx + xdy.$$

Ejemplo 3.3.40 *Calcular el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.*

Damos la orientación positiva de la elipse:

$$\alpha(t) = (a\cos(t), b\sin(t)) \quad t \in [0, 2\pi].$$

Por el teorema de Green se tiene:

$$Ar(El) = \frac{1}{2} \int_{\partial D^+} -ydx + xdy =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-b\sin(t))(-a\sin(t)) + a\cos(t) b\cos(t) dt =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} badt = ba\pi$$

3.3.9. Problemas

Problema 3.3.41 *Aplicando el teorema de Green calcular* $\int_\alpha (y+3x)dx + (9y-x)dy$*, siendo* α *la elipse* $4x^2+y^2=1$ *orientada positivamente.*

Problema 3.3.42 *Aplicando el teorema de Green calcular* $\int\int_D (2x-y^2)dxdy$*, siendo* D *el recinto encerrado por la curva* $x^2+y^2=4$.

Problema 3.3.43 *Calcular* $\int_\alpha (2x^3-y^3)dx+(x^3+y^3)dy$ *siendo* α *la circunferencia unidad recorrida en sentido positivo.*

Problema 3.3.44 *Usando el teorema de Green calcular*

$$\int_{C^+}(x^2+y^3)dx+x^4dy,$$

donde C^+ *es la frontera de* $[0,1]\times[0,1]$ *orientada positivamente.*

3.4. Resolución de problemas

3.4.1. Cálculo de primitivas.

Problema 3.4.1 *Calcular* $\int \frac{dx}{3x^2+2x+1}$.

Como es la integral de un cociente de polinomios podemos intentar obtener las raices del denominador, pero resulta que en este caso el denominador no tiene raices reales.

Cuando ocurre lo anterior, se razona de la forma siguiente:

$$3x^2+2x+1=(ax+b)^2+c,$$

en nuestro caso queda:

$$3x^2+2x+1=(\sqrt{3}x+\frac{1}{\sqrt{3}})^2+\frac{2}{3}.$$

Por lo tanto,

$$\int\frac{dx}{3x^2+2x+1}=\int\frac{dx}{(\sqrt{3}x+\frac{1}{\sqrt{3}})^2+\frac{2}{3}}=$$

$$\int\frac{dx}{\frac{2}{3}[\frac{3}{2}(\sqrt{3}x+\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1]}=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{(\frac{3x+1}{\sqrt{2}})^2+1}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}dx}{(\frac{3x+1}{\sqrt{2}})^2+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{3x+1}{\sqrt{2}})+c$$

Problema 3.4.2 *Resolver* $\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}dx$.

$$\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}dx = \int \frac{1+x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}dx = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

con lo cual, $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x) - \sqrt{1-x^2} + C.$

Problema 3.4.3 *Resolver*

$$\int \frac{x^4}{x^3-2x^2-2x-3}dx$$

Evidentemente se trata de una integral de una función racional en donde el numerador tiene grado mayor que el denominador. En este caso, lo primero que debemos hacer es dividir y de este modo se tiene:

$$x^4 = (x^3-2x^2-2x-3)(x+2) + 6x^2 + 7x + 6.$$

Con lo cual, aplicando las propiedades de la integral nos queda:

$$\int \frac{x^4}{x^3-2x^2-2x-3}dx = \int \frac{(x^3-2x^2-2x-3)(x+2)+6x^2+7x+6}{x^3-2x^2-2x-3}dx =$$

$$\int (x+2)dx + \int \frac{6x^2+7x+6}{x^3-2x^2-2x-3}dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \int \frac{6x^2+7x+6}{x^3-2x^2-2x-3}dx$$

De este modo nos queda por resolver

$$\int \frac{6x^2+7x+6}{x^3-2x^2-2x-3}dx.$$

En este caso, factorizando el denominador queda:

$$x^3-2x^2-2x-3 = (x-3)(x^2+x+1)$$

Por lo tanto, tenemos que obtener los valores de A, M, N para los cuales se cumpla:

$$\frac{6x^2+7x+6}{x^3-2x^2-2x-3} = \frac{A}{x-3} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$$

Esta igualdad nos conduce al sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{llll} A & +M & +0N & = 6 \\ A & -3M & +N & = 7 \\ A & +0M & -3N & = 6 \end{array} \right.$$

La solución del sistema es la siguiente:

$$A = \frac{81}{13},\ M = \frac{-3}{13}\ N = \frac{1}{13}.$$

Una vez visto esto, la integral que nos queda por calcular será:

$$\int \frac{6x^2+7x+6}{x^3-2x^2-2x-3}dx = \frac{81}{13}\int \frac{1}{x-3}dx + \frac{1}{13}\int \frac{-3x+1}{x^2+x+1}dx$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{6x^2+7x+6}{x^3-2x^2-2x-3}dx = \frac{81}{13}\ln(x-3) + \frac{1}{13}\int \frac{-3x+1}{x^2+x+1}dx$$

Ahora tenemos que obtener:

$$\int \frac{-3x+1}{x^2+x+1}dx = -\frac{3}{2}\int \frac{2x+1-1-(2/3)}{x^2+x+1}dx =$$
$$-\frac{3}{2}\left[\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x^2+x+1}\right] =$$
$$-\frac{3}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

Finalmente nos queda por resolver:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}).$$

Recopilando se tiene:

$$\int \frac{x^4}{x^3-2x^2-2x-3}dx =$$
$$\frac{5\sqrt{3}}{39}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) - \frac{3}{26}\ln(x^2+x+1) + \frac{81}{13}\ln(x-3) + \frac{x^2}{2} + 2x + c.$$

Problema 3.4.4 *Resolver la integral* $\int \frac{x^4+7x^3-x}{\sqrt{-x^2-2x}}dx$

Claramente esta integral se resuelve aplicando el método de Aleman. Por lo tanto hacemos:

$$\int \frac{x^4+7x^3-x}{\sqrt{-x^2-2x}}dx = (ax^3+bx^2+cx+d)\sqrt{-x^2-2x} + k\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x}}$$

Ahora quitamos las integrales derivando:

$$\frac{x^4+7x^3-x}{\sqrt{-x^2-2x}} = (3ax^2+2bx+c)\sqrt{-x^2-2x}+(ax^3+bx^2+cx+d)\frac{-x-1}{\sqrt{-x^2-2x}}+\frac{k}{\sqrt{-x^2-2x}}.$$

De donde se tiene que:

$$x^4+7x^3-x = (3ax^2+2bx+c)(-x^2-2x)+(ax^3+bx^2+cx+d)(-x-1)+k$$

Igualando coeficientes nos queda el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrrrr} -4a & +0b & +0c & 0d & 0k & =1 \\ -7a & -3b & +0c & +0d & +0k & =7 \\ 0a & -5b & -2c & +0d & +0k & =0 \\ 0a & +0b & -3c & -d & +0k & =-1 \\ 0a & +0b & +0c & -d & +k & =0 \end{array}\right.$$

Las solución del sistema es la siguiente:

$$a=\frac{-1}{4},\ b=-\frac{7}{4},\ c=\frac{35}{8},\ d=-\frac{97}{8}, k=-\frac{97}{8}.$$

Con lo cual queda:

$$\int \frac{x^4+7x^3-x}{\sqrt{-x^2-2x}}dx =$$

$$(-\frac{1}{4}x^3-\frac{7}{4}x^2+\frac{35}{8}x-\frac{97}{8})\sqrt{-x^2-2x}-\frac{97}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x}}$$

Para obtener el resultado nos falta por calcular

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+1)^2}} = \arcsin(x+1).$$

Luego se tiene que

$$\int \frac{x^4+7x^3-x}{\sqrt{-x^2-2x}}dx =$$
$$(-\frac{1}{4}x^3-\frac{7}{4}x^2+\frac{35}{8}x-\frac{97}{8})\sqrt{-x^2-2x}-\frac{97}{8}\arcsin(x+1)+c$$

Problema 3.4.5 *Calcular* $\int \arctan(x)dx$.

Para calcular las primitivas de la función $\arctan(x)$ aplicaremos partes:
LLamemos $f'(x) = 1$, y $g(x) = \arctan(x)$. Con lo cual, $f(x) = x$ y $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Por lo tanto,

$$\int \arctan(x)dx = \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx =$$
$$x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + k.$$

Problema 3.4.6 *Calcular la primitiva* $\int \frac{dx}{1+\sin(x)}$.

Como la función que tenemos que integrar es racional en senos y cosenos. Viendo los cambios adecuados, hacemos $\tan(\frac{x}{2}) = t$.
Entonces nos queda: $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ y $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.
Por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{1+\sin(x)} = \int \frac{2dt}{1+t^2+2t} = \frac{-2}{1+t} + k = \frac{-2}{1+\tan(\frac{x}{2})} + k.$$

Problema 3.4.7 *Calcular la primitiva* $\int \frac{dx}{1+\sin^2(x)}$.

Como la función que tenemos que integrar es racional en senos y cosenos. Viendo los cambios adecuados, hacemos $\tan(x) = t$.
Con el cambio anterior, es fácil ver que

$$\sin^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2}, \text{ y } dx = \frac{1}{1+t^2}dt.$$

Teniendo presente lo anterior, tendremos que calcular:

$$\int \frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t).$$

Por último, deshaciendo el cambio, concluimos

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\tan(x)) + C.$$

Problema 3.4.8 *Calcular el área encerrada entre las curvas:* $y = \sin(x)$, $y = cos(x)$, $x = 0$ *y* $x = \frac{\pi}{2}$.

El área del recinto viene dada por

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(x) - \cos(x)| dx.$$

Teniendo en cuenta los valores de las funciones $y = \sin(x)$ e $y = \cos(x)$, la integral anterior nos queda:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(x) - \cos(x)| dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(x) - \sin(x)) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x) - \cos(x)) dx.$$

Por lo tanto,

$$A = [\sin(x) + \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos(x) - \sin(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} - 1 - 1 + \sqrt{2} = 2(\sqrt{2} - 1)$$

Problema 3.4.9 *Obtener la derivada de la función*

$$F(x) = \int_x^{x^2} x \sin(t^2) dt.$$

La función F se puede escribir de la siguiente forma:

$$F(x) = x \int_x^{x^2} \sin(t^2) dt$$

Ahora, para derivar la función F respecto de la variable x tenemos que derivar un producto de funciones:

$$F'(x) = \int_x^{x^2} \sin(t^2) dt + x \left(\int_x^0 \sin(t^2) dt + \int_0^{x^2} \sin(t^2) dt \right)'.$$

Como la derivada de la suma es la suma de las derivadas, nos queda que:

$$F'(x) = \int_x^{x^2} \sin(t^2) dt + x (\int_x^0 \sin(t^2) dt)' + x (\int_0^{x^2} \sin(t^2) dt)'.$$

Por lo tanto, como $(\int_x^0 \sin(t^2)dt)' = -\sin(x^2)$, tenemos que

$$F'(x) = \int_x^{x^2} \sin(t^2)dt - x\sin(x^2) + x(\int_0^{x^2} \sin(t^2)dt)'.$$

Por último, nos queda por obtener $(\int_0^{x^2} \sin(t^2)dt)'$. Que aplicando adecuadamente la regla de la cadena es:

$$(\int_0^{x^2} \sin(t^2)dt)' = 2x\sin(x^4).$$

Luego, el resultado será:

$$F'(x) = \int_x^{x^2} \sin(t^2)dt - x\sin(x^2) + 2x^2\sin(x^4).$$

Problema 3.4.10 *Obtener la derivada de la función*

$$G(x) = \int_x^{x^2} t\sin(t^2)dt.$$

La función G se puede escribir de la siguiente forma:

$$G(x) = \int_x^0 t\sin(t^2)dt + \int_0^{x^2} t\sin(t^2)dt$$

Ahora, para derivar la función G respecto de la variable x tenemos que derivar una suma de funciones. Como la derivada de la suma es la suma de las derivadas, nos queda que:

$$G'(x) = \left(\int_x^0 t\sin(t^2)dt\right)' + \left(\int_0^{x^2} t\sin(t^2)dt\right)'.$$

Si llamamos $F(x) := \int_0^x t\sin(t^2)dt$, se tiene que
$\left(\int_x^0 t\sin(t^2)dt\right)' = -F'(x) = -x\sin(x^2)$.
Por otra parte si llamamos $g(x) = x^2$, tenemos que:

$$F(g(x)) = \int_0^{x^2} t\sin(t^2)dt$$

Aplicando la regla de la cadena se tiene que:

$$(F\circ g)'(x) = \left(\int_0^{x^2} t\sin(t^2)dt\right)' = F'(g(x)g'(x) = x^2\sin(x^4)2x.$$

Por lo tanto,

$$G'(x) = -x\sin(x^2) + 2x^3\sin(x^4).$$

3.4.2. integrales dobles

Problema 3.4.11 *Calcular el volumen de una esfera de radio $R > 0$.*

Si suponemos que la esfera está centrada en el origen, su ecuación viene dada por:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Si ahora depejamos z en función de las otras dos variables nos queda:

$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Teniendo en cuenta la definición de integral doble y llamando $f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, queda claro que el volumen de la esfera vendrá dado por la siguiente integral doble:

$$V = 2\int\int_D f(x,y)dxdy,$$

donde $D = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Por lo tanto, aplicando el cambio a coordenadas polares se tendrá:

$$V = 2\int\int_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy = 2\int_0^R (\int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 - r^2}\ rd\theta)dr = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Problema 3.4.12 *Hallar el volumen de un sólido limitado por arriba por el plano $z = y$ y por debajo por el plano xy sobre el cuadrante de disco $x^2 + y^2 \leq 1$ con $x, y \geq 0$.*

En este caso es claro que z representa la función que hay que integrar, así se debe escribir $f(x,y) = y$.

Por otra parte, el recinto donde se debe integrar es una región de tipo I que se puede escribir:

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [0,1], \ 0 \leq y \leq +\sqrt{1 - x^2}\}$$

Por lo tanto el volumen que nos piden será:

$$V = \int\int_A f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy \right) dx$$

Calculando nos queda:

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2}{2}.$$

Con lo cual, el volumen que se pide es:

$$V = \int_0^1 \frac{1-x^2}{2}dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Problema 3.4.13 *Calcular* $\int\int_D (x^2+y^2+1)dxdy$*, donde* D *es la región interior a la circunferencia* $x^2+y^2=4$.

Para calcular esta integral usaremos el cambio a coordenadas polares.

$$T : [0,2] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$$

donde

$T(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Está claro que $T([0,2]\times[0,2\pi]) = D := \{(x,y) : \ x^2+y^2 \leq 4\}$. Además su jacobiano es:

$$dJ_T(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r$$

Con lo cual la integral será:

$$\int\int_D (x^2+y^2+1)dxdy = \int_0^2 (\int_0^{2\pi} (r^2+1)rd\theta)dr = 2\pi \int_0^2 (r^3+r)dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2}\right]_0^2 = 12\pi$$

Problema 3.4.14 *Calcular* $\int\int_D (xy)dxdy$*, donde* D *es la región del cuarto cuadrante interior a la elipse* $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$.

En este caso se hace el cambio de variable

$$x = r\cos(\theta), \quad \frac{y}{3} = r\sin(\theta).$$

Como el tropzo de elipse que nos piden es el del cuarto cuadrante, queda la transformación:

$$T : [0,1] \times [\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

definida por:

$$T(r,\theta) = (r\cos(\theta), 3r\sin(\theta)).$$

El jacobiano de la transformación es:

$$dJ_T(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ 3\sin(\theta) & 3r\cos(\theta) \end{vmatrix} = 3r$$

Con lo cual la integral que nos piden será:

$$\int\int_D (xy)dxdy = \int_0^1 \left[\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} r\cos(\theta)3r\sin(\theta)3rd\theta \right] dr =$$

$$\int_0^1 9r^3 \left[\frac{\sin^2(\theta)}{2} \right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} dr = \frac{-9}{2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{-9}{8}$$

3.4.3. Cálculo vectorial

Problema 3.4.15 *Calcular la longitud de la curva* $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ *si* $t \in [-1,1]$

Para calcular la longitud de la curva $\alpha([-1,1]) \subset \mathbb{R}^3$, tenemos que comprobar que la trayectoria es de clase C^1, lo cual es evidente ya que

$$\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$$

Teninedo en cuenta lo anterior se tiene:

$$l(\alpha([-1,1])) = \int_{-1}^1 \|\alpha'(t)\|dt = \int_{-1}^1 \|(-\sin(t), \cos(t), 1)\|dt =$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1^2}dt = \int_{-1}^1 \sqrt{2}dt = \sqrt{2}\int_{-1}^1 dt = 2\sqrt{2}.$$

Problema 3.4.16 *Calcular* $\int_\alpha \frac{y^2dx+x^2dy}{1+x^2+y^2}$, *siendo* α *el triángulo de vertices* $(0,0), (1,0), (1,1)$ *recorrido en sentido anti horario.*

Para parametrizar en sentido antihorario el triangulo rectángulo que nos pieden. Parametrizaremos, por separado, cada uno de los lados de dicho triangulo. De este modo:

El lado horizontal del triángulo vendrá dado por:

$$\alpha_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \ : \ \alpha_1(t) = (t, 0)$$

El lado vertical será:

$$\alpha_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \ : \ \alpha_1(t) = (1, t)$$

Finalmente, el lado inclinado es:

$$\alpha_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \ : \ \alpha_1(t) = (1-t, 1-t)$$

Teniendo en cuenta que el triangulo $\alpha([0,1]) = \alpha_1([0,1]) \cup \alpha_2([0,1]) \cup \alpha_3([0,1])$. Se cumplirá

$$\int_\alpha \frac{y^2dx + x^2dy}{1+x^2+y^2} = \int_{\alpha_1} \frac{y^2dx + x^2dy}{1+x^2+y^2} + \int_{\alpha_2} \frac{y^2dx + x^2dy}{1+x^2+y^2} + \int_{\alpha_3} \frac{y^2dx + x^2dy}{1+x^2+y^2}$$

Pasemos a calcular cada una de las integrales anteriores.

Teniendo presente que $\alpha_1'(t) = (1, 0)$ se tendrá que

$$\int_{\alpha_1} \frac{y^2dx + x^2dy}{1+x^2+y^2} = \int_0^1 0dt = 0.$$

Como $\alpha_2'(t) = (0, 1)$ se cumplirá

$$\int_{\alpha_2} \frac{y^2dx + x^2dy}{1+x^2+y^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1+1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\arctan(\frac{t}{\sqrt{2}})]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{2}})$$

Finalmente, como $\alpha_3'(t) = (-1, -1)$ se tiene

$$\int_{\alpha_3} \frac{y^2dx + x^2dy}{1+x^2+y^2} = \int_0^1 \frac{-2(1-t)^2}{1+2(1-t)^2}dt =$$

$$-1 + \int_0^1 \frac{dt}{1+(1-t)^2} = -1 - [\arctan(1-t)]_0^1 = -1 + \frac{\pi}{4}$$

Problema 3.4.17 *Probar que el siguiente campo es conservativo y calcular el correspondiente potencial:*

$F(x, y) = (e^x \cos(y), -e^x \sin(y))$.

En este caso las funciones coordenadas del campo son

$$F_1(x,y) = e^x \cos(y),\ F_2(x,y) = -e^x \sin(y).$$

Calculando

$$\frac{\partial}{\partial y}F_1(x,y) = -e^x \sin(y), \quad \frac{\partial}{\partial x}F_2(x,y) = -e^x \sin(y)$$

luego F es conservativo ya que

$$\frac{\partial}{\partial y}F_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}F_2(x,y).$$

Ahora para obtener la función potencial, razonamos del modo siguiente:

$$f(x,y) = \int_0^x F_1(t,0)dt + \int_0^y F_2(x,t)dt = \int_0^x e^t dt + \int_0^y -e^x \sin(t)dt =$$

$$= \left[e^t\right]_0^x + e^x\left[\cos(t)\right]_0^y = e^x - 1 + e^x\cos(y) - e^x = e^x\cos(y) - 1$$

Problema 3.4.18 *Calcular $\int_\alpha (2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy$ siendo α la circunferencia unidad recorrida en sentido positivo.*

El campo vectorial que se debe integrar es $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) = (2x^3 - y^3, x^3 + y^3)$.

Llamemos D al círculo unidad. Aplicando el teorema de Green se tiene:

$$\int_\alpha (2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy = \int\int_D (3x^2 + 3y^2)dxdy$$

Ahora para calcular la integral doble anterior utilizaremos el cambio a coordenadas polares:

$$x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta)$$

luego,

$$\int\int_D (3x^2 + 3y^2)dxdy = 3\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 r d\theta dr = 6\pi[\frac{r^4}{4}]_0^1 = \frac{3}{2}\pi$$

Capítulo 4

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Se llama ecuación diferencial a una ecuación que liga la variable independiente x, la función incógnita $y = y(x)$ y sus derivadas $y', y'', ..., y^{(n)}$, es decir, una ecuación de la forma

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

En otras palabras, se llama ecuación diferencial una ecuación en la que figuran las derivadas de la función incógnita.

Si la función incógnita $y = y(x)$ depende de una sola variable independiente x, la ecuación diferencial se llama ordinaria.

Ejemplo 4.0.19 $y'(x) + xy(x) = 0, \quad y''(x) + y'(x) + x = \cos(x).$
$(x^2 + y^2)dx + (x + y)dy = 0.$

El orden de una ecuación diferencial es el de la derivada de mayor orden que figura en la ecuación. Por ejemplo: la ecuación diferencial $y''+p(x)y = e^x$ es de segundo orden.

Se llama solución de una ecuación diferencial a toda función $y = \varphi(x)$ tal que al sustituirla en la ecuación, ésta, se convierte en una identidad.

Ejemplo 4.0.20 *Comprobar que la función* $y(x) = \sin(x)+\cos(x)$ *es solución de la ecuación diferencial* $y'' + y = 0$.

En efecto, calculando las derivadas de la función anterior, obtenemos:

$$y' = \cos(x) - \sin(x), \quad y'' = -\sin(x) - \cos(x)$$

Por lo tanto,

$$y'' + y = -\sin(x) - \cos(x) + \sin(x) + \cos(x) = 0.$$

En el ejemplo anterior hemos obtenido una función solución, pero sin embargo, hay otras soluciones de dicha ecuación, por ejemplo, basta tomar $f(x) = \cos(x)$. Llamaremos solución general de una ecuación diferencial a la familia de todas sus soluciones, así la solución general de la ecuación del ejemplo anterior será. $y = c\sin(x) + d\cos(x)$, donde c, d son constantes arbitrarias. Este ejemplo ilustra el hecho de que la solución general de una ecuación diferencial contiene habitualmente una o más constantes, tantas como indique el orden de la ecuación.

4.1. Ecuaciones de primer orden.

Como hemos dicho antes, las ecuaciones diferenciales de primer orden son de la forma $F(x, y, y') = 0$. Para simplificar su estudio, a partir de ahora, daremos métodos de resolución (también dichos de integración) para algunos tipos de ecuaciones de primer orden que vienen dadas en la forma $y' = f(x, y)$. Muchas veces se escribirá $\frac{dy}{dx}$ en vez de y'.

4.1.1. Ecuaciones con variables separadas.

Las ecuaciones con variables separadas tienen la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{4.1}$$

Algunas veces nos las podemos encontrar en la forma (si llamamos $N(x) = -f(x),\ M(y) = \frac{1}{g(y)}$):

$$M(y)dy + N(x)dx = 0$$

La manera de obtener la solución general de la ecuación (4.1) es la siguiente:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,$$

ahora integrando cada una de las partes de la expresión anterior, tenemos:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Estas son ecuaciones muy sencillas en el sentido de que su resolución se reduce a un problema de integración, aunque sea posible que las integrales aparecidas sean difíciles de resolver o incluso imposible de efectuar explícitamente.

Ejemplo 4.1.1 (crecimiento de población) *Supongamos que se colocan x_0 bacterias en una solución nutriente en el instante $t = 0$ y que $y(t)$ es la población de bacterias en el instante t. Si el alimento y el espacio son ilimitados, y si como consecuencia la población está creciendo en todo momento a un ritmo proporcional a la población presente en ese momento, hallar y en función de t.*

Dado que el ritmo de crecimiento de $y(t)$ es proporcional a $y(t)$, podemos escribir la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky(t)$$

Separando variables e integrando deducimos:

$$\frac{dy}{y} = kdt \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int kdt,$$

de donde se tiene que

$$\ln(y) = kt + c \Rightarrow y(t) = e^{kt}e^{c}.$$

Llamando $S = e^c$ la solución general de la ecuación es $y(t) = Se^{kt}$.

Ahora bien, como la población inicial es de x_0 bacterias, sabemos que $x_0 = y(0) = S$, entonces, en este caso concreto, el desarrollo de la población vendrá dado por la función $y(t) = x_0e^{kt}$.

4.1.2. Ecuaciones homogéneas

Definición 4.1.2 *Una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se llama homogénea de grado n en Ω si se cumple: $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ siempre que $x, y \in \Omega$ y $tx, ty \in \Omega$*

Ejemplo 4.1.3 *$f(x, y) = x^2+xy$ es homogénea de grado 2, ya que $f(tx, ty) = t^2x^2 + t^2xy = t^2f(x, y)$.*

$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ es homogénea de grado 1, sobre $\mathbb{R}^2_+$. En efecto, si tomamos $t \geq 0$ se tiene que $f(tx, ty) = \sqrt{t^2x^2 + t^2y^2} = tf(x, y)$.

$f(x, y) = \sin(\frac{x}{y})$ es homogénea de grado 0 en $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. En efecto si $t \neq 0$, entonces $f(tx, ty) = \sin(\frac{x}{y}) = f(x, y)$

Definición 4.1.4 *Una ecuación diferencial de primer orden* $y' = f(x, y)$ *se llama homogénea si* $f(x, y)$ *es una función homogénea de grado* 0.

Muchas veces la ecuación diferencial aparece en la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{4.2}$$

La ecuación (4.2) es homogénea si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogéneas del mismo grado. Esto es consecuencia de que (4.2) se puede escribir como:

$$y' = \frac{-M(x, y)}{N(x, y)}.$$

Para resolver este tipo de ecuaciones hacemos el cambio de variable

$$z = \frac{y}{x}$$

Con lo cual nos queda que

$$y = zx \;\Rightarrow\; y' = \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx} = z + xz' \tag{4.3}$$

Ejemplo 4.1.5 *Resolver la ecuación* $(x + y)dx - (x - y)dy = 0$.
Escribimos la ecuación en la forma de la definición:

$$y' = \frac{x + y}{x - y}$$

Como la función de la derecha es evidentemente homogénea de grado 0, *sabemos que la ecuación diferencial es homogénea. Entonces hacemos el cambio* $z = \frac{y}{x}$. *Dividiendo el numerador y el denominador de la parte derecha de la ecuación por* $\frac{1}{x}$ *se obtiene:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}} = \frac{1 + z}{1 - z}$$

A continuación teniendo presente (4.3), se llega:

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{1 + z}{1 - z}$$

Separando variables, obtenemos la ecuación

$$\frac{1 - z}{1 + z^2}dz = \frac{1}{x}dx$$

que es una ecuación de variables separadas, integrando se tiene:

$$\int \frac{1-z}{1+z^2}dz = \arctan(z) - \frac{1}{2}\ln(1+z^2) \quad \int \frac{1}{x}dx = \ln(x) + c$$

Luego la solución, después de deshacer el cambio verifica la siguiente relación

$$\arctan(\frac{y}{x}) = \ln(\sqrt{x^2+y^2}) + c$$

Ejemplo 4.1.6 *El eje y y la recta $x = c$ son las dos orillas de un río cuya corriente fluye a una velocidad uniforme a en dirección y negativa. Una barca entra en el río por el punto $(c, 0)$ y se dirige hacia el origen con velocidad b relativa al agua.¿Qué trayectoria seguirá la barca?*

Las componenetes del vector velocidad de la barca son:

$$\frac{dx}{dt} = -b\cos(\theta), \quad \frac{dy}{dt} = -a + b\sin(\theta)$$

Donde θ es el angulo que forman el eje de las abcisas y la semirecta que pasa por el origen y por el punto donde se encuentra la barca en el instante t.

Así que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a+b\sin(\theta)}{-b\cos(\theta)} = \frac{-a+b(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}})}{-b(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})} = \frac{a\sqrt{x^2+y^2}+by}{bx}$$

Esta ecuación es homogénea y su solución, calculable haciendo el cambio $z = \frac{y}{x}\cdot$ Entonces transformamos la ecuación en:

$$xz' + z = k\sqrt{1+z^2} + z, \text{ donde } k = \frac{a}{b}.$$

Así hemos transformado la ecuación, en una de variables separadas:

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{kdx}{x}$$

Integrando esta ecuación nos queda:

$$\arg\sinh(yx) = (\ln(x^k) + r)$$

Ahora, teniendo presente que cuando $x = c$ se tiene que $y = 0$, obtenemos: $0 = \ln(c^k) + r \Rightarrow r = \ln(c^{-k})$. Por lo tanto,

$$\frac{y}{x} = \sinh(\ln(\frac{x^k}{c^k}))$$

De donde se tiene que

$$y = \frac{x}{2}(\frac{x^k}{c^k} - \frac{c^k}{x^k}) = \frac{c^k}{2}(\frac{x^{k+1}}{c^{2k}} - \frac{1}{x^{k-1}})$$

4.1.3. Ecuaciones exactas

Definición 4.1.7 *Una ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ se llama exacta, si existe una función $f(x,y)$ de forma que*

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = M(x,y) \text{ y } \frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = N(x,y)$$

En este caso diremos que la solución general de la ecuación exacta viene dada por $f(x,y) = c$.

Una ecuación diferencial es exacta siempre que

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$$

Cuando se sabe que una ecución es exacta, para obtener la función $f(x,y)$ se razona como sigue:

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial y}(\int M(x,y)dx) + g'(y) = N(x,y)$$

Así que

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}(\int M(x,y)dx)$$

de donde se obtiene que

$$g(y) = \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}(\int M(x,y)dx)\right) dy.$$

Ejemplo 4.1.8 *Decidir si es exacta o no la ecuación $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$, y resolverla si lo es.*

En este caso $M(x,y) = e^y$, $N(x,y) = xe^y + 2y$. Entonces

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = e^y = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$$

Luego es exacta.

Para obtener la solución, razonamos del siguiente modo:

$$f(x,y) = \int e^y dxdy + g(y) = xe^y + g(y)$$

de donde

$$\frac{\partial}{\partial y}(xe^y + g(y)) = xe^y + g'(y) = xe^y + 2y$$

Así que,

$$g'(y) = 2y \ \Rightarrow g(y) = y^2.$$

Por lo tanto la solución será:

$$xe^y + y^2 = c.$$

4.1.4. Factores integrantes

Si tenemos una ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ y no es exacta. ¿ Bajo qué condiciones la podemos transformar en una ecuación exacta? Es decir, ¿podremos encontrar una función $\mu(x,y)$ de forma que $\mu(x,y)\,(M(x,y)dx + N(x,y)dy) = 0$ sea exacta? Cualquier función $\mu(x,y)$ que actue de esa forma se llama *factor integrante.*

Si

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = g(x)$$

entonces el factor integrante se obtiene:

$$\mu(x) = e^{\int g(x)dx}$$

Si

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = h(y)$$

entonces el factor integrante se obtiene:

$$\mu(y) = e^{\int h(y)dy}$$

Ejemplo 4.1.9 *Resolver la ecuación* $ydx + (x^2y - x)dy = 0$.

En este caso se tiene: $M(x,y) = y$, $N(x,y) = x^2y - x$ *entonces*

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = 1 \quad \frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = 2xy - 1$$

Luego la ecuación no es exacta.

Sin embargo si consideramos

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{1-(2xy-1)}{x^2y-x} = -\frac{2}{x}$$

Luego podemos obtener un factor integrante, haciendo

$$\mu(x) = e^{\int \frac{-2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}.$$

De esta forma la ecuación $\frac{y}{x^2}dx + (y - \frac{1}{x})dy = 0$ *es exacta.*

$$f(x,y) = \int \frac{y}{x^2}dx + g(y) = \frac{-y}{x} + g(y)$$

luego,

$$\frac{-1}{x} + g'(y) = y - \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; g'(y) = y \;\Rightarrow\; g(y) = \frac{y^2}{2}.$$

Luego la solución viene dada por la expresión:

$$\frac{-y}{x} + \frac{y^2}{2} = c.$$

4.1.5. Ecuaciones lineales

La ecuación diferencial lineal de primer orden tiene la forma:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

donde las funciones $p(x)$ y $q(x)$ sólo dependen de la variable independiente.

La solución general de la ecuación es:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right)$$

Ejemplo 4.1.10 *Resolver la ecuación* $y' + \frac{1}{x}y = 3x$

Evidentemente es una ecuación lineal, entonces la solución general será

$$y = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(\int 3xe^{\int \frac{1}{x}}dx + c\right)$$

es decir

$$y = \frac{1}{x}(x^3 + c).$$

Ejemplo 4.1.11 *Un cierto elemento radiactivo A se descompone en un segundo elemento radiactivo B y éste a su vez en un tercero C. Si la cantidad inicial presente de A es x_0 y de B es cero, las cantidades de A y de B presentes en el instante t posterior seran $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente, y si k_1, k_2 son las constantes de ritmo de estas dos reacciones, hallar y en función del tiempo.*

La relación que se cumple es la siguiente

$$\frac{d}{dt}y(t) = -k_2 y(t) - \frac{d}{dt}x(t)$$

Ahora bien, como $\frac{d}{dt}x(t) = -k_1 x(t)$, y $x(0) = x_0$, se tiene que:

$$x(t) = x_0 e^{-k_1 t}.$$

Por lo tanto la ecuación que debemos estudiar es:

$$\frac{d}{dt}y(t) = -k_2 y(t) + k_1 x_0 e^{-k_1 t}$$

que es la siguiente ecuación lineal de primer orden:

$$y'(t) + k_2 y(t) = k_1 x_0 e^{-k_1 t}$$

La solución general es: Si $k_1 \neq k_2$

$$y(t) = e^{-k_2 t}(k_1 x_0 \frac{e^{(k_2-k_1)t}}{k_2 - k_1} + c)$$

La solución que nos interesa es la que cumple que $y(0) = 0$, entonces

$$c = -\frac{k_1 x_0}{k_2 - k_1}$$

de donde se obtiene que la solución es

$$y(t) = \frac{k_1 x_0}{k_2 - k_1}(e^{-k_1 t} - e^{k_2 t}).$$

Si $k_1 = k_2$, entonces nos quedará $y(t) = x_0 k_1 t e^{-k_1 t}$.

4.1.6. Ecuaciones de Bernoulli

Estas ecuaciones tienen la forma: $y' + p(x)y = q(x)y^n$ la manera de resolverlas es haciendo el cambio $z = y^{1-n}$ y de esta forma se transforman en una ecuación lineal en z.

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x).$$

Ejemplo 4.1.12 *Resolver la ecuación* $xy' + y = x^4y^3$.
Dividiendo por x *nos queda:*

$$y' + \frac{1}{x}y = x^3y^3$$

Esta es una ecuación de bernoulli, donde $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = x^3$ *y* $n = 3$. *Luego hacemos el cambio* $z = y^{-2}$. *De este modo nos queda la ecuación lineal:*

$$z' - \frac{2}{x}z = -2x^3.$$

La solución general será:

$$z = e^{\int \frac{2}{x}dx}\left(\int (-2x^3)e^{-\int \frac{2}{x}dx}dx + c\right)$$

Es decir,

$$y^{-2} = x^2(\int -2xdx + c) = x^2(-x^2 + c)$$

4.1.7. Problemas

Problema 4.1.13 *Clasificar cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales según su orden y comprobar que la función que se da es una solución:*
a) $1 + y^2 + y^2y' = 0, \quad x + y = \arctan(y)$
b) $y' - y\tan(x) = 0, \quad y = 5\sec(x)$
c) $(\frac{y''}{y'})^2 + 1 = \frac{1}{(y''')^2}, \quad y = \sin(x)$.

Problema 4.1.14 *La fisión nuclear produce neutrones en una pila atómica a un ritmo proporcional al número de neutrones presentes en cada momento. Si hay* n_0 *inicialmente y hay* n_1 *y* n_2*, respectivamente, en los instantes* t_1 *y* t_2*, demostrar que*

$$(\frac{n_1}{n_0})^{t_2} = (\frac{n_2}{n_0})^{t_1}$$

Problema 4.1.15 *Sabemos que la velocidad de asimilación de la nandrolona por un deportista es proporcional al producto de la cantidad presente en cada instante por el tiempo transcurrido desde su administración. Si al cabo de una hora la cantidad de nandrolona baja al cincuenta por ciento. Calcular el tiempo necesario para que baje hasta el* 99 *por ciento.*

Problema 4.1.16 *Comprobar que las ecuaciones diferenciales siguientes tienen como solución general la que se plantea y calcular la solución particular que cumple las condiciones iniciales dadas:*
a) $y' + 2y = 0, \quad y = Ae^{-2x}, \quad y(0) = 3.$
b) $4yy' - x = 0, \quad 4y^2 - x^2 = A, \quad y(0) = 0.$
c) $y'' + y = 0, \quad y = A\sin(x) + B\cos(x), \quad y(0) = 1; y'(0) = 0.$

Problema 4.1.17 *Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales:*
a) $x^2(y+1)dx + y^2(x-1)dy = 0$
b) $x\cos(x)dx + y^3\ln(y)dy = 0$
c) $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$
d) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

Problema 4.1.18 *Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales:*
a) $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$
b) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$
c) $2xy\ln(y)dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})dy = 0$
d) $(x^2 + y)dx - xdy = 0$

Problema 4.1.19 *Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales:*
a) $(x^2 + 2x - 1)y' - (x+1)y = x + 1$
b) $xdy + 2ydx = (x-2)e^x dx.$
c) $y' + xy = xe^{-x^2}y^{-3}$
d) $y' + 3x^2y = x^2y^3.$

Problema 4.1.20 *Consideremos una familia que tiene unos ingresos anuales* $I(t)$ *conocidos a priori (por ejemplo el salario), y que en adición tiene unos ahorros invertidos* $A(t)$ *que a su vez aportan unos rendimientos* $R(t)$. *Si tiene unos gastos conocidos* $C(t)$. *¿Qué ahorros tendrá al cabo de un número fijo de años si sabemos que los rendimientos son proporcionales a los ahorros y tiene unos ahorros iniciales* $A(0)$ *conocidos ?*

Problema 4.1.21 *El radón (semivida de* $3,8$ *días) es un gas fuertemente radiactivo que se produce como producto inmediato de la desintegración de radio (semivida de* $1{,}600$ *años). La atmósfera contiene trazas de radón en* *sus capas más bajas proviniente de la tierra y de las rocas, que contienen diminutas cantidades de radio. Se teme en algunos lugares del oeste americano que se produzcan concentraciones peligrosas de radón en los basamentos cerrados de casas cuyos cimientos se asientan en terrenos con mucha más cantidad de radio de lo normal, a causa de las minas de uranio próximas. Si las constantes de ritmo (pérdidas relativas por unidad de tiempo,en años) para la desintegración del radio y del radón son* $k_1 = 0{,}00043$ *y* $k_2 = 66$. *Determinar cuánto tiempo después de ser terminado uno de esos edificios será máxima la cantidad de radón.*

4.2. Ecuaciones lineales de segundo orden.

La ecuación lineal de segundo orden tiene la forma:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = R(x) \tag{4.4}$$

donde $p(x), q(x), R(x)$ son funciones que sólo dependen de la variable independiente.

En general la ecuación (4.4) no se puede resolver explícitamente en términos de funciones elementales. En esta sección nuestras consideraciones para resolver la ecuación (4.4) se restingiran, casi totalmente, al caso en que los coeficientes $p(x)$ y $q(x)$ son funciones constantes.

El término $R(x)$ de la ecuación (4.4) está aislado del resto puesto que no depende de la variable dependiente ni de ninguna de sus derivadas.

Si $R(x) = 0$, entonces la ecuación (4.4) se reduce a

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{4.5}$$

que se llama ecuación lineal homogénea asociada a (4.4).

Para obtener la solución general de la ecuación (4.4) es suficiente obtener la solución general de la homogénea y_g y una solución particualar y_p de (4.4). En este caso la solución general de la ecuación lineal será $y = y_g + y_p$.

4.2.1. Solución general de la ecuación homogénea

Definición 4.2.1 *Dos soluciones particulares* y_1, y_2 *de la ecuación (4.5) se llaman linealmente independientes si el determinante*

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

es no nulo.

Al determinante anterior se le denomina wronskiano.

Teorema 4.2.2 *Sean y_1, y_2 dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (4.5), entonces $y_g(x) = cy_1(x) + dy_2(x)$ es la solución general de (4.5).*

Si conocemos una solución particular y_1, no nula, de la ecuación (4.5) para obtener otra, linealmente independiente, actuamos como sigue:

$$y_2(x) = v(x)y_1(x) \ : \ v(x) = \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx} dx.$$

Ejemplo 4.2.3 *Obtener la solución general de la ecuación $x^2y'' + xy' - y = 0$, sabiendo que $y_1(x) = x$ es una solución particular.*

La ecuación anterior la podemos escribir:

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$$

Para obtener otra solución particular linealmente independiente con y_1, seguimos el siguiente razonamiento: $y_2(x) = v(x)y_1(x)$ donde

$$v(x) = \int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}dx} dx = -\frac{1}{2x^2}$$

Con lo cual $y_2(x) = -\frac{1}{2x}$, por lo tanto la solución general será:

$$y_g = cx - d\frac{1}{2x} = cx + d_1\frac{1}{x}.$$

4.2.2. Ecuación homogénea con coeficientes constantes

Estudiaremos en esta sección la solución general de la ecuación

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{4.6}$$

Para obtener una solución particular probamos con funciones del tipo $y = e^{mx}$. Para que una función de este tipo sea solución de (4.6) se debe verificar:

$$(m^2 + pm + q)e^{mx} = 0$$

Como e^{mx} no se puede anular, entonces para obtener el valor de m debemos resolver la ecuación:

$$m^2 + pm + q = 0.$$

Las soluciones de dicha ecuación son:

$$m = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Si $p^2 - 4q > 0$, entonces sean m_1, m_2 las dos soluciones distintas de la ecuación anterior, entonces $y_1 = e^{m_1 x}$ $y_2 = e^{m_2 x}$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación (4.6). Luego la solución general será:

$$y_g = ce^{m_1 x} + de^{m_2 x}$$

Si $p^2 - 4q = 0$, entonces la ecuación de segundo grado sólo tiene una raiz real $m = \frac{-p}{2}$ luego obtenemos como solución particular de la ecuación (4.6) la función $y_1(x) = e^{mx}$.

La otra solución particular será: $y_2(x) = xe^{mx}$. Luego la solución general, en este caso es:

$$y_g = ce^{mx} + dxe^{mx}.$$

Si $p^2 - 4q < 0$, entonces llamamos $a = \frac{-p}{2}$ y $b = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$ y la solución general es:

$$y_g = e^{ax}(c\cos(bx) + d\sin(bx)).$$

Ejemplo 4.2.4 *Solución general de $y'' + 8y = 0$.*

En este caso $p(x) = 0$ y $q(x) = 8$, por lo tanto llamamos $a = 0$ y $b = 2\sqrt{2}$. Luego

$$y_g = c\cos(2\sqrt{2}x) + d\sin(2\sqrt{2}x).$$

4.2.3. El método de coeficientes indeterminados

Como hemos visto en la sección anterior ya sabemos calcular la solución general de la ecuación (4.6). Ahora intentaremos obtener una solución particular de la ecuación

$$y'' + py' + qy = R(x).$$

El método de los coeficientes indeterminados nos permite obtener una solución particular de la ecuación anterior si $R(x)$ es una exponencial, un seno, un coseno, un polinomio o una combinación de estas funciones.

A título de ejemplo estudiemos la ecuación:

$$y'' + py' + qy = e^{ax}.$$

Como la derivación y la integración de una función exponencial la obtenemos con tan solo un posible cambio en el coeficiente númerico, es natural suponer que la solución particular será de la forma $y_p = Ae^{ax}$. En este caso A es el coeficiente indeterminado, el cual debemos obtener.

Si $a^2 + pa + q \neq 0$, entonces el valor será

$$A = \frac{1}{a^2 + pa + q}$$

En el caso de que $a^2 + pa + q = 0$, si $2a + p \neq 0$, entonces la solución será:

$$y_p = \frac{1}{2a + p} x e^{ax}.$$

En el caso en que $a^2 + pa + q = 0$, y $2a + p = 0$, La solución particular será:

$$y_p = \frac{1}{2} x^2 e^{ax}.$$

Otro caso importante es la ecuación

$$y'' + py' + q = \sin(bx)$$

Entonces se busca una solución particular de la forma

$$y_p = A\sin(bx) + B\cos(bx)$$

donde A y B son los coeficientes indeterminados.

Ejemplo 4.2.5 *Obtener una solución particular de la ecuación* $y'' + y = \sin(x)$.

Tenemos que probar una función del tipo $y_p = A\sin(x) + B\cos(x)$. *Así, calculando las derivadas de la función se tiene:*

$$y_p' = A\cos(x) - B\sin(x), \quad y_p'' = -A\sin(x) - B\cos(x)$$

De donde obtenemos que

$$y_p'' + y_p = 0$$

Como de este modo no obtenemos nada, se prueba con funciones del tipo $y_p = x(A\sin(x) + B\cos(x))$.

Para este tipo de funciones se tiene:

$$y_p' = A\sin(x) + B\cos(x) + x(A\cos(x) - B\sin(x)),$$
$$y_p'' = 2A\cos(x) - 2B\sin(x) - x(A\sin(x) + B\cos(x))$$

De donde se debe cumplir:

$$2A\cos(x) - 2B\sin(x) - x(A\sin(x) + B\cos(x)) +$$
$$A\sin(x) + B\cos(x) + x(A\cos(x) - B\sin(x)) = \sin(x)$$

Simplificando

$$2A\cos(x) - 2B\sin(x) = \sin(x)$$

Si tomamos $A = 0$ *y* $B = -\frac{1}{2}$ *se verifica la ecuación anterior. Por lo tanto, una solución particular es*

$$y_p = -\frac{x}{2}\sin(x).$$

Finalmente, examinamos el caso en que $R(x)$ es un polinimio

$$y'' + py' + qy = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$$

En este caso se prueba con funciones del tipo $y_p = A_0 + A_1x + ... + A_nx^n$. En caso de no obtener nada positivo, lo probaríamos con funciones del tipo $y_p = x(A_0 + A_1x + ... + A_nx^n)$, y así sucesivamente.

Ejemplo 4.2.6 *Solución particular de la ecuación* $y'' - y' - 2y = 4x^2$

Llamamos $y_p = A_0 + A_1x + A_2x^2$. *Entonces sus derivadas serán*

$$y_p' = A_1 + 2A_2x, \quad y_p'' = 2A_2.$$

Con lo cual,

$$2A_2 - A_1 - 2A_2x - 2(A_0 + A_1x + A_2x^2) = 4x^2$$

De donde se obtiene que $A_0 = -3$, $A_1 = 2$ *y* $A_2 = -2$. *Entonces una solución particular es*

$$y_p = -3 + 2x - 2x^2.$$

4.2.4. Variación de parámetros

la técnica que hemos utilizado en el apartado anterior para resolver la ecuación lineal de segundo orden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = R(x)$$

tiene dos limitaciones importantes: puede utilizarse sólamente cuando $p(x)$ y $q(x)$ son constantes, y aún así sólo funciona si el término $R(x)$ tiene una forma muy especial.

Ahora desarrollaremos otro método más potente que funcione siempre que conozcamos la solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Supongamos conocida la solución general de la ecuación homogénea

$$y_g = cy_1(x) + dy_2(x)$$

Para obtener una solución particular de la ecuación general, razonamos de la forma siguiente: buscaremos una soluci'on particular de la forma:

$$y_p = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$$

donde v_1, v_2 son:

$$v_1(x) = \int \frac{-y_2(x)R(x)}{W(y_1, y_2)}dx \quad v_2(x) = \int \frac{y_1(x)R(x)}{W(y_1, y_2)}dx$$

Ejemplo 4.2.7 *Obtener una solución particular de* $y'' + y = \csc(x)$.

Primero calculamos la solución general de la ecuación homogénea. Según hemos visto en la seccíon anterior, debemos estudiar soluciones de la forma e^{mx}. *Como en este caso, la ecuación que nos queda es* $m^2 + 1 = 0$. *Se tiene que* $a = 0$ *y* $b = 1$. *Por lo tanto:*

$$y_g = A\cos(x) + B\sin(x)$$

Ahora utilizaremos la variación de parámetros, así una solución particular será de la forma

$$y_p = v_1(x)\cos(x) + v_2(x)\sin(x)$$

donde,

$$v_1(x) = \int \frac{-\sin(x)\csc(x)}{W(\cos(x),\sin(x))}dx \quad v_2(x) = \int \frac{\cos(x)\csc(x)}{W(\cos(x),\sin(x))}dx$$

Calculamos

$$W(\cos(x),\sin(x) = \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = 1$$

Entonces

$$v_1 = \int -\sin(x)\csc(x)dx = -x \quad v_2 = \int \cos(x)\csc(x)dx = \ln(\sin(x))$$

Con lo cual,

$$y_p = -x\cos(x) + \ln(\sin(x))\sin(x).$$

4.3. Ecuaciones lineales de orden superior

La ecuación lineal de orden n con coeficientes constantes es

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y = R(x) \tag{4.7}$$

donde podemos suponer que la función $R(x)$ es continua. El hecho central es recordar que la solución general de la ecuación anterior es $y = y_g + y_p$, donde y_g es la solución general de la ecuación homogénea asociada e y_p es una solución particular de la ecuación (4.7).

Para obtener la solución general de la ecuación homogénea hacemos lo mismo que en el caso de orden dos, es decir, buscamos soluciones de la forma e^{mx}. Entonces debemos resolver la ecuación numérica:

$$m^n + a_1 m^{n-1} + ... + a_{n-1}m + a_n = 0$$

Si todas las soluciones de la ecuación anterior son reales y distintas $m_1, m_2, ..., m_n$. Entonces la solución general será:

$$y_g = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + ... + c_n e^{m_n x}$$

Si todas las raíces son reales pero hay alguna repetida. Por ejemplo, si $m_1 = m_2 = m_3$ y las otras raíces son distintas entre ellas, la solución será:

$$y_g = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} + c_3 x^2 e^{m_1 x} + c_4 e^{m_4 x} + ... + c_n e^{m_n x}$$

Ejemplo 4.3.1 *Calcular la solución general de la ecuación* $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$.

Tenemos re obtener las raíces del polinomio

$$m^4 - 8m^2 + 16 = 0$$

Las raíces son: $m_1 = m_2 = 2$ *y* $m_3 = m_4 = -2$ *Por lo tanto la solución gereral es:*

$$y_g = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 e^{-2x} + c_4 x e^{-2x}.$$

4.3.1. Problemas

Problema 4.3.2 *Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones:*
a) $y'' + 3y' = 3$
b) $y'' - 2y' - 3y = 2\sin(x)$
c) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$
d) $y'' + y = x^3$.

Problema 4.3.3 *Obtener la solución general de la siguiente ecuación:* $y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin(x)$

Problema 4.3.4 *Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones:*
a) $y''' - 2y'' - 3y' = 0$
b) $y^{(4)} - y = 0$
c) $y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$

Problema 4.3.5 *Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones:*
a) $y''' - 2y'' - 3y' = -6x - 7$
b) $y^{(4)} - y = 15e^{2x}$

Problema 4.3.6 (vibraciones armónicas simples no amortiguadas) *Considermos una carreta de masa M sujeta por un muelle a un muro cercano. El muelle no ejerce fuerza cuando la carreta se encuentra en la posición de equilibrio $x = 0$, pero si se le desplaza una distancia x, el muelle ejerce una fuerza restauradora $F_s = -kx$, siendo k una constante positiva cuya magnitud mide la rigidez del resorte. Describir y estudiar la ecuación del movimiento de la carreta.*

Problema 4.3.7 *Un torpedo se mueve a una velocidad de 60 Km/h en el momento en el que se queda sin combustible. Si el agua se opone a su movimiento con una fuerza proporcional a su velocidad y si un Km de recorrido reduce su velocidad a 30 Km/h, ¿qué distancia recorrerá?*

4.4. Transformada de Laplace

La transformada de Laplace de una cierta función $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ es otra función $\mathcal{L}(f)$ que viene dada por la siguiente fórmula:

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt := \lim_{x\to\infty} \int_0^x e^{-pt} f(t)dt,$$

para todos aquellos $p > 0$ para los cuales la integral anterior existe.

Si $f, g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces es claro que

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{L}(f) + \beta\mathcal{L}(g)$$

es decir la transformada de Laplace es una aplicación lineal.

Ejemplo 4.4.1 *Ahora calculamos la transformada de Laplace de la función $f(x) = 1$ para todo $x \geq 0$.*

$$\mathcal{L}(1)(p) = \int_0^\infty e^{-pt} 1dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x e^{-tp}dt = \lim_{x\to\infty} (\frac{-1}{p}(e^{-xp} - 1)) = \frac{1}{p}$$

Teniendo en cuenta la integración por partes y sabiendo algo de cálculo de límites se obtienen fácilmente las siguientes transformadas:

- $f(x) = x, \quad \mathcal{L}(x)(p) = \int_0^\infty e^{-pt} t dt = \frac{1}{p^2}.$
- $f(x) = x^n, \quad \mathcal{L}(x^n)(p) = \int_0^\infty e^{-pt} t^n dt = \frac{n!}{p^{n+1}}.$
- $f(x) = e^{ax}, \quad \mathcal{L}(e^{ax})(p) = \int_0^\infty e^{-pt} e^{at} dt = \frac{1}{p-a}.$

- $f(x) = \sin(ax)$, $\mathcal{L}(sin(ax))(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\sin(at)dt = \frac{a}{p^2+a^2}$.
- $f(x) = \cos(ax)$, $\mathcal{L}(\cos(ax))(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\cos(at)dt = \frac{p}{p^2+a^2}$.

4.4.1. Aplicación a las ecuaciones diferenciales.

Supongamos que queremos hallar una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{4.8}$$

que satisfaga las condiciones iniciales $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y_1$. El uso de la transformada de Laplace proporciona una via alternativa a la vista en las secciones anteriores.

Para ver cómo funciona el método, apliquemos la transformada de Laplace a ambos miembros de (4.8)

$$\mathcal{L}(y'' + ay' + by) = \mathcal{L}(f(x)).$$

Por la linealidad de la transformada, sabemos que:

$$\mathcal{L}(y'') + a\mathcal{L}(y') + b\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(f(x)) \tag{4.9}$$

Nuestro siguiente paso es expresar $\mathcal{L}(y'')$ y $\mathcal{L}(y')$ en términos de $\mathcal{L}(y)$. En primer lugar, integrando por partes se obtiene que

$$\mathcal{L}(y') = \int_0^\infty e^{-tp}y'(t)dt = \left[y(t)e^{-pt}\right]_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-tp}y(t)dt = -y(0) + p\mathcal{L}(y).$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}(y') = p\mathcal{L}(y) - y(0) \tag{4.10}$$

Teniendo presente lo que acabamos de hacer se deduce que:

$$\mathcal{L}(y'') = p\mathcal{L}(y') - y'(0) = p(p\mathcal{L}(y) - y(0)) - y'(0).$$

Luego,

$$\mathcal{L}(y'') = p^2\mathcal{L}(y) - py(0) - y'(0) \tag{4.11}$$

Si ahora introducimos las condiciones iniciales de la ecuación diferencial y sustituimos en (4.9) nos queda,

$$p^2\mathcal{L}(y) - py_0 - y_1 + ap\mathcal{L}(y) - ay_0 + b\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(f(x));$$

y despejando la transformada queda:

$$\mathcal{L}(y) = \frac{\mathcal{L}(f(x)) + (p+a)y_0 + y_1}{p^2 + ap + b}.$$

La función $f(x)$ es conocida, con lo cual su transformada de Laplace la podemos calcular, con lo cual aunque no sabemos cual es la función y si que sabemos lo que vale su transformada de Laplace. Ahora, si somos capaces de encontrar qué función $y(x)$ tiene esa transformada habremos resuelto el problema.

Ejemplo 4.4.2 *Hallar la solución de* $y'' + 4y = 4x$, *que satisface las condiciones iniciales* $y(0) = 1$ *e* $y'(0) = 5$.

Aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación se obtiene

$$\mathcal{L}(y'') + 4\mathcal{L}(y) = 4\mathcal{L}(x).$$

Recordando que $\mathcal{L}(x) = \frac{1}{p^2}$ y usando el razonamiento anterior se tiene que

$$p^2\mathcal{L}(y) - p - 5 + 4\mathcal{L}(y) = \frac{4}{p^2},$$

es decir,

$$\mathcal{L}(y) = \frac{p}{p^2+4} + \frac{5}{p^2+4} + \frac{4}{p^2(p^2+4)} = \frac{p}{p^2+4} + \frac{4}{p^2+4} + \frac{1}{p^2}$$

Consultando las transformadas de Laplace que tenemos nos queda que

$$\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(\cos(2x) + 2\sin(2x) + x),$$

y por lo tanto,

$$y = \cos(2x) + 2\sin(2x) + x.$$

La validez de este proceso de obtención de la solución se basa sobre el hecho de que la transformada de Laplace de una función continua es única.

Si se supone que f es una función continua, la ecuación $\mathcal{L}(f(x)) = L(p)$ se puede escribir de la forma

$$\mathcal{L}^{-1}(L(p)) = f(x).$$

Es costumbre llamar a $\mathcal{L}^{-1}$ transformada inversa de Laplace. En el ejemplo anterior hemos usado las siguientes transformadas inversas de Laplace:

- $\mathcal{L}^{-1}(\frac{p}{p^2+4}) = \cos(2x)$,
- $\mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{p^2+4}) = \sin(2x)$,
- $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{p^2}) = x$.

Este ejemplo ilustra también el valor de la descomposición en fracciones simples como método de cálculo de la transformada inversa de Laplace.

Una propiedad útil para calcular transformadas de Laplace es la fórmula de desplazamiento:

$$\mathcal{L}(e^{ax}f(x))(p) = \mathcal{L}(f(x))(p-a).$$

En efecto,

$$\mathcal{L}(e^{ax}f(x))(p) = \int_0^\infty e^{-pt}e^{at}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(p-a)t}f(t)dt = \mathcal{L}(f(x))(p-a).$$

La propiedad de desplazamiento se puede utilizar para calcular transformadas de productos de la forma $e^{ax}f(x)$ cuando se conoce $\mathcal{L}(f(x))$, así como transformadas inversas de funciones del tipo $\mathcal{L}(f(x)(p-a)$ cuando $f(x)$ es conocida.

Ejemplo 4.4.3 $\mathcal{L}(\sin(bx)) = \frac{b}{p^2+b^2}$, *con lo cual,*

$$\mathcal{L}(e^{ax}\sin(bx)) = \frac{b}{(p-a)^2+b^2}.$$

4.4.2. Problemas

Problema 4.4.4 *Resolver la siguiente ecuación diferencial por el método de la transformada de Laplace:*

$$\begin{cases} y' + y = 3e^{2x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Problema 4.4.5 *Resolver la siguientes ecuación diferencial por el método de la transformada de Laplace:*

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

Problema 4.4.6 *Resolver la siguiente ecuación diferencial por el método de la transformada de Laplace:*

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Problema 4.4.7 *Resolver la siguiente ecuación diferencial por el método de la transformada de Laplace:*

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 3e^{-x}\sin(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

Problema 4.4.8 *Resolver por el método de transformada de Laplace la ecuación* $y''' - y'' = 0, \quad y(0) = 1; y'(0) = 3; y''(0) = 2.$

Problema 4.4.9 *Integrar la ecuación diferencial* $y'' - 4y = -5\sin(x)$ *por el método habitual y por el de la transformada de Laplace.*

TRANSFORMADA DE LAPLACE

$$\mathcal{L}(f)(p) = F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt. \tag{4.12}$$

1. Linealidad $\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g)$.
2. Semejanza $\mathcal{L}(f(\lambda x)(p) = \frac{1}{\lambda}\mathcal{L}(f)(\frac{p}{\lambda})$.
3. Desplazamiento $\mathcal{L}(e^{\lambda x} f(x)(p) = \mathcal{L}(f)(p - \lambda)$.
4. Derivación $\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0)$,
   $\mathcal{L}(f'')(p) = p^2\mathcal{L}(f)(p) - pf(0) - f'(0)$.

Tabla de transformadas elementales

$f(x)$	$F(p) = \mathcal{L}(f(x))(p)$
1	$\frac{1}{p}$
x	$\frac{1}{p^2}$
x^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{ax}	$\frac{1}{p-a}$
$\sin(ax)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$\cos(ax)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$\sinh(ax)$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$\cosh(ax)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
$x^n e^{ax}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$e^{ax}\cos(bx)$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$
$e^{ax}\sin(bx)$	$\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$
$e^{ax}\cosh(bx)$	$\frac{p-a}{(p-a)^2-b^2}$
$e^{ax}\sinh(bx)$	$\frac{b}{(p-a)^2-b^2}$
$x\cos(bx)$	$\frac{p^2-b^2}{(p^2+b^2)^2}$
$x\sin(bx)$	$\frac{2bp}{(p^2+b^2)^2}$

4.5. Sistemas de ecuaciones diferenciales

En esta sección nos dedicaremos a tratar de encontrar la solución general de un sistema de ecuaciones diferenciales de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{dx(t)}{dt}=a_1x(t)+b_1y(t)+f_1(t)\\ \frac{dy(t)}{dt}=a_2x(t)+b_2y(t)+f_2(t)\end{array}\right. \tag{4.13}$$

La teoría general para la obtención de la solución general del sistema (4.13) es muy similar a la de las ecuaciones lineales de segundo orden. De este modo, se tiene que:

Si

$$\left\{\begin{array}{l}x=x_p(t)\\ y=y_p(t)\end{array}\right.$$

es una solución particular de (4.13) y

$$\left\{\begin{array}{l}x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)\\ y=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)\end{array}\right.$$

es la solución del sistema homogéneo asociado a (4.13), entonces

$$\left\{\begin{array}{l}x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+x_p(t)\\ y=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+y_p(t)\end{array}\right.$$

es la solución general de (4.13).

4.5.1. Solución general del sistema homogéneo

Nuestro objetivo ahora es obtener la solución general del sistema homogéneo asociado:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{dx(t)}{dt}=a_1x(t)+b_1y(t)\\ \frac{dy(t)}{dt}=a_2x(t)+b_2y(t)\end{array}\right. \tag{4.14}$$

Es claro que dicho sistema admite la llamada solución trivial, en la que $x(t)=0$ e $y(t)=0$. Para encontrar soluciones que no sean la trivial actuamos de la forma siguiente. Como el sistema es lineal no es difícil comprobar que si

$$\left\{\begin{array}{l}x=x_1(t)\\ y=y_1(t)\end{array}\right.$$

y

$$\left\{\begin{array}{l}x=x_2(t)\\ y=y_2(t)\end{array}\right.$$

son soluciones particulares del sistema homogéneo, entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \\ y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \end{array} \right. \tag{4.15}$$

es también una solución del sistema homogéneo.

La siguiente cuestión es saber si (4.15) es la solución general del sistema homogéneo. Por la teoría de determinantes se tiene que (4.15) es la solución general si el determinante wronskiano

$$W(t) = \left| \begin{array}{cc} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{array} \right|$$

no se anula.

Si buscamos soluciones no triviales, $x(t)$ e $y(t)$ del sistema homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = a_1 x(t) + b_1 y(t) \\ y'(t) = a_2 x(t) + b_2 y(t) \end{array} \right.$$

de la forma

$$\left(\begin{array}{c} c_1 e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\lambda t} \end{array} \right)$$

entonces λ tiene que verificar:

$$\left| \begin{array}{cc} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{array} \right| = 0.$$

es decir, λ debe ser un valor propio de la matriz $A = \left(\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right)$, (que llamaremos matriz asociada), los valores (c_1, c_2) son una solución no trivial del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_1 - \lambda) c_1 + b_1 c_2 = 0 \\ a_2 c_1 + (b_2 - \lambda) c_2 = 0 \end{array} \right.$$

es decir, (c_1, c_2) es un vector propio de A asociado al valor propio λ.

Valores propios reales y distintos.

Cuando λ_1, λ_2 son los valores propios de la matriz A y son números reales y distintos entre si, consideremos $v = (c_1, c_2)$ y $w = (d_1, d_2)$ las bases de los subespacios de los valores propios asociados. Entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda_1 t} \end{array} \right.$$

es una solución no trivial del sistema, del mismo modo;

$$\begin{cases} x(t) = d_1 e^{\lambda_2 t} \\ y(t) = d_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

también es solución no trivial. Ahora por el método del wronskiano se puede comprobar que la solución general del sistema homogéneo tiene la forma:

$$\begin{cases} x(t) = A_1 c_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 d_1 e^{\lambda_2 t} \\ y(t) = A_1 c_2 e^{\lambda_1 t} + A_2 d_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

Ejemplo 4.5.1 *Obtener la solución general del sistema* $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = 4x(t) - 2y(t) \end{cases}$

En este caso la matriz asociada al sistema es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Si ahora calculamos los valores propios del sistema nos queda:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = \lambda^2 + \lambda - 6.$$

Las soluciones de esta ecuación son $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 2$.

Ahora, obtenemos los vectores propios asociados:

$$E_{-3} = \{(x,y):\ 4c_1 + c_2 = 0,\ 4c_1 + c_2 = 0\} = \langle (1,-4) \rangle.$$

$$E_2 = \{(x,y):\ -c_1 + c_2 = 0,\ 4c_1 - 4c_2 = 0\} = \langle (1,1) \rangle.$$

Con lo cual la solución general es:

$$\begin{cases} x(t) = A_1 e^{-3t} + A_2 e^{2t} \\ y(t) = -4A_1 e^{-3t} + A_2 e^{2t} \end{cases}$$

Valor propio con multiplicidad 2.

Cuando sólo hay un valor propio real λ para obtener la solución general se razona de la forma siguiente:

Se considera un vector propio no nulo del subespacio de los vectores propios asociados, llamemosle $c = (c_1, c_2)$. Por lo tanto, los valores

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

forman una solución no trivial del sistema homogéneo. Para obtener la otra solución que nos hace falta, se actua de la siguiente forma.

Buscamos una segunda solución de la forma: $(u + tc)e^{\lambda t}$, donde u se obtiene al resolver la ecuación matricial

$$A(u) = c + \lambda u.$$

Ejemplo 4.5.2 *Resolver el sistema* $\left\{\begin{array}{l} x'(t) = 3x(t) - 4y(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \end{array}\right.$

La ecuación característica de la matriz asociada es:

$$0 = \left| \begin{array}{ll} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{array} \right| = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

La solución de la ecuación es $\lambda = 1$.

Si calculamos el subespacio de vectores propios asociados nos queda:

$$E_1 = \{(x, y) : \ 2x - 4y = 0 \ x - 2y = 0\} = \langle (1, 2) \rangle.$$

En este caso, podemos considerar como vector $c = (2, 1)$. Para obtener el vector u procedemos como sigue:

$$\left(\begin{array}{cc} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 2 + u_1 \\ 1 + u_2 \end{array} \right)$$

Este sistema de ecuaciones se reduce a la ecuación: $u_1 - 2u_2 = 1$. Por lo tanto, una solución del sistema anterior será $u = (1, 0)$. Finalmente, la solución general es de la forma:

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = 2A_1e^t + A_2(1 + 2t)e^t \\ y(t) = A_1e^t + A_2te^t \end{array}\right.$$

Valores propios complejos.

Cuando al resolver la ecuación característica la solución son dos números complejos conjugados $\lambda_1 = a + ib$ y $\lambda_2 = a - ib$ La solución general se escribe a partir de las siguientes soluciones básicas:

$$Re(\lambda_1 e^{(a+ib)t}), \ Im(\lambda_1 e^{(a+ib)t}).$$

4.6. Problemas

Problema 4.6.1 *Resolver el sistema* $\left\{\begin{array}{l} x'(t) = -3x(t) + 4y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 3y(t) \end{array}\right.$

Problema 4.6.2 *Resolver el sistema* $\left\{\begin{array}{l} x'(t) = 4x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = 5x(t) + 2y(t) \end{array}\right.$

Problema 4.6.3 *Resolver el sistema* $\left\{\begin{array}{l} x'(t) = 5x(t) + 4y(t) \\ y'(t) = -x(t) + y(t) \end{array}\right.$

Problema 4.6.4 *Resolver el sistema* $\left\{\begin{array}{l} x'(t) = 4x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = 8x(t) - 6y(t) \end{array}\right.$

4.7. Resolución de problemas

Problema 4.7.1 *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$$

Si escribimos la ecuación en su forma habitual, queda:

$$y' = \frac{y + \sqrt{y^2 - x^2}}{x}$$

que llamando $f(x,y) = \frac{y+\sqrt{y^2-x^2}}{x}$ es claro que $f(tx,ty) = f(x,y)$. Luego, la ecuación diferencial es homogénea.

En este caso se hace el cambio $z = \frac{y}{x}$, de donde se obtiene que $y' = z + xz'$. Con lo cual, sustituyendo

$$z + xz' = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

Por lo tanto,

$$z' = \frac{1}{x}\sqrt{z^2 - 1}$$

esta última ecuación es de variables separadas. Entonces la solución viene dada por

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \int \frac{1}{x} dx$$

Resolviento estas integrales se tiene

$$argcosh(z) = \ln(x) + c$$

es decir

$$y = xcosh(\ln(x) + c).$$

Finalmente teniendo en cuenta la definición del coseno hiperólico, se tendrá:

$$y = x\frac{xe^c + \frac{1}{x}e^{-c}}{2} = \frac{x^2e^c + e^{-c}}{2}$$

Problema 4.7.2 *Resolver la ecuación*

$$xdy + 2ydx = (x-2)e^x dx$$

Dividiendo por dx se obtiene la ecuación siguiente

$$xy' + 2y = (x-2)e^x$$

ahora dividiendo por x en la expresión anterior, se tiene

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{x-2}{x}e^x$$

Si llamamos $P(x) = \frac{2}{x}$ y $Q(x) = \frac{x-2}{x}e^x$ claramente se tiene una ecuación lineal de primer orden. Como la solución general es:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right).$$

Para resolverla, primero calculamos

$$\int P(x)dx = \int \frac{2}{x}dx = \ln(x^2).$$

Ahora tenemos

$$y = \frac{1}{x^2}\left(\int (x-2)xe^x dx + c\right)$$

La integral que nos queda por calcular se puede obtener aplicando partes, así se deduce que

$$y = \frac{1}{x^2}\left(e^x(x^2 - 4x + 4) + c\right).$$

Problema 4.7.3 *Resolver la ecuación diferencial*

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$$

Claramente la ecuación que tenemos que resolver es una ecuación lineal de segundo orden a coeficientes constantes. Para obtener la solución, primero debemos obtener la solución general de la ecuación homogénea:

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Según sabemos la solución la buscamos en la forma $y = e^{mx}$ con lo cual debemos resolver la ecuación:

$$m^2 - 4m + 4 = 0$$

La solución es $m = 2$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea será:

$$y_g = Ae^{2x} + Bxe^{2x}.$$

Finalmente, nos queda por obtener una solución particular de la ecuación original. En este caso, viendo la forma que debe tener, nos queda que $y = \frac{1}{2}x^2e^{2x}$.

La solución que buscamos es entonces:

$$y = (A + Bx + \frac{1}{2}x^2)e^{2x}.$$

Problema 4.7.4 *Obtener la solución del problema de valores iniciales:*

$$y' + y\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2}, \quad y(0) = 0.$$

La ecuación diferencial que debemos resolver es lineal de primer orden, donde, con nuestra notación, $P(x) = \cos(x)$ y $Q(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$. Para resolver la ecuación, calculamos

$$\int P(x)dx = \int \cos(x)dx = \sin(x).$$

Por lo tanto,

$$y(x) = e^{-\sin(x)} \left(\int \frac{\sin(2x)}{2} e^{\sin(x)} dx + C \right) =$$

$$e^{-\sin(x)} \left(\sin(x)e^{\sin(x)} - \int \cos(x)e^{\sin(x)} dx + C \right) =$$

De donde la solución general es

$$y(x) = \sin(x) - 1 + Ce^{-\sin(x)}.$$

Como nos interesa la solución que en $x = 0$ valga 0 nos queda:

$$y(x) = \sin(x) - 1 + e^{-\sin(x)}.$$

Problema 4.7.5 *Sabemos que la velocidad de asimilación de la nandrolona por un deportista es proporcional al producto de la cantidad presente en cada instante por el tiempo transcurrido desde su administración. Si al cabo de una hora la cantidad de nandrolona baja al cincuenta por ciento. Calcular el tiempo necesario para que baje hasta el* 99 *por ciento.*

Si llamamos $y(t)$ a la cantidad de nandrolona que tiene el deportista en el instante (hora) t. La ecuación que regulará la cantidad de nandrolona es:

$$y'(t) = ky(t)t, \ y(0) = x_0, \quad y(1) = \frac{x_0}{2}$$

Primero obtenemos la solución general de la ecuación diferencial anterior, que como es de variables separadas nos queda:

$$\int \frac{dy}{y} = k \int tdt \Rightarrow \ln(y(t)) = \frac{kt^2}{2} + C$$

Por lo tanto,

$$y(t) = e^{\frac{kt^2}{2}} e^C$$

Ahora teniendo en cuenta que $y(0) = x_0$ y que $y(1) = \frac{x_0}{2}$. Se desprende que

$$x_0 = e^C \Rightarrow y(t) = x_0 e^{\frac{kt^2}{2}}$$

Además,

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{\frac{k}{2}} \Rightarrow \frac{k}{2} = \ln(\frac{1}{2}) \Rightarrow k = -\ln(4)$$

Con lo cual tenemos que obtener t de forma que se verifique la ecuación

$$x_0 e^{-\ln(2)t^2} = \frac{1}{100} x_0$$

Luego

$$t = \sqrt{\frac{\ln(100)}{\ln(2)}} \backsimeq 2,57 \text{ horas}$$

Problema 4.7.6 *Calcular la solución general de la ecuación* $y' + 4y + 6x = 0$.

Es claro que es una ecuación diferencial lineal de primer orden. Por lo tanto, la solución general vendrá dada por la fórmula:

$$y = e^{-\int 4dx} \left(\int -6xe^{\int 4dx} dx + c \right) = e^{-4x} \left(\int -6xe^{4x} dx + c \right)$$

La integral que queda por calcular se obtiene de forma sencilla aplicando partes.

Capítulo 5

Resolución de problemas

5.1. Cálculo diferencial

5.2. Primer parcial. Curso 2005/06

Problema 5.2.1 *Ajustar la reacción* $NaOH + HCl \Rightarrow NaCl + H_2O$

Llamamos $H = (1,0,0,0)$, $Na = (0,1,0,0)$, $O = (0,0,1,0)$, $Cl = (0,0,0,1)$.

Con lo cual tenemos que encontra números x, y, v, z de forma que:

$$x(1,1,1,0) + y(1,0,0,1) = v(0,1,0,1) + z(2,0,1,0)$$

o lo que es lo mismo:

$$(x + y - 2z, x - v, x - z, y - v) = (0,0,0,0).$$

De aquí nos queda el sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrl} x & +y & +0v & -2z & = 0 \\ x & +0y & -v & +0z & = 0 \\ x & +0y & +0v & -z & = 0 \\ 0x & +y & -v & 0z & = 0 \end{array} \right.$$

Resolvemos el sistema teniendo presente que es compatible, ya que es homogéneo, además no es dificil ver que es indeterminado, si tomamos como parámetro la variable z se obtiene:

De la tercera ecuación $x = z$.

De la segunda ecuación que $x = v$, y por lo tanto $v = z$.

De la última ecuación se tiene que $y = v$, con lo cual $y = z$.

De todo esto se desprende que las soluciones del sistema anterior son el subespacio: $\langle(1,1,1,1)\rangle$.

Luego un posible ajuste será tomar $x = y = z = v = 1$.

Problema 5.2.2 *La posición de un barco en alta mar viene dada por un par de coordenadas* (x, y). *Sabiendo que el desplazamiento del barco sigue la regla: Si en un instante dado se encuentra en la posición* (x, y) *a la hora siguiente estará en la posición* $(x + 6y, x)$. *Si sabemos que en la actualidad el barco está en la posición* $(1, 0)$. *¿ Dónde se encontrará al cabo de* 6 *horas? ¿y si su posición inicial fuese* $(1, -1)$*?*

La regla de desplazamiento viene dada por medio de la aplicación lineal: $f(x, y) = (x + 6y, x)$. Lo que queremos calcular es $f^6(1, 0)$.

Para obtener el valor anterior razonamos del modo siguiente:

Calculamos la matriz asociada a la aplicación lineal f.

$f(1, 0) = (1, 1)$, $f(0, 1) = (6, 0)$, de donde obtenemos que

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la composición de aplicaciones lineales es el producto de sus matrices asociadas se tiene que:

$$f^6(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para obtener el producto anterior veamos si M_f es diagonalizable.

Calculemos los valores propios de M_f, para ello tenemos que resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0.$$

Con lo cual los valores propios son -2 y 3.

Como M_f es de orden 2 y además tiene dos valores propios distintos, sabemos que M_f es diagonalizable.

Veamos ahora los vectores propios asociados a $\lambda = -2$.

Tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De donde nos queda:

$$\left\{\begin{array}{rrl} 3x & +6y & = 0 \\ x & +2y & = 0 \end{array}\right.$$

Así pues, se tiene que $E_{-2} = \langle\{(-2,1)\}\rangle$.
Veamos ahora los vectores propios asociados a $\lambda = 3$.
Tenemos que resolver el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrl} -2x & +6y & = 0 \\ x & -3y & = 0 \end{array}\right.$$

Así pues, se tiene que $E_3 = \langle\{(3,1)\}\rangle$.
Luego, si consideramos como matriz diagonal semejante a M_f la matriz:
$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ la matriz de paso será. $P = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
Ahora nos queda obtener la matriz inversa de P, para ello primero debemos calcular el determinante de P :
$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5$ Con lo cual

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Finalmente el resultado será:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^6 & 0 \\ 0 & 3^6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 463 & 798 \\ 133 & 330 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 463 \\ 133 \end{pmatrix}$$

Si la posición inicial fuese $(1,-1)$ nos quedaría:

$$f^6(1,-1) = \begin{pmatrix} 463 & 798 \\ 133 & 330 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -335 \\ -197 \end{pmatrix}$$

Problema 5.2.3 *(a) Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie* $\frac{x^2}{2} + y^2 + z^2 = 1$ *en el punto* $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$.

(b) La temperatura en cada uno de los puntos de una placa matálica plana es $T(x,y) = (x-1)^3(y-2)^2$. *Se desea conocer cuales son, en el punto* $(0,0)$, *las direcciones de mayor crecimiento y decrecimiento de la temperatura.*

(a) Consideremos la función $f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + y^2 + z^2 - 1$, es claro que la superficie que nos dan coincide con el conjunto de nivel: $\{(x,y,z) \ : f(x,y,z) = 0\}$.

Veamos ahora que el punto $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ está en la superficie. En efecto, $f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$. Luego tenemos que calcular el gradiente de la función f en el punto $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$.

$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = x$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = 2y$, $\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = 2z$. De donde se deduce que

$$\nabla f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}) = (0, \frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{-2}{\sqrt{2}})$$

Luego la ecuación del plano tangente será:

$$0 = \langle (0, \frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{-2}{\sqrt{2}}), (x, y - \frac{1}{\sqrt{2}}, z + \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle$$

De donde se obtiene que la ecuación es $y - z = \sqrt{2}$.

La ecuación paramétrica de la recta normal es:

$$(x,y,z) = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}) + \lambda(0, \frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{-2}{\sqrt{2}})$$

(b). La dirección de mayor crecimiento de la temperatura es la del gradiente, por lo tanto:
$\frac{\partial}{\partial x} T(x,y) = 3(x-1)^2(y-2)^2$, $\frac{\partial}{\partial y} T(x,y) = 2(x-1)^3(y-2)$.

Luego las direcciones buscadas son respectivamente $\nabla T(0,0) = (12, 4)$ y $-\nabla T(0,0) = (-12, -4)$.

Problema 5.2.4 *Sea $f(x,y,z) = 100 - y^2 + x^2$ el índice de toxicidad en cada punto de una región del espacio que contiene a la superficie $\frac{x^2}{2} + y^2 + z^2 = 1$. ¿ En qué puntos de dicha superficie la toxicidad será máxima y en qué puntos mínima?*

Tenemos que calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y,z) = 100 - y^2 + x^2$ sobre el elipsoide $\frac{x^2}{2} + y^2 + z^2 = 1$. Veamos si podemos aplicar los multiplicadores de Lagrange.

Las restricciones de las variables las podemos escribir mediante la función, $g(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + y^2 + z^2 - 1$. Es claro que $\nabla g(x,y,z) = (x, 2y, 2z)$ que se anula sólo en el punto $(0,0,0)$ el cual no está sobre el elipsoide. Por lo tanto podemos aplicar multiplicadores.

Consideremos la función $F(x,y,z) = 100 - y^2 + x^2 + \lambda(\frac{x^2}{2} + y^2 + z^2 - 1)$. Ahora, calculamos sus derivadas parciales:

$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,z) = 2x + \lambda x,\ \frac{\partial}{\partial y}F(x,y,z) = -2y + \lambda 2y,\ \frac{\partial}{\partial z}F(x,y,z) = \lambda 2z,$
Ahora tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x + \lambda x & +0y & +0z & = 0 \\ 0x & -2y + \lambda 2y & +0z & = 0 \\ 0x & +0y & +\lambda 2z & = 0 \\ \frac{x^2}{2} & +y^2 & +z^2 & = 1 \end{cases}$$

De la tercera ecuación se obtiene que $\lambda = 0$ o $z = 0$. Observar que si $\lambda = 0$, entonces de la primera y de la segunda ecuación se obtiene que $x = y = 0$, con lo cual, de la última ecuación se deduce que $z = \pm 1$. Así obtenemos los puntos $(0,0,1)$ y $(0,0,-1)$.

Veamos ahora que se desprende si $z = 0$.

De la primera ecuación se deduce que o bien $x = 0$ o $\lambda = -2$.

Estudiemos que ocurre si $x = 0$. Como hemos visto que $z = 0$, de la última ecuación se obtiene que $y = \pm 1$. Este hecho nos da los siguientes puntos:

$$(0,1,0),\ (0,-1,0).$$

Supongamos ahora que $\lambda = -2$. Entonces, de la segunda ecuación se llega a que $y = 0$, como $z = 0$, la cuarta ecuación nos dice que $x = \pm\sqrt{2}$. Esto nos proporciona los siguientes puntos:

$$(\sqrt{2},0,0),\ (-\sqrt{2},0,0).$$

Finalmente, para saber en que puntos la toxicidad es máxima o mínima calculamos:

$$f(0,0,1) = f(0,0,-1) = 100,\quad f(0,1,0) = f(0,-1,0) = 99$$
$$f(\sqrt{2},0,0) = f(-\sqrt{2},0,0) = 102.$$

Es decir, la toxicidad es máxima en los puntos $(\sqrt{2},0,0)$, $(-\sqrt{2},0,0)$ y mínima en $(0,1,0)$, $(0,-1,0)$.

5.3. Cálculo integral.

5.3.1. Integrales dobles

Problema 5.3.1 *Hallar el volumen de un sólido limitado por arriba por el plano $z = y$ y por debajo por el plano xy sobre el cuadrante de disco $x^2 + y^2 \leq 1$ con $x, y \geq 0$.*

En este caso es claro que z representa la función que hay que integrar, así se debe escribir $f(x,y)=y$.

Por otra parte, el recinto donde se debe integrar es una región de tipo I que se puede escribir:

$$A := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ x\in[0,1], \ 0\le y\le +\sqrt{1-x^2}\}$$

Por lo tanto el volumen que nos piden será:

$$V=\int\int_A f(x,y)dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy\right)dx$$

Calculando nos queda:

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy=\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-x^2}{2}.$$

Con lo cual, el volumen que se pide es:

$$V=\int_0^1\frac{1-x^2}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}.$$

Problema 5.3.2 *Calcular* $\int\int_D(x^2+y^2+1)dxdy$, *donde* D *es la región interior a la circunferencia* $x^2+y^2=4$.

Para calcular esta integral usaremos el cambio a coordenadas polares.

$$T:[0,2]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$$

donde

$T(r,\theta)=(r\cos(\theta),r\sin(\theta))$. Está claro que $T([0,2]\times[0,2\pi])=D:=\{(x,y): \ x^2+y^2\le 4\}$. Además su jacobiano es:

$$dJ_T(r,\theta)=\begin{vmatrix}\cos(\theta) & -r\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & r\cos(\theta)\end{vmatrix}=r$$

Con lo cual la integral será:

$$\int\int_D(x^2+y^2+1)dxdy=\int_0^2(\int_0^{2\pi}(r^2+1)rd\theta)dr=2\pi\int_0^2(r^3+r)dr=2\pi\left[\frac{r^4}{4}+\frac{r^2}{2}\right]_0^2=12\pi$$

Problema 5.3.3 *Calcular* $\int\int_D(xy)dxdy$, *donde* D *es la región del cuarto cuadrante interior a la elipse* $x^2+\frac{y^2}{9}=1$.

En este caso se hace el cambio de variable

$$x = r\cos(\theta), \quad \frac{y}{3} = r\sin(\theta).$$

Como el tropzo de elipse que nos piden es el del cuarto cuadrante, queda la transformación:

$$T : [0,1] \times [\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$

definida por:

$$T(r,\theta) = (r\cos(\theta), 3r\sin(\theta)).$$

El jacobiano de la transformación es:

$$dJ_T(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ 3\sin(\theta) & 3r\cos(\theta) \end{vmatrix} = 3r$$

Con lo cual la integral que nos piden será:

$$\int\int_D (xy)dxdy = \int_0^1 \left[\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} r\cos(\theta) 3r\sin(\theta) 3r d\theta \right] dr =$$

$$\int_0^1 9r^3 \left[\frac{\sin^2(\theta)}{2} \right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} dr = \frac{-9}{2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{-9}{8}$$

5.4. Segundo parcial. Curso 2005/06

Problema 5.4.1 *Probar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función con derivada continua, entonces las funciones de la forma $z = f(uv^2)$ son solución de la ecuación diferencial*

$$2u\frac{\partial z}{\partial u} - v\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Si definimos la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $g(u,v) = uv^2$. Entonces está claro que $z = (f \circ g)(u,v)$.

Como necesitamos conocer las derivadas parciales de z, aplicamos la regla de la cadena:

$$\frac{\partial}{\partial u} z = \frac{\partial}{\partial u}(f \circ g)(u,v) = f'(uv^2)v^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial v} z = \frac{\partial}{\partial v}(f \circ g)(u,v) = f'(uv^2)2vu.$$

Ahora sustituyendo en la ecuación, nos queda:

$$2u\frac{\partial z}{\partial u}-v\frac{\partial z}{\partial v}=2u\left(f'(uv^2)v^2\right)-v\left(f'(uv^2)2uv\right)=2uv^2f'(uv^2)-2uv^2f'(uv^2)=0.$$

Problema 5.4.2 *Calcular la primitiva* $\int x^2e^xdx$.

Esta primitiva se puede resolver aplicando partes:

Si llamamos $f(x)=x^2$ y $g'(x)=e^x$, entonces nos queda que $f'(x)=2x$ y $g(x)=e^x$. Con lo cual,

$$\int x^2e^xdx=x^2e^x-\int 2xe^xdx,$$

Para resolver la integral que nos piden nos queda por resolver $\int 2xe^xdx$.

Esta integral la resolvemos aplicando partes. Llamamos $f(x)=2x$ y $g'(x)=e^x$, con lo cual $f'(x)=2$ y $g(x)=e^x$. Así que

$$\int 2xe^xdx=2xe^x-\int 2e^xdx=2xe^x-2e^x.$$

Finalmente sustituyendo queda:

$$\int x^2e^xdx=x^2e^x-(2xe^x-2e^x)+C=e^x\left(x^2-2x+2\right)+C$$

Problema 5.4.3 *Hallar el volumen del elipsoide dado por la ecuación* $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=1$.

Si despejamos de la ecuación del elipsoide la z se tiene que

$$z^2=1-(\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}).$$

Con lo cual el volumen que nos piden será

$$V=8\int\int_D\sqrt{1-(\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2})}dxdy$$

donde $D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}\leq 1, x,y\geq 0\}$. Para calcular la integral anterior hacemos el siguiente cambio de variable:

$$T:[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}^2$$

definida por:

$$T(r,\theta) = (2r\cos(\theta), 3r\sin(\theta)).$$

El jacobiano de la transformación es:

$$dJ_T(r,\theta) = \begin{vmatrix} 2\cos(\theta) & -2r\sin(\theta) \\ 3\sin(\theta) & 3r\cos(\theta) \end{vmatrix} = 6r$$

Con lo cual el volumen que nos piden será:

$$V = 8\int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-r^2}6rd\theta\right) dr =$$

$$8\int_0^1 \sqrt{1-r^2}6r[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} dr = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1-r^2}6rdr =$$

$$-12\pi\int_0^1 (-2r)\sqrt{1-r^2}dr = -12\pi \left[2\frac{\sqrt{(1-r^2)^3}}{3}\right]_0^1 = 8\pi.$$

5.5. Cálculo vectorial

Problema 5.5.1 *Calcular la longitud de la curva* $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ *si* $t \in [-1, 1]$

Para calcular la longitud de la curva $\alpha([-1,1]) \subset \mathbb{R}^3$, tenemos que comprobar que la trayectoria es de clase C^1, lo cual es evidente ya que

$$\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$$

Teninedo en cuenta lo anterior se tiene:

$$l(\alpha([-1,1])) = \int_{-1}^1 \|\alpha'(t)\|dt = \int_{-1}^1 \|(-\sin(t), \cos(t), 1)\|dt =$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1^2}dt = \int_{-1}^1 \sqrt{2}dt = \sqrt{2}\int_{-1}^1 dt = 2\sqrt{2}.$$

Problema 5.5.2 *Calcular* $\int_\alpha \frac{y^2dx+x^2dy}{1+x^2+y^2}$, *siendo* α *el triángulo de vertices* $(0,0), (1,0), (1,1)$ *recorrido en sentido anti horario.*

Para parametrizar en sentido antihorario el triangulo rectángulo que nos pieden. Parametrizaremos, por separado, cada uno de los lados de dicho triangulo. De este modo:

El lado horizontal del triángulo vendrá dado por:

$$\alpha_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \ : \ \alpha_1(t) = (t,0)$$

El lado vertical será:

$$\alpha_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \ : \ \alpha_1(t) = (1,t)$$

Finalmente, el lado inclinado es:

$$\alpha_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \ : \ \alpha_1(t) = (1-t, 1-t)$$

Teniendo en cuenta que el triangulo $\alpha([0,1]) = \alpha_1([0,1]) \cup \alpha_2([0,1]) \cup \alpha_3([0,1])$. Se cumplirá

$$\int_\alpha \frac{y^2dx + x^2dy}{1+x^2+y^2} = \int_{\alpha_1} \frac{y^2dx + x^2dy}{1+x^2+y^2} + \int_{\alpha_2} \frac{y^2dx + x^2dy}{1+x^2+y^2} + \int_{\alpha_3} \frac{y^2dx + x^2dy}{1+x^2+y^2}$$

Pasemos a calcular cada una de las integrales anteriores.

Teniendo presente que $\alpha_1'(t) = (1,0)$ se tendrá que

$$\int_{\alpha_1} \frac{y^2dx + x^2dy}{1+x^2+y^2} = \int_0^1 0dt = 0.$$

Como $\alpha_2'(t) = (0,1)$ se cumplirá

$$\int_{\alpha_2} \frac{y^2dx + x^2dy}{1+x^2+y^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1+1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\arctan(\frac{t}{\sqrt{2}})]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{2}})$$

Finalmente, como $\alpha_3'(t) = (-1,-1)$ se tiene

$$\int_{\alpha_3} \frac{y^2dx + x^2dy}{1+x^2+y^2} = \int_0^1 \frac{-2(1-t)^2}{1+2(1-t)^2}dt =$$

$$-1 + \int_0^1 \frac{dt}{1+(1-t)^2} = -1 - [\arctan(1-t)]_0^1 = -1 + \frac{\pi}{4}$$

Problema 5.5.3 *Probar que el siguiente campo es conservativo y calcular el correspondiente potencial:*

$F(x,y) = (e^x \cos(y), -e^x \sin(y)).$

En este caso las funciones coordenadas del campo son

$$F_1(x,y) = e^x \cos(y),\ \ F_2(x,y) = -e^x \sin(y).$$

Calculando

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x,y) = -e^x \sin(y), \quad \frac{\partial}{\partial x} F_2(x,y) = -e^x \sin(y)$$

luego F es conservativo ya que

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} F_2(x,y).$$

Ahora para obtener la función potencial, razonamos del modo siguiente:

$$f(x,y) = \int_0^x F_1(t,0)dt + \int_0^y F_2(x,t)dt = \int_0^x e^t dt + \int_0^y -e^x \sin(t)dt =$$

$$= \left[e^t\right]_0^x + e^x \left[\cos(t)\right]_0^y = e^x - 1 + e^x \cos(y) - e^x = e^x \cos(y) - 1$$

Problema 5.5.4 *Calcular* $\int_\alpha (2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy$ *siendo* α *la circunferencia unidad recorrida en sentido positivo.*

El campo vectorial que se debe integrar es $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) = (2x^3 - y^3, x^3 + y^3)$.

Llamemos D al círculo unidad. Aplicando el teorema de Green se tiene:

$$\int_\alpha (2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy = \int\int_D (3x^2 + 3y^2)dxdy$$

Ahora para calcular la integral doble anterior utilizaremos el cambio a coordenadas polares:

$$x = r\cos(\theta),\ \ y = r\sin(\theta)$$

luego,

$$\int\int_D (3x^2 + 3y^2)dxdy = 3\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 r d\theta dr = 6\pi[\frac{r^4}{4}]_0^1 = \frac{3}{2}\pi$$

5.6. Ecuaciones diferenciales.

Problema 5.6.1 *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$$

Si escribimos la ecuación en su forma habitual, queda:

$$y' = \frac{y + \sqrt{y^2 - x^2}}{x}$$

que llamando $f(x, y) = \frac{y+\sqrt{y^2-x^2}}{x}$ es claro que $f(tx, ty) = f(x, y)$. Luego, la ecuación diferencial es homogénea.

En este caso se hace el cambio $z = \frac{y}{x}$, de donde se obtiene que $y' = z+xz'$. Con lo cual, sustituyendo

$$z + xz' = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

Por lo tanto,

$$z' = \frac{1}{x}\sqrt{z^2 - 1}$$

esta última ecuación es de variables separadas. Entonces la solución viene dada por

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \int \frac{1}{x} dx$$

Resolviento estas integrales se tiene

$$argcosh(z) = \ln(x) + c$$

es decir

$$y = xcosh(\ln(x) + c).$$

Finalmente teniendo en cuenta la definición del coseno hiperólico, se tendrá:

$$y = x\frac{xe^c + \frac{1}{x}e^{-c}}{2} = \frac{x^2e^c + e^{-c}}{2}$$

Problema 5.6.2 *Resolver la ecuación*

$$xdy + 2ydx = (x - 2)e^x dx$$

Dividiendo por dx se obtiene la ecuación siguiente

$$xy' + 2y = (x-2)e^x$$

ahora dividiendo por x en la expresión anterior, se tiene

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{x-2}{x}e^x$$

Si llamamos $P(x) = \frac{2}{x}$ y $Q(x) = \frac{x-2}{x}e^x$ claramente se tiene una ecuación lineal de primer orden. Como la solución general es:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right).$$

Para resolverla, primero calculamos

$$\int P(x)dx = \int \frac{2}{x}dx = \ln(x^2).$$

Ahora tenemos

$$y = \frac{1}{x^2}\left(\int (x-2)xe^x dx + c\right)$$

La integral que nos queda por calcular se puede obtener aplicando partes, así se deduce que

$$y = \frac{1}{x^2}\left(e^x(x^2-4x+4) + c\right).$$

Problema 5.6.3 *Resolver la ecuación diferencial*

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$$

Claramente la ecuación que tenemos que resolver es una ecuación lineal de segundo orden a coeficientes constantes. Para obtener la solución, primero debemos obtener la solución general de la ecuación homogénea:

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Según sabemos la solución la buscamos en la forma $y = e^{mx}$ con lo cual debemos resolver la ecuación:

$$m^2 - 4m + 4 = 0$$

La solución es $m = 2$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea será:

$$y_g = Ae^{2x} + Bxe^{2x}.$$

Finalmente, nos queda por obtener una solución particular de la ecuación original. En este caso, viendo la forma que debe tener, nos queda que $y = \frac{1}{2}x^2e^{2x}$.

La solución que buscamos es entonces:

$$y = (A + Bx + \frac{1}{2}x^2)e^{2x}.$$

5.7. Final. Curso 2005/06

Problema 5.7.1 *Ajustar, utilizando los sistemas de ecuaciones lineales, la siguiente reacción*

$$Na + H_2SO_4 \Longrightarrow Na_2SO_4 + H_2$$

Como aparecen 4 elementos de la tabla periódica, identificaremos a cada uno de ellos con un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^4$. Así,

$$Na := (1,0,0,0), \quad H := (0,1,0,0), \quad S := (0,0,1,0), \quad O := (0,0,0,1)$$

Con esta notación, el problema de ajustar la reacción se transforma en el problema de resolver el sistema:

$$A(1,0,0,0) + B(0,2,1,4) = C(2,0,1,4) + D(0,2,0,0)$$

de donde nos queda:

$$\left\{\begin{array}{rrcl} A & -2C & = & 0 \\ 2B & -2D & = & 0 \\ B & -C & = & 0 \\ 4B & -4C & = & 0 \end{array}\right.$$

La tercera y la cuarta ecuación son la misma y nos dicen que $B = C$. Ahora, como la primera ecuación es $A = 2C$ se tendrá que $A = 2B$. Finalmente, como de la segunda ecuación se desprende que $D = B$, se obtiene que las soluciones del sistema son el subespacio vectorial

$$\langle (2,1,1,1) \rangle$$

Problema 5.7.2 *Una partícula se mueve por la esfera de centro el origen y de radio 5. Si sobre la esfera la temperatura viene dada por $T(x,y,z) = x^2 + y + z$. ¿ En qué puntos de la esfera la partícula se encontrará la temperatura mínima y máxima?*

Aplicando multiplicadores de Lagrange, tenemos que encontrar los puntos críticos de la función:

$$F(x,y,z) := x^2 + y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 25)$$

Para ello calculamos las derivadas parciales de F, y nos planteamos el sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}F(x,y,z) & = & 2x & +2\lambda x & = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}F(x,y,z) & = & 1 & +2\lambda y & = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}F(x,y,z) & = & 1 & +2\lambda z & = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = 25 \end{cases}$$

De la primera ecuación se obtiene que $x = 0$ o $\lambda = -1$.

Veamos que ocurre si $\lambda = -1$. En este caso, de la segunda y tercera ecuación se deduce que $y = z = \frac{1}{2}$. Ahora sustituyendo en la última ecuación se tiene que:

$$x^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 25 \Rightarrow x = \pm\sqrt{25 - \frac{1}{2}}.$$

Luego obtenemos los puntos críticos

$$(\frac{7}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \quad (-\frac{7}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Ahora nos queda por estudiar el caso $x = 0$. En este caso el problema se reduce a estudiar la función $f(y,z) = y + z$ sobre la circunferencia de radio 5 centrada en el $(0,0)$. De las ecuaciones que nos quedan se desprende que $y = z$ y además $2y^2 = 25$. Luego los puntos que se obtienen son:

$$(0, \frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}), \quad (0, -\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}).$$

Según lo obtenido hasta ahora queda claro que el punto de mínima temperatura será $(0, -\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}})$ y los puntos donde se alcanzará la temperatura máxima son:

$$(\frac{7}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \quad (-\frac{7}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Problema 5.7.3 *Pasar a coordenadas polares la expresión*

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$$

Como $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$. Aplicando la regla de la cadena, sabemos que:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} &= & \cos(\theta)\frac{\partial z}{\partial x}+\sin(\theta)\frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} &= & -r\sin(\theta)\frac{\partial z}{\partial x}+r\cos(\theta)\frac{\partial z}{\partial y} \end{cases}$$

Considerando lo anterior como un sistema de ecuaciones lineales donde las incognitas son $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ obtenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos(\theta)\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{\sin(\theta)}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\sin(\theta)\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\cos(\theta)}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

Sustituyendo en la expresión inicial se tiene:

$$r\cos(\theta)\left[\cos(\theta)\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{\sin(\theta)}{r}\frac{\partial r}{\partial \theta}\right]+r\sin(\theta)\left[\sin(\theta)\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\cos(\theta)}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right]=r\frac{\partial z}{\partial r}.$$

Problema 5.7.4 *Calcular razonadamente el área de la región del primer cuadrante del plano comprendida entre las gráficas de las funciones* $y = x^2$ *e* $y = \sqrt{2-x^2}$.

Estudiando detenidamente las gráficas de las funciones del enunciado se puede comprobar que en el primer cuadrante el conjunto que nos piden es

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ : x \in [0, 1]\ x^2 \leq y \leq \sqrt{2-x^2}\}$$

El área del conjunto D vendrá dada por la integral:

$$\int\int_D 1dxdy=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} 1dy\right)dx=\int_0^1\left(\sqrt{2-x^2}-x^2\right)dx$$

Ahora teniendo en cuenta que la suma de integrales es la integral de la suma, calculamos las siguientes dos integrales:

$$\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}.$$

$$\int_0^1 \sqrt{2-x^2}dx=\int_0^1\frac{2-x^2}{\sqrt{2-x^2}}dx.$$

Para calcular esta última integral aplicamos el método de Aleman:

$$\int \frac{2-x^2}{\sqrt{2-x^2}}dx = (ax+b)\sqrt{2-x^2} + k\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$$

Resolviendo el sistema generado por la expresión anterior se tiene:

$$a = \frac{1}{2}, \ b = 0, \quad k = 1$$

Con estos valores se obtiene que:

$$\int \frac{2-x^2}{\sqrt{2-x^2}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{2-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{2-x^2} + \arcsin(\frac{x}{\sqrt{2}})$$

Luego el área que nos piden será:

$$\int\int_D 1dxdy = \frac{1}{2} + \arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}}) - \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}.$$

Problema 5.7.5 *Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas* $F(x,y) = (x^2y, \frac{x^3}{3})$ *para desplazar una partícula desde el punto* $(1,0)$ *hasta el punto* $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ *siguiendo la trayectoria que viene dada por la circunferencia unidad recorrida en sentido anti-horario.*

Teniendo en cuenta que el campo vectorial es $F(x,y) = (x^2y, \frac{x^3}{3})$ es fácil comprobar que dicho campo es conservativo, ya que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = x^2 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

Por lo tanto, para calcular el trabajo, sólo necesitamos conocer la función potencial:

$$f(x,y) = \int_0^x F_1(t,0)dt + \int_0^y F_2(x,t)dt = \int_0^y \frac{x^3}{3}dt = \frac{x^3}{3}y.$$

Esta última expresión nos permite concluir que

$$W = \int_\alpha F ds = f(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) - f(1,0) = -\frac{\sqrt{3}}{48}.$$

Problema 5.7.6 *Obtener la solución del problema de valores iniciales:*

$$y' + y\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2}, \quad y(0) = 0.$$

La ecuación diferencial que debemos resolver es lineal de primer orden, donde, con nuestra notación, $P(x) = \cos(x)$ y $Q(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$. Para resolver la ecuación, calculamos

$$\int P(x)dx = \int \cos(x)dx = \sin(x).$$

Por lo tanto,

$$y(x) = e^{-\sin(x)} \left(\int \frac{\sin(2x)}{2} e^{\sin(x)} dx + C \right) =$$

$$e^{-\sin(x)} \left(\sin(x)e^{\sin(x)} - \int \cos(x)e^{\sin(x)} dx + C \right) =$$

De donde la solución general es

$$y(x) = \sin(x) - 1 + Ce^{-\sin(x)}.$$

Como nos interesa la solución que en $x = 0$ valga 0 nos queda:

$$y(x) = \sin(x) - 1 + e^{-\sin(x)}.$$

Problema 5.7.7 *Sabemos que la velocidad de asimilación de la nandrolona por un deportista es proporcional al producto de la cantidad presente en cada instante por el tiempo transcurrido desde su administración. Si al cabo de una hora la cantidad de nandrolona baja al cincuenta por ciento. Calcular el tiempo necesario para que baje hasta el* 99 *por ciento.*

Si llamamos $y(t)$ a la cantidad de nandrolona que tiene el deportista en el instante (hora) t. La ecuación que regulará la cantidad de nandrolona es:

$$y'(t) = ky(t)t, \; y(0) = x_0, \quad y(1) = \frac{x_0}{2}$$

Primero obtenemos la solución general de la ecuación diferencial anterior, que como es de variables separadas nos queda:

$$\int \frac{dy}{y} = k \int tdt \Rightarrow \ln(y(t)) = \frac{kt^2}{2} + C$$

Por lo tanto,

$$y(t) = e^{\frac{kt^2}{2}} e^C$$

Ahora teniendo en cuenta que $y(0) = x_0$ y que $y(1) = \frac{x_0}{2}$. Se desprende que

$$x_0 = e^C \Rightarrow y(t) = x_0 e^{\frac{kt^2}{2}}$$

Además,

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{\frac{k}{2}} \Rightarrow \frac{k}{2} = \ln(\frac{1}{2}) \Rightarrow k = -\ln(4)$$

Con lo cual tenemos que obtener t de forma que se verifique la ecuación

$$x_0 e^{-\ln(2)t^2} = \frac{1}{100} x_0$$

Luego

$$t = \sqrt{\frac{\ln(100)}{\ln(2)}} \backsimeq 2,57 \text{ horas}$$

5.8. Septiembre. Curso 2005/06

Problema 5.8.1 *Resolver el sistema siguiente en función de los valores de a:*

$$\left\{\begin{array}{cccc} x & +ay & +z & =1 \\ 2x & +y & +5z & =2 \\ 5x & +3y & +z & =-1 \end{array}\right.$$

Primero estudiaremos el caracter del sistema. Para ello calculemos el determinante de la matriz del sistema:

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{array}\right| = 23a - 13$$

Por otra parte, como el rango de la matriz ampliada es 3 (para ver esto es suficiente ver que el determinante

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \end{array}\right| \neq 0$$

Claramente el sistema es incompatible si $a = \frac{13}{23}$. En cualquier otro caso el sistema es compatible determinado.

La solución del sistema viene dada por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{23a - 13}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{23a - 13}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{23a - 13}.$$

Problema 5.8.2 *La altitud h del volcán Mauna Loa en Hawaii se describe (aproximadamente) por la función $h(x,y) = 2'59 - 0'00024y^2 - 0'00065x^2$, donde h es la altitud en millas sobre el nivel del mar, y x e y miden las distancias en millas este-oeste y norte-sur desde la cima de la montaña. En $(x,y) = (-2,-4)$:*

1) ¿ A qué velocidad crece la altitud en la dirección $(1,1)$ (es decir, en la dirección nordeste)?

2) ¿En qué dirección se encuentra el camino de máxima pendiente positiva?

(1). Según la interpretación de las derivadas direccionales, hemos de obtener el valor de $D_{(1,1)}h(-2,-4)$. Teniendo en cuenta que la función h es diferenciable, para hallar la derivada direccional anterior será suficiente con calcular el gradiente de la función, ya que:

$$D_{(1,1)}h(-2,-4) = \langle \nabla h(-2,-4), (1,1) \rangle.$$

Por lo tanto como , $\nabla h(x,y) = (\frac{-130}{10^5}x, \frac{-48}{10^5}y)$, se tiene que $\nabla h(-2,-4) = (\frac{260}{10^5}, \frac{192}{10^5})$. Con lo cual:

$$D_{(1,1)}h(-2,-4) = \langle \nabla h(-2,-4), (1,1) \rangle = \langle (\frac{260}{10^5}, \frac{192}{10^5}, (1,1) \rangle = \frac{452}{10^5}.$$

(2) La dirección de máxima pendiente, es la que nos da el gradiente de la función, con lo cual la dirección será:

$$\nabla h(-2,-4) = (\frac{260}{10^5}, \frac{192}{10^5}).$$

Problema 5.8.3 *Razonar si la matriz $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ es diagonalizable encontrando, si es el caso, la matriz diagonal, la matriz de paso y su inversa.*

Para estudiar si la matriz es diagonalizable, primero hemos de obtener los valores propios de la matriz.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(5-\lambda)+8 = \lambda^2-4\lambda+3$$

Ahora tenemos que calcular las raices del polinomio característico.

$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ entonces las raices son $\lambda = 3$ y $\lambda = 1$. Como ambas son distintas, se tiene que la matriz es diagonalizable.

Una de las matrices diagonales semejantes será:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para esta matriz, la matriz de paso la obtenemos calculando las bases de los subespacios de vectores propios asociados:

$$E_3 = \{(x,y) \ : \ \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$
$$E_3 = \{(x,y) \ : \ 4x+2y=0\} = \langle(1,-2)\rangle$$

$$E_1 = \{(x,y) \ : \ \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$
$$E_1 = \{(x,y) \ : \ 2x+2y=0\} = \langle(1,-1)\rangle$$

Por lo tanto la matriz de paso es:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Problema 5.8.4 *Calcular* $\int\int_D (x^2+2xy^2+2)\,dx\,dy$ *siendo* D *la región limitada por la gráfica de* $y = -x^2 + x$ *, el eje* x*, y las rectas* $x = 0$ *y* $x = 2$.

Dibujando la región D se ve de forma clara que dicha región se puede escribir de la forma siguiente:

$$D = \{(x,y) \ : \ x \in [0,1],\ 0 \le y \le x-x^2\} \cup \{(x,y) \ : \ x \in [1,2],\ x-x^2 \le y \le 0\}$$

Por lo tanto,

$$\int\int_D (x^2+2xy^2+2)\,dx\,dy =$$
$$\int_0^1 \left(\int_0^{x-x^2} (x^2+2xy^2+2)\,dy\right)dx + \int_1^2 \left(\int_{x-x^2}^0 (x^2+2xy^2+2)\,dy\right)dx$$

Problema 5.8.5 *Calcular la solución general de la ecuación* $y' + 4y + 6x = 0$.

Es claro que es una ecuación diferencial lineal de primer orden. Por lo tanto, la solución general vendrá dada por la fórmula:

$$y = e^{-\int 4dx}\left(\int -6xe^{\int 4dx}dx + c\right) = e^{-4x}\left(\int -6xe^{4x}dx + c\right)$$

La integral que queda por calcular se obtiene de forma sencilla aplicando partes.

$$y = e^{-4x}\left(\frac{3e^{4x}(1-4x)}{8} + c\right) = \frac{3(1-4x)}{8} + ce^{-4x}.$$

Problema 5.8.6 *Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas* $F(x, y) = (x^2y, x^3/3)$ *para trasladar una partícula desde el punto* $(1, 0)$ *hasta el punto* $(0, 1/\sqrt{2})$ *siguiendo la trayectoria* $x^2 + 2y^2 = 1$ *orientada positivamente.*

Si consideramos las dos componentes del campo de fuerzas, tenemos que $F_1(x, y) = x^2y$, $F_2(x, y) = x^3/3$. Con lo cual, calculando las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial(x^2y)}{\partial y} = x^2 = \frac{\partial(x^3/3)}{\partial y},$$

se obtiene que el campo es conservativo.

Por lo tanto, para calcular el trabajo sólo necesitaremos obtener la función potencial:

$$f(x, y) = \int_0^x F_1(t, 0)dt + \int_0^y F_2(x, t)dt = \int_0^y \frac{x^3}{3}dt = \frac{x^3}{3}y$$

Teniendo en cuenta lo anterior se puede concluir:

$$\mathcal{T} := \int_\alpha F ds = f(1, 0) - f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0.$$

5.9. Control. Diciembre 2006

Problema 5.9.1 *Estudiar, según los valores del parámetro* a, *el siguiente sistema:*

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +y & +z & =3 \\ x & -y & +z & =1 \\ 2x & & +az & =4 \end{array}\right.$$

Estudiamos el sistema por el método de Gauss. Así la matriz del sistema será:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & a & 4 \end{array}\right)$$

Ahora, sustituimos la segunda fila por la segunda fila menos la primera y la tercera fila la sustituimos por la tercera menos el doble de la primera:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & a-2 & -2 \end{array}\right)$$

Cambiamos el orden de la segunda y tercera fila y además el orden de la segunda y tercera columna:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & a-2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Como hemos cambiado el orden de las incógnitas, de la tercera ecuación se obtiene que $y = 1$.

En la segunda ecuación pueden ocurrir dos cosas que $a = 2$ en cuyo caso la ecuación desaparece y por lo tanto el sistema es compatible indeterminado o $a \neq 2$, en cuyo caso $z = 0$ y el sistema es compatible determinado.

Si $a \neq 2$, la solución será: $z = 0$, $y = 1$, $x = 2$.

Si $a = 2$, el conjunto de soluciones vendrá dado por: $y = 1$, $z \in \mathbb{R}$, $x = 2 - z$.

Problema 5.9.2 *Escribir las matrices asociadas a las siguientes aplicaciones lineales:*

a) $f(x, y, z) = (2x + 3y - z, y + 3z, z + 2x + y, z + x)$.

b) $g(u, v, w, t) = (u + v + w + t, u - w)$.

c) $g \circ f$.

a) Para obtener la matriz asociada de la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, calculamos:

$$f(1,0,0) = (2,0,2,1),\ f(0,1,0) = (3,1,1,0),\ f(0,0,1) = (-1,3,1,1).$$

Luego la matriz asociada será

$$M_f = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Para obtener la matriz asociada de la aplicación $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, calculamos:

$$g(1,0,0,0) = (1,1),\ g(0,1,0,0) = (1,0),\ g(0,0,1,0) = (1,-1)\ g(0,0,0,1) = (1,0).$$

Luego la matriz asociada será

$$M_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) La matriz de la aplicación composición se calcula multiplicando las matrices anteriores, así

$$M_{g \circ f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto las ecuaciones de la aplicación compuesta son:

$$(g \circ f)(x,y,z) = [\begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}]^t = (5x+5y+4z, 2y-2z).$$

Problema 5.9.3 *Consideremos la matriz* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. *Calcular* M^{100}.

Veamos primero si la matriz M es diagonalizable. Para ello calculamos sus valores propios:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6.$$

Ahora es fácil obtener la soluciones de la ecuación característica: $\lambda = 3,\ \lambda = -2$.

Como M tiene orden 2 y hay dos valores propios distintos, efectivamente la matriz M es diagonalizable.

Veamos los vectores propios asociados:

$E_3 = \{(x,y):\ -2x+2y=0\} = \{(x,x):\ x \in \mathbb{R}\} = \langle(1,1)\rangle$.

$E_{-2} = \{(x,y):\ 3x+2y=0\} = \{(x, \frac{-2}{3}x):\ x \in \mathbb{R}\} = \langle(1,-\frac{3}{2})\rangle$.

Como consecuencia de lo anterior tenemos, que $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal semejante a M y su matriz de paso viene dada por $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Ahora tenemos que calcular la inversa de P. Sabemos que $P^{-1} = \frac{1}{det(P)} Adj(P^t)$.

Es claro que $det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$.

Por otra parte está claro que P es una matriz simétrica con lo cual, $Adj(P^t) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Por lo tanto $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$

Finalmente:

$$M^{100} = PD^{100}P^{-1}.$$

5.10. Primer Parcial curso 2006/07.

Problema 5.10.1 *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:*

$$\left\{ \begin{array}{llll} x & -y & +2z & = 2 \\ 2x & +y & -z & = 1 \\ x & +2y & +z & = 0 \\ 2x & -2y & & = 3 \end{array} \right.$$

Solución.

Estudiaremos este sistema por el método de Gauss. La matriz del sistema será:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Ahora, razonamos del modo siguiente: ponemos como segunda fila, la segunda menos el doble de la primera, y como tercera la resta de la tercera menos la primera.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Si a la tercera fila le restamos la segunda y a la cuarta le restamos el doble de la primera, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right).$$

Si ahora a la cuarta fila le sumamos la tercera, el sistema equivalente que nos queda será:

$$\left\{\begin{array}{llll} x & -y & +2z & = 2 \\ & 3y & -5z & = -3 \\ & & 4z & = 1 \end{array}\right.$$

Evidentemente este sistema es compatible determinado.

Problema 5.10.2 *Estudiar si la siguiente matriz es diagonalizable.* $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Solución. Para ver si la matriz M es diagonalizable, lo primero que debemos obtener son sus valores propios.

Los valores propios son las soluciones de la ecuación característica:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & 8 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(-2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)(1-\lambda)^2.$$

Luego los valores propios son : $\lambda = -2, \ \lambda = 1$.

Como la matriz tiene orden 3 y sólo hay dos valores propios distintos, para saber si la matriz es diagonalizable debemos estudiar las dimensiones de los subespacios de vectores propios asociados.

Subespacio de vectores propios asociado al valor propio $\lambda = 1$.

$$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

Luego E_1 es el conjunto de soluciones del sistema homogeneo:

$$\left\{ \begin{array}{ll} & -2z = 0 \\ 2x & +8z = 0 \\ & -3z = 0 \end{array} \right.$$

Por lo tanto, $E_1 = \{(0,y,0) : \ y \in \mathbb{R}\} = \langle (0,1,0) \rangle$.

Subespacio de vectores propios asociado al valor propio $\lambda = -2$.

$$E_{-2} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

Luego E_{-2} es el conjunto de soluciones del sistema homogeneo:

$$\left\{ \begin{array}{lll} 3x & & -2z = 0 \\ 2x & +3y & +8z = 0 \end{array} \right.$$

Por lo tanto, $E_{-2} = \{(\frac{2}{3}z, \frac{-28}{9}z, z) : \ z \in \mathbb{R}\} = \langle (\frac{2}{3}, \frac{-28}{9}, 1) \rangle$.

Con lo cual tenemos: $dim(E_1) + dim(E_{-2}) = 2 \neq 3$. Luego la matriz no es diagonalizable.

Problema 5.10.3 *Comprobar que la función* $u(t,x) = \ln(1 + (t+x)^2) + \cos(x-t)$ *es solución de la ecuación de ondas:*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x)$$

Solución.
$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{2(t+x)}{1+(t+x)^2} + \sin(x-t)$.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) = \frac{2[(1+(t+x)^2] - 4(t+x)^2}{[1+(t+x)^2]^2} - \cos(x-t) = \frac{2[1-(t+x)^2]}{[1+(t+x)^2]^2} - \cos(x-t).$$

Por otra parte,
$\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) = \frac{2(t+x)}{1+(t+x)^2} - \sin(x-t)$.
Con lo cual,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) = \frac{2[(1+(t+x)^2] - 4(t+x)^2}{[1+(t+x)^2]^2} - \cos(x-t) = \frac{2[1-(t+x)^2]}{[1+(t+x)^2]^2} - \cos(x-t).$$

Problema 5.10.4 *Describir la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función* $f(x,y) = \ln(x^2+2y+1) + \sin(x+y)$ *en el punto* $(0,0,0)$.

Como $f(0,0) = 0$, está claro que $(0,0,0) \in G(f)$. Para calcular el plano tangente debemos obtener el vector gradiente de la función en el origen de coordenadas.
$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \frac{2x}{x^2+2y+1} + \cos(x+y)$; por lo tanto $\frac{\partial}{\partial x}f(0,0) = 1$.
Por otra parte,
$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \frac{2}{x^2+2y+1} + \cos(x+y)$; por lo tanto $\frac{\partial}{\partial y}f(0,0) = 3$.
Asi tenemos que: $\nabla f(0,0) = (1,3)$, y como consecuencia el plano tangente vendrá dado por:

$$z - f(0,0) = \langle (1,3), (x-0, y-0) \rangle$$

es decir,

$$x + 3y - z = 0.$$

Problema 5.10.5 *Consideremos una región del plano que se calienta de tal modo que la temperatura en el punto* (x,y) *viene dada por* $T(x,y) = y^2 - x^2 + 100$. *Supongamos que la curva* $x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 50$ *está dentro de la región. ¿En qué puntos de la curva la temperatura será máxima y en qué puntos mínima?*

La región donde debemos maximizar y minimizar la temperatura es:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 50\},$$

la cual se puede escribir como:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; g(x, y) = 50\},$$

donde la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida por $g(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$.

Como A es una elipse, está claro que es un conjunto cerrado y acotado y como T es una función continua tenemos, por el teorema de Weierstrass, que T alcanza el máximo y el mínimo absoluto sobre A.

Veamos que para calcular los extremos absolutos podemos aplicar multiplicadores de Lagrange.

Para ello tenemos que calcular el gradiente de la función g :

$\nabla g(x, y) = (2x, y)$, en el único punto del plano donde se anula el gradiente es en $(0, 0)$ y dicho punto no está en A.

Por lo tanto, los extremos absolutos de T en A estarán entre los puntos que verifican el siguiente sistema:

$$\nabla f(x, y) + \lambda \nabla g(x, y) = (0, 0)$$
$$x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 50.$$

Este sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} -2x & +\lambda 2x = 0 \\ 2y & +\lambda y = 0 \\ x^2 & +\frac{1}{2}y^2 = 50 \end{cases}$$

De la primera ecuación se obtiene que $2x(-1+\lambda) = 0$, por lo tanto puede ocurrir: $x = 0$ o $\lambda = 1$.

Estudiemos el caso $x = 0$.

En este caso, de la tercera ecuación se desprende que $y^2 = 100$, es decir, los puntos que nos quedan son: $(0, 10), \; (0, -10)$.

Cuando $\lambda = 1$, se tiene:

De la segunda ecuación $y = 0$, y sustituyendo ese valor en la tercera ecuación nos queda que $x^2 = 50$. Por lo tanto, los puntos que se obtienen son: $(5\sqrt{2}, 0), \; (-5\sqrt{2}, 0)$.

Si ahora calculamos la temperatura en los puntos anteriores se tiene:

$$T(0, 10) = T(0, -10) = 200, \quad T(5\sqrt{2}, 0) = T(-5\sqrt{2}, 0) = 50.$$

Con lo cual, en los puntos $(5\sqrt{2}, 0), (-5\sqrt{2}, 0)$ se alcanza la temperatura mínima

5.11. Resolución del control 2.(3-5-07)

Problema 5.11.1 *Probar que las funciones de la forma* $w(r,s) = f(\frac{r-s}{s})$*, donde* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función con derivada continua, son solución de la ecuación en derivadas parciales:*

$$r\frac{\partial}{\partial r}w(r,s) + s\frac{\partial}{\partial s}w(r,s) = 0.$$

Si llamamos $h(r,s) = \frac{r-s}{s}$. Tenemos que la función $w(r,s) = (f \circ h)(r,s)$, por lo tanto para calcular las derivadas parciales podemos aplicar la regla de la cadena:

$$(\frac{\partial}{\partial r}w(r,s), \frac{\partial}{\partial s}w(r,s)) = f'(h(r,s)(\frac{\partial}{\partial r}h(r,s), \frac{\partial}{\partial s}h(r,s)).$$

Ahora, calculando $\frac{\partial}{\partial r}h(r,s) = \frac{1}{s}$ y $\frac{\partial}{\partial s}h(r,s) = \frac{-s-(r-s)}{s^2} = \frac{-r}{s^2}$. Con lo cual,

$$r\frac{\partial}{\partial r}w(r,s)+s\frac{\partial}{\partial s}w(r,s) = rf'(h(r,s))\frac{1}{s}+sf'(h(r,s))\frac{-r}{s^2} = f'(h(r,s))(\frac{r}{s}-\frac{rs}{s^2}) = 0.$$

Problema 5.11.2 *Hallar el área común a los circulos de ecuaciones respectivas:* $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 4x$.

Los circulos que intervienen son: $x^2 + y^2 = 4$, $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Si ahora consideramos los puntos que están en ambas circunferencias se obtiene que son: $(1, \pm\sqrt{3})$.

Una vez conocidos los puntos de intersección el problema se puede hacer de varias formas. Aquí, utilizaremos sólo la integral definida.

$$A = 2\left(\int_0^1 \sqrt{4-(x-2)^2}dx + \int_1^2 \sqrt{4-x^2}dx\right)$$

La primera integral se puede resolver haciendo el cambio $\sin(t) = \frac{x-2}{2}$ y la segunda haciendo el cambio $\sin(t) = \frac{x}{2}$. Otra forma de obtener el valor de las integrales sería aplicando el método de Alemán.

Otra forma de hacerlo sería comprobar que el conjunto D común a los dos circulos es una región de tipo II ya que:

$$D = \{(x,y) :\ y \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}],\ 2-\sqrt{4-y^2} \le x \le \sqrt{4-y^2}\}.$$

Con lo cual el área será

$$A = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx \right) dy == \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 2(\sqrt{4-y^2} - 1) dy.$$

Problema 5.11.3 *Calcular el volumen del elipsoide de ecuación:* $x^2 + \frac{4y^2}{9} + 4z^2 = 4$.

Si dividimos la expresión anterior por 4 nos queda el elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1.$$

El volumen del sólido será:

$$V = 2 \int \int_D \sqrt{1 - (\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9})} dxdy,$$

donde $D = \{(x, y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$. Para resolver esta integral hacemos el siguiente cambio de variable:

$$T : [0, 1] \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$$

tal que

$$T(r, \theta) = (2r\cos(\theta), 3r\sin(\theta)).$$

Teniendo presente el cambio de variable, se obtiene inmediatamente que $J_T(r, \theta) = 6r$. Por lo tanto,

$$V = 2 \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - r^2} 6r d\theta \right) dr = 4\pi \int_0^1 6r\sqrt{1 - r^2} dr =$$

$$12\pi \left[\frac{-2}{3} (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = 8\pi.$$

Problema 5.11.4 *Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas*

$$F(x, y) = (3x^2 + 2x + y^2, 2xy + y^3),$$

para mover una partícula desde el punto $(0, 0)$ *hasta el punto* $(0, 1)$ *siguiendo la trayectoria:*

Desde el punto $(0, 0)$ *hasta el punto* $(1, 1)$ *por la parábola de ecuación* $y = x^2$, *y desde el punto* $(1, 1)$ *hasta el punto* $(0, 1)$ *siguiendo la recta que une dichos puntos.*

Las funciones coordenadas del campo de fuerzas son: $F_1(x,y) = 3x^2 + 2x + y^2$ y $F_2(x,y) = 2xy + y^3$. Si ahora calculamos las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

es decir, el campo F es conservativo.

En este caso para calcular el trabajo será suficiente con conocer el potencial del campo. Así:

$f(x,y) = \int_0^x F_1(t,0)dt + \int_0^y F_2(x,t)dt = \int_0^x (3t^2+2t)dt + \int_0^y (2xt+t^3)dt$. De donde se desprende que

$$f(x,y) = x^3 + x^2 + xy^2 + \frac{y^4}{4}.$$

Finalmente, el trabajo será:

$$W = f(0,1) - f(0,0) = \frac{1}{4}.$$

5.12. Parcial 14 de diciembre de 2007.

1. (3.5 puntos)

Estudiar, según los valores de los parámetros a, b el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +y & +z & = 3 \\ x & -y & +z & = 1 \\ 2x & & +az & = b \end{array}\right.$$

Estudiamos el carácter del sistema por el método de Gauss-Jordan. Por lo tanto si escribimos la matriz del sistema nos queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & a & b \end{array}\right).$$

Ahora cambiamos las dos primeras columnas (recordemos que en este caso las variables también cambian y por tanto, la primera columna corresponde a y, la segunda a x y la tercera a z)

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a & b \end{array}\right)$. Ahora procediendo de forma habitual tenemos: Si a la segunda fila le sumamos la primera nos quedará: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & a & b \end{array}\right)$. Finalmente restamos la segunda fila a la tercera y de esta forma nos queda la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & a-2 & b-4 \end{array}\right).$$

Por este procedimiento hemos obtenido el siguiente sistema equivalente:

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +y & +z & = 3 \\ 2x & & +2z & = 4 \\ & & (a-2)z & = b-4 \end{array}\right.$$

Estudiemos según los valores de los parámetros:

Si $a = 2$ y $b \neq 4$ de la tercera ecuación obtenemos que el sistema es incompatible.

Si $a = 2$ y $b = 4$, entonces la tercera ecuación desaparece y nos queda un sistema compatible indeterminado, donde si tomamos $x = \lambda$ las soluciones son de la forma $x = \lambda$, $z = 2 - \lambda$ e $y = 1$.

Por último, si $a \neq 2$ el sistema, independientemente del valor de b, es siempre compatible determinado.

La solución será: $z = \frac{b-4}{a-2}$, $x = 2 - \frac{b-4}{a-2}$, $y = 1$.

2.(3 puntos)

Estudiar si la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ es invertible. En caso afirmativo, calcular la matriz inversa.

Para ver si la matriz A es invertible tenemos que calcular su determinante.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

Como el determinante es distinto de cero la matriz es invertible. La Fórmula para obtener la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A^t).$$

En este caso se tiene:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} adj \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculando los adjuntos nos queda:$A_{11} = 6,\ A_{12} = -4,\ A_{13} = -2,\ A_{21} = -3,\ A_{22} = 3,\ A_{23} = 1,\ A31 = -1,\ A_{32} = -1,\ A_{33} = 1$. Con lo cual, la matriz inversa es:
$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -4 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

3.(3.5 puntos)

Consideremos la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Estudiar si M es diagonalizable y en caso afirmativo dar una matriz diagonal semejante y su matriz de paso.

Para ver si la matriz M es diagonalizable, primero tenemos que obtener los valores propios. Para ello tenemos que resolver la ecuación carateristica.

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

En este caso es claro que los valores propios son $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$. Como la matriz es de orden 3 y sólamente hay dos valores propios no sabremos si es diagonalizable hasta que no sepamos la dimensión de los subespacios de vectores propios asociados.

Subespacio de vectores propios asociados a $\lambda = 1$.

$$E_1 = \{(x, y, z)/ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} =$$

$= \{(x, y, z)/\ x+y+z = 0\} = \{(x, y, -x-y)/\ x, y \in \mathbb{R}\} = \langle\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}\rangle.$

Esta claro que $dim(E_1) = 2$ ya que los vectores $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ forman una base de E_1.

Veamos ahora el subespacio de vectores propios asociados a $\lambda = 2$.

$$E_2 = \{(x,y,z)/ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} =$$

$$= \{(x,y,z)/ \ -x = 0, \ -y = 0\} = \{(0,0,z)/ \ z \in \mathbb{R}\} = \langle\{(0,0,1)\}\rangle.$$

Luego $dim(E_2) = 1$. Como la suma de las dimensiones es justamente el orden de la matriz M queda probado que dicha matriz es diagonalizable.

Finalmente, podemos dar como matriz diagonal semejante $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Para esta matriz diagonal, podemos tomar como matriz de paso, la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5.13. Parcial de Matemáticas. 7 de Febrero de 2008

Problema 5.13.1 . *Estudiar si la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable. En caso afirmativo escribir una matriz diagonal semejante y una matriz de paso para dicha matriz semejante.

Primero calculamos los valores propios de la matriz:

$$0 = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -4 & -4 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = (1-\lambda)(\lambda+1)^2$$

Luego los valores propios son $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$.

Ahora, tenemos que obtener los subespacios de los vectores propios asociados.

$$E_1 = \{(x,y,z) : \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

Con lo cual,

$$E_1 = \{(x,y,z) : \left\{ \begin{array}{r} -4x + -4y - 4z = 0 \\ x + 2z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{array} \right. \} = \{(x, -\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}) : \; x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \rangle$$

Por otra parte, tenemos:

$$E_{-1} = \{(x,y,z) : \begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

Con lo cual,

$$E_{-1} = \{(x,y,z) : \left\{ \begin{array}{r} -2x + -4y - 4z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{array} \right. \}$$

Así que $E_{-1} = \{(-2y - 2z, y, z) : \; y, z \in \mathbb{R}\} = \langle (-2,1,0), (-2,0,1) \rangle$

Como el orden de la matriz es 3 y la suma de las dimensiones de los subespacios de vectores propios también es 3, se tiene que la matriz es diagonalizable.

Una matriz diagonal semejante es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Una de las matrices de paso asociada será:
$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Problema 5.13.2 . *Resolver el siguiente sistema en función del parámetro a cuando sea posible,*

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + y + 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \\ 2x + y + z = a \end{array} \right. .$$

Vamos a resolver el sistema por el método de Gauss-Jordan.

En primer lugar, escribimos la forma matricial del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & a \end{array}\right)$$

En segundo lugar, intercambiamos la primera y la tercera fila:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 4 & 3 & 4 & 1 \\ a & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora, multiplicamos la primera fila por (-2) y el resultado se lo sumamos a la segunda fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|r} 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 1-2a \\ a & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Multiplicamos la segunda fila por (-1) y el resultado se lo sumamos a la tercera fila:

$$\left(\begin{array}{ccc|r} 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 1-2a \\ a & 0 & 0 & 2a \end{array}\right)$$

Así hemos llegado al siguiente sistema equivalente:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+y+z=a \\ y+2z=1-2a \\ ax=2a \end{array}\right. .$$

De la tercera ecuación se tiene:

1. $a=0$, o bien

2. $a \neq 0$

Si $a=0$, entonces el sistema que se obtine es compatible indeterminado y además si consideramos las soluciones en función de z éstas son:

$$x=\frac{1}{2}(z-1), y=1-2z, z=z.$$

Si $a \neq 0$, el sistema es compatible determinado y la solución es: $x=2$, $y=-9+4a$, $z=5-3a$.

Problema 5.13.3 . *Razonar si la derivada direccional de la función*

$$f(x,y,z) = e^{x+yz} + cosx\ sinz$$

en el punto $(1,-1,1)$ *en la dirección* $(-1,2,1)$ *es igual a* 1.

Para calcular la derivada direccional que nos piden hemos de tener presente que la función es diferenciable y en este caso:

$$D_{(-1,2,1)}f(1,-1,1) = \langle(-1,2,1), \nabla f(1,-1,1)\rangle.$$

Por lo tanto lo primero que hacemos es calcular las derivadas parciales:
$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z) = e^{x+yz} - \sin(x)\cos(z)$,

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y,z) = ze^{x+yz}, \quad \frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z) = ye^{x+yz} + \cos(x)\cos(z).$$

Estas derivadas parciales nos permiten obtener el gradiente: $\nabla f(1,-1,1) = (1-\sin^2(1), 1, -1+\cos^2(1))$.

Consecuentemente:

$$D_{(-1,2,1)}f(1,-1,1) = \langle(-1,2,1), (1-\sin^2(1), 1, -1+\cos^2(1))\rangle =$$

$$= -1+\sin^2(1)+2-1+\cos^2(1) = 1.$$

Problema 5.13.4 *Calcular el plano tangente a la superficie*

$$z = tgx + x\,arctgy$$

en el punto $(0,0,0)$.

Si introducimos la función de tres variables $f(x,y,z) = \tan(x)+x\arctan(y)-z$. Queda claro que la superficie del enunciado del problema es el siguiente conjunto de nivel:

$S := \{(x,y,z) : \ f(x,y,z) = 0\}$. En este caso para calcular el plano tangente lo primero que debemos ver es si $(0,0,0) \in S$. Para ello calculamos $f(0,0,0) = \tan(0) + 0\arctan(0) - 0 = 0$.

Una vez comprobado que el punto $(0,0,0) \in S$, la fórmula del plano tangente viene dada de la siguiente forma:

$$\{(x,y,z) : \ 0 = \langle(x-0, y-0, z-0), \nabla f(0,0,0)\rangle\}.$$

Para obtener el gradiente de la función vamos primero a calcular las derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z) = 1+\tan^2(x)+\arctan(y),\ \frac{\partial}{\partial y}f(x,y,z) = \frac{x}{1+y^2},\ \frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z) = -1.$$

Por lo tanto, $\nabla f(0,0,0) = (1,0,-1)$. Una vez calculado el gradiente la ecuación del plano tangente será:

$$0 = \langle (x,y,z),(1,0,-1) = x - z.$$

Problema 5.13.5 *Para fabricar determinadas placas metálicas se utiliza aluminio, hierro y magnesio. La cantidad de placas que se produce utilizando x toneladas de aluminio, y toneladas de hierro y z toneladas de magnesio es $Q(x,y,z) = xyz$. Si el costo del aluminio es de 60 euros la tonelada, el hierro es a 40 euros la tonelada y el magnesio cuesta a 80 euros la tonelada. Cuántas toneladas de cada material deben usarse para producir 900 placas al menor costo posible?.*

Según el enunciado, El costo para fabricar xyz placas es: $C(x,y,z) = 60x + 40y + 80z$ euros. Como queremos obtener el menor costo para fabricar 900 placas, tendremos que calcular el mínimo de la función $C(x,y,z)$ teniendo en cuenta que la cantidad de placas debe ser $Q(x,y,z) = xyz = 900$.

Evidentemente, éste es un problema de cálculo de el mínimo de una función sometida a una restricción.

Para abarcar el probema, veamos que se pueden aplicar multiplicadores de Lagrange.

En efecto, si consideramos el conjunto donde tenemos que obtener el mínimo: $S := \{(x,y,z) : Q(x,y,z) = 900\}$ tenemos que ver que $\nabla Q(x,y,z) \neq (0,0,0)$ siempre que $(x,y,z) \in S$.

Como $\nabla Q(x,y,z) = (yz,xz,xy)$ y en S no hay vectores con alguna de sus coordenadas nulas, se cumple que $\nabla Q(x,y,z) \neq (0,0,0)$ siempre que $(x,y,z) \in S$.

Acabamos de ver que para obtener el valor del mínimo se pueden utilizar multiplicadores de Lagrange.

Con lo cual tenemos que resolver el siguiente sistema:

$$\nabla C(x,y,z) + \lambda \nabla Q(x,y,z) = (0,0,0), \quad Q(x,y,z) = 900.$$

Si escribimos la anterior ecuación vectorial como un sistema de ecuaciones se tiene:

$$\left\{\begin{aligned} 60+\lambda yz&=0\\ 40+\lambda xz&=0\\ 80+\lambda xy&=0\\ xyz&=900\end{aligned}\right.$$

Donde estamos trabajando se cumple: $xy \neq 0$, $xz \neq 0$ e $yz \neq 0$.

Por lo tanto, despejando λ de la primera ecuación se obtiene que $\lambda = \frac{-60}{yz}$.

Si ahora sustituimos el valor de λ en la segunda ecuación, nos queda:

$$40 - \frac{60}{yz}xz = 0,$$

con lo cual, $4y = 6x$, o lo que es lo mismo $y = \frac{3}{2}x$.

Sustituyendo el valor de λ en la tercera ecuación, se obtiene:

$$80 - \frac{60}{yz}xy = 0,$$

de donde se desprende que $8z = 6x$, por lo tanto, $z = \frac{3}{4}x$.

Finalmente, sustituyendo estos valores en la cuarta ecuación, tenemos: $x\frac{3}{2}x\frac{3}{4}x = 900$, con lo cual, $x^3 = 800$, lo que implica que $x = 2\sqrt[3]{100}$.

5.14. Control Integración. 9 de Mayo de 2008

Problema 5.14.1 *(1a) Sean* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *y* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *funciones con derivadas parciales continuas de forma que*

$$f(x, y, g(x, y)) = x + \cos(y).$$

Si $g(0, 0) = 1$ *y* $\nabla f(0, 0, 1) = (1, 1, 2)$, *calcular* $\nabla g(0, 0)$.

Sol.: Introducimos la función $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $h(x, y) = (x, y, g(x, y))$. Mediante esta nueva función se tiene que:

$$x + \cos(y) = f(x, y, g(x, y)) = (f \circ h)(x, y).$$

Teniendo en cuenta que $h(0, 0) = (0, 0, 1)$ y que $\nabla f(h(0, 0)) = \nabla f(0, 0, 1) = (1, 1, 2)$, podemos aplicar la regla de la cadena y se obtiene que:

$$(1,0) = (1,1,2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial g(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial g(0,0)}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Consecuentemente $\nabla g(0,0) = (0, -\frac{1}{2})$.

Problema 5.14.2 *(1b) Sea $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$ la temperatura en el punto (x,y) de un lámina (digamos que es el plano). Calcular las temperaturas extremas en el círculo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 2x + 3\}$.*

Sol.: f es una función continua y el círculo es cerrado (y acotado) y por tanto un conjunto compacto, luego existen temperatura máxima y mínima que se pueden alcanzar en

(a) puntos del interior del círculo con lo que candidatos a tales puntos son puntos críticos (x,y) de f, esto es, satisfacen

$$(a)\begin{cases} \nabla f(x,y) = (0,0), \\ \\ x^2 + y^2 < 2x + 3; \end{cases}$$

(b) puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 2x + 3$, esto es, de la variedad descrita por $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ (observar que g es C^1 y que $\nabla g(x,y) = (2x-2, 2y) \neq (0,0)$), con lo que candidatos a tales puntos son puntos críticos de $f(x,y) + \lambda g(x,y)$ para el correspondiente multiplicador de Lagrange λ, esto es, satisfacen

$$(b)\begin{cases} \nabla f(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) = (0,0), \\ \\ x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0. \end{cases}$$

Resolvamos primero el sistema (a), este queda

$$(a)\begin{cases} -2x = 0, \\ \\ -2y = 0 \\ \\ x^2 + y^2 < 2x + 3, \end{cases}$$

cuyas dos primeras ecuaciones dan como posible solución $(0,0)$ que también satisface la tercera inecuación (la que indica que esta en el interior del círculo) y por tanto ya tenemos un primer candidato donde se pueden alcanzar las temperaturas extremas.

Resolvamos ahora el sistema (b), este queda

$$(b)\begin{cases} -2x+\lambda(2x-2)=0, \\ \\ -2y+2\lambda y=0 \\ \\ x^2+y^2-2x-3=0, \end{cases}$$

De la segunda ecuación $2y(-1+\lambda)=0$ se obtienen dos posibilidades

$$(b1)\ y=0,$$

$$(b2)\ (y\neq 0)\ \lambda=1.$$

En el caso $(b1)$ se tiene que la tercera ecuación queda $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)=0$ que tiene como soluciones $x=3$ y $x=-1$, para cada uno de estos valores la ecuación primera nos da un valor de λ, obtenemos así dos nuevos candidatos donde se pueden alcanzar las temperaturas extremas, $(3,0)$ y $(-1,0)$. En el caso $(b2)$ se tiene, de la primera ecuación que $-2=0$ y por tanto este caso no da soluciones.

Una vez obtenidos los candidatos donde se pueden alcanzar las las temperaturas extremas, que son $(0,0)$ del sistema (a) y $(3,0)$ y $(-1,0)$ del sistema (b), como $f(0,0)=100$, $f(3,0)=91$ y $f(-1,0)=99$, concluimos que las temperaturas extremas son 100 y 91 y que estas se alcanzan en $(0,0)$ y $(-1,0)$ respectivamente.

Problema 5.14.3 *Calcular* $\displaystyle\int\int_D \frac{1}{1+y^2}dxdy$, *donde* D *es el triángulo* $\{(x,y):0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq x\}$.

Sol.: $\displaystyle\int\int_D \frac{1}{1+y^2}dxdy=\int_0^1\left(\int_0^x \frac{1}{1+y^2}dy\right)dx=\int_0^1 \arctan(x)dx.$

El cálculo de una primitiva de la arcotangente se puede hacer aplicando partes así que

$$\int \arctan(x)dx = x\arctan(x)-\int\frac{x}{1+x^2}dx = x\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+k.$$

Por lo tanto,

$$\int\int_D \frac{1}{1+y^2}dxdy=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(2).$$

Problema 5.14.4 *Calcular el volumen del conjunto* $E := \{(x, y, z) : \ x, y, z \geq 0, \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1\}$.

Sol.1: Despejando z de la ecuación que define al conjunto E se puede ver que $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$. Como nos pieden el volumen, entonces

$$Vol(E) = \int\int_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}\, dxdy,$$

donde $D := \{(x, y) : \ x, y \geq 0 \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$. Para calcular la integral anterior, podemos hacer el siguiente cambio de coordenadas:

$T : [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(r, \theta) = (2r\cos(\theta), 3r\sin(\theta))$. Teniendo en cuenta este cambio de coordenadas se desprende lo siguiente:

$$Vol(E) = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - r^2} 6r d\theta \right) dr = \frac{\pi}{2}(-3) \int_0^1 (-2r)(1-r^2)^{\frac{1}{2}} dr = -\pi \left[(1 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \pi.$$

Sol.2: También lo podemos hacer usando el principio de Cavalieri. Observar primero que z varía de 0 a 1, y que para cortes del conjunto E con planos $Z = z$, para estos valores de z, se tienen conjuntos descritos por

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 - z^2, \ x \geq 0, \ y \geq 0,$$

es decir, por

$$\frac{x^2}{(2\sqrt{1 - z^2})^2} + \frac{y^2}{(3\sqrt{1 - z^2})^2} \leq 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0,$$

que es la cuarta parte de la figura plana encerrada por la elipse $\frac{x^2}{(2\sqrt{1-z^2})^2} + \frac{y^2}{(3\sqrt{1-z^2})^2} = 1$, de semiejes $2\sqrt{1 - z^2}$ y $3\sqrt{1 - z^2}$, y por tanto de área

$$A(z) = \frac{1}{4}\pi(2\sqrt{1 - z^2})(3\sqrt{1 - z^2}) = \frac{3\pi}{2}(1 - z^2).$$

En consecuencia, por el P. de Cavalieri,

$$Vol(E) = \int_0^1 A(z)dz = \int_0^1 \frac{3\pi}{2}(1-z^2)\, dz = \frac{3\pi}{2}(z-z^3/3)|_0^1 = \frac{3\pi}{2}(1-1/3) = \pi.$$

Problema 5.14.5 *Un objeto se mueve en el campo de fuerzas* $F(x, y) = (y^2, 2(x+1))$*, en sentido antihorario desde el punto* $(2, 0)$ *hasta el punto* $(0, 3)$ *sobre el camino elíptico* $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ *y luego va hacia el punto* $(0, 0)$ *moviéndose por el eje de ordenadas. + Cúal es el trabajo realizado por el campo de fuerzas sobre el objento?*

Sol.: La parametrización de la curva que nos piden la podemos obtener de la forma siguiente:

Para desplazarse desde el punto $(2, 0)$ hasta el punto $(0, 3)$:

$$\alpha_1 : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2 : \ \alpha_1(t) = (2\cos(t), 3\sin(t)).$$

Para desplazarse desde el punto $(0, 3)$ hasta el punto $(0, 0)$: $\alpha_2 : [0, 3] \to \mathbb{R}^2 : \ \alpha_2(t) = (0, 3 - t)$.

Una vez dada la parametrización anterior, el trabajo será

$$W = \int_{\alpha_1} F ds + \int_{\alpha_2} F ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle F(\alpha_1(t)), \alpha_1'(t) \rangle dt + \int_0^3 \langle F(\alpha_2(t)), \alpha_2'(t) \rangle dt.$$

($\langle u, v \rangle = u \cdot v$ es el producto de u y v)

Con lo cual,

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle (9\sin^2(t), 4\cos(t)+2), (-2\sin(t), 3\cos(t)) \rangle dt + \int_0^3 \langle ((3-t)^2, 2), (0, -1) \rangle dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-18\sin^3 t + 12\cos^2 t + 6\cos t) dt - \int_0^3 2dt.$$

Ahora, el calculo de las integrales involucradas es sencillo, si acaso, las más complicadas, de serlo, son

$$\int \sin^3 t dt = \int \sin t(1 - \cos^2 t) = -\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t,$$

$$\int \cos^2 t dt = \int \frac{1}{2}(1 + \cos(2t)) dt = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin(2t)).$$

Aplicando por tanto la regla de Barrow, $W = 3\pi - 12$.

5.15. Examen septiembre 2008

Problema 5.15.1 *Estudiar el sistema de ecuaciones siguiente, según el parámetro* **a***.*

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +az & =1 \\ -x & +ay & -z & =2 \\ ax & -y & +z & =3 \end{array}\right.$$

Estudiamos el sistema por el método de Gauss-Jordan. Para ello consideramos la matriz del sistema:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & a & 1 \\ -1 & a & -1 & 2 \\ a & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Primero le sumamos a la segunda fila la primera y después multiplicamos la primera fila por $-a$ y el resultado se lo sumamos a la tercera fila, con lo cual nos queda:

$$\left(\begin{array}{lrr|r} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a+1 & a-1 & 3 \\ 0 & -1-a & 1-a^2 & 3-a \end{array}\right)$$

Ahora para obtener un sistema equivalente más sencillo, le sumamos a la tercera fila la segunda:

$$\left(\begin{array}{lrr|r} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a+1 & a-1 & 3 \\ 0 & 0 & a-a^2 & 6-a \end{array}\right)$$

Esto nos permite escribir el sistema equivalente siguiente:

$$\left\{\begin{array}{lrrr} x & +y & +az & =1 \\ & (a+1)y & +(a-1)z & =3 \\ & & (-a^2+a)z & =6-a \end{array}\right.$$

Para ver el carácter del sistema resolvemos la ecuación $-a^2+a=0$, cuyas raices son: $a=0,1$. Para estos dos valores es evidente que el sistema es incompatible.

Supongamos que $a \neq 0,1$. En este caso se tiene que $z=\frac{6-a}{a-a^2}$ y entonces mirando la segunda ecuación vemos que la y se puede despejar cuando $a \neq -1$.

Veamos que ocurre cuando $a = -1$. En este caso de la segunda ecuación se obtiene que $z = \frac{-3}{2}$ y de la tercera $z = \frac{-7}{2}$. Lo cual es una contradicción en cuyo caso el sistema debe ser incompatible.

Resumiendo si $a = 0, 1, -1$ el sistema es incompatible. En todos los otros casos el sistema es compatible determinado.

Problema 5.15.2 *Hallar el plano tangente a la superficie* $z = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$ *en el punto* $(1, 0, 3)$. *Cuál es su recta normal en dicho punto?*

Si definimos la función $f(x, y) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$ se ve fácilmente que la superficie coincide con la gráfica de dicha función:

$$Gr(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

Además, una mera comprobación es suficiente para asegurar que el punto $(1, 0, 3) \in Gr(f)$. En efecto, $f(1, 0) = 3$. Por lo tanto, para hallar el plano tangente deberemos calcular $\nabla f(1, 0)$, ya que la ecuación del plano tangente viene dada por la fórmula:

$$z - f(1, 0) = \langle \nabla f(1, 0), (x - 1, y - 0) \rangle.$$

Veamos lo que valen las derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 4 - 2x + y \Rightarrow \ \frac{\partial}{\partial x} f(1, 0) = 2.$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 2 + x - 2y \Rightarrow \ \frac{\partial}{\partial y} f(1, 0) = 3.$$

Con lo cual, la ecuación del plano tangente es la siguiente:

$$z - 3 = \langle (2, 3), (x - 1, y) \rangle = 2x + 3y - 2 \ \text{ equivalentemente, } \ 2x + 3y - z + 1 = 0.$$

De donde se obtine que la ecuación paramétrica de la recta norma es:

$$(x, y, z) = (1, 0, 3) + \lambda(2, 3, -1).$$

Problema 5.15.3 *Un astronauta está atrapado en una habitación alienígena sujeto al campo de fuerzas* $F(x, y) = (ye^{xy} + 2xy^3, xe^{xy} + 3x^2y^2 + \cos(y))$. *Suponiendo que el astronauta está en* $(0, 0)$ *y que hay una puerta de escape en* $(3, 2)$, *hallar el esfuerzo que tiene que realizar para escapar.*

Como podemos identificar el esfuerzo con el trabajo que tiene que realizar el astronauta. Para calcular el trabajo necesitamos la trayectoria y en el problema no nos dicen nada sobre ella, por lo tanto lo más lógico es que el campo de fuerzas sea conservativo. En efecto,

Si llamamos $F_1(x, y) = ye^{xy} + 2xy^3$, y $F_2(x, y) = xe^{xy} + 3x^2y^2 + \cos(y)$. Tenemos que comprobar que $\frac{\partial}{\partial y}F_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}F_2(x, y)$. En efecto,

$$\frac{\partial}{\partial y}F_1(x, y) = e^{xy} + yxe^{xy} + 6xy^2 = \frac{\partial}{\partial x}F_2(x, y).$$

Como el campo es conservativo, para calcular el trabajo es suficiente con calcular su potencial:

$$f(x, y) = \int_0^x F_1(t, 0)dt + \int_0^y F_2(x, t)dt = \int_0^y (xe^{xt} + 3x^2t^2 + \cos(t))dt =$$

$$\left[e^{xt} + x^2t^3 + \sin(t)\right]_0^y = e^{xy} + x^2y^3 + \sin(y) - 1$$

Finalmente el trabajo realizado es: $W = f(3, 2) - f(0, 0) = e^6 + 72 + \sin(2) - 1$.

Problema 5.15.4 *Resolver la ecuación* $x'' + 6x' + 34x = e^{-3t}$.

Para calcular la solución general de la ecuación necesitamos conocer la solución general de la ecuación homogénea asociada así como una solución particular dela ecuación que nos dan.

Para obtener la solución general de la ecuación homogénea estudiamos la ecuación:

$$m^2 + 6m + 34 = 0.$$

Esta ecución no tiene soluciones reales puesto que el radicando $36-136 = -100$ es negativo. Con lo que la solución de la ecuación se puede escribir en la forma

$$m = -3 \pm 5i.$$

La solución general de la ecuación homogénea queda de la siguiente forma:

$$y_g = e^{-3t}(A\cos(5t) + B\sin(5t)).$$

Para obtener una solución particular de la ecuación original razonamos de la forma siguiente: buscamos una solución que tenga la forma $y_p = Ce^{-3t}$.

Como y_p debe ser una solución derivandola y sustituyendola en la ecuación nos queda que:

$$9Ce^{-3t} - 18Ce^{-3t} + 34Ce^{-3t} = e^{-3t}.$$

Como la exponencial no se anula, nos queda la ecuación:

$9C - 18C + 34C = 1$ por lo tanto $25C = 1$, de donde se obtiene que $C = \frac{1}{25}$. Con estos resultamos se desprende que la solución general de la ecuación tiene la siguiente forma

$$y = e^{-3t}(A\cos(5t) + B\sin(5t) + \frac{1}{25}).$$

5.16. Parcial del 6 de Marzo de 2009

Problema 5.16.1 *Hallar la derivada direccional de la función* $f(x, y, z) = z(x-y)^5 + xy^2z^3$ *en el punto* $(2, 1, -1)$ *y en la dirección de la recta normal a la superficie* $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ *en dicho punto.*

Si definimos la función $g(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$, entoces la suferficie del enunciado se puede escribir como el siguiente conjunto de nivel:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ g(x, y, z) = 6\}.$$

Como el punto $(2, 1, -1) \in S$ la dirección de la recta normal a S en dicho punto será $v = \nabla g(2, 1, -1) = (4, 2, -2)$.

La derivada direccional que nos pieden es: $D_v f(2, 1, -1)$. Como la función f es diferenciable se tiene que:

$$D_{(4,2,-2)}f(2, 1, -1) = \langle \nabla f(2, 1, -1), (4, 2, -2)\rangle.$$

Para obtener el gradiente de la función f, calculemos las derivadass parciales de f.

$\frac{\partial}{\partial x}f(x, y, z) = 5z(x-y)^4 + y^2z^3 \to \frac{\partial}{\partial x}f(2, 1, -1) = -6$

$\frac{\partial}{\partial y}f(x, y, z) = -5z(x-y)^4 + 2xyz^3 \to \frac{\partial}{\partial y}f(2, 1, -1) = 1$

$\frac{\partial}{\partial z}f(x, y, z) = (x-y)^5 + 3xy^2z^2 \to \frac{\partial}{\partial z}f(2, 1, -1) = 7$

Por lo tanto, $D_{(4,2,-2)}f(2, 1, -1) = \langle(-6, 1, 7), (4, 2, -2)\rangle = -36$.

Problema 5.16.2 *Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie descrita por* $xe^{\frac{x^2}{2}} + y^2 + z^2 = 1$ *en los puntos* $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}), (0, 0, 1)$. *Es algunos de estos planos horizontal?*

Definimos la función $f(x,y,z) = xe^{\frac{x^2}{2}} + y^2 + z^2$, entonces la superficie es el siguiente conjunto de nivel:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ f(x,y,z) = 1\}.$$

Ahora es una mera comprobación ver que $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}), (0,0,1) \in S$. En estas condiciones las ecuaciones de los planos tangentes son respectivamente:

$$0 = \langle \nabla f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}), (x, y - \frac{1}{\sqrt{2}}, z + \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle$$

$$0 = \langle \nabla f(0,0,1), (x, y, z-1) \rangle$$

Según estas ecuaciones debemos obtener las derivadas parciales de la función f en los puntos determinados.
$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = e^{\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{\frac{x^2}{2}} = (1+x^2)e^{\frac{x^2}{2}}$.
$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = 2y, \qquad \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = 2z.$
Con lo cual se tiene que

$$\nabla f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}) = (1, \frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{-2}{\sqrt{2}}), \quad \nabla f(0,0,1) = (1,0,2).$$

Los planos tangentes son:

$$0 = \langle (1, \frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{-2}{\sqrt{2}}), (x, y - \frac{-1}{\sqrt{2}}, z + \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle = x + \sqrt{2}y - \sqrt{2}z - 2$$

$$0 = \langle (1,0,2), (x, y, z-1) \rangle = x + 2z - 2.$$

Es claro que ninguno de los planos es horizontal.

Problema 5.16.3 *La densidad en cada uno de los puntos* (x,y) *de la placa metálica* $[-1,1] \times [-1,1]$ *es* $T(x,y) = 100 + (x-1)^3(y-2)^2 + \ln(1+x^2)$. *Se desea conocer cuales son, la dirección de mayor crecimiento de la densidad en el punto* $(0,0)$ *y la dirección de mayor decrecimiento de la densidad en el punto* $(0, \frac{1}{2})$.

Calculamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial x} T(x,y) = 3(x-1)^2(y-2)^2 + \frac{2x}{1+x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} T(x,y) = 2(x-1)^3(y-2)$$

Como la dirección de máximo crecimiento es la del gradiente se tendrá que en el punto $(0,0)$ la dirección es $\nabla T(0,0) = (12,4)$.

Como la dirección de decrecimineto máximo es la de menos el gradiente, en el punto $(0,\frac{1}{2})$ la dirección es $-\nabla T(0,\frac{1}{2}) = (\frac{-27}{2},-3)$.

Problema 5.16.4 *Una placa metálica circular puede describirse como* $P := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 4\}$ *se calienta según la función* $T(x,y) = x^2+2y^2+2x+3$. *Obtener los puntos de la placa donde la temperatura es máxima y los puntos donde la temperatura es mínima.*

Como la función temperatura es continua y la placa es un conjunto cerrado y acotado, sabemos que hay puntos con temperatura máxima y puntos con temperatura mínima.

Escribimos

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 < 4\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 = 4\}.$$

Sobre el conjunto $P_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 < 4\}$, como es abierto, los posibles extremos seran puntos críticos de la función T. Para ello buscamos los puntos que anulan al gradiente de T.

$$\frac{\partial}{\partial x}T(x,y) = 2x+2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}T(x,y) = 4y = 0$$

El único punto que verifica las ecuaciones anteriores es $(-1,0) \in P_1$.

Ahora si llamamos $P_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 = 4\}$. Para calcular los extremos sobre P_2 veamos si se puede aplicar el teorema de multiplicadores de Lagrange.

Definiendo la función $g(x,y) = x^2+y^2$. Está claro que $P_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ g(x,y) = 4\}$. Ahora veamos que en P_2 no hay puntos que anulen el gradiente de g. En efecto, las derivadas parciales vienen dadas por

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x,y) = 2x, \quad \frac{\partial}{\partial y}g(x,y) = 2y.$$

Con lo cual el único punto que anula el gradiente de g es el $(0,0) \notin P_2$.

Esto significa que podemos aplicar el teorema de multiplicadores y por lo tanto tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrl} 2x+2 & +\lambda 2x & = 0 \\ 4y & +\lambda 2y & = 0 \\ x^2 & +y^2 & = 4 \end{array} \right.$$

De la segunda ecuación se obtiene que $2y(2+\lambda) = 0$, con lo cual se debe verificar que o bien $y = 0$ o bien $\lambda = -2$.

Estudiemos que ocurre si $y = 0$. En este caso de la tercera ecuación se deduce que $x = \pm 2$. Así que en este caso se obtienen dos puntos $(2, 0), (-2, 0)$.

En el otro caso $\lambda = -2$. En este caso de la primera ecuación se desprende que $2x + 2 - 4x = 0$, con lo cual $x = 1$. Ahora sustituyendo en la tercera ecuación se tiene que $y = \pm\sqrt{3}$. Tenemos dos puntos $(1, \sqrt{3}), (1, -\sqrt{3})$.

Finalmente los puntos que hay que considerar son:

$$(-1, 0), (2, 0), (-2, 0), (1, \sqrt{3}), (1, -\sqrt{3}).$$

Problema 5.16.5 *Discutir y en su caso resolver el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro λ.*

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +\lambda z & = 0 \\ -x & +\lambda y & -z & = 2 \\ x & -y & +z & = 0 \end{array}\right.$$

Aplicando el método de Gauss-Jordan, escribimos el sistema en forma de matriz $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & \lambda & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ Si cambiamos el orden de las filas nos queda $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 2 \end{array}\right)$ Ahora a la segunda fila le restamos la primera y a la tercera fila le sumamos la primera, así nos queda: $\left(\begin{array}{lrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$ De la tercera ecuación se tiene que $(\lambda - 1)y = 2$.

Si $\lambda = 1$. Entonces el sistema es incompatible.

Si $\lambda \neq 1$. Entonces podemos despejar cada una de las incognitas y por lo tanto el sistema es compatible determinado.

Problema 5.16.6 *Para qué valores del parámetro a es diagonalizable la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. En el caso que M sea diagonalizable encontrar una matriz diagonal semejante y su matriz de paso.*

Para ver cuando la matriz M es diagonalizable hay que obtener los valores propios asociados. Como M es una matriz triangular es claro que los valores propios asociados son lo números que aparecen en la diagonal principal de la matriz. En este caso los valores son $1, 2$. Como la matriz es $3X3$ y sólo hay dos valores distintos, para saber cuando es diagonalizable tenemos que estudiar la dimensión de los vectores propios asociados.

Estudiemos los vectores propios asociados a 1.

$$E_1 = \{(x, y, z) : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} = \{(x, y, z) :\ ax = 0,\ x+y+z = 0\}$$

Si resolvemos el sistema anterior, hay que distinguir dos casos: Cuando $a \neq 0$ entonces $x = 0$ y por lo tanto,

$$E_1 = \langle (0, 1, -1) \rangle; \quad dim(E_1) = 1.$$

Si $a = 0$, Entonces nos queda que

$$E_1 = \langle \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\} \rangle, \quad dim(E_1) = 2.$$

Ahora obtemos los vectores propios asociados al valor propio 2.

$$E_1 = \{(x, y, z) : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} =$$

$$\{(x, y, z) :\ x = 0,\ ax - y = 0\ x + y = 0\}$$

Por lo tanto

$$E_1 = \langle (0, 0, 1) \rangle$$

Según lo visto la matriz es diagonalizable cuando $a = 0$. En este caso una matriz diagonal semjante será

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ una matriz de paso será $P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

5.17. Parcial Mayo, 2009

Problema 5.17.1 *Sean* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *y* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dos funciones con derivadas parciales continuas de forma que*

$$f(x, y, g(x, y)) = \sin(x + y^2).$$

Si $g(0, 0) = 0$ *y* $\nabla f(0, 0, 0) = (-1, -1, 2)$. *Calcular* $\nabla g(0, 0)$.

Problema 5.17.2 *Hallar el volumen del tetraedro acotado por los planos* $y = 0$, $x = 0$, *e* $y - x + z = 1$, *es decir, del conjunto*

$$\{(x, y, z) : (x, y) \in D,\ z \geq 0,\ y - x + z \leq 1\},$$

siendo D *el triángulo de vértices* $(0, 0), (-1, 0), (0, 1)$.

Problema 5.17.3 *Calcular el volumen del trozo de elipsoide*

$$\{(x, y, z) :\ x, y, z \geq 0,\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 \leq 1\}.$$

Problema 5.17.4 *Calcular la integral de línea* $\int_\alpha \cos(z)dx + e^x dy + e^y dz$, *donde* $\alpha : [0, 2] \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (1, t, e^t)$.

5.17.1. Parcial 18 de enero de 2010

Problema 5.17.5 *Consideremos las aplicaciones:* $L(x, y) = (x + y, 2x - 3y, y)$, $T(u, v, w) = (u - v, u + v, v + w - u)$

(a) Probar que dichas aplicaciones son lineales,

(b) Obtener la aplicación composición,

(c) Obtener las matrices asociadas a las tres aplicaciones.

Veamos que la aplicación L es lineal, según su definición se tiene que $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Con lo cual para describir su matriz asociada, estudiamos:

$$L(1, 0) = (1, 2, 0), \qquad L(0, 1) = (1 - 3, 1),$$

lo cual nos dice que la matriz asociada es:

$$M_L := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, para ver si la aplicación es lineal calculamos lo siguiente:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]^t = (x+y, 2x-3y, y)$$

lo que nos dice que efectivamente L es lineal.

Respecto a la aplicación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, calculamos:

$$T(1,0,0) = (1,1,-1), \quad T(0,1,0) = (-1,1,1), \quad T(0,0,1) = (0,0,1),$$

con estos valores la matriz asociada viene dada por:

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\right]^t = (u-v, u+v, -u+v+w)$$

lo que nos permite afirmar que T también es lineal.

Por último, como sabemos que la composición de aplicaciones lineales es una aplicación lineal, para obtener las ecuaciones de la aplicación compuesta calcularemos primero su matriz asociada:

$$M_{T\circ L} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

A partir de la matriz asociada se obtiene la aplicación:

$$T \circ L(x,y) = \left[\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]^t = (-x+4y, 3x-2y, x-3y).$$

Problema 5.17.6 *Discutir la compatibilidad del sistema*

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +y & +z & = 0 \\ 2x & -y & +3z & = 2a+1 \\ x & +2y & -z & = 2(1-a) \\ x & -z & = 0, & \end{array}\right.$$

según los valores del parámetro a. Resolver el sistema en el caso compatible.

El sistema tiene 4 ecuaciones y tres incognitas. Si miramos la última ecuación vemos que podemos quitar la incognita z ya que $x = z$. Con esta identificación el sistema nos queda de la forma siguiente:

$$\begin{cases} 2x & +y & = 0 \\ 5x & -y & = 2a+1 \\ 2y & = 2(1-a), \end{cases}$$

De la tercera ecuación de este sistema se desprende que $y = 1 - a$, y de la primera ecuación se obtiene que $y = -2x$. Si sustituimos los valores obtenidos en la segunda ecuación se tiene que $7x = 2a + 1$, de donde se tiene, por una parte que $x = \frac{2a+1}{7}$ y por otra que $-2x = 1 - a$, con lo cual $x = \frac{a-1}{2}$. Esto significa que el sistema será compatible sólamente en el caso en que $\frac{2a+1}{7} = \frac{a-1}{2}$, es decir cuando $a = 3$.

Si lo hacemos utilizando los determinantes el sistema será compatible cuando el determinante de la matriz ampliada sea cero. Estudiemos este caso.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2a+1 \\ 1 & 2 & -1 & 2(1-a) \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Hacemos ceros en la primera columna: sumamos a la primera fila la última cambiada de signo, a la segunda le restamos la última multiplicada por 2 y a la tercera le restamos la cuarta, con estas operaciones el determinante nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 2a+1 \\ 0 & 2 & 0 & 2(1-a) \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 2a+1 \\ 2 & 0 & 2(1-a) \end{vmatrix}$$

Ahora hacemos ceros en la primera columna, sumando a la segunda fila la primera y a la tercera la primera multiplicada por -2, de este modo nos queda que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 2a+1 \\ 2 & 0 & 2(1-a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 2a+1 \\ 0 & -4 & 2(1-a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2a+1 \\ -4 & 2(1-a) \end{vmatrix} = 14(1-a)+8a+4 = 0$$

De donde se obtiene que $a = 3$.

Problema 5.17.7 *Estudiar si la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

es diagonalizable. En caso afirmativo, hallar una matriz diagonal equivalente, así como una matriz de paso de tal diagonalización.

Para ver si la matriz A es diagonalizable, primero tenemos que calcular sus valores propios.

Para calcular los valores propios tenemos que resolver la ecuación caracteristica:

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((3-\lambda)^2-1) = (2-\lambda)^2(4-\lambda),$$

es decir, los valores propios son $\lambda = 2$ y $\lambda = 4$.

Estudio de los vectores propios asociados.

$$E_2 = \left\{ (x,y,z): \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \right\}$$

$$E_2 = \{(x,y,z): \ x+y-z=0\} = \{(z-y,y,z): \ y, z\mathbb{R}\} = \langle\{(1,0,1),(-1,1,0)\}\rangle$$

$$E_4 = \left\{ (x,y,z): \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \right\}$$

$$E_4 = \{(x,y,z): \ -x+y-z=0, \quad -2z=0\} = \langle\{(1,1,0)\}\rangle.$$

Como el orden de A es $3 = dim(E_2) + dim(E_4)$, se concluye que A es diagonalizable.

Una matriz diagonal semejante será: $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y una matriz de paso asociada a D es $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 5.17.8 *(a) Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie* $z = e^{\sin(x-y)}$ *en el punto* $(0, 0, 1)$.

(b) Calcular la derivada direccional de $e^{\sin(x-y)}$ *en el punto* $(0, 0)$ *en la dirección* $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$.

(a). La superficie que nos dan es la gráfica de la función $f(x, y) = e^{\sin(x-y)}$ ya que

$$Gr(f) = \{(x, y, z) : \ z = f(x, y)\},$$

lo primero que debemos comprobar es que el punto $(0, 0, 1) \in Gr(f)$. En efecto está claro que $f(0, 0) = e^0 = 1$.

En estas condiciones la ecuación del plano tangente viene dada por:

$$z - f(0, 0) = \langle \nabla f(0, 0), (x - 0, y - 0) \rangle.$$

Esto quiere decir que tenemos que calcular el vector gradiente de la función f en el punto $(0, 0)$.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \cos(x - y)e^{\sin(x-y)} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) = 1,$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = -\cos(x - y)e^{\sin(x-y)} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) = -1,$$

Por lo tanto, la ecuación del plano será:

$$z - 1 = \langle (1, -1), (x, y) \rangle \Rightarrow z - 1 = x - y \Rightarrow x - y - z = -1.$$

la recta normal tendrá la siguiente ecuación paramétrica:

$$(x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(1, -1, -1).$$

(b) La derivada direccional que nos piden es $D_{(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})} f(0, 0)$. Como la función f es diferenciable, la derivada direccional se puede calcular de la siguiente forma:

$$D_{(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})} f(0, 0) = \langle (1, -1), (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Problema 5.17.9 *(a) Hallar la dirección de máximo crecimiento y de mayor decrecimiento de la función*

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$$

en el punto $P(1, -1)$.

(b) Estudiar los extremos relativos de f.

(a) Para estudiar las direcciones que nos piden tenemos que calcular el gradiente de la función en el punto P.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(1, -1) = \frac{2}{3}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} f(1, -1) = \frac{-2}{3}$$

Esto significa que la dirección de crecimiento máximo es: $\nabla f(1, -1) = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$. La dirección de decrecimiento mayor es: $-\nabla f(1, -1) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

(b) El estudio de los extremos relativos es inmediata ya que la función logaritmo no es acotada superiormente y por lo tanto f no tiene máximos relativos. Respecto a los minimos está claro que f es siempre positiva y en el único punto donde la función vale 0 es en el $(0, 0)$. Esto nos dice que el $(0, 0)$ es el único mínimo relativo que además es absoluto.

Bibliografía

[1] T. M. Apostol, *Calculus*(volumen II) Reverté (2 edición), (1978).

[2] C.L. Bradley, K.J. Smith, *Cálculo*(volumen 2) Prentice Hall (1998).

[3] C. Fernández-Perez, F.J. Vázquez-Hernández, J.M. Vegas-Montaner, *Cálculo diferencial de varias variables* Thomson (2002).

[4] J.E. Marsden, A.J. Tromba, *Cálculo Vectorial* Addison Wesley, (1991).

[5] Cl. Pita Ruiz, *Cálculo Vectorial* Prentice-Hall (1995).

[6] Salas, Hille, Etgen, *Calculus*, Volúmenes I y II. Edit. Reverté (2002).

[7] G.F. Simmons, *Ecuaciones Diferenciales* McGraw Hill (1993).