Conjuntos $w-$compactos en c y en c_0, la conjetura de Llorens y Sims

Helga Fetter

Diciembre de 2016

Un poquito de Historia

Maurey en 1981 mediante la técnica de ultrapotencias probó que todo subconjunto convexo no vacío $w-$compacto de c_0 tiene la propiedad de punto fijo para mapeos no expansivos (FPP).

Lin en 1985 extendió este resultado a espacios con base $1-$ incondicional.

En 1998 Llorens Fuster y Sims conjeturaron que es cierto el inverso del teorema de Maurey, es decir que todo conjunto acotado, convexo, cerrado, no vacío (cca) que tiene la (FPP) tiene que ser $w-$ compacto.

Hubo varios intentos para probar esta conjetura, entre ellos los de Domínguez Benavides, Japón y Prus.

Dowling , Lennnard y Turett en 2003 presentaron el mejor resultado hasta esa fecha, para la solución de la conjetura de Llorens, Sims.
Se dieron cuenta que la propiedad de punto fijo para un subconjunto cerrado, acotado, convexo, no vacío C está ligada a la existencia de una sucesión en C "parecida" a la base sumante de $c_{0.}$

Definición: Sea (x_n) en un espacio de Banach. Decimos que (x_n) es asintóticamente isométrica a la base sumante (ξ_n) de c_0, si existe una sucesión (ε_n) de números positivos que converge a 0 tal que para toda $(t_n) \in l_1$ se tiene que

$$\sup_n \left(\frac{1}{1+\varepsilon_n}\right) \left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| \leq \left\|\sum_n t_n x_n\right\| \leq \sup_n (1+\varepsilon_n) \left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right|.$$

Observación

Si (x_n) es asintóticamente isométrica a (ξ_n), y $w_n = x_n - x_{n-1,}$ $x_0 = 0$ y $(s_n) \in c_{00}$, entonces

$$\left\|\sum_n s_n w_n\right\| = \left\|\sum_n s_n \left(x_n - x_{n-1}\right)\right\| = \left\|\sum_n \left(s_n - s_{n+1}\right) x_n\right\|$$

y por consiguiente

$$\frac{1}{1+\varepsilon_n} \sup_n |s_n| \leq \left\|\sum_n s_n w_n\right\| \leq (1+\varepsilon_n) \sup_n |s_n| = (1+\varepsilon_n) \left\|\sum_n s_n e_n\right\|_\infty .$$

es decir que (w_n) se va “pegando” a la base canónica (e_n) de $c_{0.}$

Uno de los dos resultados clave para la caracterización de conjuntos $w-$compactos en c_0 es el siguiente teorema.
Teorema: Si K es cerrado, convexo, acotado y no vacío (cca) en el espacio de Banach X y K contiene una sucesión (x_n) asintóticamente isométrica a (ξ_n), entonces existen $C \subset K$ a su vez (cca) y $T : C \to C$ aplicación contractiva sin punto fijo. De hecho

$$C = \left\{ x \in X : x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n : t_n \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}$$

y $T : C \to C$ está dada por

$$Tx_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_{j+n}}{2^j}, \, Tx = \sum_{n=1}^{\infty} t_n Tx_n.$$

La segunda parte consiste en ver el siguiente teorema:
Teorema: Si K es (cca) y no $w-$compacto en c_0 entonces contiene una sucesión (y_n) tal que $\left(\frac{y_n}{L}\right)$ es asintóticamente isométrica a (ξ_n) y por lo tanto existen $C \subset K$ a su vez (cca) y $T : C \to C$ aplicación contractiva sin punto fijo.

Esbozo de la demostración:
Como K no es w compacto pero es w^* compacto existen $(x_n) \subset K$ y $x \in l_\infty \backslash c_0$ tales que $x_n \underset{w^*}{\to} x$, $x_n = \sum_j a_j^{(n)} e_j, x = (a_j)$. Se supone sin pérdida de generalidad que $\limsup_j |a_j| = 1$.

Si $\delta < 4^{-7}$, $\|x_n\| \leq \beta$ para $n \in \mathbb{N}$, y $(\delta_n) \subset (0,1)$ es tal que $\delta_n < \delta/4^n$, se construyen dos sucesiones de enteros $N(1) < N(2), \ldots$ y $M(1) < M(2), \ldots$ tales que $\beta/\delta_n < M(n) - M(n-1) = \Delta_n$ y se define

$$y_n = \frac{1}{\Delta_n} \sum_{M(n-1)+1}^{M(n)} x_l \in K.$$

Además, si $y_n = \sum_i y_i^{(n)} e_i$, entonces

1. $\left| y_i^{(n)} \right| < \delta/4^{n+2}$ si $i > N_{M(n)}$
2. $\left| y_i^{(n)} - a_i \right| < \delta/4^{n+2}$ para $i \leq N_{M(n-1)}$
3. $\left| y_i^{(n)} - \frac{\Delta_n - j}{\Delta_n} a_i \right| < \delta/4^{n-1}$ para $N_{M(n-1)+j-1} < i < N_{M(n-1)+j}$.

De aquí se muestra a base de muchos cálculos que si $w_k = y_k - y_{k-1}$ y (ε_n) es cierta sucesión dependiente de δ, para $(t_k) \in c_{00}$

$$\max_n \frac{1}{1+\varepsilon_n}|t_n| \leq \left\|\sum t_k w_k\right\| \leq \max_n (1+\varepsilon_n)\,|t_n|,$$

es decir que (y_n) es asintóticamente isométrica a la base sumante (ξ_n) de c_0.

Corolario: Sea K un subconjunto cca de c_0. Entonces K es $w-$compacto si y solamente si todo subconjunto cca de K tiene la FPP.

El caso para el espacio c se obtiene usando el siguiente teorema:
Teorema: Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach real, $T \in X^*$, $K \subset X$ cerrado, convexo, acotado, no vacío. Entonces K es $w-$compacto, si y solamente si para toda $a \in \mathbb{R}$, $T^{-1}(a) \cap K$ es $w-$compacto.

Corolario: Sea K un subconjunto cca de c. Entonces K es $w-$ compacto si y solamente si todo subconjunto cca de K tiene la FPP.
Esbozo de la demostración. Un lado se sigue de Borwein y Sims. Consideremos K (cca) y no $w-$ compacto y $\lambda \in c^*$ dado por $\lambda((x_n)) = \lim_n x_n$. Sean $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda^{-1}(a) \cap K$ no es $w-$compacto y $U : \lambda^{-1}(a) \to c_0$ dado por $(U(x))_n = x_n - a$. Entonces U es una isometría afín sobre c_0. Consecuentemente $U\left(\lambda^{-1}(a) \cap K\right)$ no es $w-$compacto en c_0 y existe un subconjunto C cca de $U\left(\lambda^{-1}(a) \cap K\right)$ que no tiene la FPP. Sea $V : C \to C$ no expansiva sin punto fijo, entonces $U^{-1}VU : U^{-1}C \to U^{-1}C$ es una aplicación no expansiva sin punto fijo en el subconjunto cca $U^{-1}C$ de K.

Finalmente, en 2004, esto condujo a la solución de la conjetura de Llorens y Sims:

Teorema: Sea $K \subset (c_0, \|\cdot\|_\infty)$ un conjunto cerrado, convexo, acotado, no vacío. Entonces K es $w-$ compacto si y solamente si tiene la FPP. Es más, si K no es $w-$ compacto existe $T : K \to K$ contractivo que no tiene punto fijo.

Esbozo de la demostración: Un lado se sigue de Maurey. Sea K (cca) no w-compacto. Por lo anterior existe $(y_n) \subset K$ asintóticamente isométrica a $(\xi_n.)$ Sea $w_n = y_n - y_{n-1}$. Entonces $y_n = w_1 + ... + w_n$. Sea

$$K_0 \quad = \quad \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n w_n : 1 = t_1 \geq t_2 \geq ...0 \right\}$$

Para $u = (u_n) \in K$ sea $u^* = (u_n^*)$ donde (u_n^*) es un rearreglo decreciente de $(|u_1|, |u_2|, \ldots)$ y si $u \in c_0^{\downarrow}$ y $k \in \mathbb{N}$, sea $\widetilde{u}_k = u_k^* \wedge 1$.
Definimos $S : K \to K_0 \subset K$ como:

$$\begin{aligned} S(u) &= \frac{1}{2}(w_1 + \widetilde{u}_1 w_2 + \widetilde{u}_2 w_3 \ldots) + \\ &\quad + \frac{1}{4}(w_1 + w_2 + \widetilde{u}_1 w_3 + \ldots) + \\ &\quad + \frac{1}{8}(w_1 + w_2 + w_3 + \widetilde{u}_1 w_4 + \ldots) + \ldots \end{aligned}$$

Del hecho que (w_n) es asintóticamente isométrica a la base canónica de c_0 se obtiene que para $u \neq v$, $u, v \in K_0$

$$\|S(u) - S(v)\|_\infty < \max_m |\widetilde{u}_m - \widetilde{v}_m| \leq \|u - v\|_\infty .$$

El que S no tiene punto fijo, se basa en el siguiente lema, procediendo después, como es costumbre, por contradicción.

En el transcurso de la demostración de que (y_n) es asintóticamente isométrica a (ξ_n) , se demuestra lo siguiente:

Lema: Si $t = (t_n) \in c_{00}$ y $\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} t_k w_k$, entonces $\sigma = \sum_i \sigma_i e_i$ donde $\sigma_i = \sum_k t_k w_i^k$ y se tiene que

$$\max_{N_{M(n-1)} < i \leq N_{M(n)}} |\sigma_i| \geq |t_n| - \frac{\delta}{4^{n-2}} \|t\|_{\infty} .$$

Observación:

¡La prueba del teorema anterior no vale para c!

¡De hecho el teorema anterior es falso para c!, es decir existe $K \subset c$ cerrado, convexo, acotado, no $w-$ compacto que tiene la FPP.
Para probarlo los autores se basaron en la hiperconvexidad de los "intervalos" en l_∞, el teorema de Soardi de 1979 y en un resultado de Aronzajn y Panitchpakdi de 1956.

Definición: Un espacio métrico (M, ρ) es hiperconvexo si para toda familia $(B(x_\alpha, r_\alpha))_{\alpha \in A}$ de bolas cerradas tal que para toda $\alpha, \beta \in A$, $\rho(x_\alpha, x_\beta) \leq r_\alpha + r_\beta$, se tiene que $\bigcap_{\alpha \in A} B(x_\alpha, r_\alpha) \neq \varnothing$.
Teorema (Soardi): Todo espacio (M, ρ) hiperconvexo y acotado tiene la FPP para aplicaciones no expansivas.
Teorema (Aronzajn y Panitchpakdi): Si (M, ρ) es hiperconvexo, $H \subset M$ y existe una retracción no expansiva $R : M \to H$ sobre H, entonces H es hiperconvexo.

Teorema: Existe un conjunto W no $w-$compacto en $\left(c, \|\cdot\|_\infty\right)$ que es cerrado, acotado y convexo tal que para toda aplicación $T : W \rightarrow W$ no expansiva, T tiene un punto fijo.
Demostración: Sea $W = \{y = (y_n) \in c : 1 \geq y_1 \geq y_2 \geq ... \geq 0\} \subset c$. Claramente W es convexo, acotado y cerrado. Si suponemos que es w-compacto, consideremos para $n \in \mathbb{N}$ $\sigma_n = \left(1, 1, ..., \underset{n}{1}, 0, 0, ...\right) \in W$ y la funcional $\lambda : c \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\lambda\left(y\right) = \lim_n y_n$ que evidentemente es continua. Si suponemos que $\left(\sigma_{n_j}\right)_j$ es una subsucesión w-convergente a algún elemento $\xi \in c$, entonces $0 = \lambda\left(\sigma_{n_j}\right) \rightarrow_j \lambda\left(\xi\right) = 0$, pero como $\left(\sigma_{n_j}\right)_j$ converge coordenada a coordenada tendríamos que $\xi = (1, 1, 1, 1, ...)$ y que $\lambda\left(\xi\right) = 1$ que es una contradicción.

Sea $L = \{(y_n) \in l_\infty : 0 \leq y_n \leq 1 \text{ para } n \in \mathbb{N}\}$ el intervalo de orden $[\mathbf{0}, \mathbf{1}] \in l_\infty$ donde $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots)$, , $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots)$ que se sabe que es hiperconvexo. Sea $S : L \to W$ dado por

$$S(y) = (y_1, y_1 \wedge y_2, \ldots, y_1 \wedge y_2 \wedge y_3 \wedge \ldots \wedge y_k, \ldots)$$

para cada $y \in L$. Como para cada $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ se tiene que $|a_1 \wedge a_2 - b_1 \wedge b_2| \leq |a_1 - b_1| \vee |a_2 - b_2|$, resulta que si $x, y \in L$,

$$\|Sx - Sy\|_\infty \leq \|x - y\|_\infty$$

y además, si $w \in W$, $Sw = w$. Así S es una retracción no espansiva de L sobre W y consecuentemente W es hiperconvexo, acotado y tiene la FPP.

Usando variaciones sobre el mismo tema, los autores encuentran más familias de conjuntos cerrados, acotados convexos no $w-$ compactos con la FPP. Aún más, obtienen el siguiente resultado.

Teorema: Existe una sucesión decreciente (W_n) de conjuntos convexos, acotados, cerrados no $w-$ compactos en $(c, \|\cdot\|_\infty)$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, W_{2k-1} tiene la FPP pero W_{2k} no la tiene.
Demostración: Sea $\alpha_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{k+1}$ y

$$W_{2k-1} = \{y : \alpha_k \geq y_1 \geq y_2 \geq ... \geq 0\}, W_{2k} = \{y \in W_{2k-1} : \lambda(y) \leq \alpha_{k+1}\}$$

.
Es claro que W_{2k-1} tiene la FPP pues estos conjuntos son análogos a W. Sea $T : W_{2k} \longrightarrow W_{2k}$ dado por $Ty = (\alpha_k, y_1, y_2, ...)$. T es no expansivo, pero si $Ty = y$, entonces $y = (\alpha_k, \alpha_k, ...)$ y $\lambda(y) = \alpha_k > \alpha_{k+1}$ y entonces $y \notin W_{2k}$.

Definición: Sea $x = (x_n)_n \in c_0$. Definimos $\|x\|^{\sim} = \sup_j |x_1 + x_j|$. Entonces $\|\cdot\|^{\sim}$ es una norma equivalente a la norma $\|\cdot\|_\infty$ en c_0 y la aplicación $U : (c, \|\cdot\|_\infty) \to (c_0, \|\cdot\|^{\sim})$ dada por

$$U(y) = (\lambda(y), y_1 - \lambda(y), y_2 - \lambda(y), \ldots)$$

donde $y = (y_n) \in c$ y $\lambda(y) = \lim_n y_n$, es una isometría lineal suprayectiva. Obtenemos entonces el siguiente teorema.

Teorema: Si $W \subset c$ es el conjunto convexo, cerrado, acotado, no $w-$compacto con la *FPP* construido para c , entonces $U(W) \subset (c_0, \|\cdot\|^{\sim})$ es un conjunto convexo, cerrado, acotado, no $w-$compacto con la *FPP*.

Bibliografía

1. N. Aronszajn, P. Panitchpakdi, *Extension of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces.* Pacific. J. Math. 6 (1956), 405-439.
2. J.M. Borwein, B. Sims, *Nonexpansive mappings on Banach lattices and related topics.* Houston J. Math. 10 (1984), 339-356.
3. T. Domínguez Benavides, M.A. Japón Pineda, S. Prus, *Weak compactness and fixed point property for affine mapings.* J. Functional Analysis 209 (2004), 1–15.
4. P.N. Dowling, C.J. Lennard, B. Turett: *Characterization of weakly compact sets and new fixed point free maps in* c_0. Studia Math 154 (2003), 277-293.

Bibliografía

5. P.N. Dowling, C.J. Lennard, B. Turett*: Weak compactness is equivalent to the fixed point property in c_0*. Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004), 1659-1666.

6. C. Lennard, T. Gallagher, R. Popescu: *Weak compactness is not equivalent to the fixed point property in c*. J. Math. Anal. Appl. 431 (2015), 471- 481.

7. E. Llorens Fuster, B. Sims, *The fixed point property in c_0.* Canad, Math . Bull 4 (1998), 413-422.

8. P. Soardi: *Existence of fixed points of nonexpansive pammpings in certain Banach lattices.* Proc. Amer. Math. Soc. 73 (1979), 25-29.